



# SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTEMY



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

**[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz)**

© Institut biostatistiky a analýz

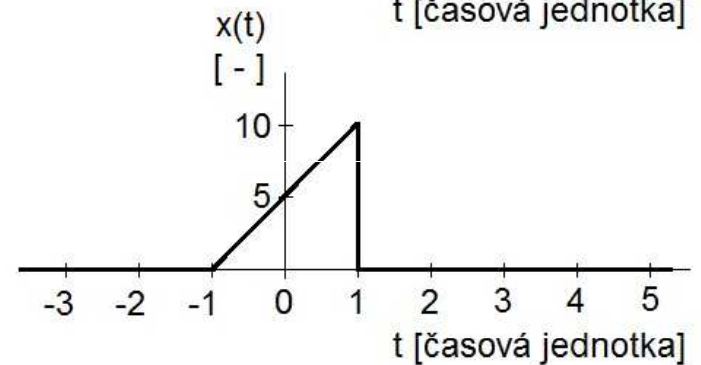
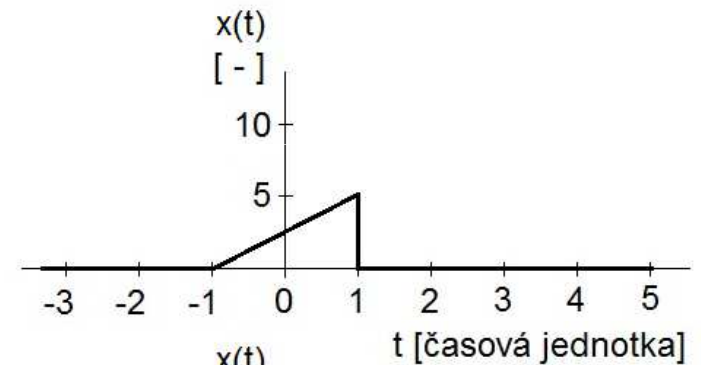
# III. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY SIGNÁLŮ SPOJITÝCH V ČASE

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ✓ násobení konstantou

$$x(t) \sim A \cdot x(t),$$



$$A=2$$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde  $m$  je kladné reálné číslo

$m > 1$  – časová komprese;

$m < 1$  – časová expanze

$m = 1$  – nic se neděje

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ změna časového měřítka

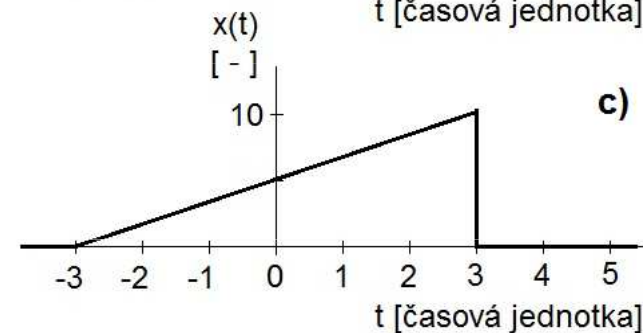
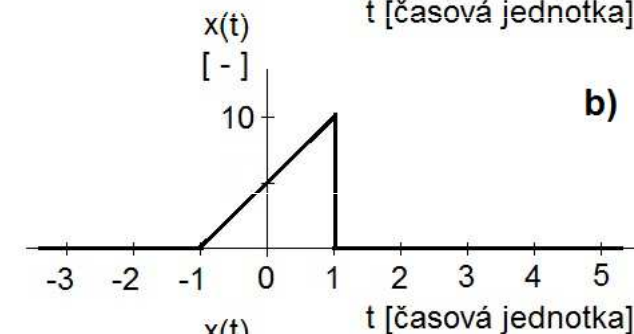
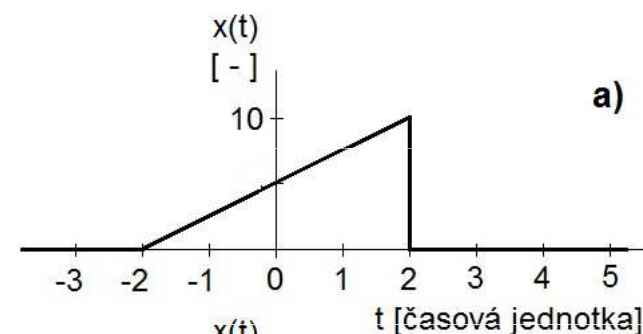
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde  $m$  je kladné reálné číslo

$m > 1$  – časová komprese;

$m < 1$  – časová expanze

$m = 1$  – nic se neděje



a) originál; b)  $m=2$ ; c)  $m=2/3$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$  je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0 - ?$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

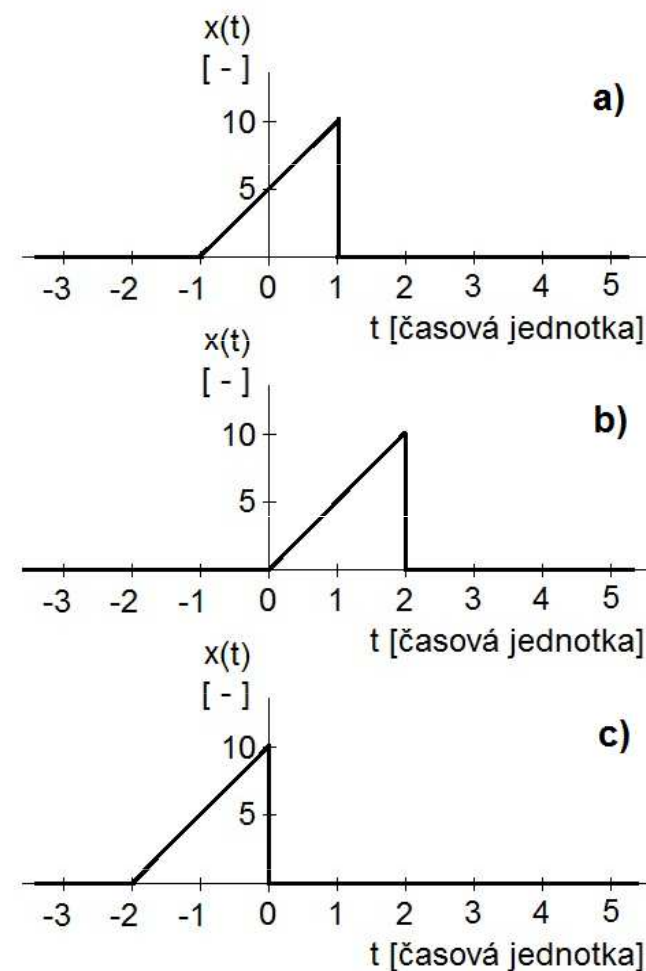
## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ✓ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$  je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$  – zpoždění



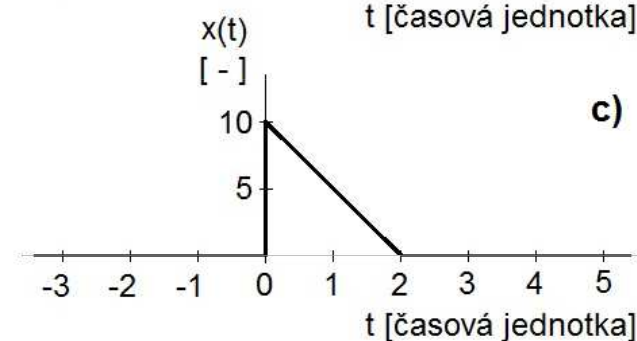
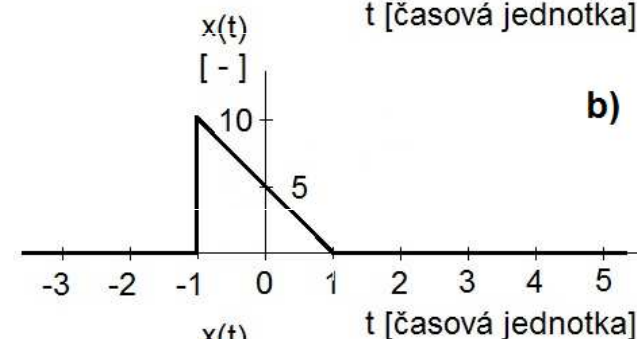
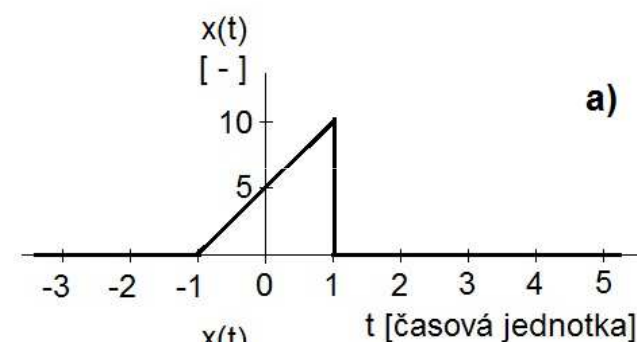
a) originál  $x(t)$ ; b) funkce  $x(t-1)$ ; c) funkce  $x(t+1)$ ;

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ obrácení (inverze) časové osy

$$x(t) \sim x(-t) ,$$



a) originál  $x(t)$ ; b) funkce  $x(-t)$ ; c) funkce  $x(-t-1)$



# KONVOLUCE

# DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  téhož argumentu definovaný (v případě spojitých funkcí) integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau,$$

kde funkce  $x_2(t)$  se často nazývá ***konvoluční jádro***.

# VLASTNOSTI

Komutativní zákon:

$$\begin{aligned}x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau \quad \approx X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\end{aligned}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau = \left. \begin{array}{l} u = t - \tau \\ \tau = t - u \\ d\tau = -du \end{array} \right| = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x_2(u) \cdot x_1(t - u) \cdot du = x_2(t) * x_1(t)\end{aligned}$$

# VLASTNOSTI

Distributivní zákon:

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

Asociativní zákon:

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

# VLASTNOSTI

## Zákon o posunu v čase

Je – li

$$x_1(t) * x_2(t) = c(t),$$

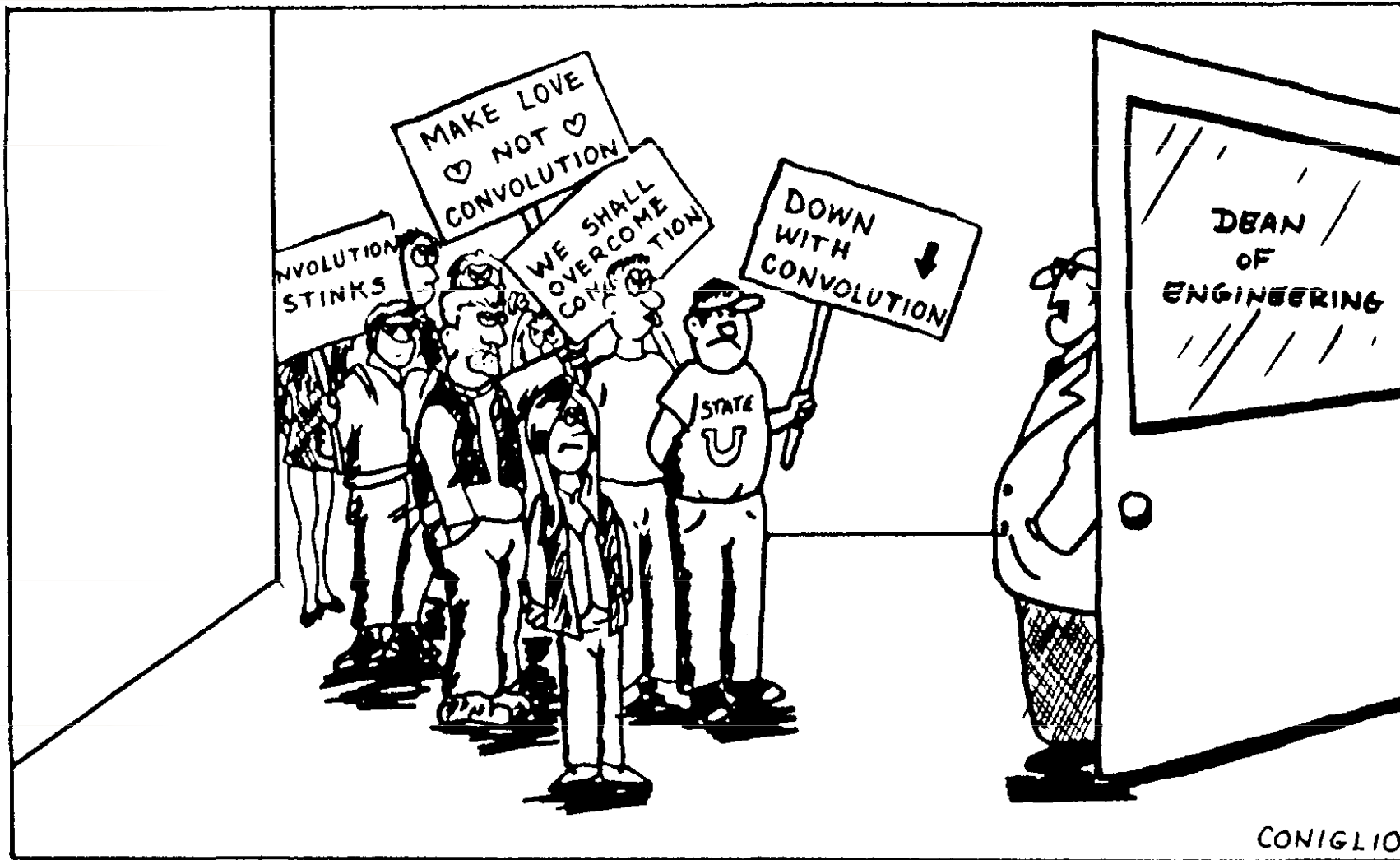
pak

$$x_1(t) * x_2(t - T) = c(t - T),$$

$$x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T)$$

a

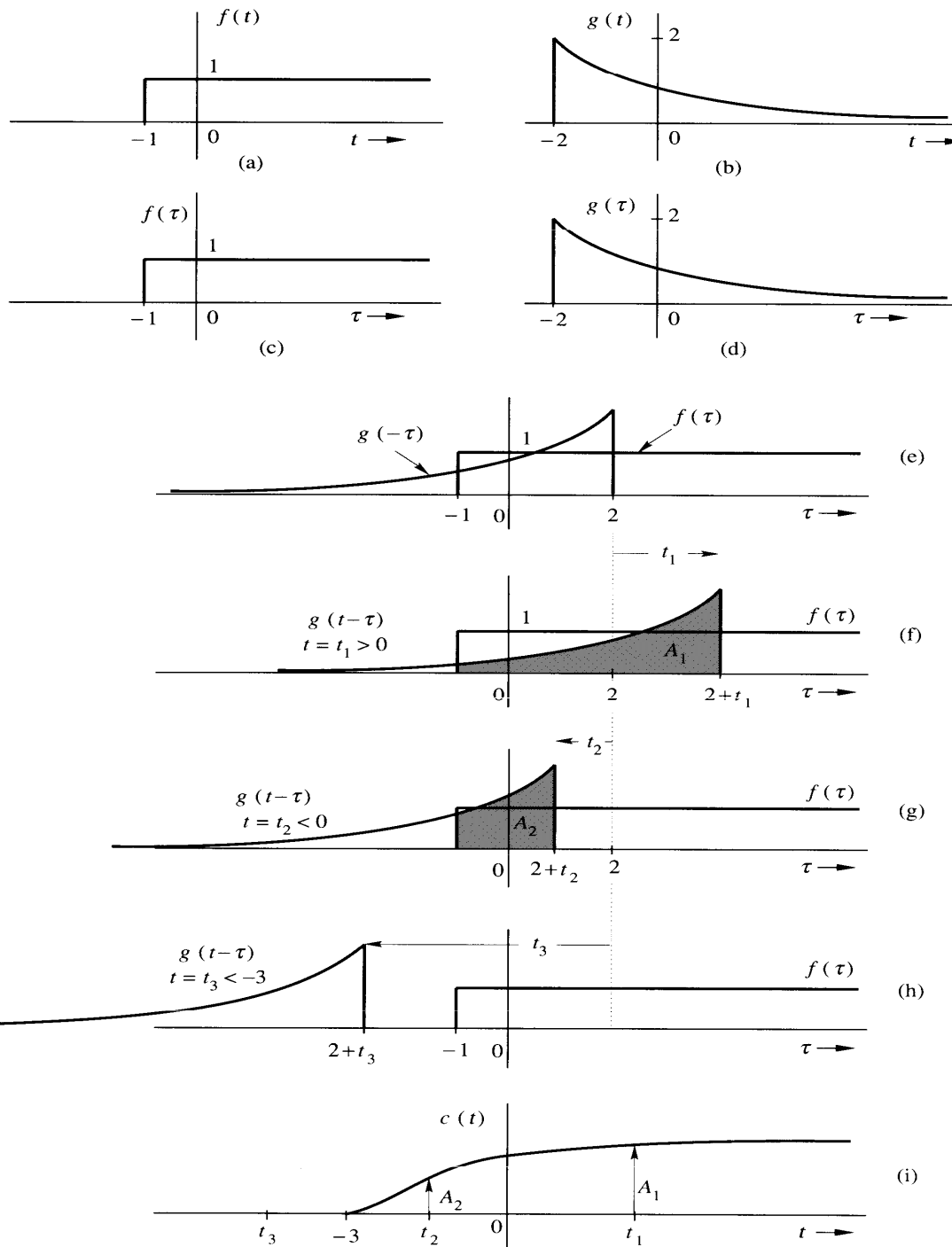
$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$$



Convolution: its bark is worse than its bite!

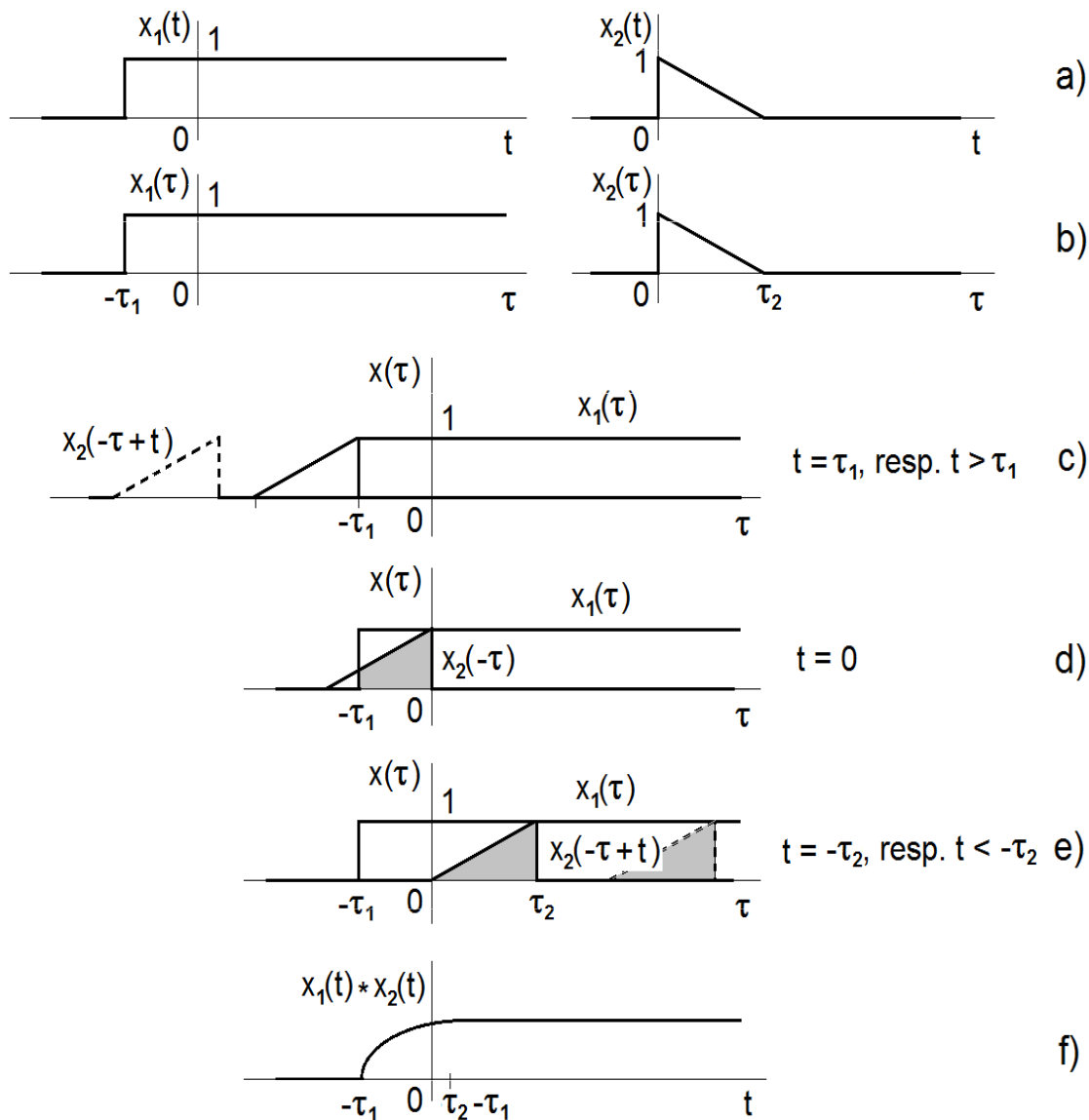
# KONVOLUCE

## GEOMETRICKÝ VÝZNAM



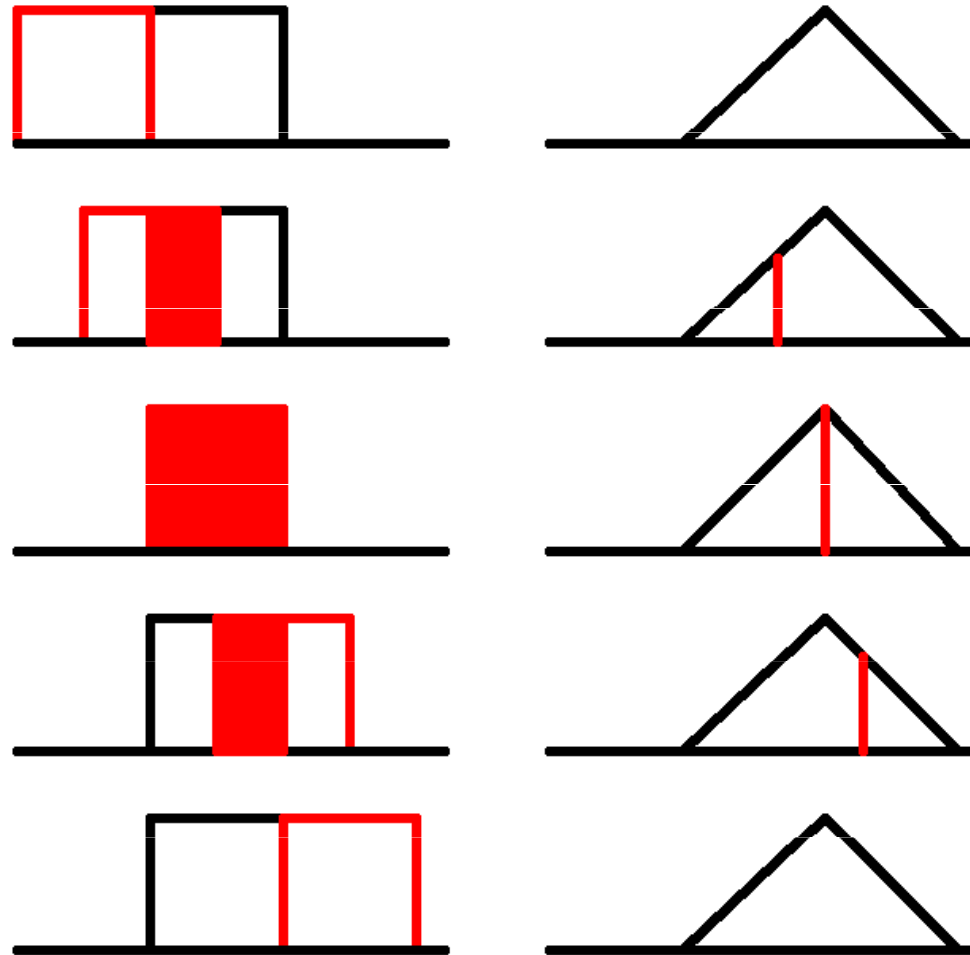
# KONVOLUCE

## GEOMETRICKÝ VÝZNAM



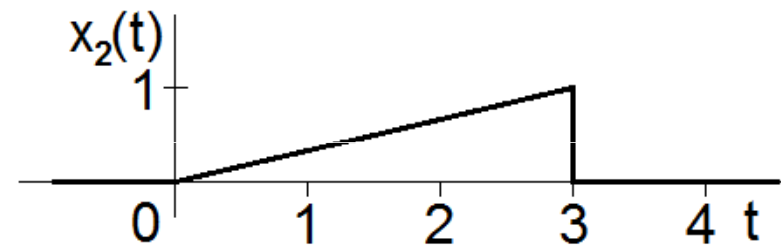
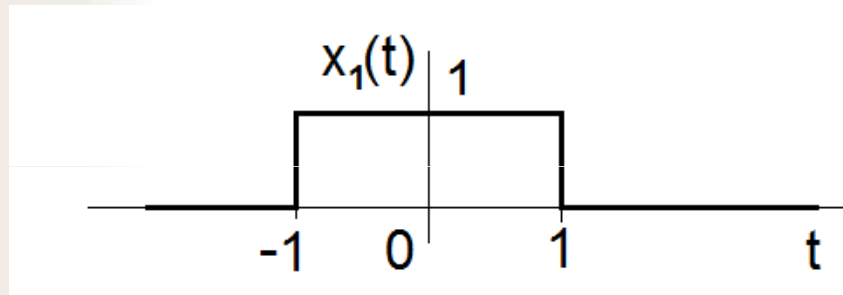


# KONVOLUCE

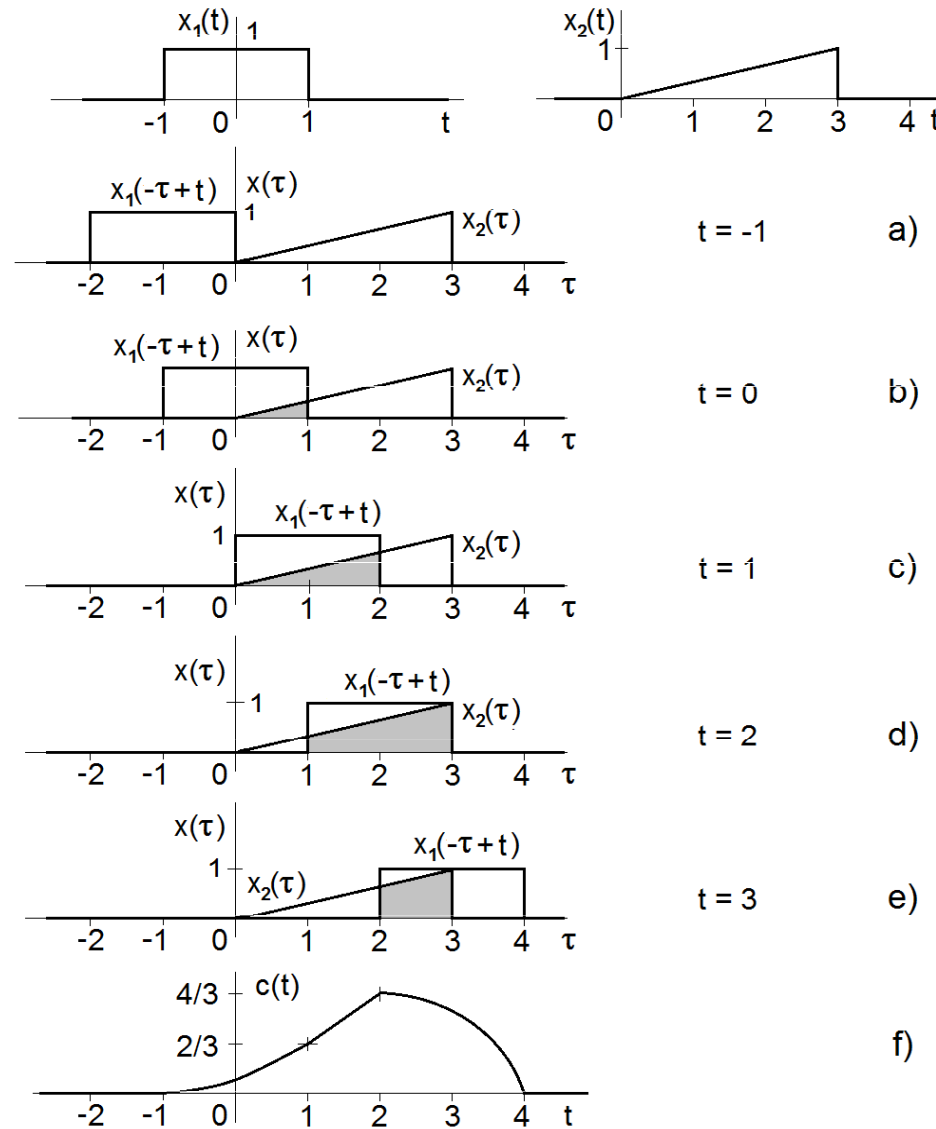


# PŘÍKLAD

Určete konvoluci  $c(t)$  funkcí  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  podle obrázku.



# PŘÍKLAD



# PŘÍKLAD

- ☑  $t < -1$  – součin obou funkcí je v tomto případě nulový, tedy i plocha vymezená tímto součinem a konvoluce je rovna nule (obr. a);
- ☑  $t \in \langle -1, 1 \rangle$  – plocha součinu je vymezena průběhem funkce  $x_2(\tau)$  v intervalu od  $\tau = 0$  a polohou horní, tj. sestupné hrany funkce  $x_1(-\tau + t)$ , určené hodnotou  $t + 1$  (obr. b,c); hodnota konvolučního integrálu je

$$c(t)_{-1,1} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{t+1} \frac{1 \cdot \tau}{3} \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{6};$$

- ☑  $t \in \langle 1, 2 \rangle$  – v tomto intervalu je plocha součinu ohraničená opět funkcí  $x_2(\tau)$ , tentokrát a v daném konkrétním případě v intervalu od  $t - 1$  do  $t + 1$  (obr. c,d)

$$c(t)_{1,2} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} \frac{1 \cdot \tau}{3} \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^{t+1} = \frac{(t+1)^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{2t}{3};$$

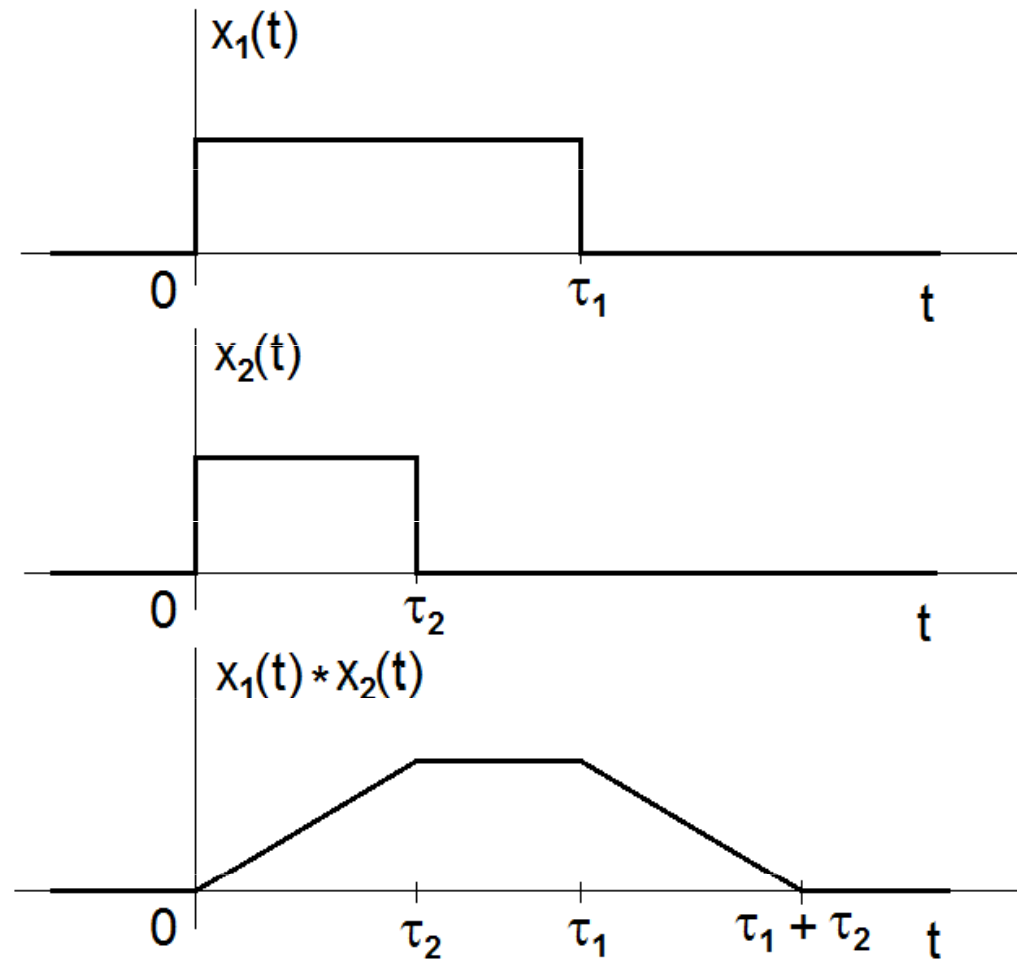
# PŘÍKLAD

- ☑  $t \in \langle 2, 4 \rangle$  – plocha součinu je nenulová v intervalu od vzestupné hrany funkce  $x_1(-\tau+t)$ , která je na pozici  $t - 1$ , do sestupné hrany funkce  $x_2(\tau)$ , tj.  $\tau = 3$  (obr.2.15e), tedy platí

$$c(t)_{2,4} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^3 \frac{1 \cdot \tau}{3} \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^3 = \frac{3^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{-(t^2 - 2t - 8)}{6};$$

- ☑  $t > 4$  – součin obou funkcí je opět nulový, proto i konvoluční integrál.

# ŠÍŘKOVÁ VLASTNOST KONVOLUCE

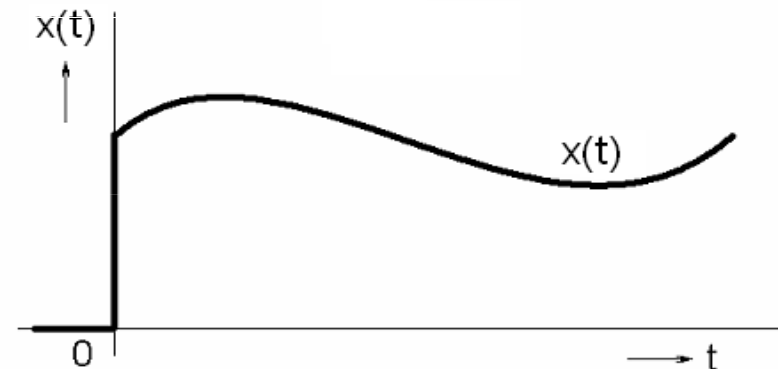


# KAUZALITA

**Kauzální** je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku  $t_0$  závisí pouze na průběhu vstupního signálu  $x(t)$  pro  $t \leq t_0$ . Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupního signálu. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme **nekauzální**, příp. **anticipativní**.

## **Zprostředkovaně:**

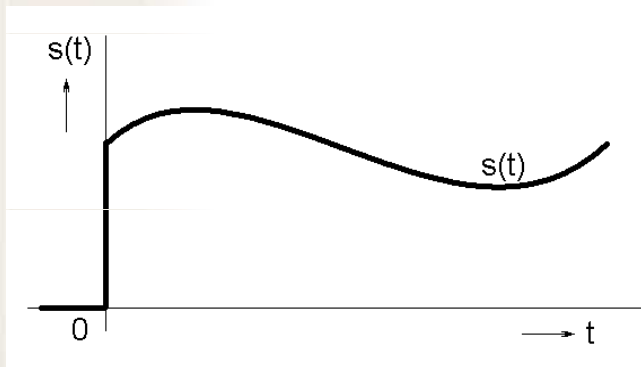
jako kauzální signály označujeme takové signály, pro které platí  $x(t) = 0$  pro  $t < 0$ .



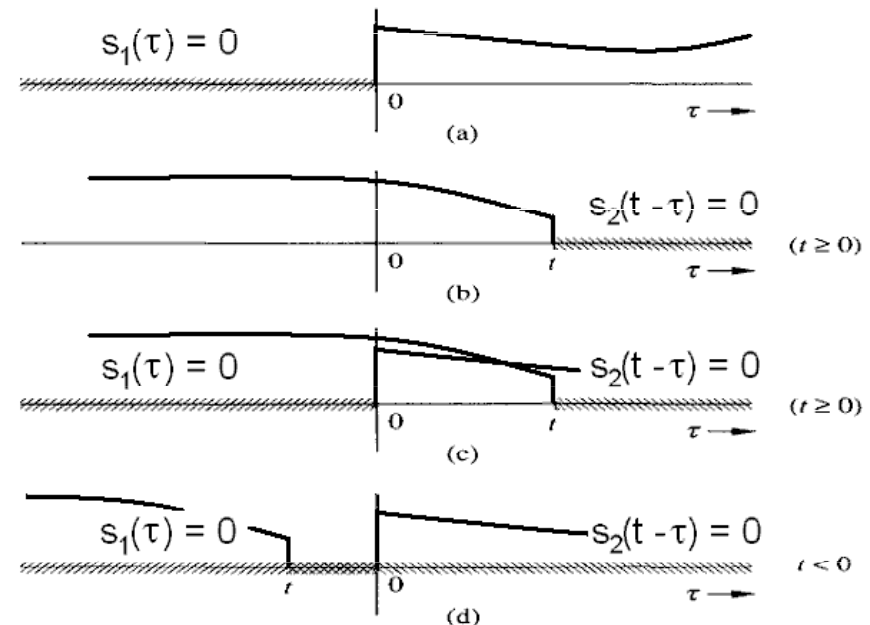
# KAUZALITA + KONVOLUCE

## Konvoluce kauzálních signálů:

Pro kauzální signály platí  $s(t) = 0$  pro  $t < 0$



$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) \cdot d\tau$$





# KONVOLUCE

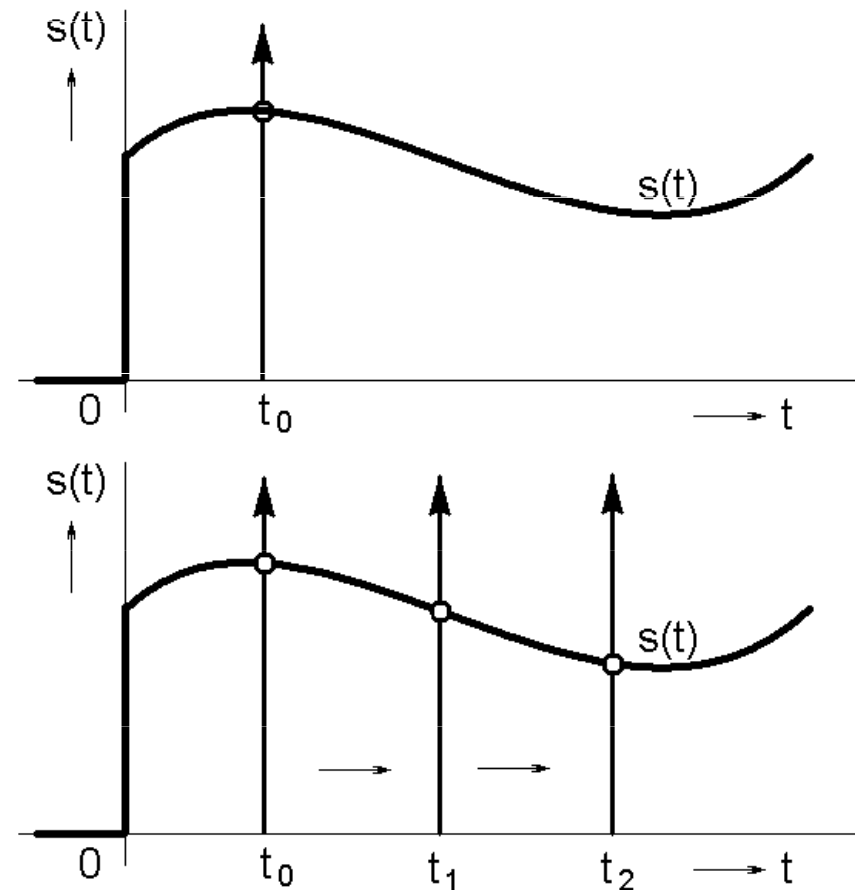
## signálu $s$ jednotkovým impulsem

definice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$$

konvoluce:

$$s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = s(t)$$



# KORELACE

# DEFINICE

**ABZ slovník  
cizích slov**

**Korelace** = vzájemný vztah, souvztažnost mezi znaky, veličinami, ději

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

lātiō - nesení, poskytování

relātiō – nesení zpět, odnášení, opakování;  
zpráva; vztah, poměr

correlātiō – vzájemný vztah, souvislost

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Pokud se mezi dvěma procesy ukáže korelace, je pravděpodobné, že na sobě závisejí, nelze z toho však ještě usoudit, že by jeden z nich musel být [příčinou](#) a druhý [následkem](#). To samotná korelace nedovoluje rozhodnout.

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

**Kauzalita** - příčinná souvislost či závislost.

Jeden jev vyvolává druhý, popřípadě se oba vzájemně podporují (synergie)

# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami  **$x$**  a  **$y$** .



# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami **x** a **y**.

# JAKÁ MÁME DATA?



# JAKÁ MÁME DATA?



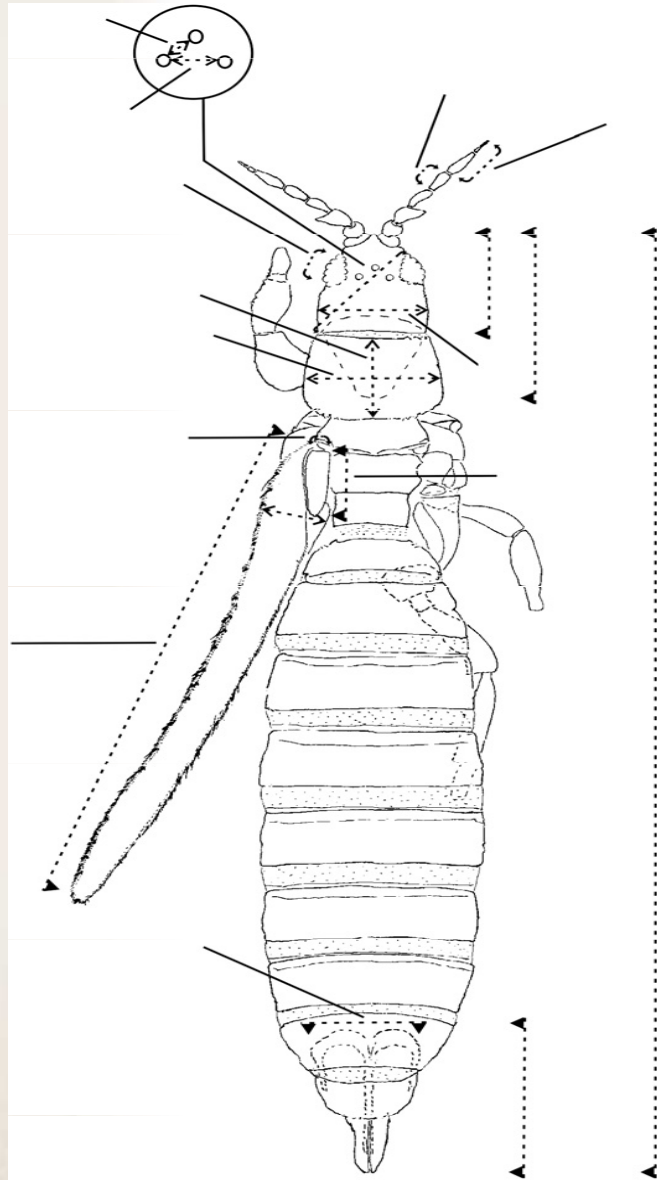
# JAKÁ MÁME DATA?



# JAKÁ MÁME DATA?



# JAKÁ MÁME DATA?



1. šířka hlavy
2. délka hlavy (dorsální strana)
3. délka hlavy(ventrální strana)
4. délka klavu
5. šířka klavu
6. délka předního křídla
7. basální šířka předního křídla
8. celková délka těla (vyjma tykadel a penisu)
9. šířka pronota
10. délka pronota
11. šířka oka
12. délka kladélka
13. šířka kladélka
14. délka tykadlového článku V
15. délka tykadlového článku VI
16. vzdálenost mezi zadním párem ocelli
17. vzdálenost mezi "přední a zadní ocellou"

# JAKÁ MÁME DATA?



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

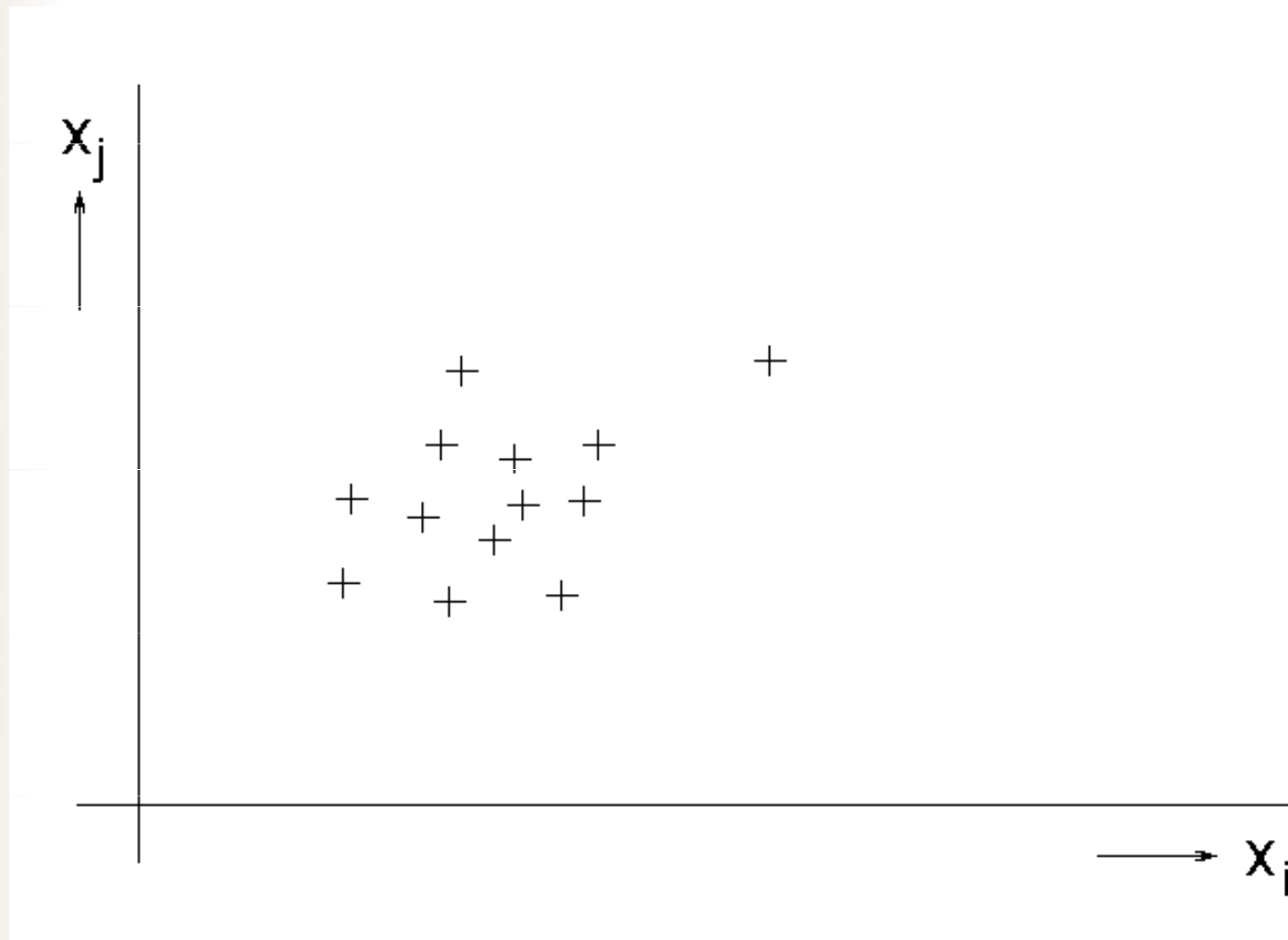
# JAKÁ MÁME DATA?



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓



# JAKÁ MÁME DATA?

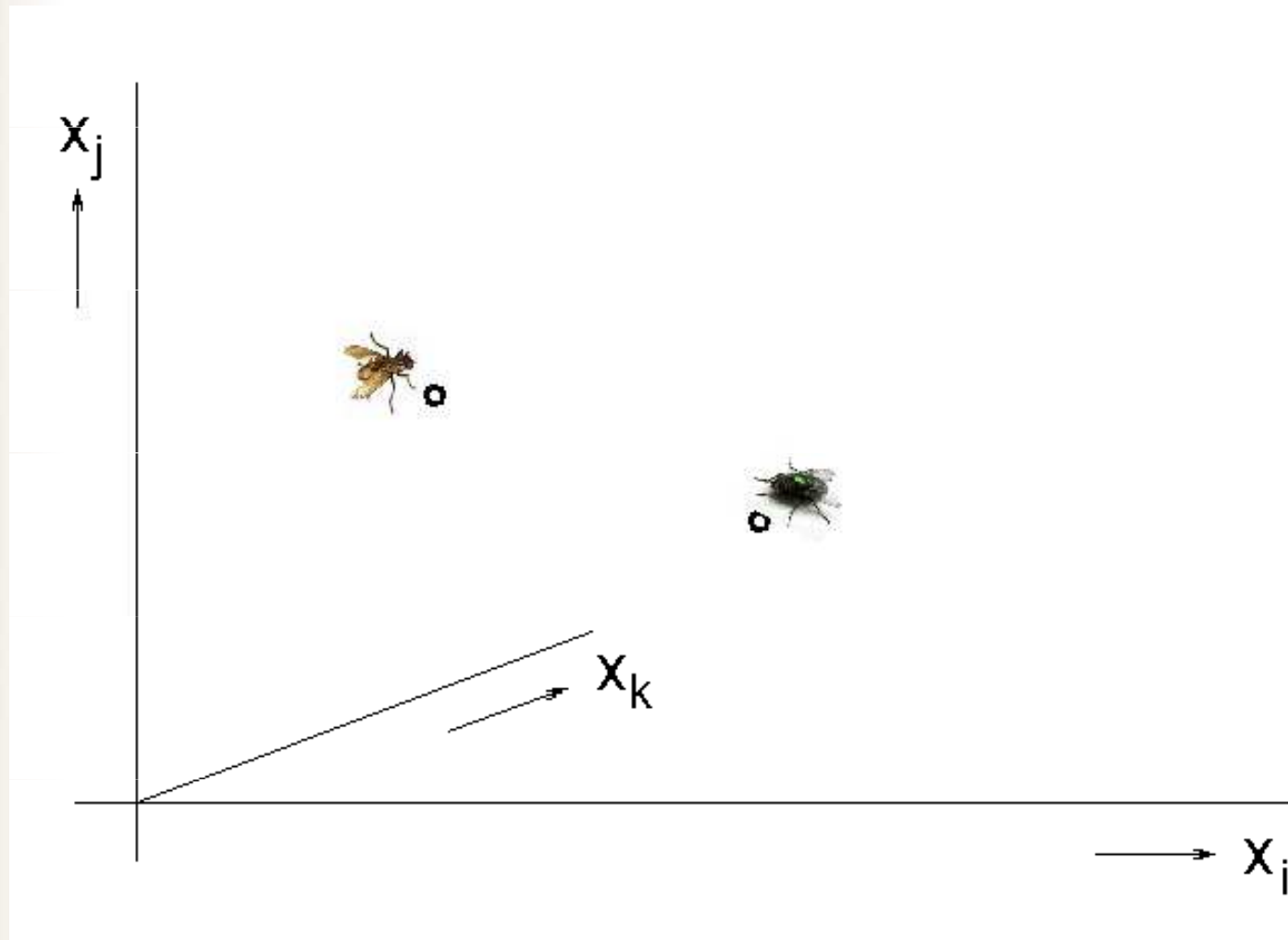


# JAKÁ MÁME DATA?



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	126,33	120,50	223,50	128,27	44,70	927,20	122,44	1702,40	255,87	196,83	61,02	255,87	127,94	28,18	60,25	29,15	14,58
2	136,43	130,75	221,70	142,12	47,37	933,66	113,69	1630,20	268,67	218,77	84,44	230,29	115,14	28,42	64,43	31,27	18,95
3	123,80	118,09	219,03	125,71	43,81	908,66	119,99	1668,35	250,76	192,89	59,49	250,76	125,38	27,62	59,04	28,57	14,28
4	138,96	132,55	245,85	141,10	49,17	1019,92	134,68	1872,64	281,46	216,51	67,12	281,46	140,73	31,00	66,27	32,07	16,03
5	128,85	117,48	217,91	125,06	43,58	941,11	119,38	1659,84	249,48	191,90	59,80	249,48	124,74	27,48	58,74	28,42	14,21
6	137,13	131,42	222,84	142,85	47,62	938,45	114,28	1638,56	270,04	219,89	84,87	231,47	115,73	28,57	64,76	31,43	19,05
7	127,59	121,70	225,74	129,55	45,15	936,47	123,66	1719,42	258,43	198,79	61,63	258,43	129,22	28,46	60,85	29,44	14,72
8	142,59	135,44	229,66	147,22	49,07	967,18	117,78	1688,72	278,31	226,62	87,47	238,55	119,28	29,44	66,74	32,39	19,63
9	128,22	122,30	226,86	130,20	45,37	904,02	124,28	1727,94	259,71	199,78	61,93	259,71	129,86	28,60	61,15	29,59	14,79
10	139,93	132,76	227,39	145,76	48,59	957,60	116,61	1672,00	275,56	224,38	87,90	236,19	118,10	29,15	66,08	32,07	19,44
11	125,06	119,29	221,27	126,99	44,25	917,93	121,22	1685,38	253,31	194,86	60,41	253,31	126,66	27,90	59,65	28,86	14,43
12	138,53	134,10	225,12	144,30	48,10	948,02	115,44	1655,28	272,80	222,14	85,74	233,83	116,91	28,86	65,42	31,75	19,24
13	128,73	122,79	227,75	130,71	45,55	944,82	124,77	1734,75	260,73	200,56	62,18	260,73	130,37	28,72	61,39	29,71	14,85
14	141,33	136,65	231,71	148,53	49,51	975,79	118,83	1703,77	280,79	228,64	88,25	240,68	120,34	29,71	67,33	32,68	19,80
15	142,03	136,11	230,80	147,95	49,32	971,96	118,36	1697,08	279,69	227,75	86,60	239,73	119,87	29,59	67,07	32,55	19,73
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

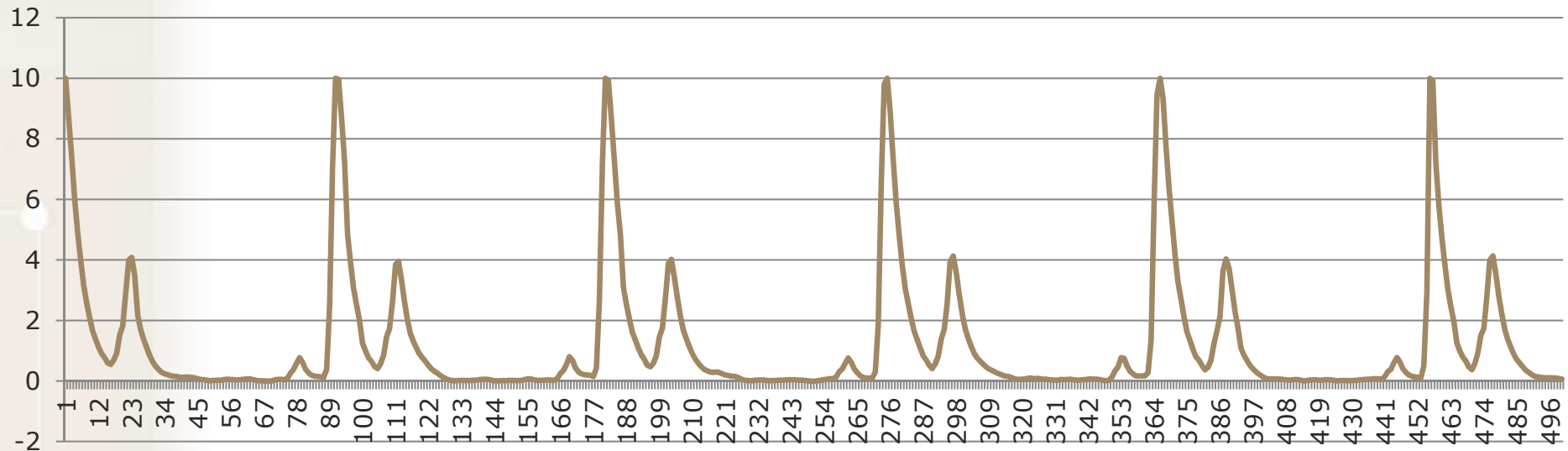
# JAKÁ MÁME DATA?



# JAKÁ MÁME DATA?

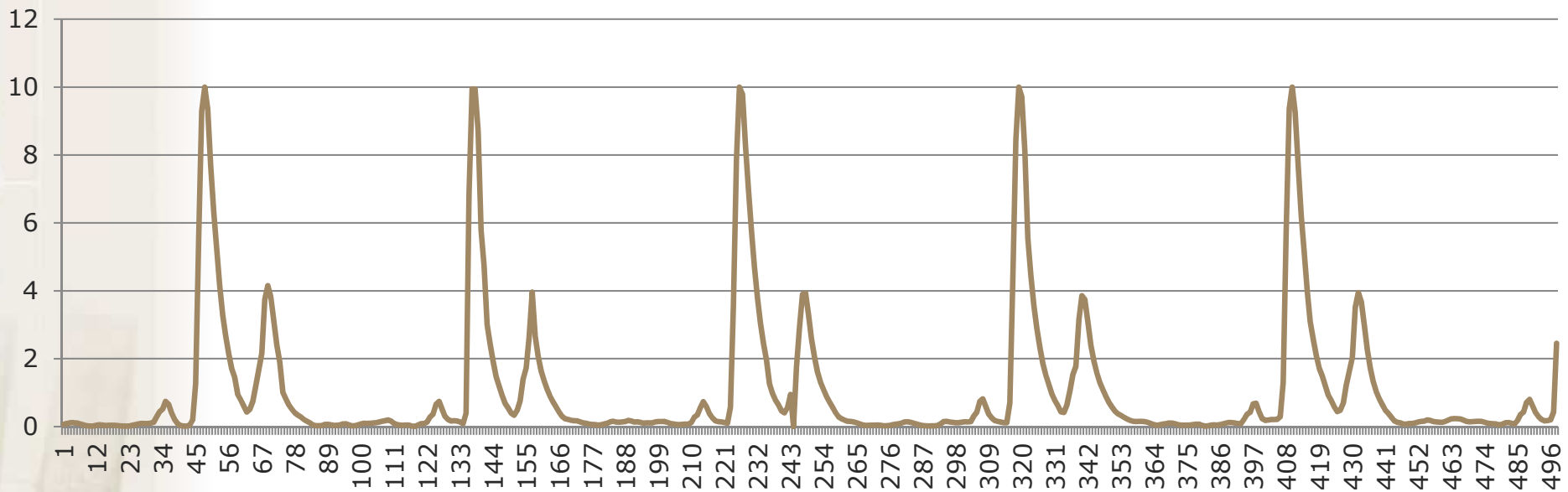
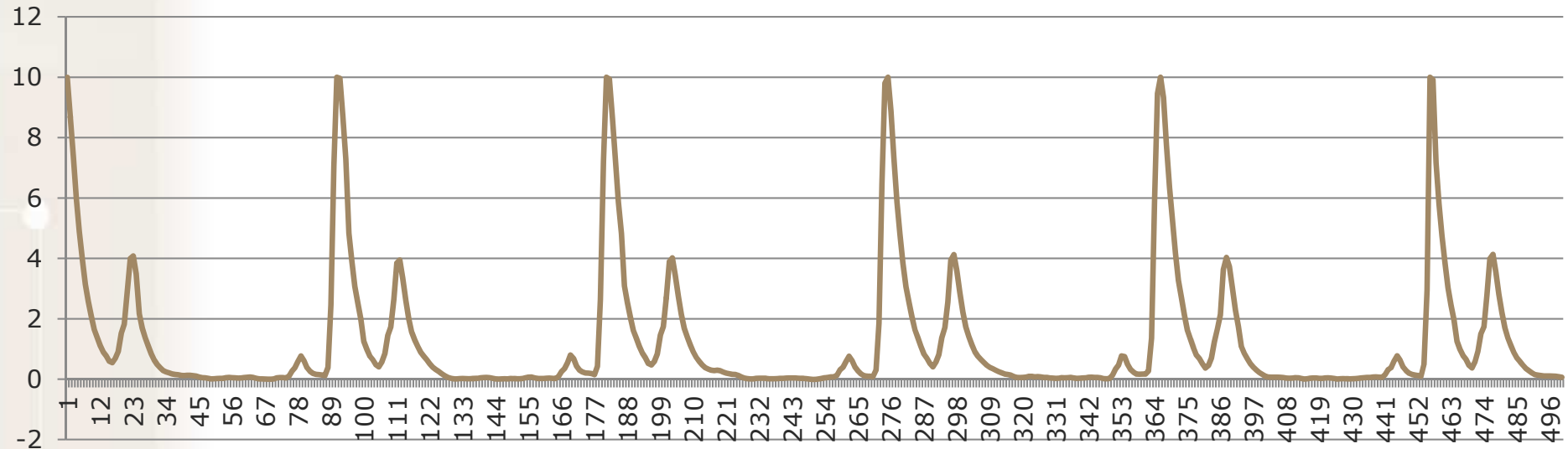
- ☑ data jsou **statická**, nezávisí na čase, ani na žádné jiné veličině - nezávisejí na pořadí, nejsou uspořádaná, ...;

# JAKÁ MÁME DATA?



9.99512 8.68195 7.35687 5.98145 4.88892 3.96118 3.14331 2.57416  
2.0697 1.64459 1.37085 1.10779 0.895691 0.767517 0.596313  
0.546875 0.689392 0.912476 1.52466 1.81915 2.88361 3.99567  
4.08142 3.48328 2.7713 2.16492 1.68976 1.37268 1.0968 0.837708  
0.635376 0.487366 0.379028 0.286255 0.238647 0.209656 0.171204  
0.157166 0.145264 0.122375 0.121155 0.1297 0.128479 0.116577  
0.101624 0.0704956 0.0476074 0.0439453 0.0259399 0.00793457  
0.0131226 0.0228882 0.0244141 0.0265503 0.0476074 0.055542  
0.0488281 0.0442505 ... ..

# JAKÁ MÁME DATA?



# JAKÁ MÁME DATA?

- ☑ data jsou **statická**, nezávisí na čase, ani na žádné jiné veličině - nezávisejí na pořadí, nejsou uspořádaná, ...;
- ☑ data jsou **dynamická**, časově závislá nebo závislá na nějaké jiné veličině, např. délkové míře, jsou uspořádaná, ...;

# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami  **$x$**  a  **$y$** .

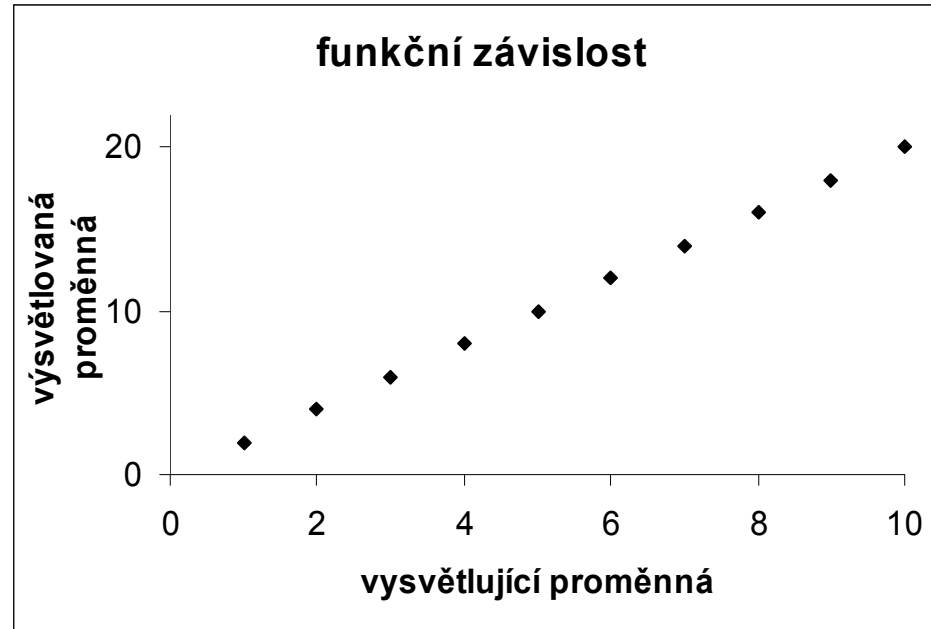


# ZÁVISLOST

☑ funkční, deterministická

$$y = f(x)$$

(dané hodnotě  $x$  odpovídá jen určitá hodnota  $y$ )



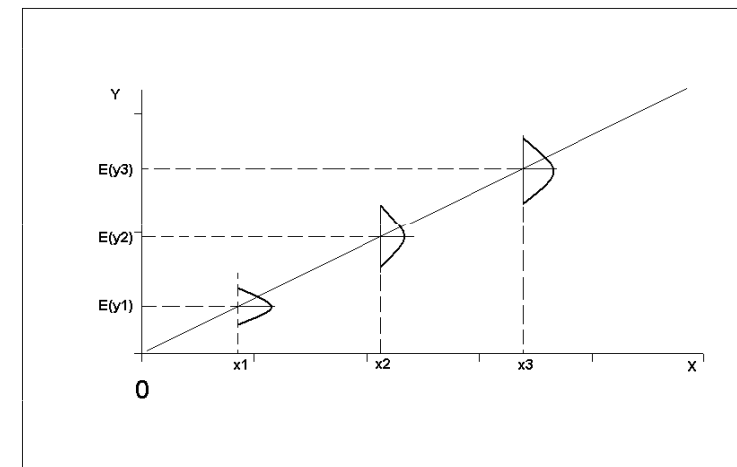
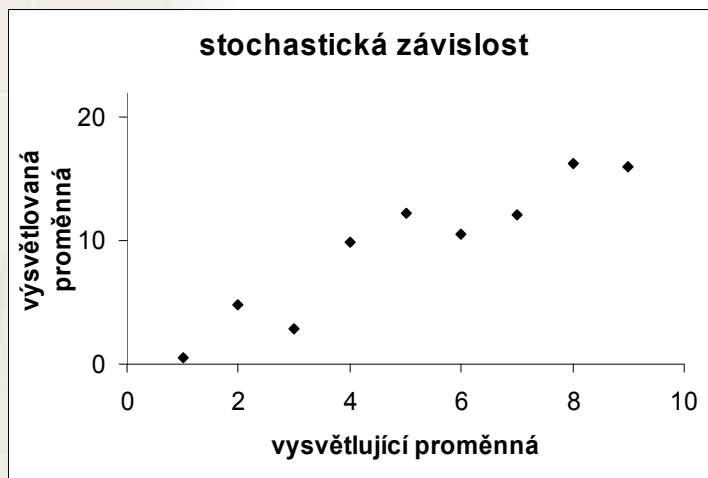
# ZÁVISLOST

## ☑ stochastická, nedeterministická, volná

- závisle proměnná, případně i nezávisle proměnná jsou náhodné veličiny.
- určité hodnotě  $x$  přísluší možné hodnoty  $y$  vybrané z určitého rozdělení;
- střední hodnota rozdělení  $y$  je funkcí  $x$

$$E(y) = f(x)$$

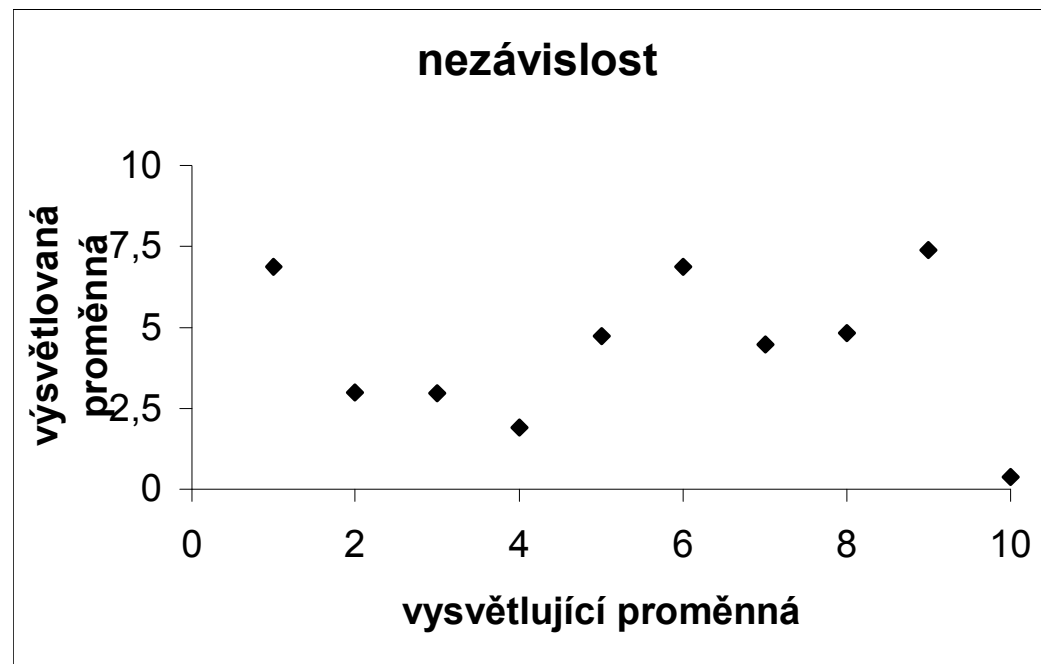
- střední hodnota náhodné veličiny  $y$  je funkcí střední hodnoty náhodné veličiny  $x$   $E(y) = f[E(x)]$



# ZÁVISLOST

## ☑ nezávislost

střední hodnota  $y$  nezávisí na  $x$   $E(y) \neq f(x)$   
(přísně funkční závislost v reálném světě  
neexistuje)



# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami  **$x$**  a  **$y$** .

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí  $y = kx$ , nebo záporný ( $y = -kx$ ).

# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami  **$x$**  a  **$y$** .

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí  $y = kx$ , nebo záporný ( $y = -kx$ ).

Míru korelace v tom případě vyjadřujeme **korelačním koeficientem**.

# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný **lineární** vztah mezi znaky či veličinami  $X$  a  $Y$ .

Tento vztah může být kladný, pokud (přibližně) platí  $y = kx$ , nebo záporný ( $y = -kx$ ).

Míru korelace v tom případě vyjadřujeme **korelačním koeficientem**.

Hledáme, zda existuje či neexistuje **lineární** vztah mezi veličinami  $X$  a  $Y$ , reprezentované hodnotami  $x_i, y_i$ , příp. hledáme míru těsnosti tohoto vztahu

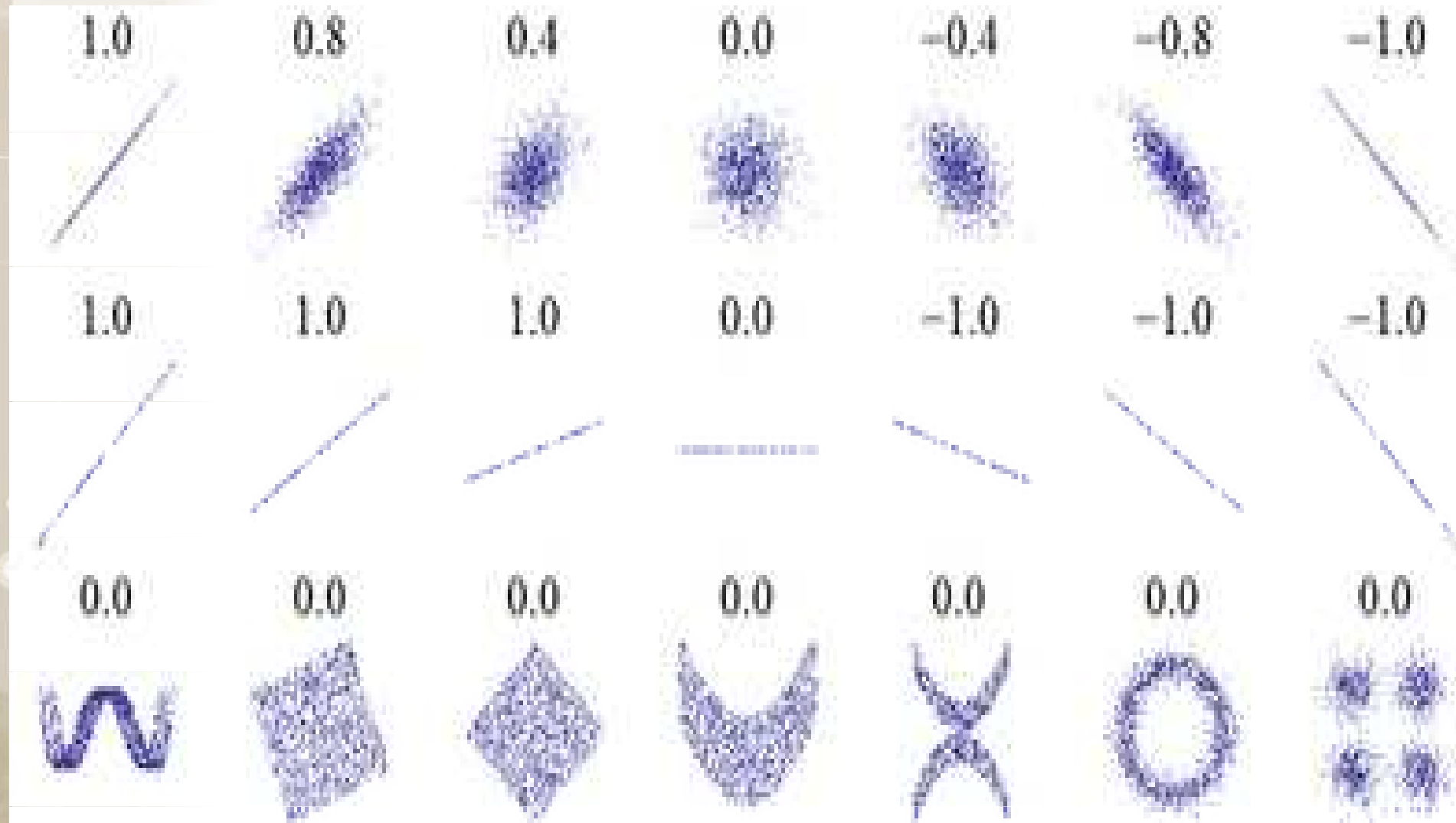
# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y},$$

protože  $\mu_X = E(X)$ ,  $\sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$  a podobně i pro  $Y$  a protože  $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$ , je také

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)} \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)}}.$$

# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT





# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

- ☑ nabývá hodnot od  $-1$  do  $+1$ , které značí perfektní lineární vztah (záporný nebo kladný).
  - ➔ v případě kladné korelace hodnoty obou proměnných zároveň stoupají.
  - ➔ v případě záporné korelace hodnota jedné proměnné stoupá a druhé klesá.
  - ➔ v případě neexistence lineárního vztahu  $r = 0$ .
- ☑ je nezávislý na jednotkách původních proměnných, je bezrozměrný.
- ☑ při změně pořadí proměnných se výše korelačního koeficientu nemění.
- ☑ korelační koeficient je platný pouze v rozmezí daném použitými daty.
- ☑ korelační koeficient výrazně odlišný od nuly není důkazem funkčního vztahu proměnných

# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Správná interpretace Pearsonova korelačního koeficientu předpokládá, že obě proměnné jsou náhodné veličiny a mají **společné dvourozměrné normální rozdělení**.

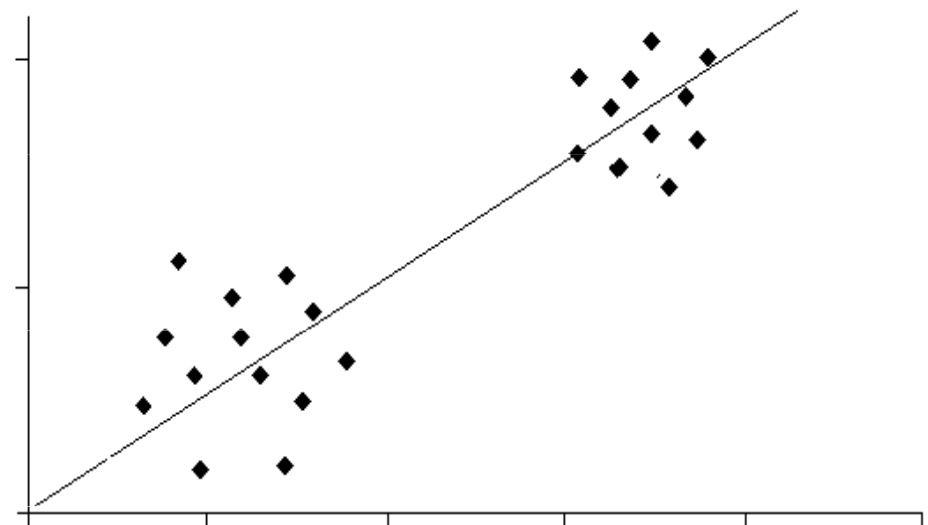
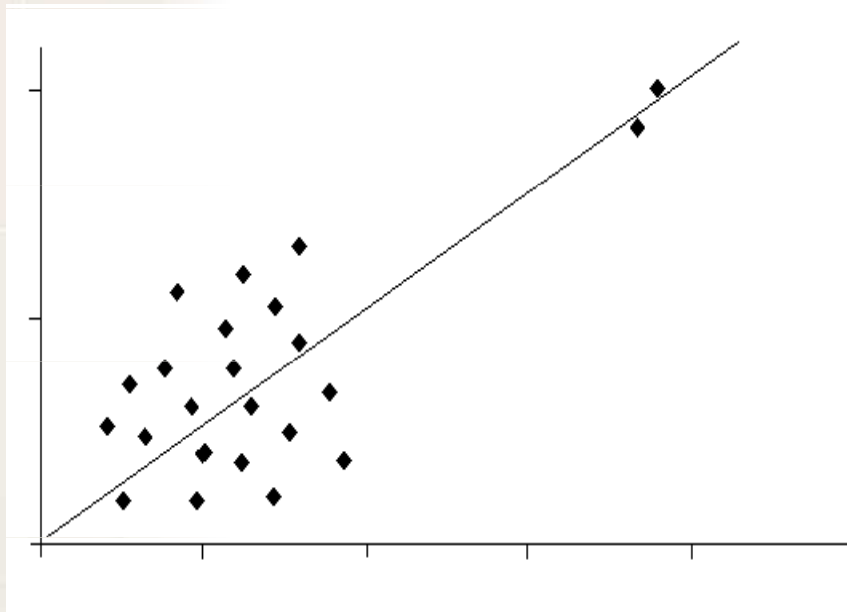
Potom nulový korelační koeficient znamená, že veličiny jsou nezávislé.

Pokud není splněn předpoklad dvourozměrné normality, z nulové hodnoty korelačního koeficientu nelze usuzovat na nic víc, než že veličiny jsou nekorelované.

# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

může být nadhodnocen:

- ☑ vlivem třetí skryté proměnné
- ☑ přítomností odlehlých hodnot
- ☑ data jsou složena z různých podskupin (tříd)



# JINÉ KORELAČNÍ KOEFICIENTY

V případě ordinálních dat nebo odchylek od předpokladů rozložení dat (odlehlá pozorování, jiné než normální rozložení proměnných, nelinearita vztahu) je vhodnější použít neparametrický koeficient korelace

$$r = 1 - \frac{6 \sum (Rx_i - Ry_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

Spearmanův koeficient korelace,

kde  $Rx_i$  a  $Ry_i$  jsou pořadí hodnot  $x_i$  a  $y_i$ .

Kromě Spearmanova korelačního koeficientu existují i další neparametrické korelační koeficienty jako např. Kendelovo  $\tau$ .

# KORELAČNÍ KOEFICIENT JAKO MÍRA PODOBNOSTI

Metrický prostor je neprázdná množina  $X$  spolu s funkcí  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  splňující:

- 1. totožnost:  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$ ;
- 2. symetrie:  $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$ ;
- 3. trojúhelníková nerovnost:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in X.$$

$\rho$  je nezáporná funkce.

(pozitivita, symetrie,  $\Delta$  nerovnost)

Funkci  $\rho$  nazýváme **metrika** na  $X$ .

**Vzdálenost** je hodnota určená podle metriky.

# KORELAČNÍ KOEFICIENT JAKO MÍRA PODOBNOSTI

## Míry podobnosti

- 1. totožnost:  $\sigma(x, y) = \max R \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X;$
- 2. symetrie:  $\sigma(x, y) = \sigma(y, x), \forall x, y \in X;$
- 3.  $\Delta$  nerovnost

$\sigma$  je nezáporná funkce.

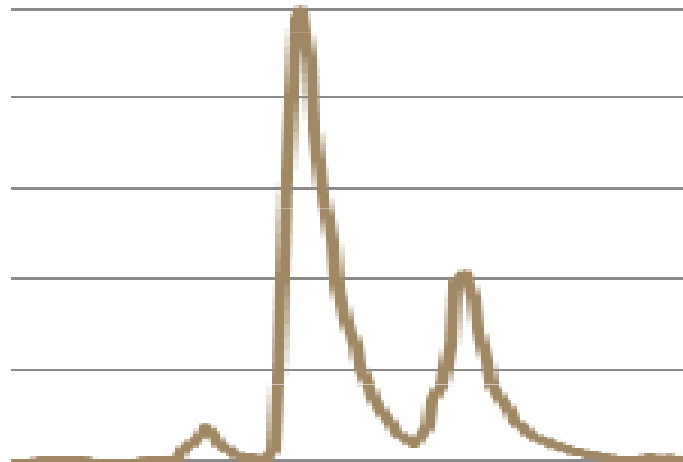
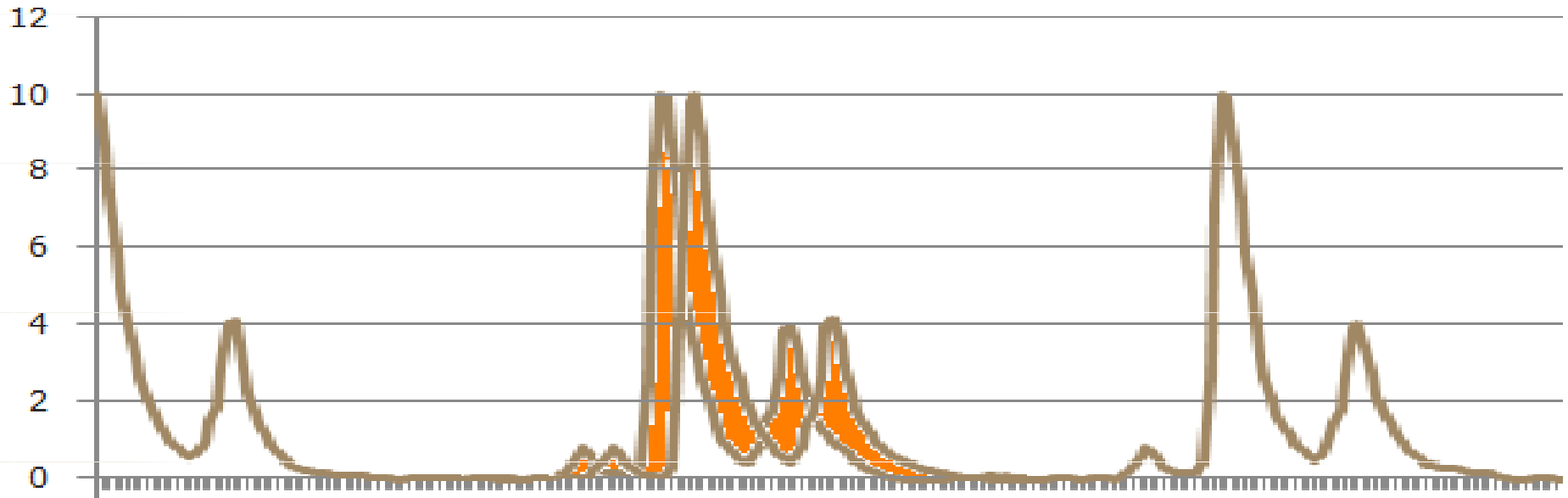
Funkci  $\sigma$  nazýváme **mírou podobnosti** na  $X$ .

**Podobnost** je hodnota určená podle míry podobnosti.

# INTERPRETACE VELIKOSTI KORELACE

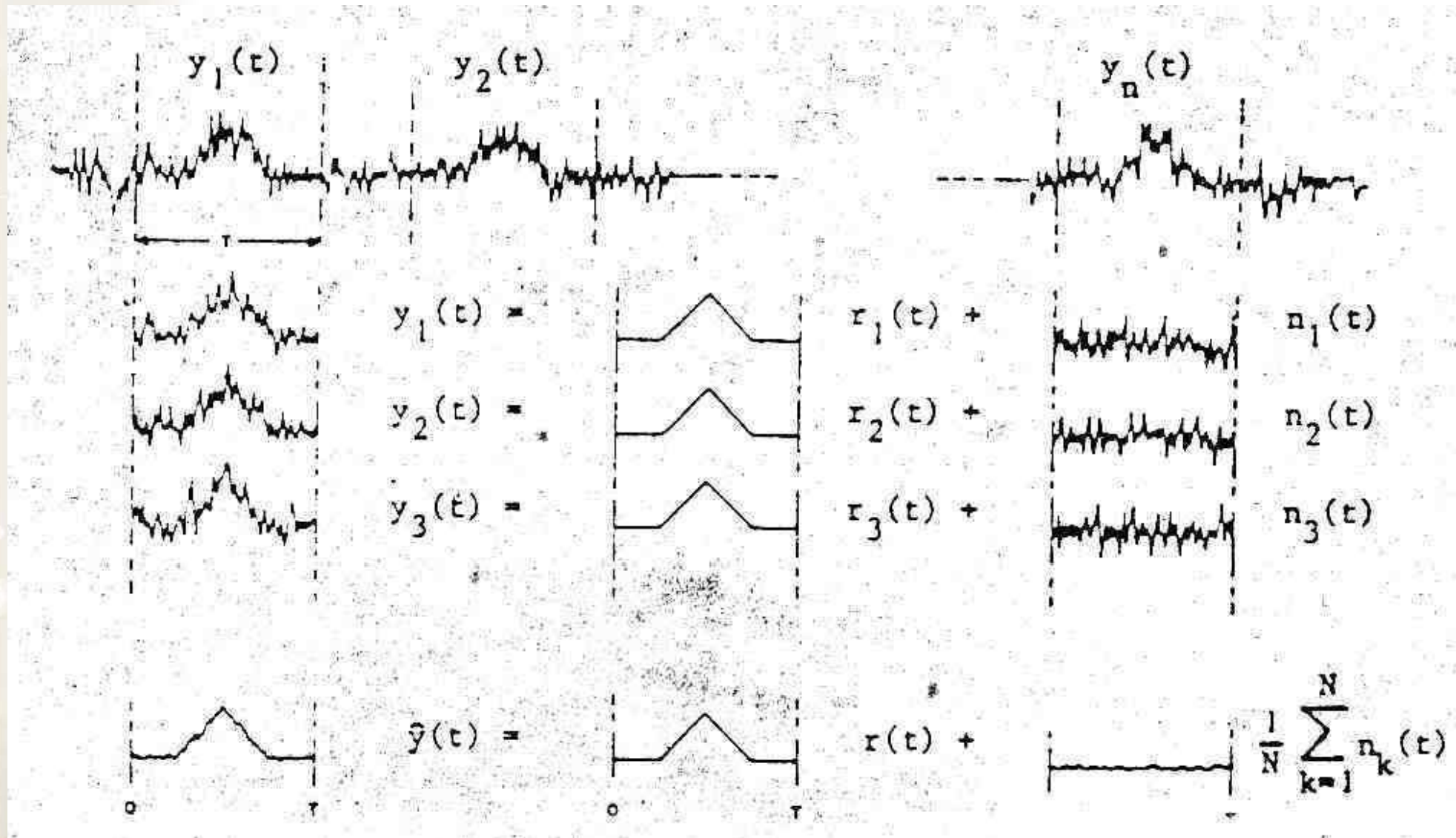
korelace	negativní	pozitivní
malá	-0.3 až -0.1	0.1 až 0.3
střední	-0.5 až -0.3	0.3 až 0.5
velká	-1.0 až -0.5	0.5 až 1.0

# KORELACE PŘI ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU EKG

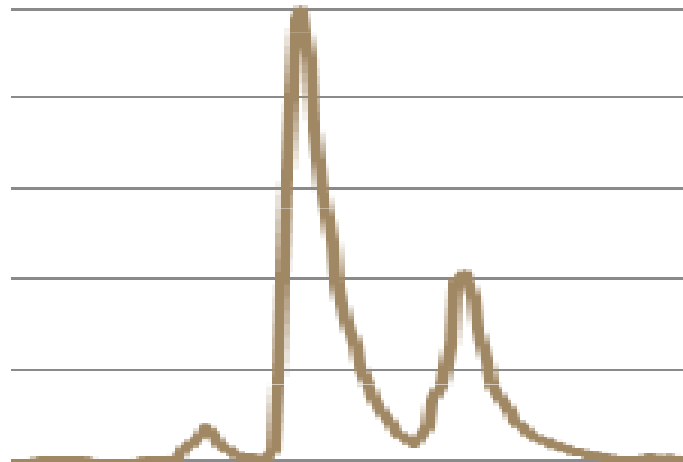
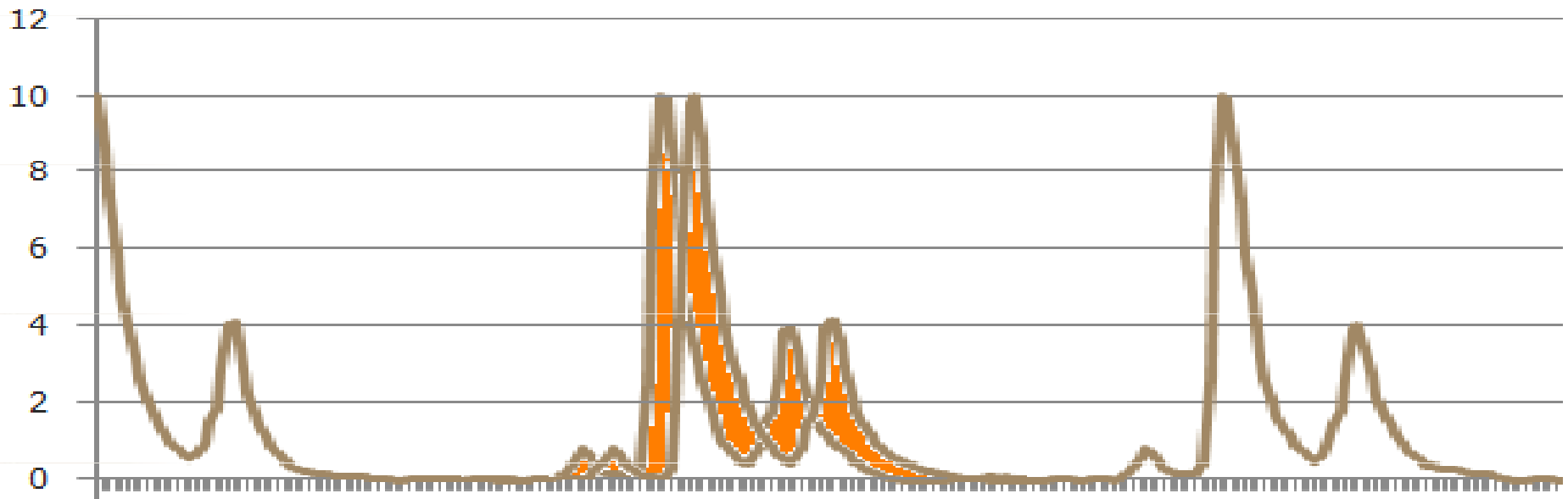




# PRINCIP ZPRŮMĚROVÁNÍ



# KORELACE PŘI ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU EKG



# KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ **korelační funkce**  $R(t_1, t_2)$  je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku  $t_1$  a hodnotami náhodného procesu v okamžiku  $t_2$ .  
Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- ☑ **kovarianční funkce** (*covariance function*)  $K(t_1, t_2)$  je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku  $t_1$  od  $m(t_1)$  a odchylkami náhodného procesu v okamžiku  $t_2$  od  $m(t_2)$ . Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)] [x_2 - m(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

# KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů



**stacionarita**

**ergodicita**

# KORELAČNÍ FUNKCE ERGODICKÉHO PROCESU

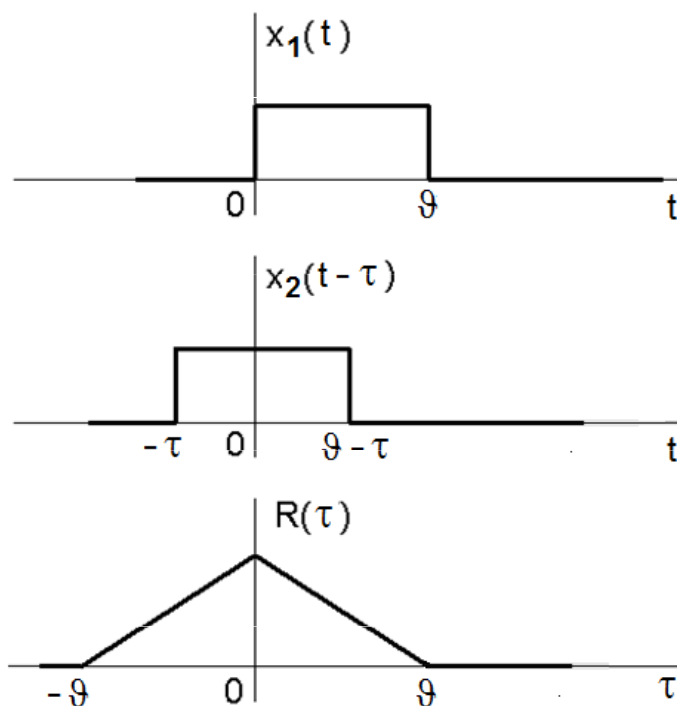
- ☑ křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy  $\xi(t)$  a  $\eta(t)$  s realizacemi  $x(t)$  a  $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt$$

# AUTOKORELAČNÍ FUNKCE ERGODICKÉHO PROCESU

- ☑ autokorelační funkce ergodického procesu  $\xi(t)$  s realizací  $x(t)$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



# KORELAČNÍ FUNKCE DISKRÉTNÍHO ERGODICKÉHO PROCESU

$$R_{xy}(kT_{vz}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(nT_{vz})y(nT_{vz} + kT_{vz})$$

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(nT_{vz})y(nT_{vz} + 0)$$

☑ korelační funkce pro standardizovaná data

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[x(nT_{vz}) - m_x]}{\sigma_x} \cdot \frac{[y(nT_{vz}) - m_y]}{\sigma_y}$$

# KORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- ✓ vzájemná či křížová korelační funkce (*cross-correlation function*) dvou periodických signálů (funkcí) o téže periodě  $T$  je definována

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

- ✓ popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- ✓ je periodická s periodou  $T$

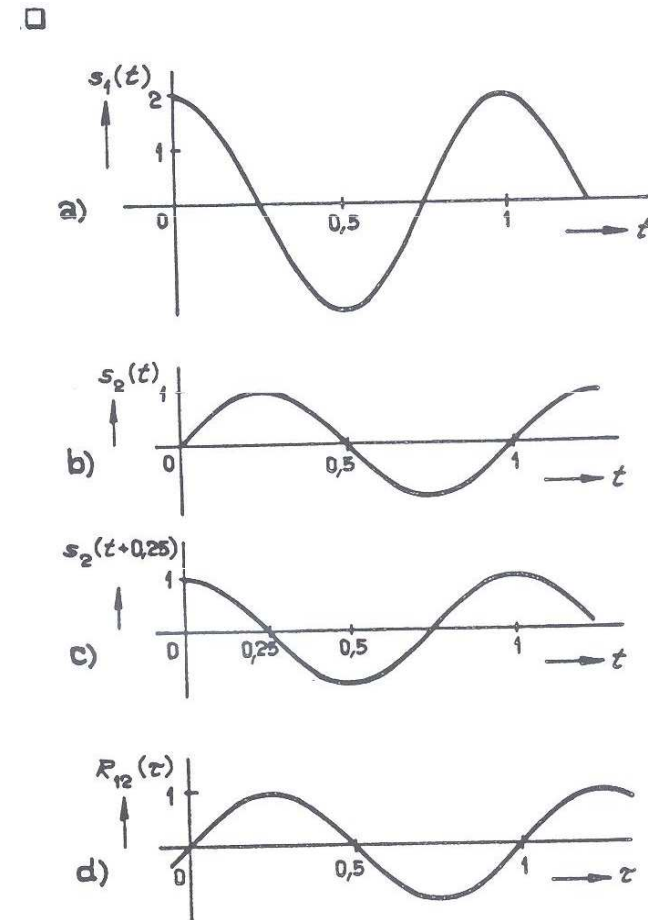


# KORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- ☑ Vypočtěte vzájemnou korelační funkci harmonických funkcí  $s_1(t) = 2\cos 2\pi t$  a  $s_2(t) = \sin 2\pi t$ .

Obě funkce mají tutéž periodu  $T=1$ , takže

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) s_2(t + \tau) dt = \\ &= \frac{1}{1} \int_0^1 2 \cos(2\pi t) \cdot \sin(2\pi(t + \tau)) dt = \\ &= \int_0^1 [\sin(4\pi t + 2\pi\tau) + \sin(2\pi\tau)] dt = \\ &= 0 + \sin(2\pi\tau) \end{aligned}$$



Obr. 1-34. Korelační funkce.

- a) Signál  $s_1(t)$ ,  
b) signál  $s_2(t)$ ,  
c) signál  $s_2(t + 0,25)$ ,  
d) korelační funkce  $R_{12}(\tau)$ .

# AUTOKORELAČNÍ FUNKCE PERIODICKÉ FUNKCE

- ☑ autokorelační funkce periodického signálu

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_T s(t)s(t + \tau)dt$$

- ☑ autokorelační funkce signálu  $s(t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T C \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot C \cdot \cos[\omega(t + \tau) + \varphi] \cdot dt = \\ &= \frac{C^2}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + 2\varphi + \omega\tau) + \cos(\omega\tau)] \cdot dt = \\ &= C_{ef}^2 \cos \omega\tau \end{aligned}$$

# VLASTNOSTI AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

autokorelační funkce je:

- ✓ sudá;
- ✓  $\forall \tau \in \mathbb{R}: R(0) \geq R(\tau)$ ;
- ✓  $R(0)$  je rovno výkonu signálu;

V případě, že je signál periodický, je autokorelační funkce rovněž periodická se stejnou periodou.