V.a1 Teoretické pozadí statistické analýzy

Jak vznikají informace
Rozložení dat

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Anotace

- Základním principem statistiky je pravděpodobnost výskytu nějaké události. Prostřednictvím vzorkování se snažíme odhadnout skutečnou pravděpodobnost událostí. Klíčovou otázkou je velikost vzorku, čím větší vzorek, tím větší šance na projevení se skutečné pravděpodobnosti výskytu jevu.

JAK vznikají informace ? základní pojmy

Skutečnost	Pozorovatel

Náhoda
(vybere jednu z možností pokusu)

Jev

podmnožina všech možných výsledků (elementárních jevů) pokusu/děje, o které lze říct, zda nastala nebo ne

Rozliší, co nastalo
a) ***podle možností***
b) ***podle toho, jak potřebuje***

Jevové pole

třída všech jevů, které jsme se rozhodli nebo jsme schopni sledovat

Skutečnost + Jevové pole = Měřitelný prostor

Experimentální jednotka - *objekt, na kterém se provádí šetření*

Populace - *soubor experimentálních jednotek* **Znak -** *vlastnost sledovaná na objektu*

Sledovaná veličina - *číselná hodnota vyjadřující výsledek náhodného experimentu*

Znak se stává náhodnou veličinou, pokud se jeho hodnota zjišťuje vylosováním objektu ze základního souboru

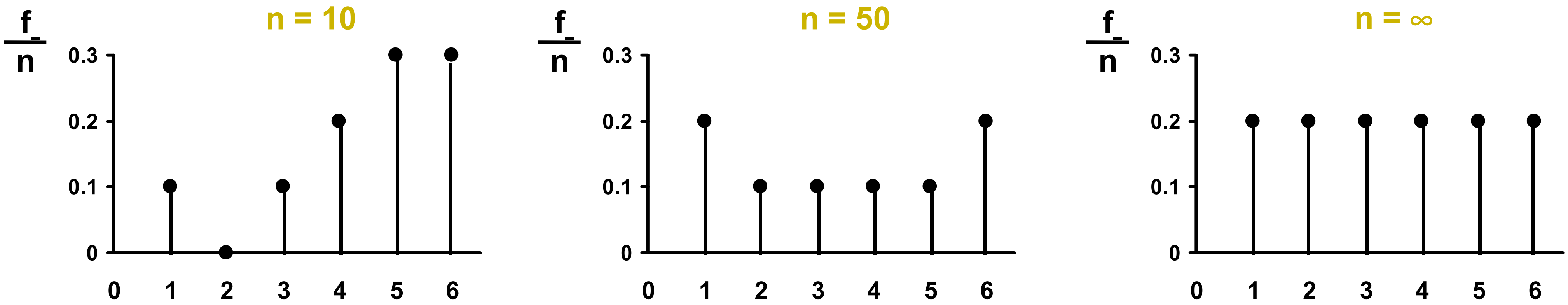
Výběr - výběrová populace - cílová populace

Náhodný výběr **Reprezentativnost**

JAK vznikají informace ?

„Empirical approach“

„Classical approach“

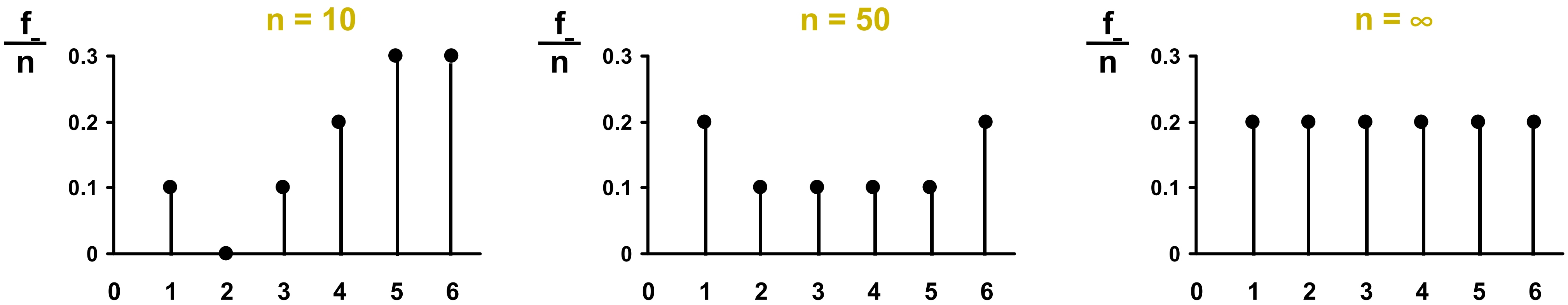


možné jevy: čísla 1 – 6

n – počet hodů (opakování)

U složitých stochastických systémů se pravda získá až po odvedení značného množství experimentální práce: musíme dát systému šanci se projevit

JAK vznikají informace ?



možné jevy: čísla 1 – 6

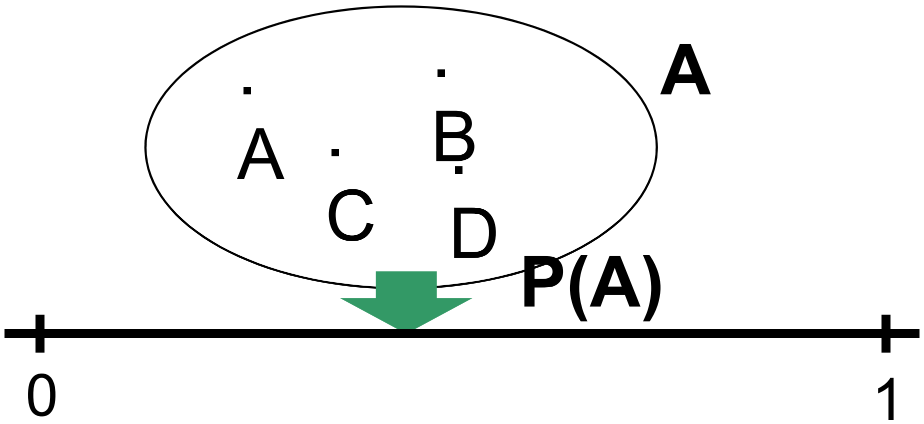
n – počet hodů (opakování)

Při realizaci náhodného experimentu roste se zvyšujícím se počtem opakování pravdivá znalost systému (výsledky se stávají stabilnější) …diskutabilní je ale ovšem míra zobecnění konkrétního experimentu

Empirický zákon velkých čísel

Při opětovné nezávislé realizaci téhož náhodného experimentu se podíl výskytů sledovaného jevu mezi všemi dosud provedenými realizacemi zpravidla ustaluje kolem konstanty.

Pravděpodobnost je libovolná reálná funkce definovaná na jevovém poli A, která každému jevu A přiřadí nezáporné reálné číslo P(A) z intervalu 0 - 1.



Z praktického hlediska je pravděpodobnost **idealizovaná relativní četnost**

$P(A) = 1$ .... jev jistý

$P(A) = 0$ .... jev nemožný

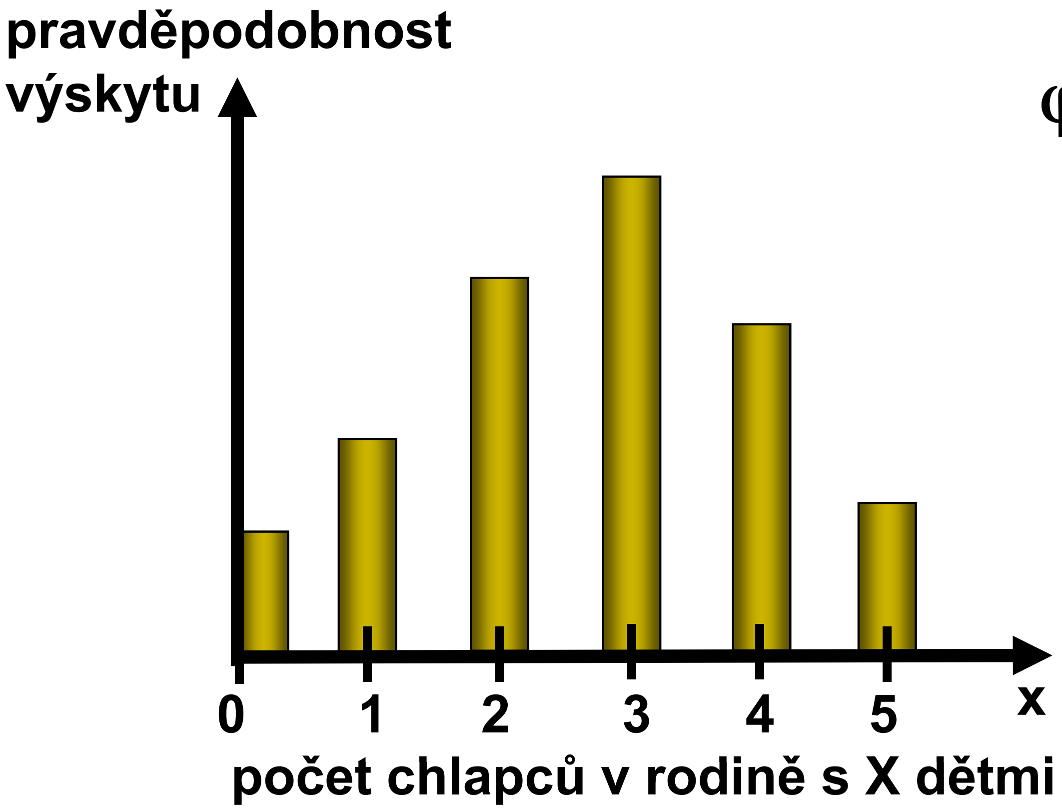
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$............. nezávislé jevy

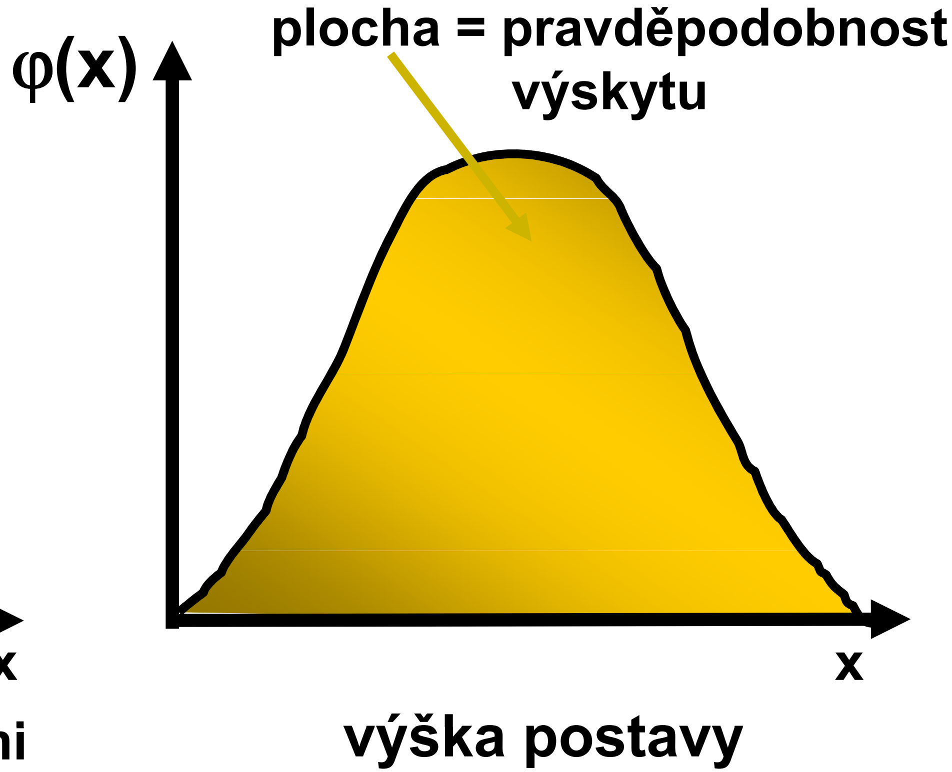
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ ....závislé jevy

$P(A / B) = P(A \cap B) / P(B)$ ....podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost výskytu jevu – rozložení dat

- existuje pravděpodobnost výskytu jevů (nedeterministické závěry)
- „vše je možné“: pouze jev s pravděpodobností 0 nikdy nenastane
- pravděpodobnost lze zkoumat retrospektivně i prospektivně





V.a2 Základní typy dat

Spojitá a kategoriální data

Základní popisné statistiky

Grafický popis dat

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Anotace

- Realitu můžeme popisovat různými typy dat, každý z nich se specifickými vlastnostmi, výhodami, nevýhodami a vlastní sadou využitelných statistických metod - od binárních přes kategoriální, ordinální až po spojitá data roste míra informace v nich obsažené.
- Základním přístupem k popisné analýze dat je tvorba frekvenčních tabulek a jejich grafických reprezentací – histogramů.

Jak vznikají informace ?
– různé typy dat znamenají různou informaci

Data poměrová — Kolikrát ?

Data intervalová — O kolik ?

Spojitá data

Data ordinální — Větší, menší ? — Kategoriální otázky

Diskrétní data

Data nominální — Rovná se ? — Otázky „Ano/Ne“

Podíl hodnot větší/menší než specifikovaná hodnota ?

Procenta odvozené hodnoty

Samotná znalost typu dat ale na dosažení informace nestačí ....

Jak vznikají informace ?
– různé typy dat znamenají různou informaci

Statistika středu

Data poměrová

PRŮMĚR

Spojitá data

Data intervalová

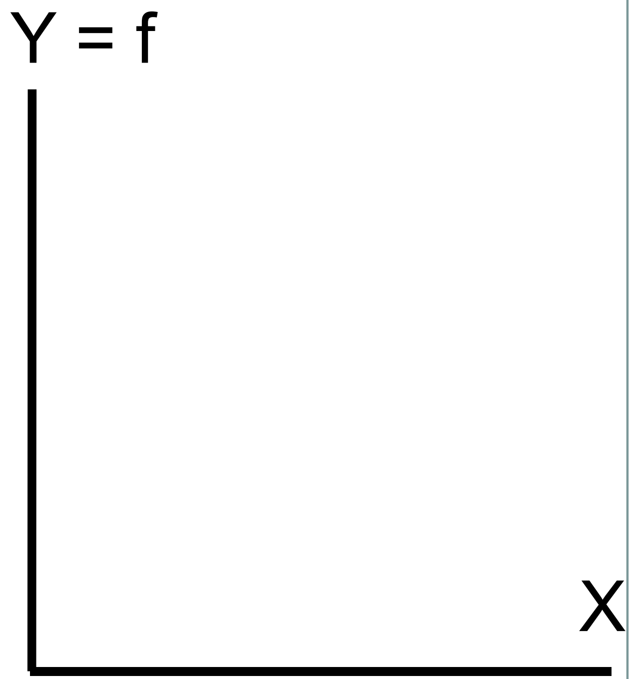
Data ordinální

MEDIÁN

Diskrétní data

Data nominální

MODUS

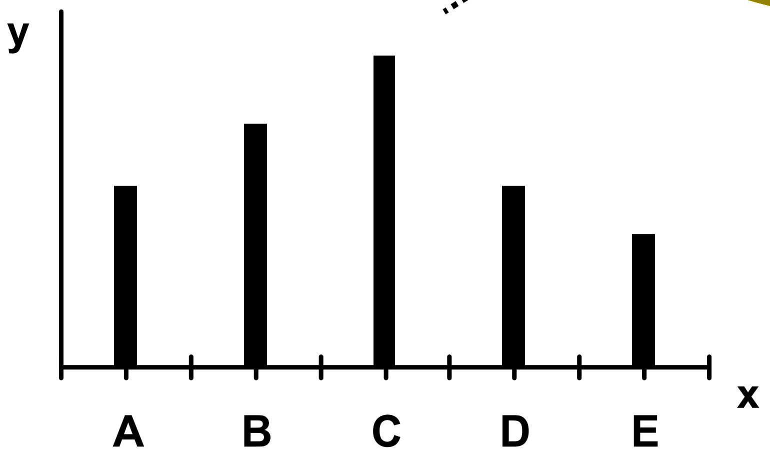


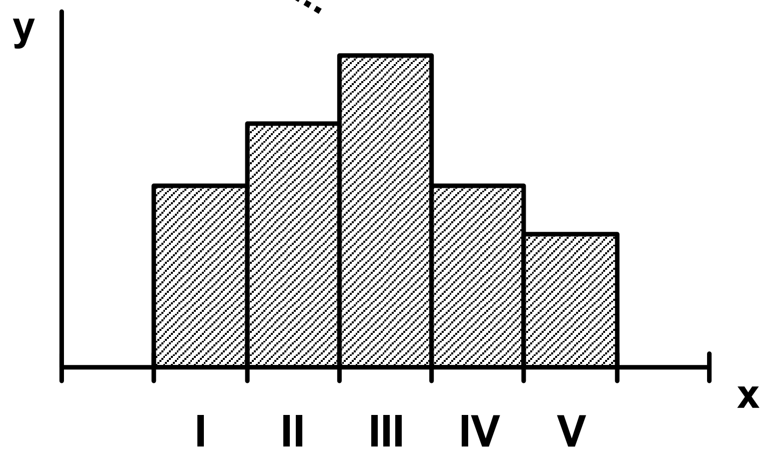
JAK vznikají informace ?
- opakovaná měření informují rozložením hodnot

Y: frekvence

- absolutní / relativní

KOLIK se naměřilo





CO se naměřilo

X: měřený znak

Diskrétní data ← → **Spojitá data**

Odvozená data: Pozor na odvozené indexy

Příklad I:

Znak X: Hmotnost
Znak Y: Plocha

Příklad II:

X: Průměrný počet výrobků v prodejně
Y: Odhad prostoru průměrně nabízeného k vystavení výrobku

průměr : (min - max)

X: 1,2 : (1,15 - 1,24) → **+ / - 3,8 %**

Y: 1,8 : (1,75 - 1,84) → **+ / - 2,5 %**

$$X/Y = 0{,}667 : \left(\frac{1{,}15}{1{,}84} - \frac{1{,}24}{1{,}75}\right)$$ → **+ / - 6,2 %**

Nová veličina má jinou šířku rozpětí než ty, ze kterých je odvozená

Jak vznikají informace ?
- frekvenční tabulka jako základní nástroj popisu

DISKRÉTNÍ DATA

Primární data

Počty epizod pro n = 100 hemofiliků

0
0
1
2
1
1
3
1
1
2
.
.
.
.
.
.
n = 100

Frekvenční sumarizace

N: 100 dětí (hemofiliků)
x: znak: počet krvácivých epizod za měsíc

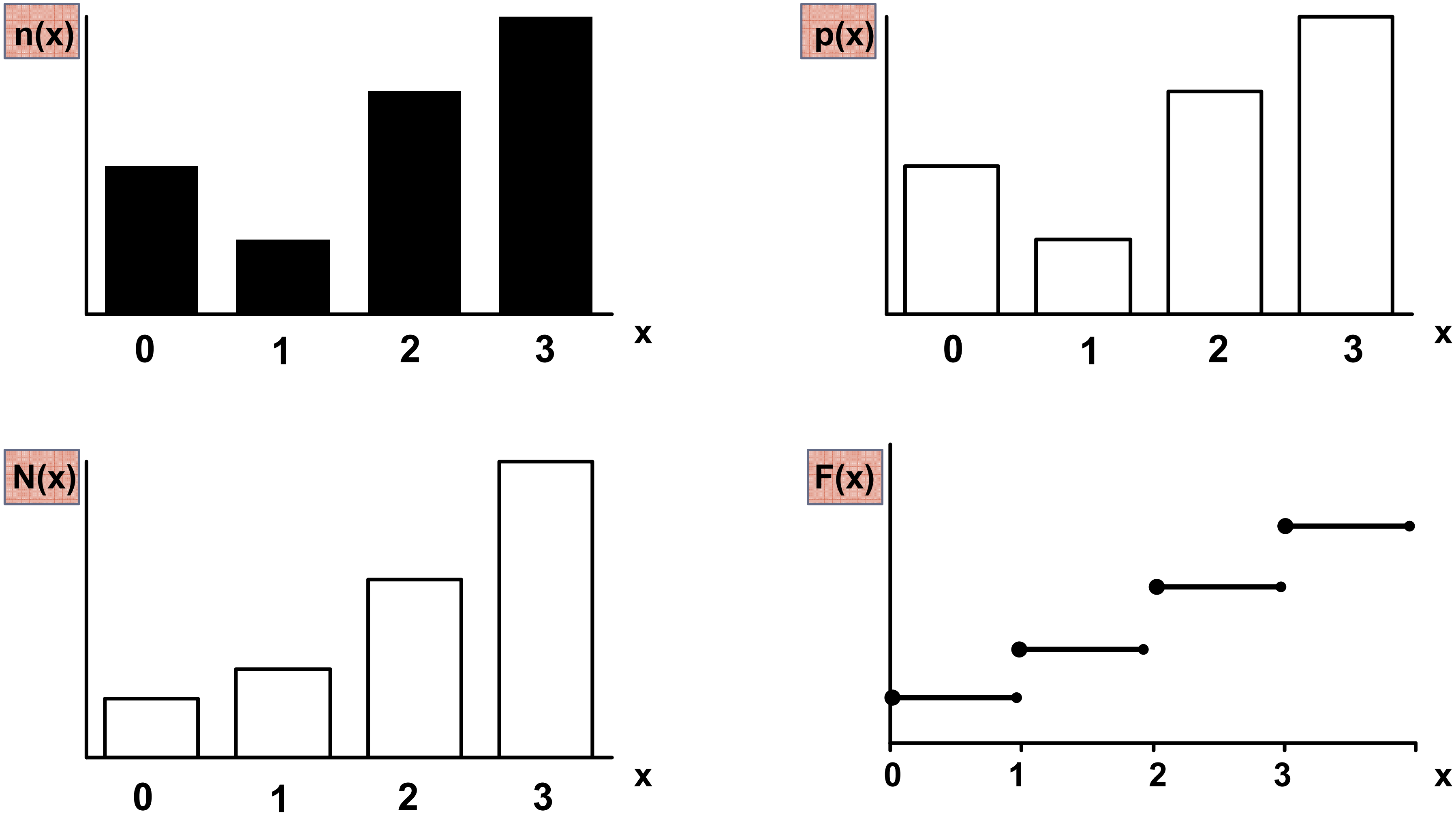
x	n(x)	N(x)	p(x)	F(x)
0	20	20	0,2	0,2
1	10	30	0,1	0,3
2	30	60	0,3	0,6
3	40	100	0,4	1,0

n(x) – absolutní četnost x
N(x) – kumulativní četnost hodnot nepřevyšujících x;

$$N(x) = \sum_{t \leq x} n(t)$$

p(x) – relativní četnost; p(x) = n(x) / n
F(x) – kumulativní relativní četnost hodnot nepřevyšujících x; F(x) = N(x) / n

Jak vznikají informace ?
Grafické výstupy z frekvenční tabulky



Jak vznikají informace ?
- frekvenční tabulka jako základní nástroj popisu

SPOJITÁ DATA

Příklad: **x: koncentrace látky v krvi n = 100 pacientů**

Primární data

Hodnoty pro n = 100 osob

1,21
1,48
1,56
0,31
1,21
1,33
0,33
.
.
.
n = 100

Frekvenční sumarizace

n = 100 opakovaných měření (100 pacientů)
x: koncentrace sledované látky v krvi (20 – 100 jednotek)

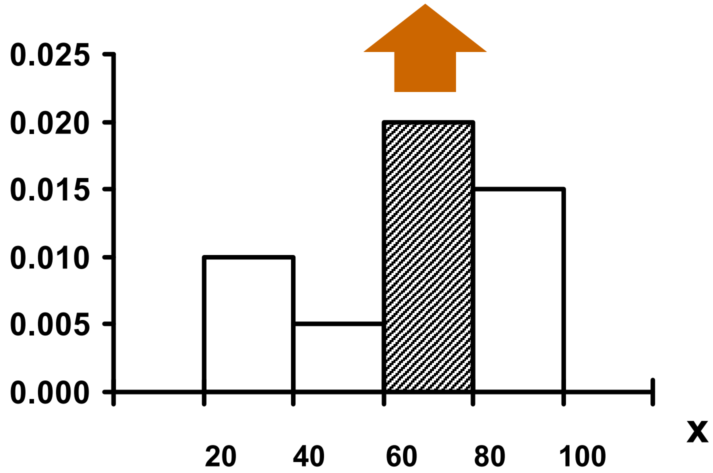
interv	d(I)	n(I)	n(I)/n	N(x'')	F(x'')
<20, 40)	20	20	0,2	20	0,2
<40, 60)	20	10	0,1	30	0,3
<60, 80)	20	40	0,4	70	0,7
<80, 100)	20	30	0,3	100	1,0

d(I) – šířka intervalu
n(I) – absolutní četnost
n(I) / n – intervalová relativní četnost
N(x'') – intervalová kumulativní četnost do horní hranice X''
F(x'') – intervalová relativní kumulativní četnost do horní hranice X''

Jak vznikají informace ?
- frekvenční sumarizace spojitých dat

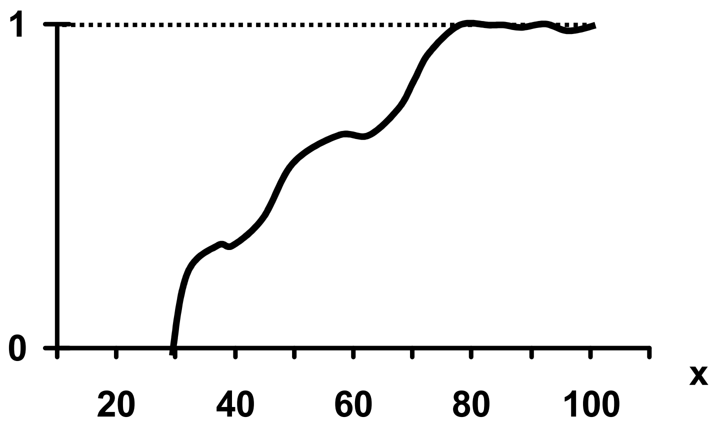
Histogram

Plocha: n(I) / n



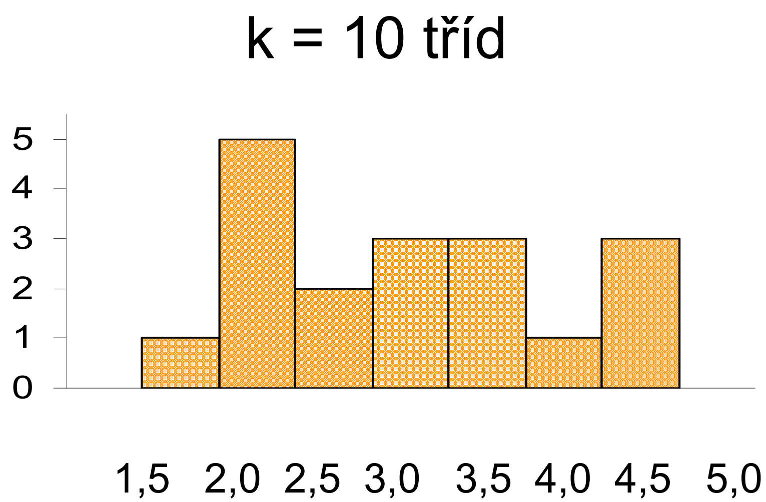
$$f(x)= \frac{n(I) / n}{d(I)}$$ ⇨ **Intervalová hustota četnosti**

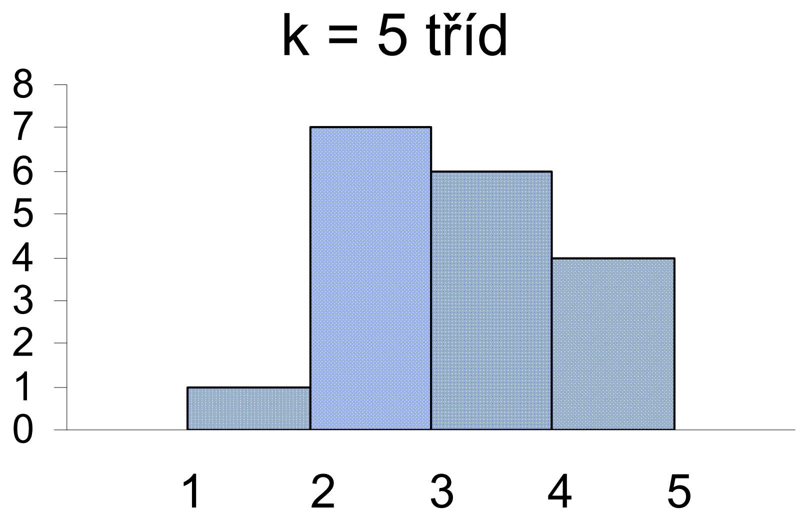
Výběrová distribuční funkce

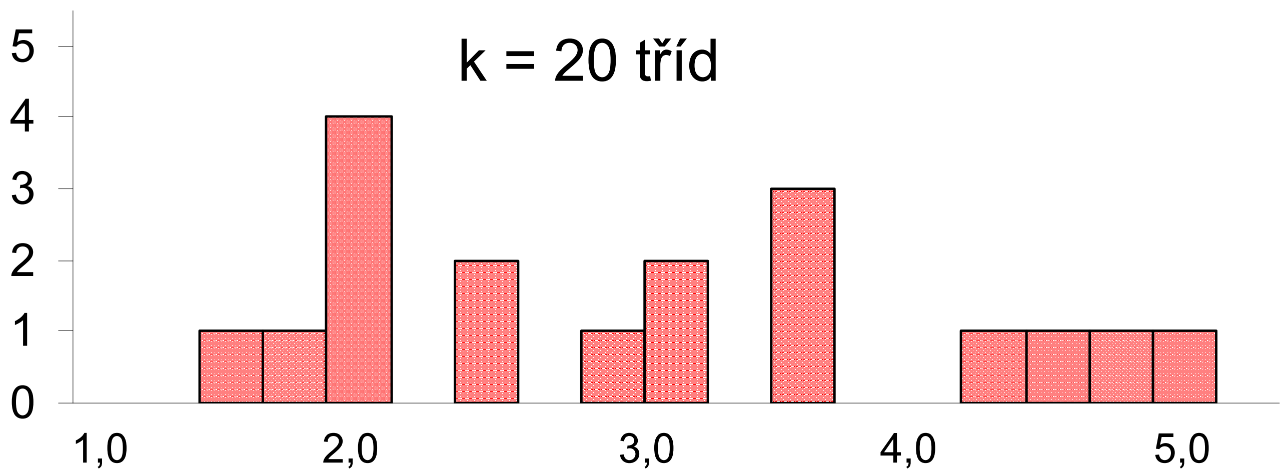


F(x) ⇨ **Intervalová relativní kumulativní četnost**

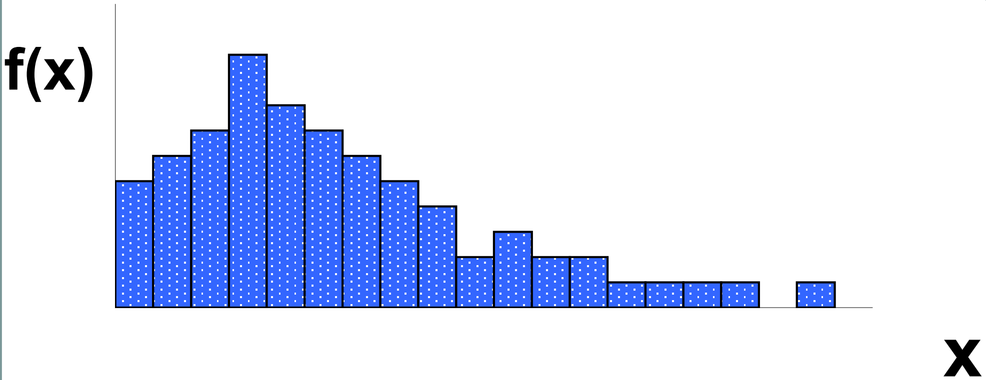
Počet zvolených tříd a velikost souboru určují kvalitu výstupu

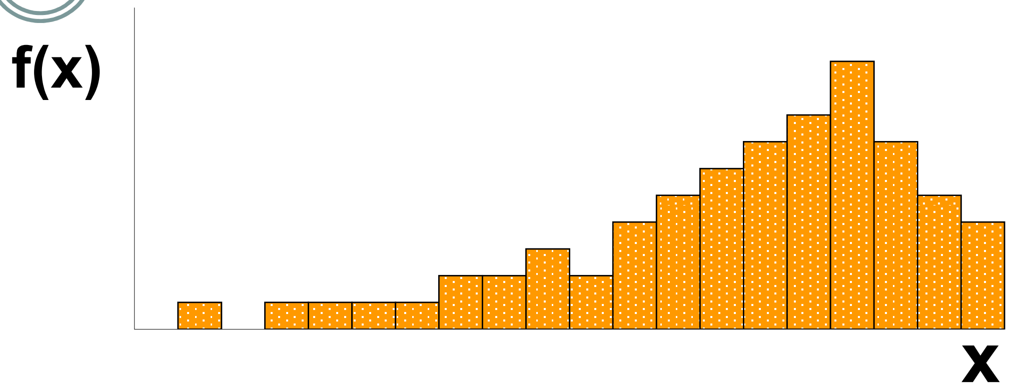


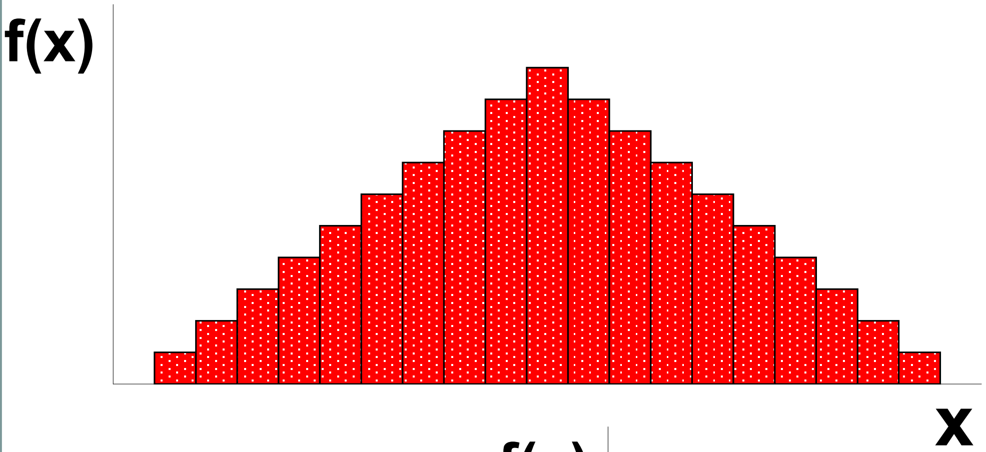


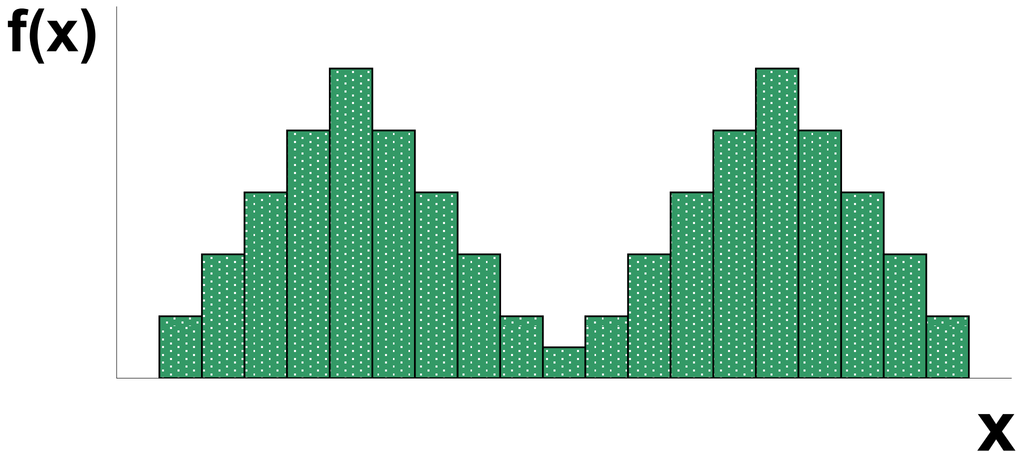


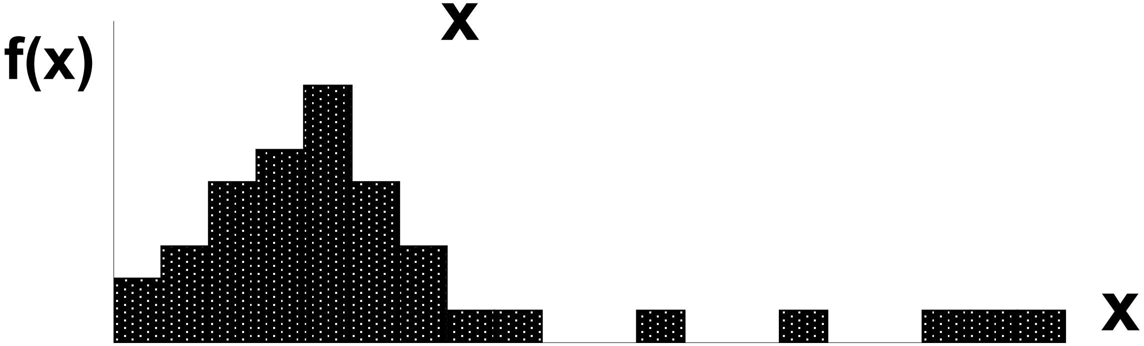
Histogram vyjadřuje tvar výběrového rozložení





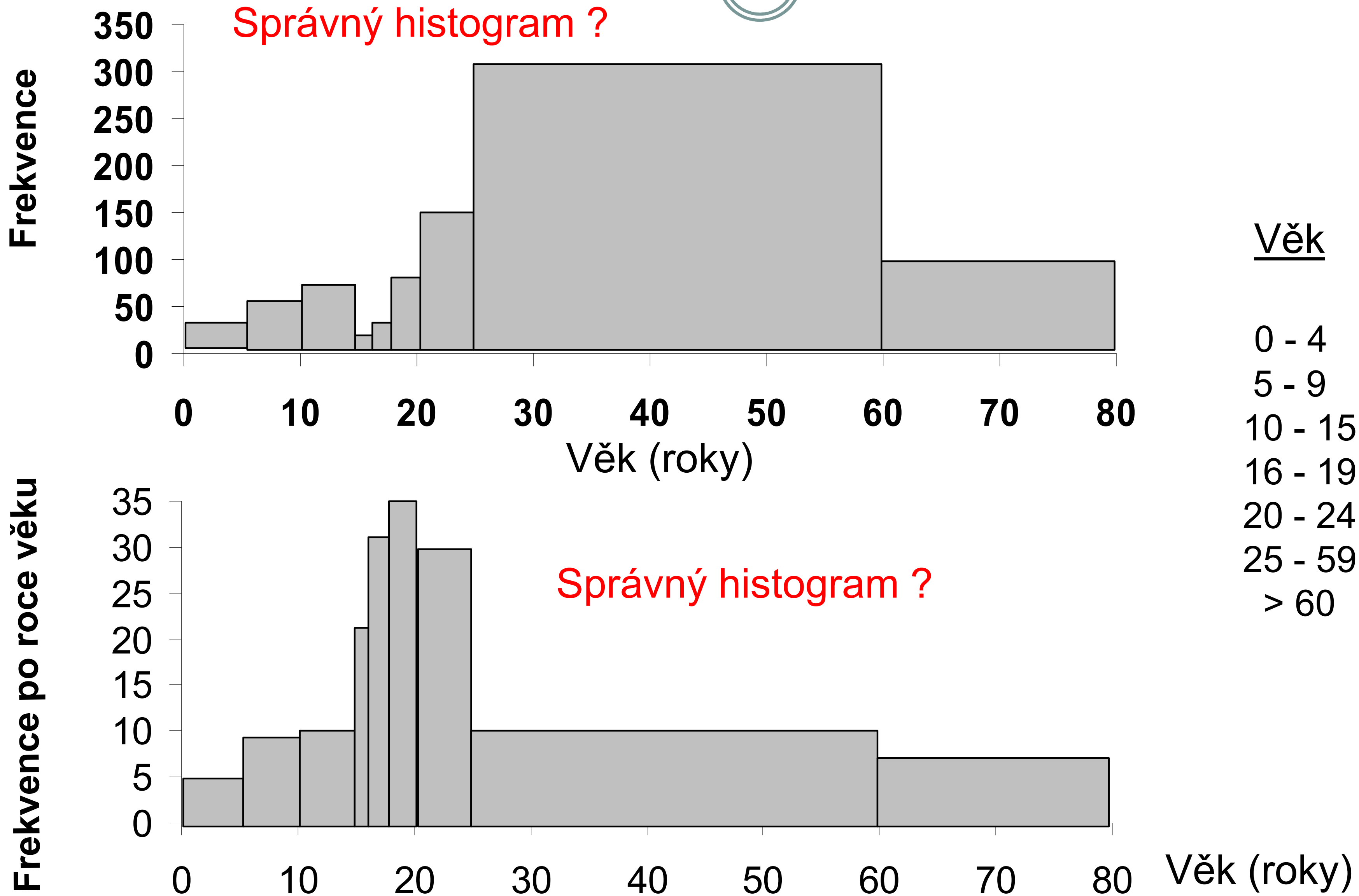






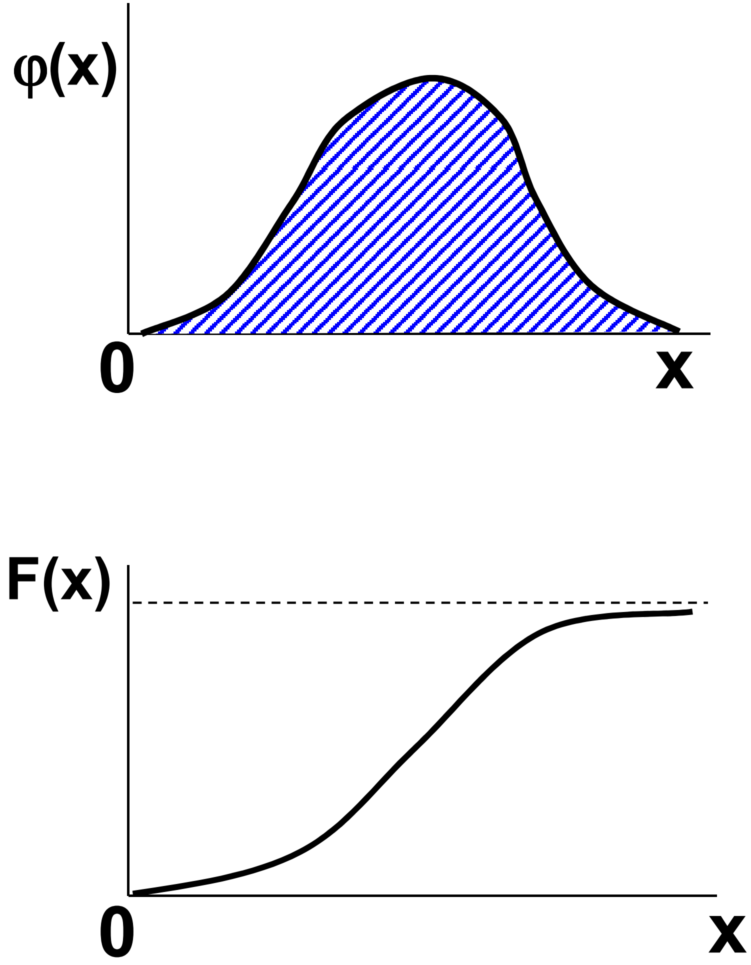
Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Příklad: věk účastníků vážných dopravních nehod



Věk	f
0 - 4	28
5 - 9	46
10 - 15	58
16 - 19	20
20 - 24	114
25 - 59	316
> 60	103

Pojem ROZLOŽENÍ - příklad spojitých dat

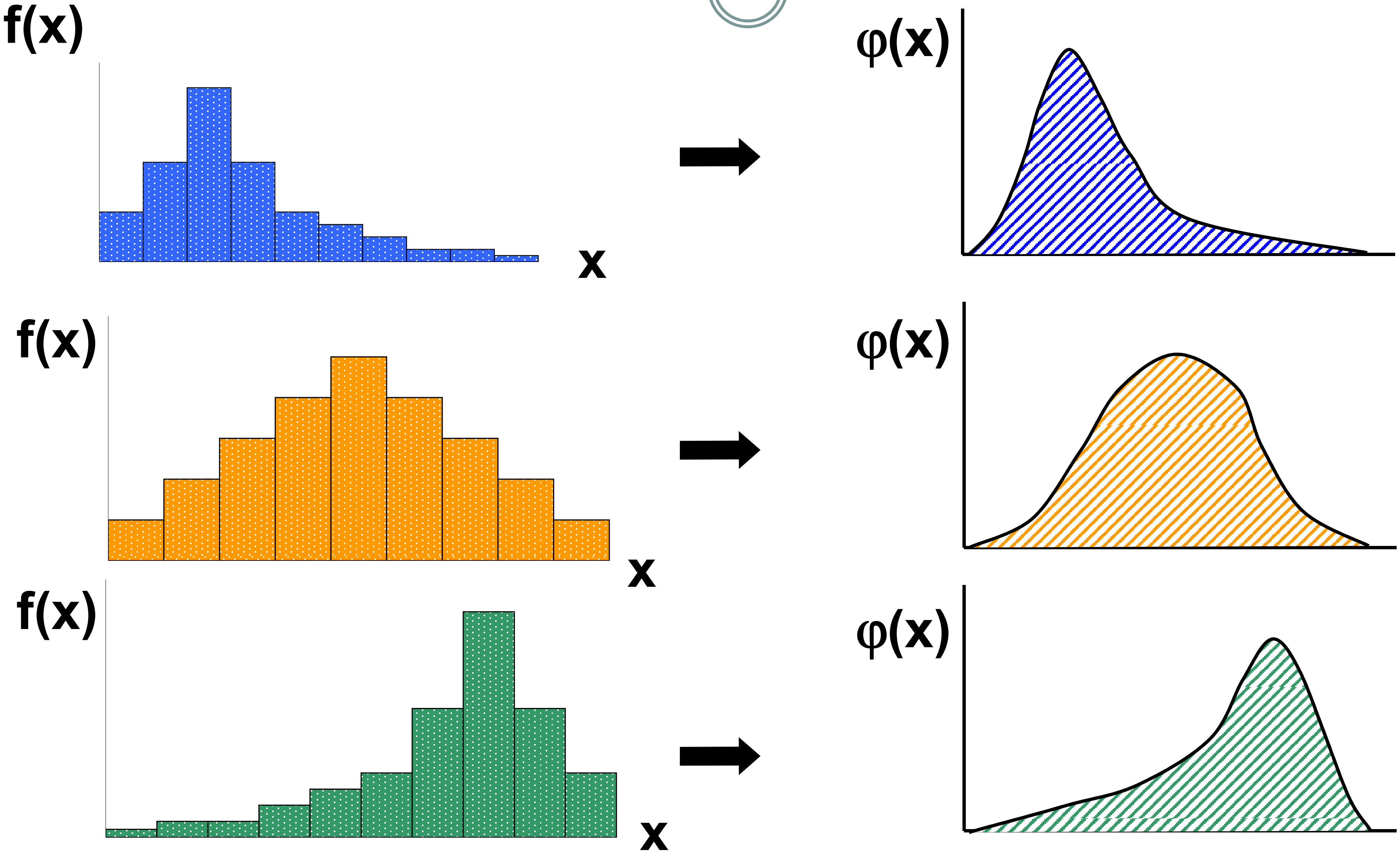


Rozložení

Distribuční funkce

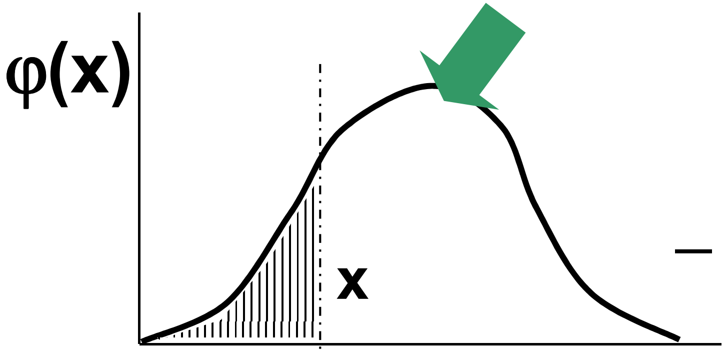
Je - li dána distribuční funkce, je dáno rozložení

Výběrové rozložení hodnot lze modelově popsat a definovat tak pravděpodobnost výskytu X



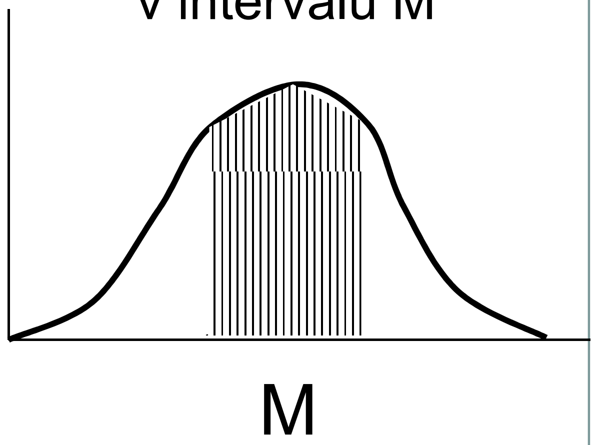
Distribuční funkce jako užitečný nástroj pro práci s rozložením

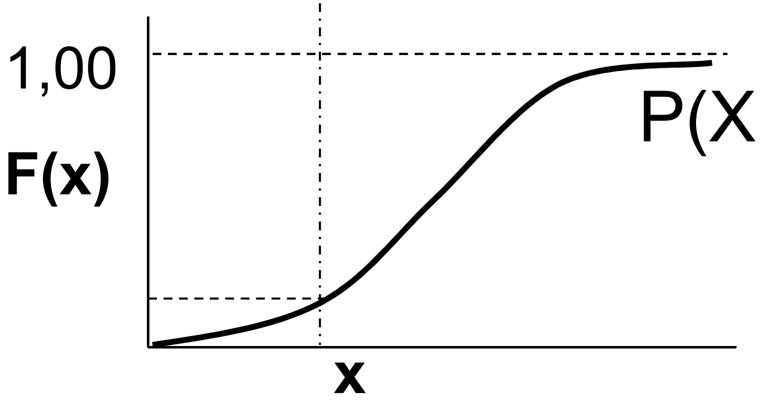
Plocha = relativní četnost



$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \ d(x) = 1$$

F(x):
Pravděpodobnost, že se X vyskytuje v intervalu M





$$P(X \leq x) = \Phi(x) = F(x")$$

$\Phi(x)$ … distribuční funkce

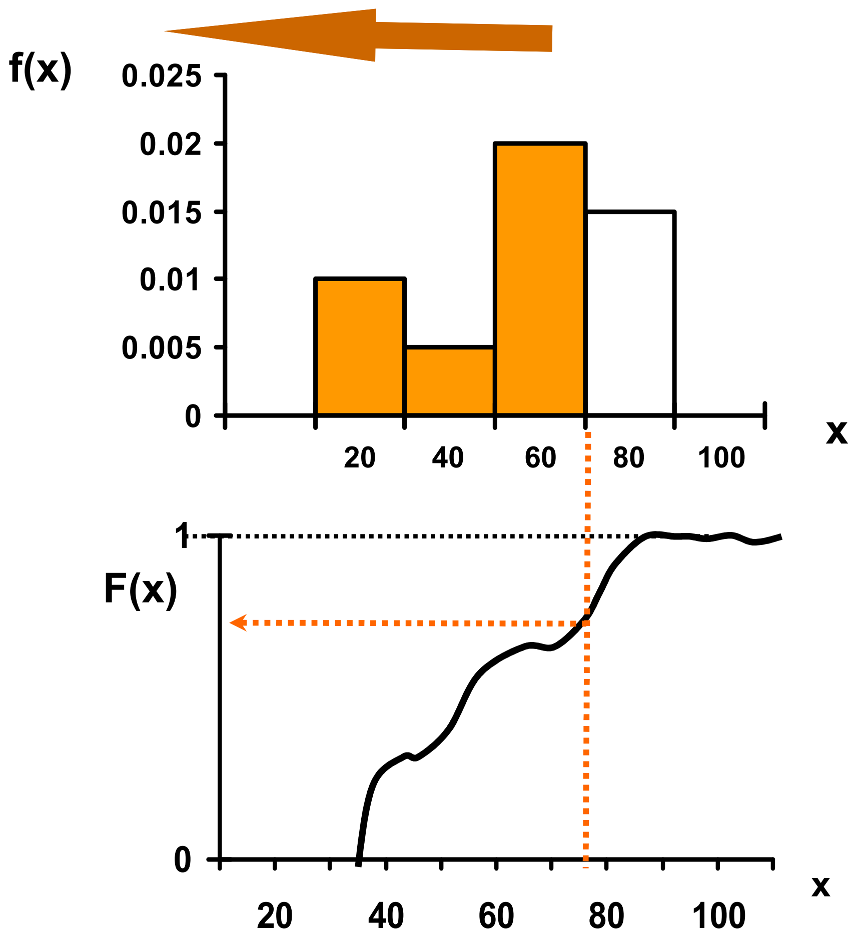
$$P(X \leq x) = \int_M \varphi(x)\ \ d(x)$$

Známe-li distribuční funkci, pak známe rozložení sledované veličiny.

Pro jakoukoli množinu hodnot (**M**) lze určit P, že X do této množiny patří.

Jak vznikají informace ?
- frekvenční sumarizace spojitých dat

Grafické výstupy z frekvenční tabulky – spojitá data



Uspořádání čísel podle velikosti a konstrukce rozložení umožňuje <u>pravděpodobnostní zařazení</u> každé jednotlivé hodnoty

KVANTIL

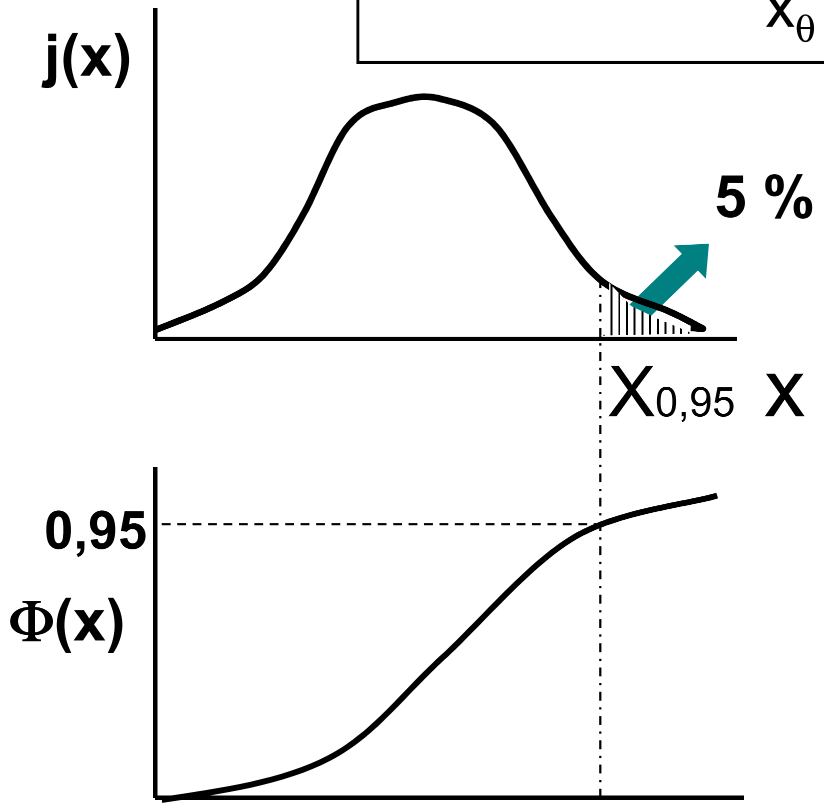
$$X_{0.1};\ X_{0.9};\ X_{0.5};\ X_{\theta}$$

Otázka: Jak velké musí být X, aby 5 % všech hodnot bylo nad ním?

θ = 0,95 … Pravděpodobnost

Hledáme: $P(X \leq x_\theta) = 0{,}95 = \theta$

$x_\theta = (\mathbf{X_{0,95}}) = ?$



$F(x\theta) = \theta$

Kvantil je číslo, jehož hodnota distribuční funkce je rovna P, pro kterou je kvantil definován

Jakékoliv číslo na ose x je kvantilem

Základní statistické testy

Jednovýběrový t-test
Párový t-test
Mann-Whitneův test

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

t-Test

Tři varianty **parametrického** t-testu: jednovýběrový
párový
dvouvýběrový

Předpoklad: **Měřená náhodná veličina má normální rozdělení.**

↓

Výběrový průměr má normální rozdělení se stejnou střední hodnotou, skutečný rozptyl ovšem neznáme.

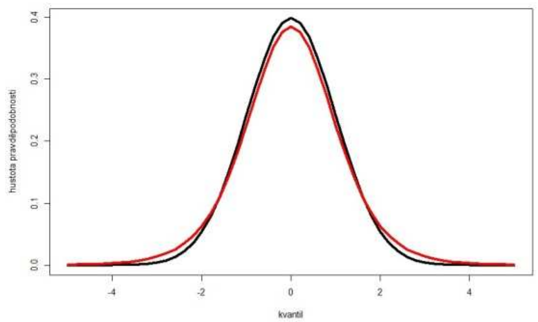
↓

Rozdíl výběrového průměru od skutečné střední hodnoty má také normální rozdělení.

↓

Při využití výběrového rozptylu má rozdíl t-rozdělení.

Kvantil	-3	-2	-1	0	1	2	3
Norm(0,1)	0,00	0,05	0,24	0,40	0,24	0,05	0,00
$t_7(0,1)$	0,01	0,06	0,23	0,38	0,23	0,06	0,01



t-Test

Princip: podle určené hladiny pravděpodobnosti se stanoví maximální přípustná velikost rozdílu výběrového průměru a skutečné střední hodnoty. Testuje se velikost rozdílu.

Postup: Výpočet normalizovaného rozdílu a jeho porovnání s tabelovanou hodnotou (jednostranná a dvoustranná varianta):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n}$$

H_0	H_A	Testová statistika	Interval spolehlivosti
$\bar{x} \leq \mu$	$\bar{x} > \mu$	t	t > t
$\bar{x} \geq \mu$	$\bar{x} < \mu$	t	t < t
$\bar{x} = \mu$	$\bar{x} \neq \mu$	t	|t| > t

t-Test

Koncentrace antibiotika v cílovém orgánu

Při 1000 měřeních antibiotika byla zjištěna v cílovém orgánu průměrná koncentrace 202,5 jednotek a směrodatná odchylka 44 jednotek.
Požadovaná koncentrace antibiotika je 200 jednotek.

1) ***Je daný rozdíl 2,5 významný vzhledem k variabilitě znaku na hladině významnosti 5 %?***
2) ***Jaká je skutečná hladina významnosti?***

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n} = \frac{2,5}{44}\sqrt{1000} = 1,797$$

Mann-Whitneyův U test

<u>Neparametrická</u> varianta t-testu se skoro stejnou silou v případě normálně rozdělených dat. Vždy pro dvě skupiny naměřených hodnot.

Předpoklad: **Pravděpodobnost že X > Y = pravděpodobnosti, že Y > X.**

↓

Vypočtená U statistika má přibližně normální rozdělení (pro malé počty jsou hodnoty tabelovány zvlášť).

Postup: Hodnoty z obou sad měření se seřadí podle velikosti.
Počítá se U statistika pro první nebo druhou sadu (obvykle pro tu s nižšími hodnotami)
U_1 je součet počtů hodnot ze sady 2 nižších než jednotlivé prvky sady 1 (postupně se sčítá pro všechny prvky ze sady 1).

Alternativní výpočet:

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

R_1 je součet pořadí skupiny 1.

Mann-Whitneyův U test

Provede se normalizace:

$$z = \frac{U - m_U}{\sigma_U} \qquad m_U = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

z je normalizovaná statistika
mU je průměr statistiky U
σU je směrodatná odchylka statistiky U

Vypočtená statistika z se porovná s tabelovanými hodnotami normálního rozdělení resp. pro nižší počty s tabelovanými hodnotami pro Mann-Whitneův U test.