

# 8. Analýza rozptylu a korelace



**Parametrická analýza rozptylu**

**Post hoc testy**

**Kruskal-Wallisův test**

**Korelace**

**Lineární regrese**

# Anotace

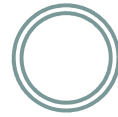


- **t-test** slouží pro porovnání průměrů spojité proměnné ve dvou (diskrétních) skupinách.
- **Analýza rozptylu (ANOVA)** umožňuje totéž porovnání provést pro větší počet (diskrétních) skupin.
- **Korelační analýza** je využívána pro vyhodnocení míry vztahu dvou spojitých proměnných.
- **Regresní analýza** vytváří model vztahu dvou nebo více proměnných, tedy jakým způsobem jedna proměnná (vysvětlovaná) závisí na jiných proměnných (prediktorech).

Regresní analýza je obdobně jako ANOVA nástrojem pro vysvětlení variability hodnocené proměnné.

Existují rovněž neparametrické varianty t-testu a ANOVy.

# Analýza rozptylu - ANOVA



- Zobecnění dvouvýběrového t-testu
- ANOVA je základním nástrojem pro analýzu rozdílů mezi průměry v několika skupinách
- $H_0$ : všechny střední hodnoty jsou stejné  
 $H_A$ : alespoň jedna dvojice středních hodnot se liší
- Předpoklady: normální rozložení ve skupinách, nezávislost skupin, shoda rozptylů (Levenův či Bartlettův test)
- Pokud  $H_0$  zamítáme na hl. význ.  $\alpha \rightarrow$  nás zajímá, která dvojice středních hodnot se od sebe liší
  - metody mnohonásobného testování (tzv. post hoc testy), např. Scheffého, Tukeyova metoda

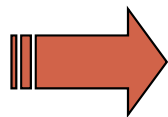
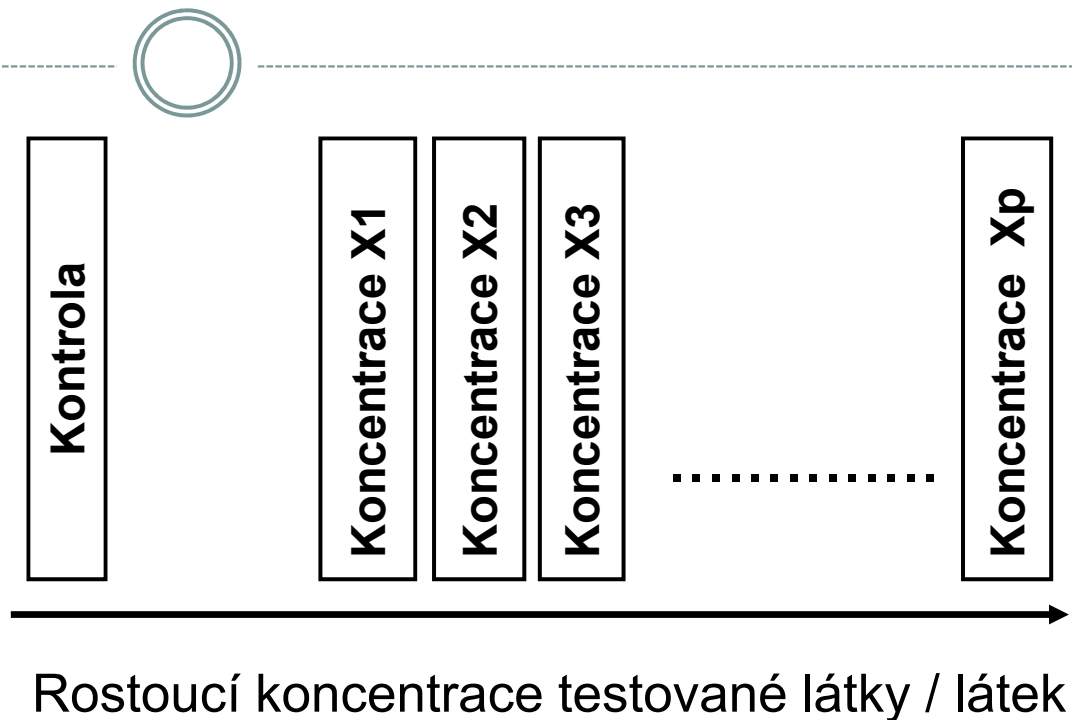
# Anotace



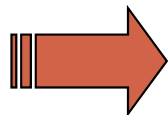
- Základní myšlenka, na níž je ANOVA založena, je rozdělení celkové variability v datech (neznámé, dané pouze náhodným rozložením) na část systematickou (spjatou s kategoriemi pacientů, vysvětlená variabilita) a část náhodnou. Pokud systematická, tedy nenáhodná a vysvětlitelná část variability převažuje, považujeme daný kategoriální faktor za významný pro vysvětlení variability dat.
- Analýza rozptylu vyhodnocuje pouze celkový vliv faktoru na variabilitu, v případě analýzy jednotlivých kategorií je třeba využít tzv. post-hoc testy

# Analýza rozptylu - ANOVA

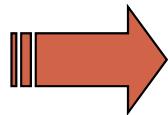
Základní technika  
sloužící  
k posouzení rozdílů  
mezi více úrovněmi  
pokusného zásahu



Celkově významné změny v reakci biologického systému



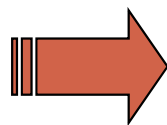
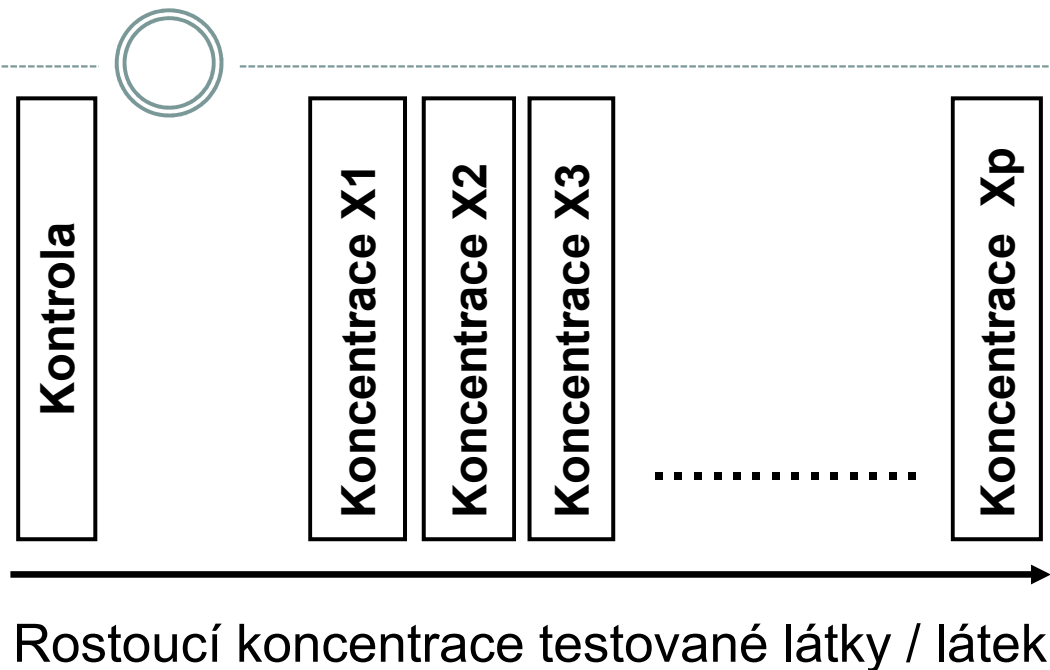
Vzájemné rozdíly účinku jednotlivých dávek



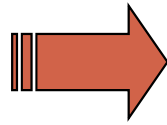
Rozdíly účinku dávek od kontroly

# Analýza rozptylu - ANOVA

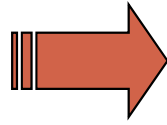
Významné kroky  
analýzy, vedoucí k  
efektivnímu srovnání  
variant



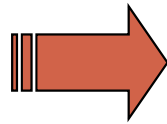
Splnění předpokladů analýzy  
Transformace dat



Relevantnost kontroly  
(vliv vlastní aplikace látek)



Vhodnost modelu ANOVA pro účely testu



Vlastní srovnání variant  
Minimalizace chyb při ověřování hypotéz

# Analýza rozptylu - ANOVA

***SPLNĚNÍ PŘEDPOKLADŮ ANOVA JE NEZBYTNOU PODMÍNKOU  
POUŽITÍ TÉTO TECHNIKY***

**ANOVA**  
**= parametrická**  
**analýza dat**

1. **Předpoklad nezávislosti  
opakování experimentu**

2. **Homogenita  
rozptylu v rámci  
pokusných variant**

3. **Normalita rozložení  
v rámci pokusných  
variant**

**ALTERNATIVOU JSOU NEPARAMETRICKÉ METODY**

# Analýza rozptylu - ANOVA

## *Předpoklady analýzy rozptylu jsou nezbytné pro dosažení síly testu*

• **Symetrické rozložení hodnot a normalita odchylek** od hodnoceného modelu ANOVA. Velkou část dat lze adekvátně normalizovat použitím logaritmické transformace. Předpoklad lognormální transformace může pochopitelně být teoreticky vyloučen u mnoha datových souborů obsahujících diskrétní parametry, kde je indikována vhodnost jiného typu transformace. U asymetricky rozložených a u diskrétních dat je nutné využít neparametrické alternativy analýzy rozptylu.

• **Statistická nezávislost reziduí** vyhodnocovaného modelu ANOVA. Pokud odhad a posouzení korelačních vztahů mezi pokusnými variantami není přímo předmětem výzkumu, lze jejich vliv na vyhodnocení odstranit znáhodněním dat v rámci pokusných variant - tedy změnou pořadí v náhodné. Rozsah vlivu těchto autokorelačních vztahů musí být ovšem primárně omezen správností experimentálního uspořádání.

• **Homogenita rozptylu** je nutným předpokladem pro smysluplnost vzájemných srovnání pokusných variant. U testů toxicity by splnění tohoto předpokladu mělo být ověřováno (Bartlettův test), neboť vážné rozdíly (až řádové) v jednotkách testovaného parametru mohou nastat v důsledku inhibice dávkami látky. Nehomogenita rozptylu je často ve vztahu k nenormalitě (asymetrii) dat a lze ji odstranit vhodnou normalizující transformací.

• **Aditivita** jako předpoklad týkající se složitějších experimentálních uspořádání. Exaktní otestování aditivity více pokusných faktorů je procedura poměrně náročná na experimentální design vyvážený co do počtu opakování. Je rovněž obtížné testovat interakci na nestandardních datech, neboť případná transformace může změnit charakter odchylek původních dat od hodnoceného modelu ANOVA.



# Analýza rozptylu - ANOVA

## *Omezení aplikace ANOVA lze řešit*

• **Chybějící data.** Vážným problémem jsou chybějící údaje o celé skupině kombinací testovaných látek, například u faktoriálních pokusů, kdy je znemožněno hodnocení experimentu jako celku.

• **Různé počty opakování** Jde o typický jev pro experimentální datové soubory. Při různých počtech opakování v experimentálních variantách jsou testy ANOVA citlivější na nenormalitu dat. Pokud jsou počty opakování zcela odlišné (až na řádové rozdíly), je nutno použít neparametrické techniky nebo analýzu rozptylu nevyvážených pokusů.

• **Odlehlé hodnoty.** Ojedinelé odlehlé hodnoty musí být před parametrickou analýzou rozptylu vyloučeny.

• **Nedostatek nezávislosti mezi rezidui modelu.** Jde o závažný nedostatek, zkreslující výsledek F-testu. Velmi často je tato skutečnost důsledkem špatného provedení nebo naplánování experimentu.

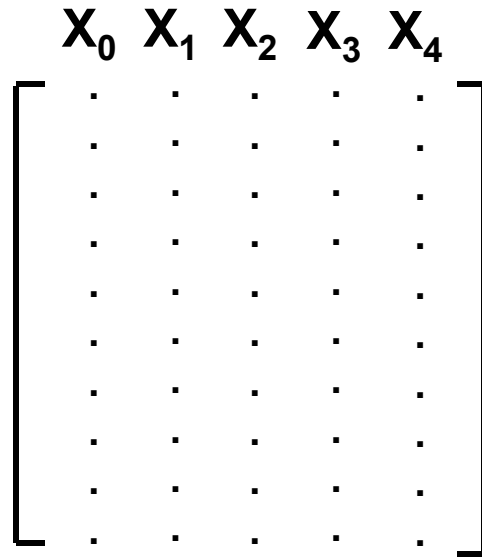
• **Nehomogenita rozptylu.** Velmi častý nedostatek experimentálních dat, často související s nenormalitou rozložení nebo s odlehlými hodnotami.

• **Nenormalita dat.** I v tomto případě lze situaci upravit vyloučením odlehlých hodnot nebo normalizující transformací.

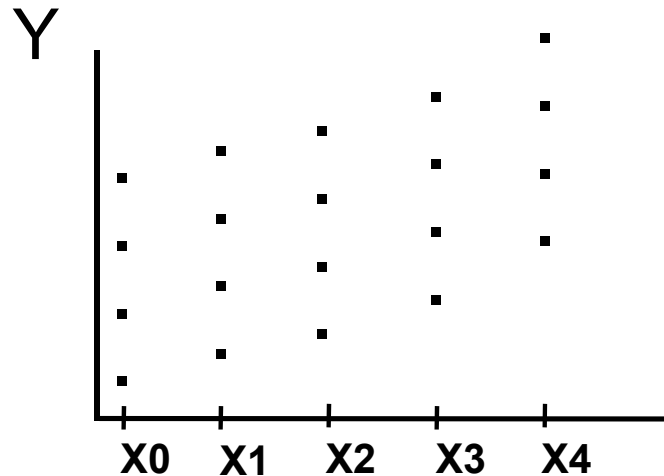
• **Neadditivita kombinovaného vlivu více pokusných zásahů.** Tuto situaci lze testovat jednak speciálními testy aditivity nebo přímo F testem kontrolujícím významnost vlivu interakce pokusných zásahů. Při významné interakci je nutné prozkoumat především její charakter ve vhodném experimentálním uspořádání.

# Modely analýzy rozptylu

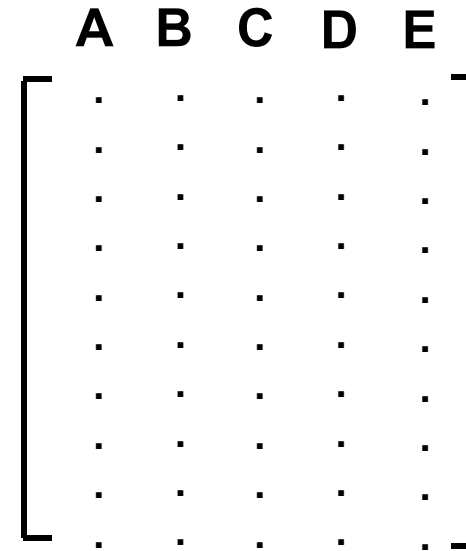
## Model I. Pevný model



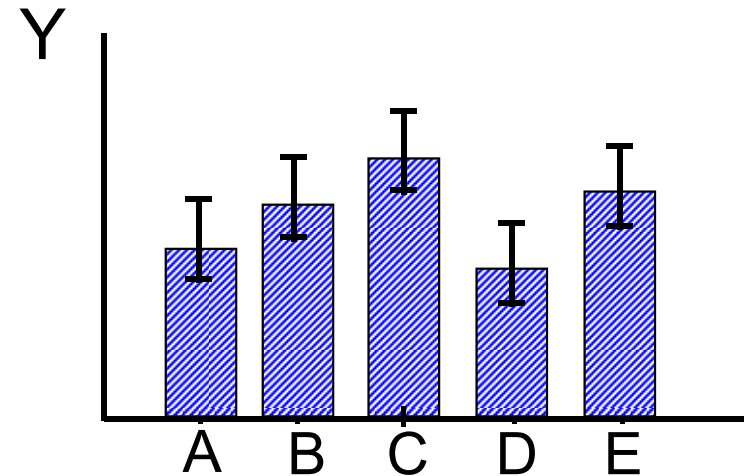
$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$



## Model II. Náhodný model



$$y_{ij} = \mu + A_i + \varepsilon_{ij}$$



# ANOVA – základní výpočet



- Základním principem ANOVY je porovnání rozptylu připadajícího na:
  - Rozdělení dat do skupin (tzv. effect, variance between groups)
  - Variabilitu objektů uvnitř skupin (tzv. error, variance within groups), předpokládá se, že jde o náhodnou variabilitu (=error)

## 1. Variabilita mezi skupinami

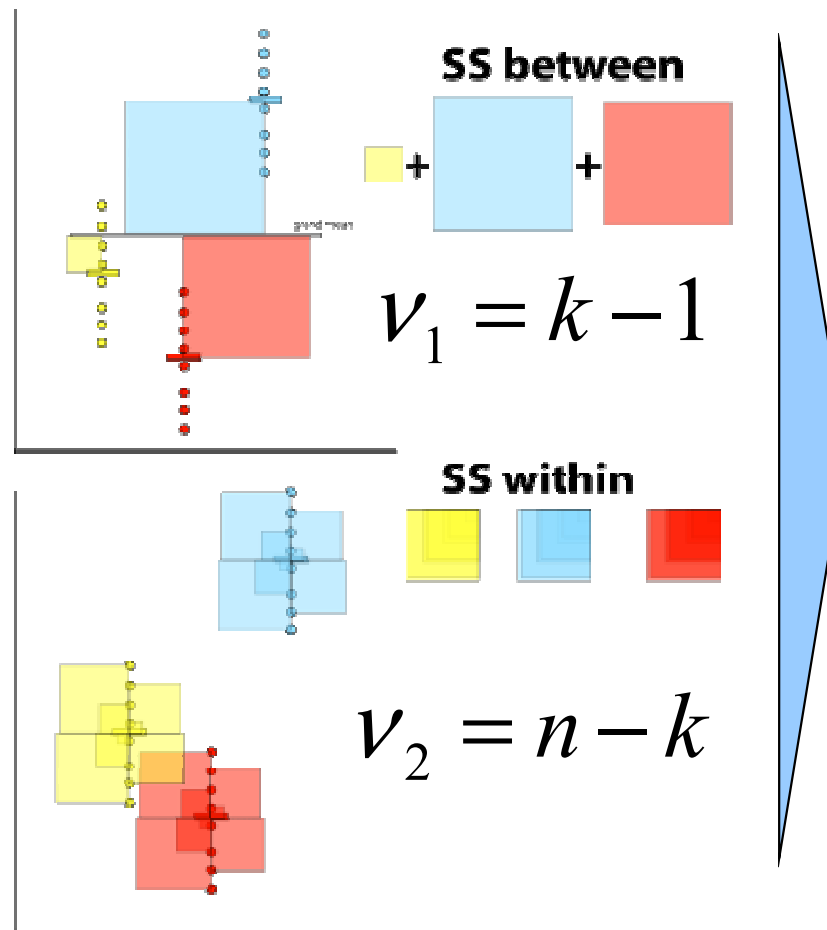
Rozptyl je počítán pro celkový průměr (tzv. grand mean) a průměry v jednotlivých skupinách dat

Stupně volnosti jsou odvozeny od počtu skupin (= počet skupin -1)

## 2. Variabilita uvnitř skupin

Rozptyl je počítán pro průměry jednotlivých skupin a objekty uvnitř příslušných, celková variabilita je pak sečtena pro všechny skupiny

Stupně volnosti jsou odvozeny od počtu hodnot (= počet hodnot - počet skupin)



$$F = \frac{\text{between\_groups}}{\text{within\_groups}}$$

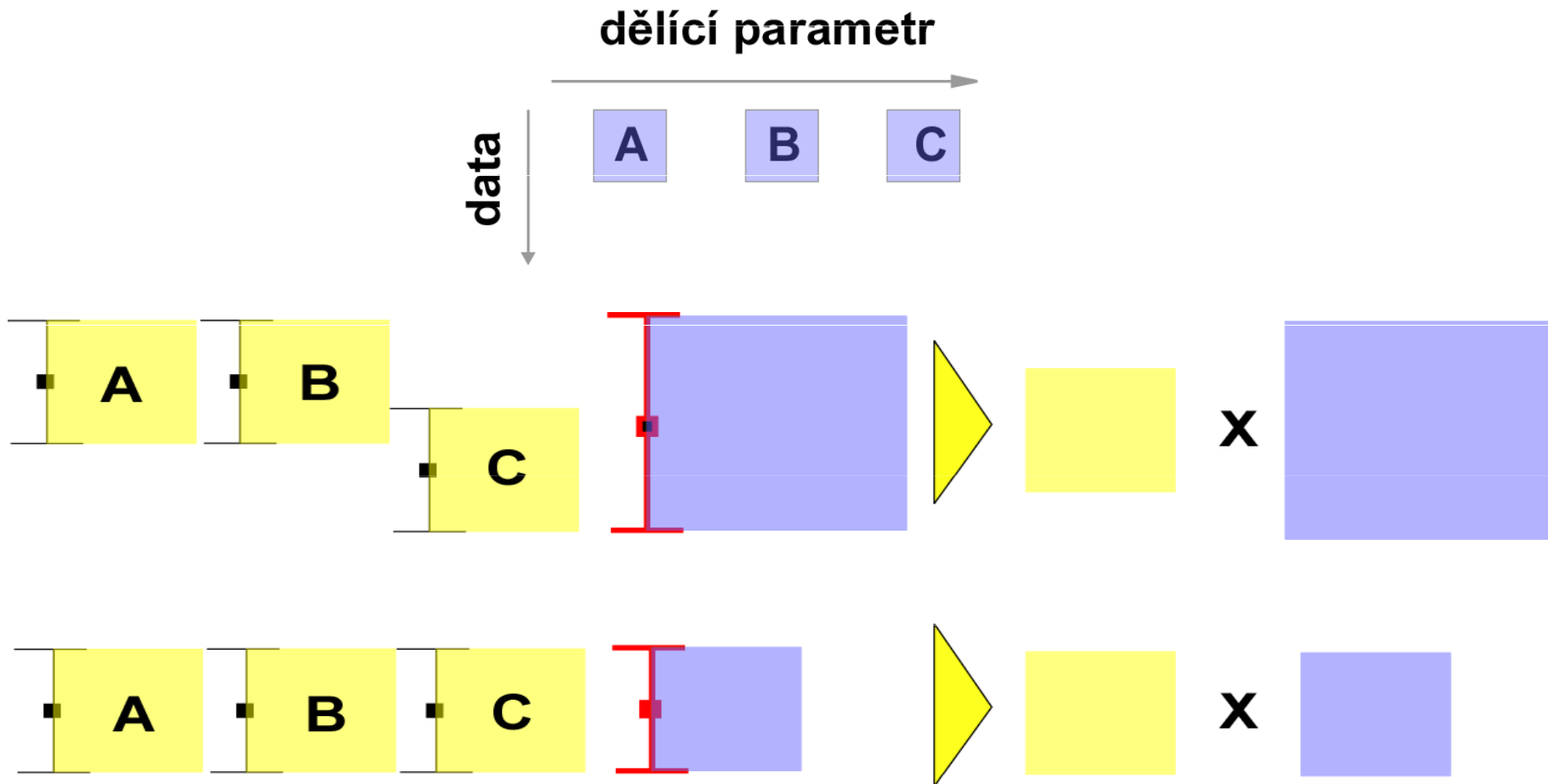
Výsledný poměr (F) porovnáme s tabulkami F rozložení pro  $v_1$  a  $v_2$  stupňů volnosti

SS=sum of squares

# Jednoduchý ANOVA design



Nejjednodušším případem ANOVA designu je rozdělení na skupiny podle jednoho parametru.



# Nested ANOVA

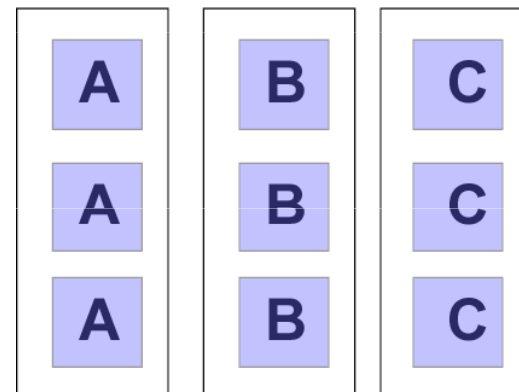


- Rozdělení skupin na náhodné podskupiny (např. opakování experimentu)
- Cílem je zjistit, zda data v jedné skupině nejsou pouhou náhodou
- Nejprve je testována shoda podskupin v hlavních skupinách,
  - pokud jsou shodné, je vše v pořádku
  - pokud nejsou, stále lze zjišťovat, zda se variabilita uvnitř hlavních skupin liší od celkové variability

## jednoduchá ANOVA



## nested ANOVA



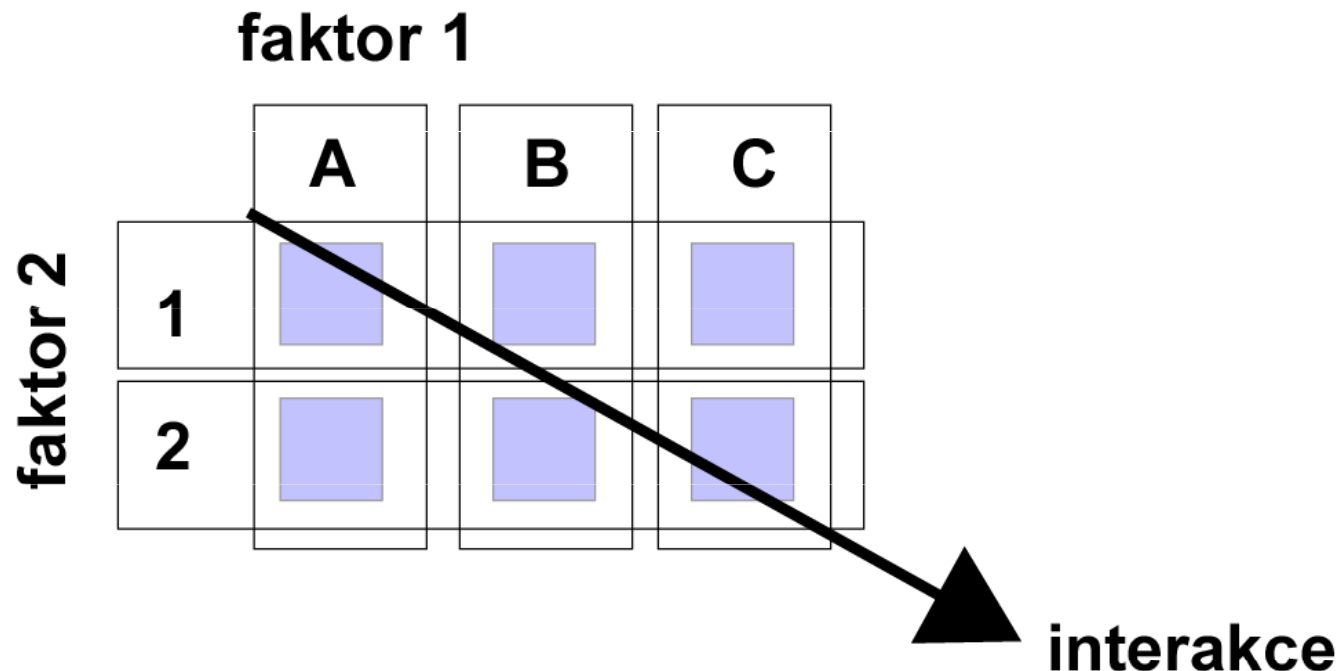
# Two way ANOVA



Pro rozdělení do kategorií je zde více parametrů

Na rozdíl od nested ANOVY nejde o náhodná opakování experimentu, ale o řízené zásahy (např.vliv pH a koncentrace O<sub>2</sub>)

Kromě vlivu hlavních faktorů se uplatňuje i jejich interakce



# Modely analýzy rozptylu - základní výstup

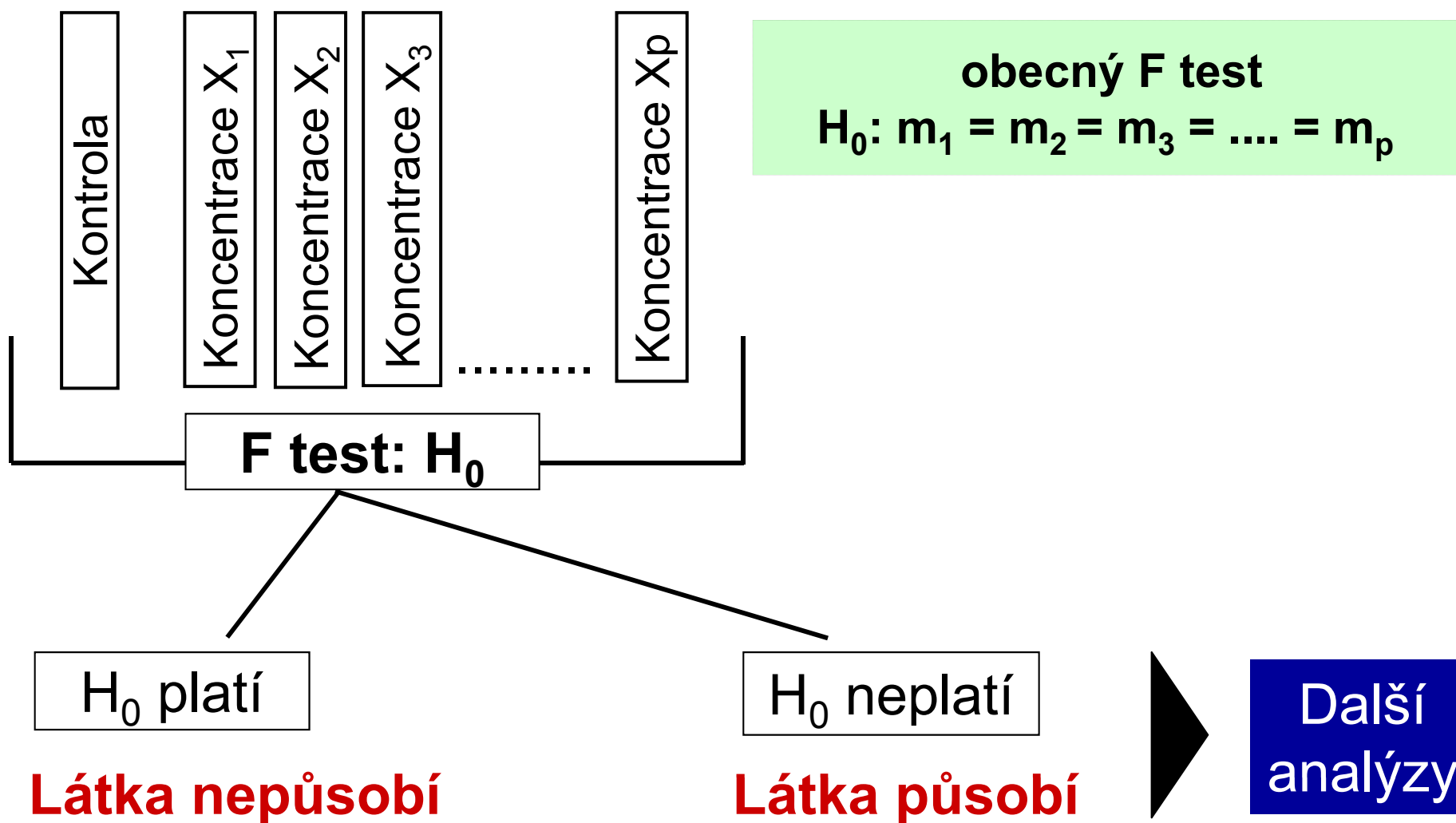
*Základním výstupem analýzy rozptylu je  
Tabulka ANOVA - frakcionace komponent rozptylu*

Zdroj rozptylu	St. v.	SS	MS	F
Pok. zásah (mezi skupinami)	a - 1	$SS_B$	$SS_B/(a - 1)$	$MS_B/MS_E$
Uvnitř skupin	N - a	$SS_E$	$SS_E/(N - a)$	
Celkem	N - 1	$SS_T$		

$SS_B/SS_T$   Kvantifikovaný podíl rozdílu mezi pokusnými zásahy na celkovém rozptylu

$MS_B/MS_T$   Statistická významnost rozdílu

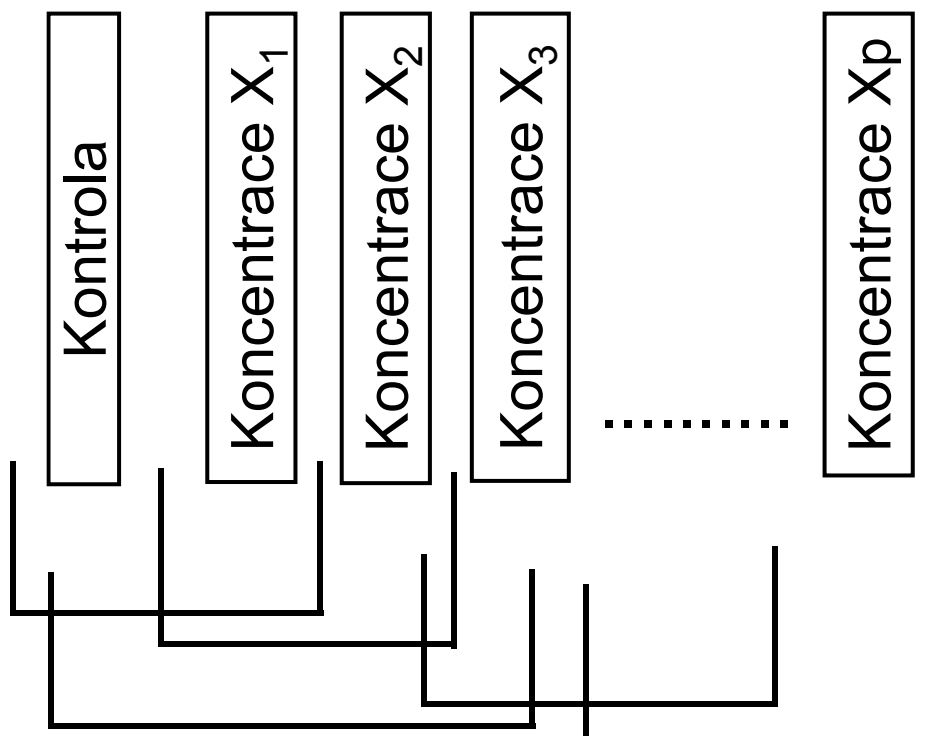
# Analýza rozptylu - obecný F test





# Analýza rozptylu - Testy kontrastů

ANOVA:  $H_0$  zamítnuta  
Testy kontrastů



Rozdíly v smysluplných  
kombinacích ?

Plánované

Neplánované

Pro srovnání variant  
s kontrolou

Testování kontrastů  
"Multiple range testy"

Parametrické

Neparametrické

# Příklad: Anova - One way



Dávka rostlinného stimulantu (0, 4, 8, 12 mg/l)

A = 4 ; n = 8

## I. ANOVA

Bartlett's test: P = 0,9847

K-S test: P = 0,482 - 0,6525 pro jednotlivé kategorie

Source	D. f.	SS	MS	F
Between Groups	3	305,8	101,9	8,56
Within Groups	28	322,2	11,9	
Total (corr.)	31	638,0		

## II. Multiple Range Test

NKS -test

Level	Average	Homogenous Groups
0	34,8	x
4	41,4	x
12	41,8	x
8	52,6	x

# Srovnání variant v testech

## *Srovnávání variant po celkovém testu ANOVA*

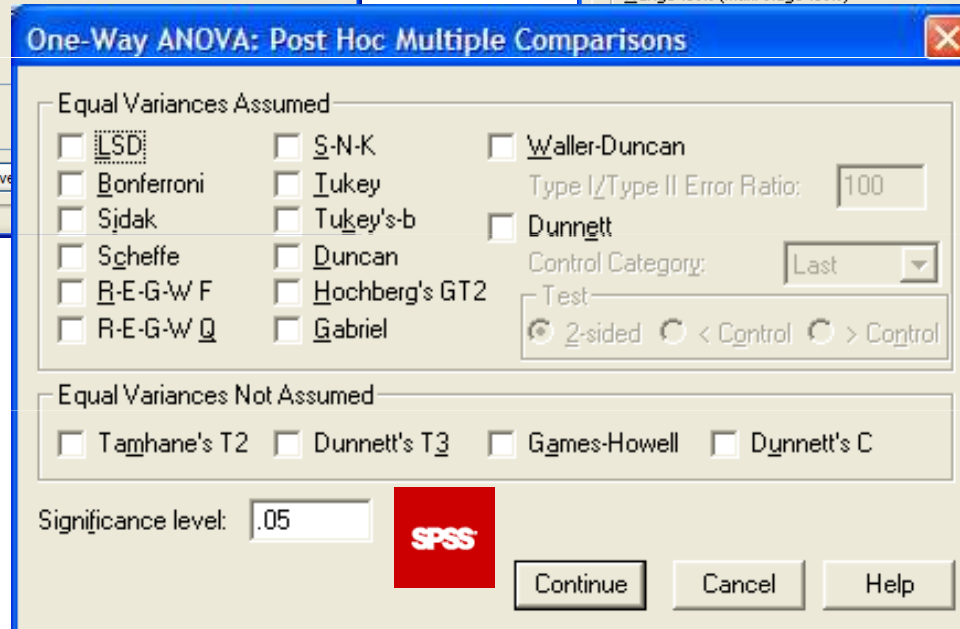
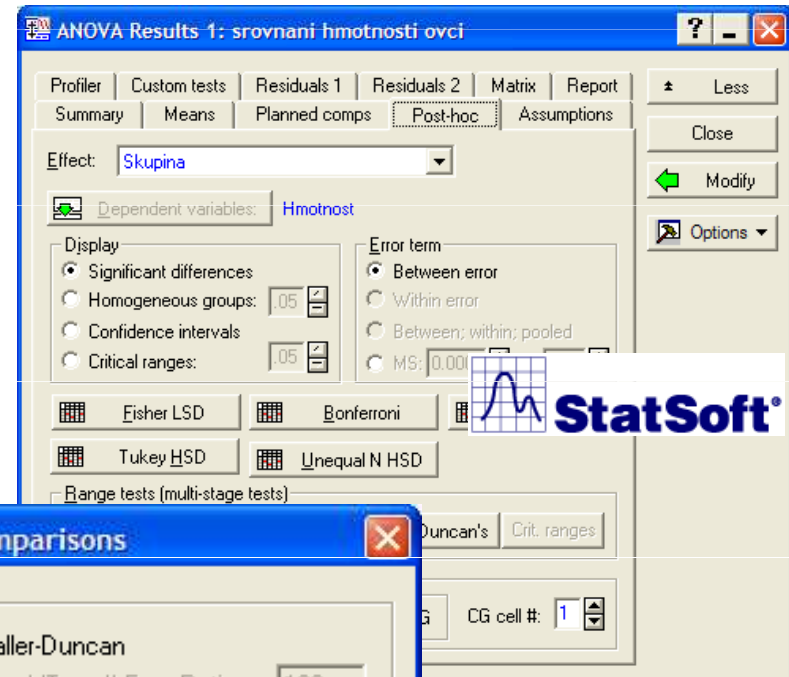
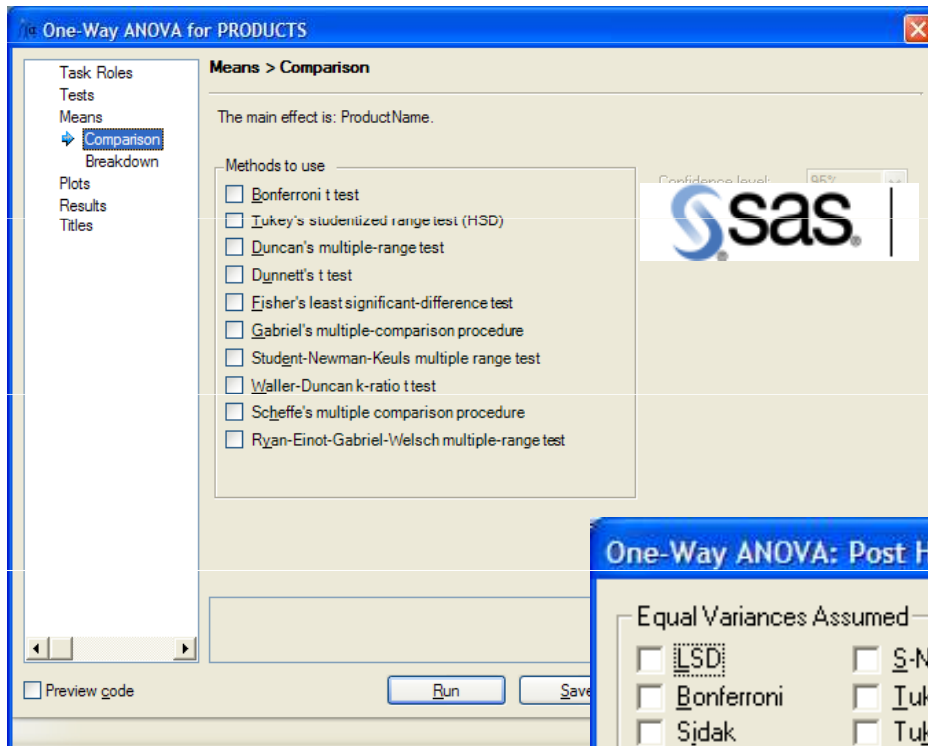
Mnoho existujících algoritmů není vhodných pro konkrétní případ

Day and Quin  
Ecological Monographs, 1989

Test	Využití	Poznámka
Dunnett Williams	Srovnání s kontrolou	Ex. i modifikace pro různá n.
ANOVA testy (F)	Orthogonální kontrasty	Plánovaná srovnání
Ryan Q test	Jednoduché kontrasty	Vyhodnocen jako nejlepší test

Testy pro jednoduché kontrasty		
Scheffe	Tukey	LSD
Bonferroni	Dunn-Sidák	Kramer
Testy nevhodné		
Duncan	Student - Newmann-Keuls	Waller-Duncan k ratio

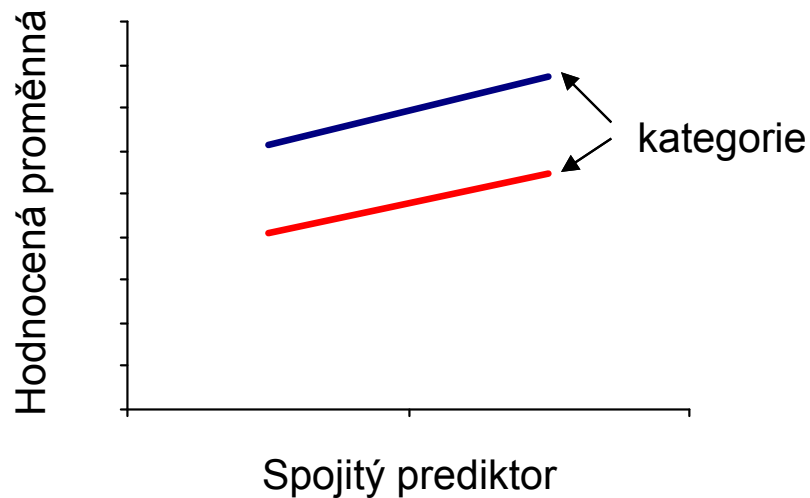
# Řada post-hoc testů v různých SW



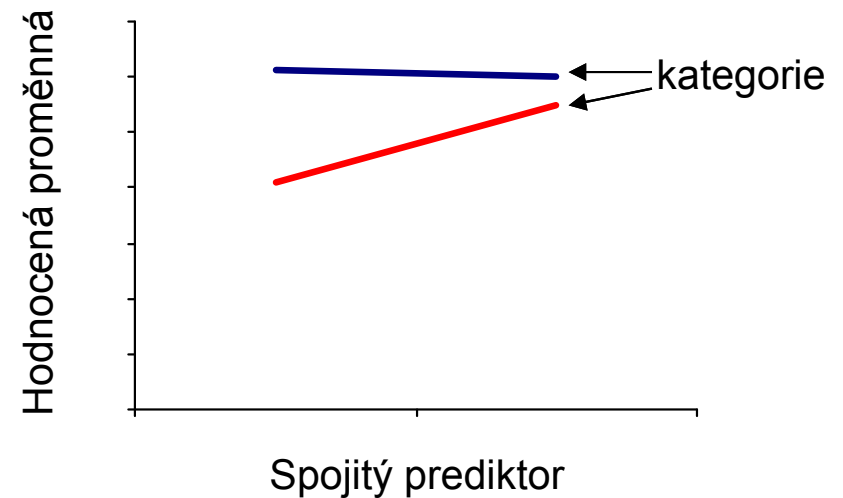
# ANCOVA



- Rozšíření ANOVA
- Současná analýza kategoriálních a spojitých prediktorů
- Testování hypotézy paralelismu regresních vztahů

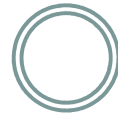


Kategorie pacientů (pokusný zásah)  
neovlivňuje vztah proměnných



Kategorie pacientů (pokusný zásah)  
ovlivňuje vztah proměnných

# Korelace a regrese



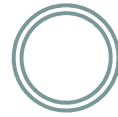
- Korelační analýza je využívána pro vyhodnocení míry vztahu dvou spojitých proměnných. Obdobně jako jiné statistické metody, i korelace mohou být parametrické nebo neparametrické
- Regresní analýza vytváří model vztahu dvou nebo více proměnných, tedy jakým způsobem jedna proměnná (vysvětlovaná) závisí na jiných proměnných (prediktorech). Regresní analýza je obdobně jako ANOVA nástrojem pro vysvětlení variability hodnocené proměnné

# Korelace



- K měření těsnosti lineárního vztahu 2 spojitých proměnných
  - $r = 0 \rightarrow$  nekorelované**
  - $r > 0 \rightarrow$  kladně korelované**
  - $r < 0 \rightarrow$  záporně korelované**
- $H_0$ : proměnné  $X, Y$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny  
( $r = 0$ )  
 $H_A$ : proměnné  $X, Y$  nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny  
( $r \neq 0$ )
- Parametrický korelační koeficient:  
**Pearsonův kor. koef.** (dvourozměrné normální rozložení)
- Neparametrické korelační koeficienty:  
**Spearmanův (pořadový) kor. koef., Kendallovo tau.**

# Jednoduchá lineární regrese



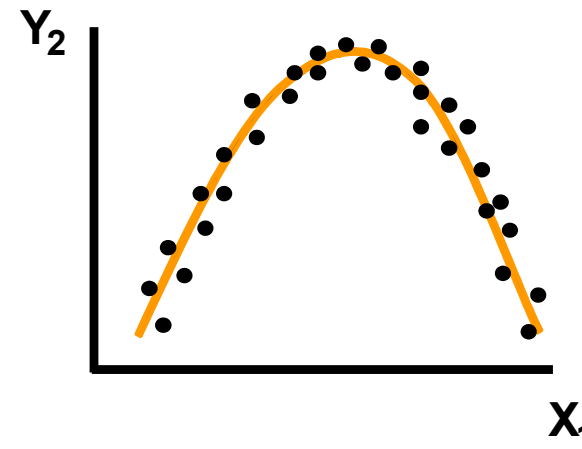
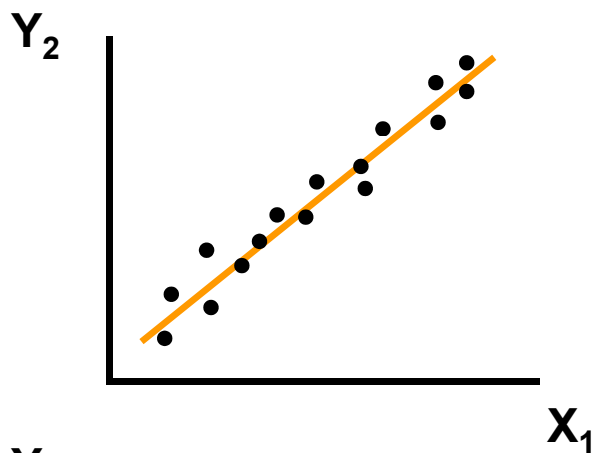
- V případě existence vzájemného vztahu (korelace) lze tento vztah podrobněji popsat.
- Cíl regresní analýzy: popsat závislost hodnot proměnné Y na hodnotách proměnné X.
- V případě lineární regrese je tento popis dán lineárním modelem tvaru  $y = ax + b$ .
- Existují i techniky nelineární regrese.
- Nemáme-li dostatek informací k teoretickému souboru, snažíme se odhadnout typ funkce pomocí dvourozměrného diagramu.



# Základy korelační analýzy - I.



## Korelace – vztah (závislost) dvou znaků (parametrů)



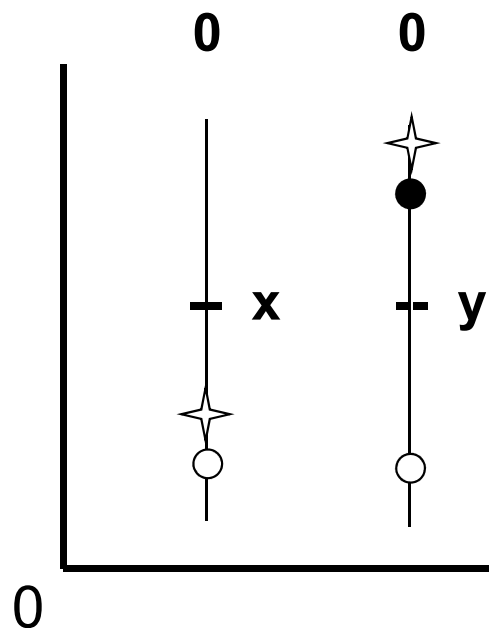
$X_2 \backslash X_1$	ANO	NE
ANO	a	b
NE	c	d

# Základy korelační analýzy - II.

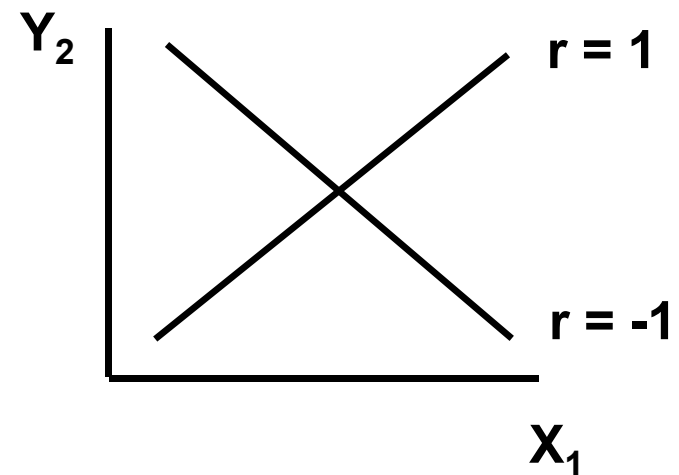
## Parametrické míry korelace

Kovariance

$$\text{Cov}(x, y) = E(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$



Pearsonův  
koeficient korelace



# Základy korelační analýzy - III.



<b>P<sub>i</sub> (zem)</b>	10	14	15	32	40	20	16	50
<b>P<sub>i</sub> (rostl.)</b>	19	22	26	41	35	32	25	40

$I = 1, \dots, n; n = 8; v = 6$

$$r = \frac{Cov(x, y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[ \sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 \right] \left[ \sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2 \right]}} = 0,7176$$

I.  $H_0 : \rho = \phi : \alpha = 0,05$

tab :  $r(v=6) = 0,7076$

II.  $H_0 : \rho = \phi$

$$t = \left[ \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \right] \cdot \sqrt{n - 2} \quad v = n - 2$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{0,7176}{0,6965} \cdot \sqrt{6} = 2,524 \\ \text{tab : } t_{0,975}^{(n-2)} &= 2,447 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} P \\ \leq \end{array} 0,05$$

# Základy korelační analýzy - IV.

## Srovnání dvou korelačních koeficientů (r)

1.  $n_1 = 1258$   
 $r_1 = 0,682$

2.  $n_2 = 462$   
 $r_2 = 0,402$

Krevní tlak x koncentrace kysl. radikálů

$$Z_i = 1.1513 \cdot \log \frac{(1 + r_i)}{(1 - r_i)}$$

$Z_1 = 0,833$

$Z_2 = 0,426$

**Test**  $H_0: \rho_1 = \rho_2 ; \alpha = 0,05$

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}} = \frac{0,407}{0,0545} = 7,461$$

tabulky :  $Z_{0,975} = 1,96$

**7,461 >> 1,96 => P << 0,01**

# Základy korelační analýzy - V.

## Neparametrická korelace (rs)



<b>P<sub>i</sub> v půdě</b>	1	2	3	6	7	5	4	8
<b>P<sub>i</sub> v rostl.</b>	1	2	4	8	6	5	3	7
<b>d<sub>i</sub></b>	0	0	1	2	-1	0	-1	-1

$$i = 1, \dots, n; \quad n = 8 \Rightarrow v = 6$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 0,9048$$

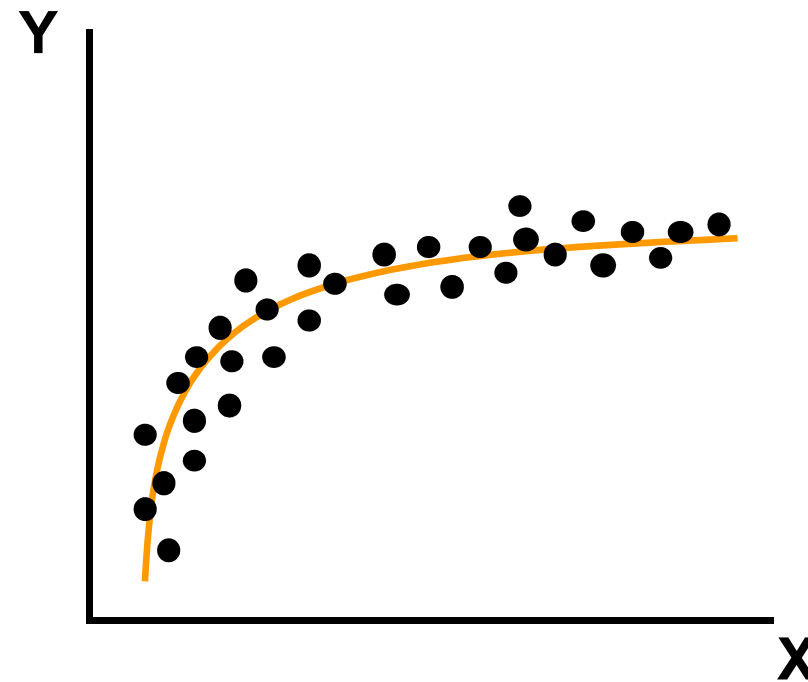
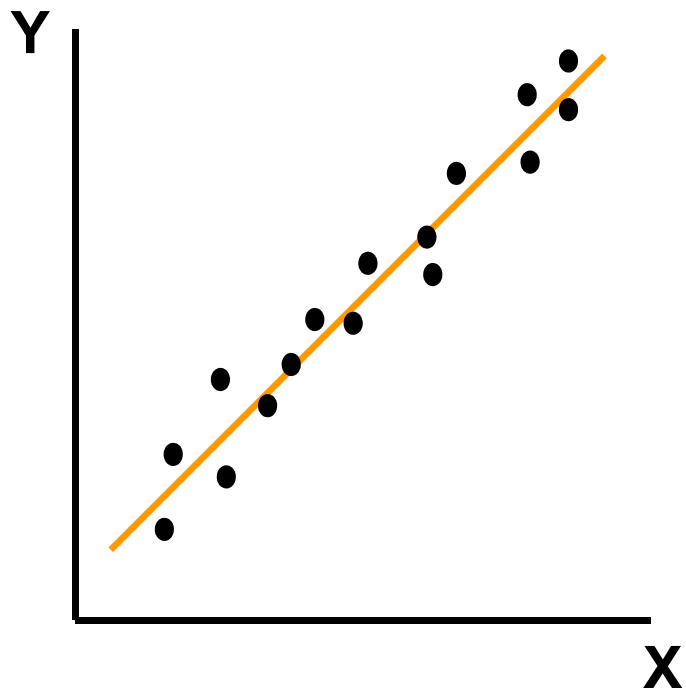
$$\text{tab : } r_s(v = 6) = 0,89$$

<b>Pacient č.</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Lékař 1</b>	4	1	6	5	3	2	7
<b>Lékař 2</b>	4	2	5	6	1	3	7
<b>d<sub>i</sub></b>	0	-1	1	-1	2	-1	0

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 8}{7(49 - 1)} = 0,857$$

**P = 0,358**

# Korelace v grafech I.



Vztahy velmi často implikují funkční vztah mezi Y a X.

$$Y = a + b \cdot X$$

$$Y = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3$$

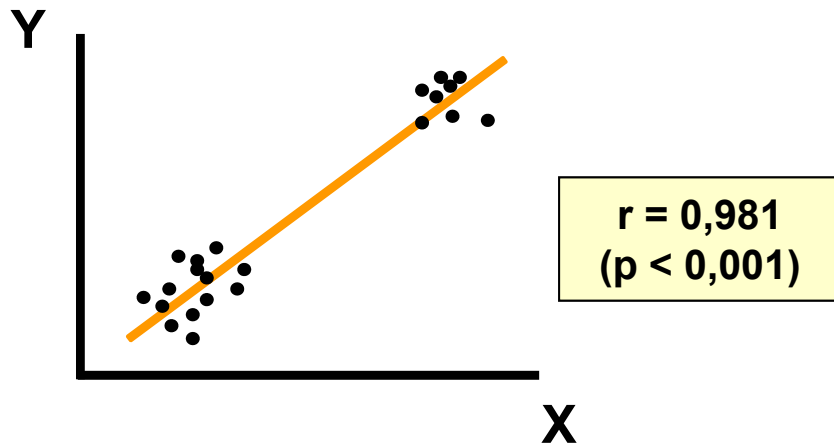
$$Y = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

$$Y = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_1 \cdot X_2$$

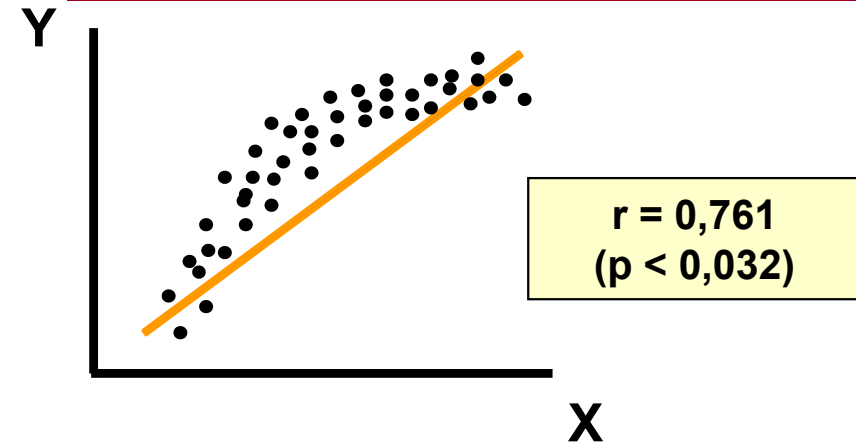
# Korelace v grafech II.



## Problém rozložení hodnot



## Problém typu modelu



## Problém velikosti vzorku

