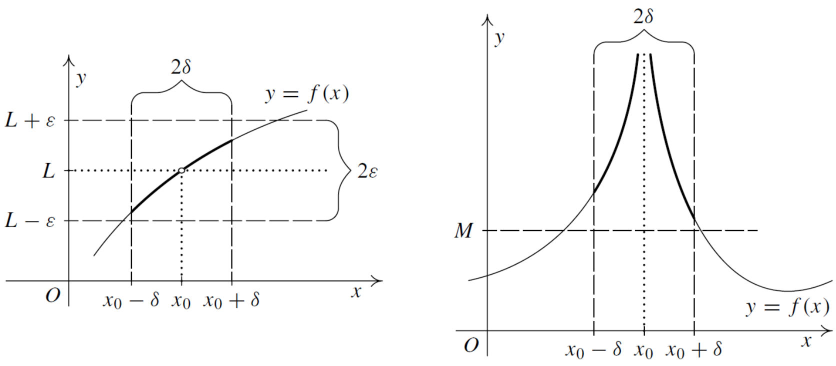
1 Limita a spojitost funkce

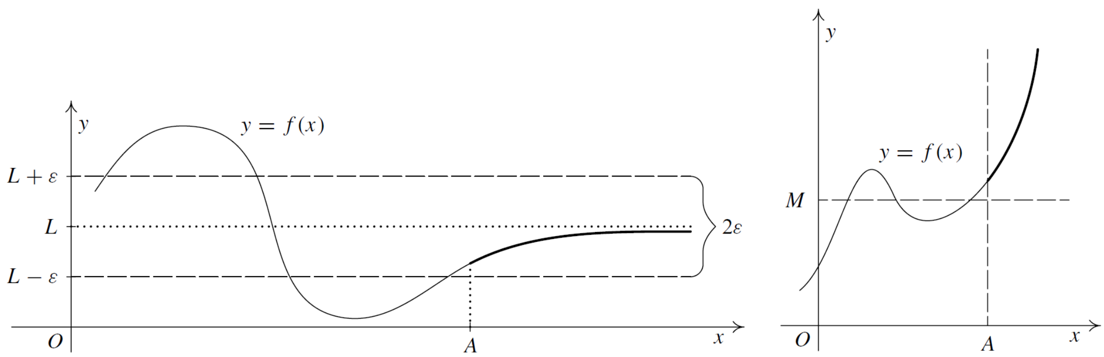
1.1 Limita funkce

Limita funkce je lokální vlastnost funkce, která popisuje chování (hodnoty) funkce v ryzím okolí bodu,[i] v němž limitu zkoumáme. Je tedy jasné, že limita sice může, ale rovněž nemusí nabývat funkční hodnoty funkce v bodě, ve kterém limitu vyšetřujeme. Může nastat dokonce případ, že funkce má limitu v bodě ve kterém není definována.

Intuitivní zavedení limity ve vlastním bodě x_0 (tedy takovém $x_0 \in \mathbb{R}$) ukazuje Obrázek 1. Podobně lze intuitivně porozumět limitě funkce v nevlastním bodě $x_0 = \pm\infty$, jak je znázorněno na Obrázku 2.



Obrázek 1: Grafické znázornění limit ve vlastním bodě x_0. Vlevo má limita ve vlatním bodě x_0 hodnotu $L \in \mathbb{R}$, jedná se tedy o tzv. vlastní limitu. Vpravo je znázorněna limita ve vlastním bodě funkce, kde má však hodnotu ∞, jedná se o tzv. nevlastní limitu.



Obrázek 2: Grafické znázornění limit v nevlastním bodě x_0. Vlevo má limita v nevlatním bodě hodnotu $L \in \mathbb{R}$, jedná se tedy o tzv. vlastní limitu. Vpravo je znázorněna limita v nevlastním bodě funkce, kde má hodnotu ∞, jedná se o tzv. nevlastní limitu.

[i] Ryzí okolí bodu je takové okolí bodu, které nezahrnuje přímo tento bod.

Pokud má funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0 limitu rovnu L, zapisujeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{1}$$

Z definice limity však vyplývá, že funkce se musí nabývat v celém okolí bodu x_0 hodnot okolo L a to jak v okolí levém (takovém, kde je $x < x_0$) i pravém (tj. pro hodnoty $x > x_0$). Pro taková okolí bodů se pak definují jednostranné limity zprava (2) a zleva (3).

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \tag{2}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \tag{3}$$

Limita v bodě x_0 pak existuje pouze tehdy, je-li v bodě x_0 limita zprava a zleva stejná.

1.2 Spojitost funkce

S pojmem limity se poměrně úzce pojí i pojem spojitosti funkce. Spojitost funkce je možné samozřejmě chápat zcela intuitivně. Matematicky se však definice spojitosti opírá o tvrzení, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 tehdy, pokud je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{4}$$

Podobně jako u limity je možné definovat funkci spojitou zprava a zleva.

Rovněž je poměrně zřejmé, že funkce je spojitá na daném intervalu, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu podle kritéria (4).

1.3 Výpočty limit funkcí

Pro výpočty limit budeme využívat jednoduché početní operace, které platí pro limity. Jsou jimi zejména pravidla pro sčítání, odečítání, násobení a dělení limit a limita absolutní hodnoty funkce. Označme si pro jednoduchost $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = G$, pak platí následující vztahy:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G \tag{5}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G \tag{6}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{pokud } G \neq 0 \tag{7}$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |F| \tag{8}$$

Při výpočtech limit můžeme narazit na několik typů případů. Dle toho, o jaký případ limity se jedná pak využijeme daný postup. Následuje přehled těchto případů s komentovaným řešením.

Nejjednodušším případem je **limita funkce ve vlastním bodě, ve kterém je daná spojitá funkce definována**. V takovém případě je výpočet limity omezen na výpočet funkční hodnoty funkce v tomto bodě.

Příklad 1. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 1}{1 - x^2}$$

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{x^3-3x^2-1}{1-x^2}$ je v bodě $x = 2$ definována a je v tomto bodě spojitá. Proto stačí dosadit do funkčního předpisu a vypočítat limitu funkce:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 1}{1 - x^2} = \frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 - 1}{1 - 2^2} = \frac{-5}{-3} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

V případě, že počítáme **limitu funkce ve vlastním bodě, ve kterém však není funkce definována** (tzn. v bodě nespojitosti), může nastat několik situací:

1. Funkci lze postupně upravit tak, aby byl bod nespojitosti touto úpravou odstraněn. Toho lze využít zejméně u racionálních lomených funkcí, ale i u jiných případů. Limitu funkce pak vypočítáme prostým dosazením do předpisu upravené funkce.

2. V případě, že nelze bod nespojitosti odstranit, může se jednat buď o nevlastní limitu ve vlastním bodě jako na Obrázku 1 (v případě, že jsou si limity zprava a zleva rovny) nebo funkce v daném bodě nemá limitu (pokud jsou jednostranné limity různé).

3. V případě, že se jedná o funkci, ve které vystupují goniometrické funkce, pokusíme se ji upravit tak, abychom mohli využít vlastnosti limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{9}$$

Příklad 2. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

Řešení. Vidíme, že ani jedna část součtu není v bodě $x = 1$ definována. Proto nelze užít přímočarého výpočtu limity. Pokusíme se ale funkci upravit tak, aby byl bod nespojitosti $x = 1$ odstraněn. Odečtením obou zlomků a úpravou dostaneme:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(1+x+x^2) - 3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

Kvadratický trojčlen v čitateli se dá snadno rozložit jako $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{1+x+x^2}$$

Tato upravená limita je již v bodě $x = 1$ spojitá a můžeme vypočítat její hodnotu:

$$-\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = \underline{\underline{-1}}$$

Příklad 3. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}$$

Řešení. Je zřejmé, že limita není v bodě $x = 1$ definována, protože jmenovatel zlomku by byl v takovém případě roven nule. Pokusíme se tedy odstranit bod nespojitosti $x = 1$ úpravou funkce. Jako mírnou nepříjemnost můžeme vnímat odmocninu ve jmenovateli. Úpravu zlomku proto zahájíme jeho usměrněním. Celý zlomek proto rozšíříme výrazem $(\sqrt{x}+1)$, abychom se zbavili zlomku ve jmenovateli. Zároveň upravíme čitatel zlomku do součinového tvaru vytknutím.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x \cdot (x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x \cdot (x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

Po krácení je již odstraněn bod nespojitosti a limitu vypočteme dosazením:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x \cdot (x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x \cdot (\sqrt{x}+1) = 1 \cdot (\sqrt{1}+1) = \underline{\underline{2}}$$

Příklad 4. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x-2}{x-\sqrt{2}}$$

Řešení. Funkce, jejíž limitu máme vypočítat není v bodě $x = \sqrt{2}$ definována. Navíc neexistuje možnost, jak tuto funkci racionálně upravit tak, aby byl tento bod nespojitosti odstraněn. Určíme proto jednostranné limity v bodě $x = \sqrt{2}$. Myšlenkovým dosazením čísla jen nepatrně většího, než je $\sqrt{2}$ (pro výpočet limity zprava) obdržíme v čitateli zlomku záporné číslo a ve jmenovateli velmi malé kladné číslo (označíme si jej 0_+. Záporné číslo dělené velmi malým kladným číslem se intuitivně blíží $-\infty$:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x-2}{x-\sqrt{2}} = \frac{\ominus}{0_+} = -\infty$$

Podobně učiníme i pro výpočet limity zleva:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x-2}{x-\sqrt{2}} = \frac{\ominus}{0_-} = +\infty$$

Jednostranné limity nejsou shodné a proto můžeme říci, že limita $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x-2}{x-\sqrt{2}}$ neexistuje.

Příklad 5. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2 + 2x^4 + x^6}{x^6}$$

Řešení. Uvedená funkce není v bodě $x = 0$ definována. Pokusíme se ji upravit a tuto nespojitost odstranit. Využijeme vytknutí z mnohočlenu v čitateli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2 + 2x^4 + x^6}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (4 + 2x^2 + x^4)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{4 + 2x^2 + x^4}{x^4}$$

Je zřejmé, že bod nespojistosti v bodě $x = 0$ není odstranitelný úpravami. Přistoupíme proto k výpočtu jednostranných limit podobně, jako tomu bylo v předchozím příkladu. Dosazením čísla jen o málo většího než je nula (0_+) obdržíme limitu zprava:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4 + 2x^2 + x^4}{x^4} = \frac{4 + 2 \cdot (0_+)^2 + (0_+)^4}{(0_+)^4} = \frac{4}{0_+} = +\infty$$

Podobně pro limitu zleva[ii]:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4 + 2x^2 + x^4}{x^4} = \frac{4 + 2 \cdot (0_-)^2 + (0_-)^4}{(0_-)^4} = \frac{4}{0_+} = +\infty$$

Jednostranné limity jsou totožené a proto můžeme říci, že funkce $f(x) = \frac{4x^2+2x^4+x^6}{x^6}$ má v bodě $x = 0$ nevlastní limitu rovnou $+\infty$ a psát $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+2x^4+x^6}{x^6} = +\infty$.

[ii] Uvědomme si, že i velmi malé číslo umocněné na sudou mocninu je sice stále velmi malé, ale stane se kladným.

Příklad 6. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$$

Řešení. Výraz napovídá, že se bude dát využít znalost limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Musíme však zlomek nejdříve do takového tvaru upravit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\frac{2}{5}\cdot 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$$

Nyní využijeme metodu substituce.[iii] Položíme $t = 5x$. Vzhledem k tomu, že $x \to 0$ a $t = 5x = 5 \cdot 0 = 0$, pak i $t \to 0$ a můžeme psát dále:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = |t = 5x| = \lim_{t\to 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{5}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

Příklad 7. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - \sin x}{x^2 + 2x}$$

Řešení. Zadaná funkce není v bodě $x = 0$ definována. Je však poměrně dobře upravitelná – úpravu provedeme vytknutím $\sin x$ v čitateli a x ve jmenovateli. Obdržíme tak:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - \sin x}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2)}$$

Nyní je jasné, že se bude dát využít pravidlo o limitě $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, nicméně, funkce obsahuje i další členy. Využijeme tedy příjemné vlastnosti limity součinu – limta součinu dvou funkcí je totiž rovna součinu limit jednotlivých činitelů, proto můžeme jednoduše vypočítat, že:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Výpočty limit v nevlastních bodech (Obrázek 2) probíhají mírně odlišně. Můžeme *de facto* rozlišit několik typů těchto limit:

1. Limity podílu racionálních lomených funkcí vyčíslíme nejčastěji tak, že funkce upravíme na podíl dvou polynomů a následně celý zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{x^n}$, kde n je stupeň nejvyšší přítomné mocniny v rámci celého zlomku. Využijeme tak vlastnosti limity:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \tag{10}$$

2. V případě rozdílu odmocnin lze s limitou nakládat jako se zlomkem a odmocnin se v čitateli příslušným rozšířením rozdílu.

Obecně lze říci, že pro výpočet limit v nevlastních bodech funkcí v podílovém tvaru je možné využít i myšlenkových úvah. Pokud totiž funkce v čitateli roste pomaleji, než funkce ve jmenovateli (za předpokladu, že obě funkce jsou monotónní a divergují) je jasné, že v limitě $x \to \infty$ bude výraz v čitateli nepředstavitelně nižší, než ve jmenovateli a naopak. Vše osvětlíme na následujících příkladech.

Příklad 8. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{4x^3 + 4x^2 + 5}$$

[iii] Není nezbytně nutné využít metodu substituce, intuitivně je jasné, že pokud platí $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, pak platí i $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$. Metoda substituce se používá zejména ve složitějších případech.

Řešení. Jedná se limitu funkce, která je podílem dvou polynomů. Nejvyšší mocnina v celé funkci je mocnina řádu 3. Celý výraz v limitě tedy rozšíříme $\frac{1}{x^3}$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2x-1}{4x^3+4x^2+5}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}}$$

Nyní využijeme vlastnosti limity $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$, tím veškeré zlomky tvaru $\frac{a}{x^n}$ v čitateli i jmenovateli můžeme prohlásit za nulové a psát tak výslednou limitu funkce:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Příklad 9. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5})$$

Řešení. Jedná se o rozdíl odmocnin. Upravíme limitu rozšířením tak, aby byla v podílovém tvaru – rozšíříme výrazem $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5}$ tak, aby v čitateli byly odstraněny odmocniny:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5})\cdot\frac{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x)-(x^2-5)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5}}$$

Tento podílový tvar upravíme a z mocnin ve jmenovateli vytkneme x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x)-(x^2-5)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+5}{x\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}}+x\cdot\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}$$

Výraz již jen rozšíříme $\frac{1}{x}$ a vypočítáme hodnotu limity za užití (10):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+5}{x\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}}+x\cdot\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}=\frac{-3}{1+1}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

Poměrně často se při výpočtech limit setkáme s tzv. **neurčitými výrazy**. Jedná se o výrazy typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Pokud se jedná o případy, které umíme upravit výše popsanými způsoby, využijeme je. V jakémkoliv případě neurčitého výrazu lze ale použít i **L'Hospitalovo pravidlo**, které využívá derivací.

Na závěr této kapitoly uvedeme ještě několik řešených příkladů.

Příklad 10. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$$

Řešení. Limita je neurčitého typu, nicméně funkci tangens lze přepsat tak, aby se dalo využít vlastnosti limity (9). Výpočet je pak přímočarý:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=\underline{\underline{1}}$$

Příklad 11. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$$

Řešení. Je evidentní, že funkce, jejíž limitu chceme počítat není v bodě $x = O$ definována. Pokusíme se ale upravit čitatel zlomku v limitě roznásobením.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^3+11x^2+6x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(6x^2+11x+6)}{x}$$

Po krácení x obdržíme funkci, která již nemá bod $x = 0$ jako bod nespojitosti a limitu lze vypočítat dosazením do předpisu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(6x^2+11x+6)}{x} = \lim_{x\to 0}(6x^2+11x+6) = \underline{\underline{6}}$$

Příklad 12. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$$

Řešení. Jmenovatel zlomku v limite je roven nule a proto funkce není v bodě $x = 16$ definována. Je třeba ji proto příslušně upravit. Využijeme notoricky známého vztahu $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$ na jmenovatel zlomku. Obdržíme tak:

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}+2)(\sqrt[4]{x}-2)} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{\sqrt[16]{x}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{\underline{\underline{4}}}$$

Příklad 13. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\cdot\sqrt{x-1}}{x^2-9}$$

Řešení. Funkce, jejíž limitu chceme počítat není v bodě $x = 3$ definována. Bude třeba provést úpravy tak, aby ze jmenovatele pokud možno zmizel činitel $(x-3)$, který nespojitost způsobuje. Dosáhneme toho standardní úpravou, kdy odstraníme odmocniny:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\cdot\sqrt{x+1}}{x^2-9} \cdot \frac{\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1})}$$

Upravíme výraz v čitateli a vykrátíme jej s problematickou částí jmenovatele:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+13-4\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3} \frac{-3x+9}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1})} =$$

$$= -3\cdot\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1})} = -3\cdot\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x+3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1})}$$

Tento výraz, jakkoliv vypadá nepříjemně, je již v bodě $x = 3$ definován a limitu vypočteme dosazením:

$$-3\cdot\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x+3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\cdot\sqrt{x+1})} = -3\cdot\frac{1}{(3+3)\cdot(\sqrt{3+13}+2\cdot\sqrt{3+1})} = -\frac{1}{\underline{\underline{16}}}$$

Příklad 14. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

Řešení. Ve jmenovateli funkce, jejíž limitu máme vypočítat je hodnota $\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = 0$. To je bod ve kterém funkce není definována a proto musíme provést úpravu. Využijeme znalosti vztahů pro dvojnásobné argumenty goniometrických funkcí, konkrétně $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Potom můžeme pokračovat elementárními úpravami:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x + \sin x}$$

Taková funkce je již v bodě $x = \frac{\pi}{4}$ definována a řešíme prostým dosazením:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Příklad 15. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 4x + 7}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

Řešení. Jedná se o limitu v nevlastním bodě z podílu dvou funkcí. Takové limity se dají řešit rozšířením celého zlomku výrazem $\frac{1}{x^n}$, kde n je stupeň nejvyšší mocniny ve výrazu a následně využijeme vlastnosti limity (10). Pohlédneme-li na čitatel zlomku, je nejvyšší mocnina řádu 2. Podobně je tomu (po drobné úpravě) ve jmenovateli (výraz $\sqrt{x^4 - 1}$ je *de facto* mocnina x stupně 2). Z odmocniny ve jmenovateli proto vytkneme x^2 a následně zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 4x + 7}{\sqrt{x^4 - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 4x + 7}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$$

Příklad 16. *Vypočítejme limitu*

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x - 1})$$

Řešení. Jedná se o limitu v nevlastním bodě z rozdílu odmocnin. Využijeme proto rozšíření a zbavení se odmocnin:

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x - (x - 1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}}$$

Takovou limitu lze již řešit tak, že dosadíme do jmenovatele myšlené velké číslo (∞). V takovém případě obdržíme výraz s jedničkou v čitateli a velkým číslem ve jmenovateli, což konverguje k nule:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\infty} + \sqrt{\infty - 1}} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

1.3.1 Cvičení

1. Vypočtete následující limity:

   (a)
   $$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{2x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}) \qquad [\infty]$$

   (b)
   $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} \qquad \left[\frac{1}{4}\right]$$

   (c)
   $$\lim_{x \to 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3} \qquad [6]$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \qquad \left[\frac{3}{2}\right]$$

(e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

(f)

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-2} \qquad [\text{limita neexistuje}]$$

(g)

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} \qquad [-\infty]$$

(h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \tan 2x}{5x} \qquad \left[\frac{1}{5}\right]$$

(i)

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8} \qquad \left[\frac{1}{4}\right]$$

(j)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} \qquad \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

(k)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^4-1}\right) \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

(l)

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8} \qquad \left[\frac{15}{2}\right]$$

(m)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \qquad [4]$$

2. Vypočítejte následující limity:

(a)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-3x+1}{99-x^4} \qquad [0]$$

(b)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^4-4x^3+2x^2-x-1}{8x^4-12x^3-x^2-x-10} \qquad \left[\frac{5}{8}\right]$$

(c)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}} \qquad [\infty]$$

(d)

$$\lim_{x\to \infty} (\sqrt{3x^2+2x-4}-\sqrt{3x^2-x+2}) \qquad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}) \qquad \left[-\frac{\sqrt{1}}{2}\right]$$

(f)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \qquad [0]$$

(g)

$$\lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-10x+1}) \left[\frac{5}{3}\right]$$

(h)

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{x^5-1}{x^4+1} \qquad [-\infty]$$

2 Derivace funkce

2.1 Pojem derivace funkce

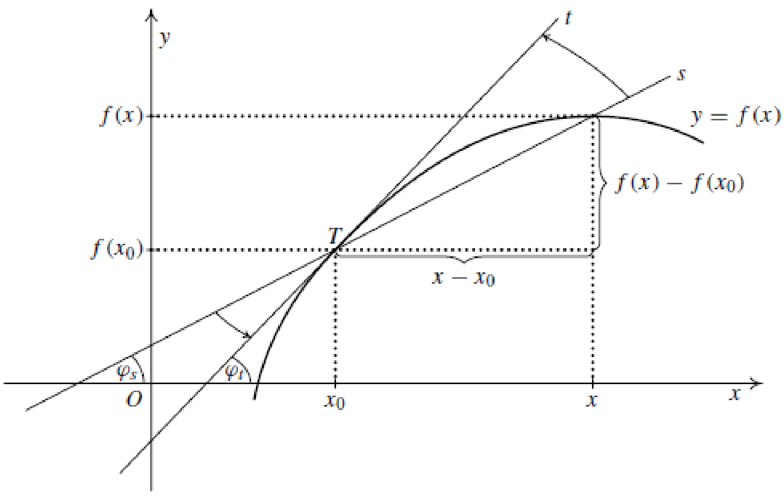
Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 (značíme $f'(x_0)$) je důležitý pojem, který je obecně zaveden definicí:

$$f'(x_0) = \lim x \to x_0 \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{11}$$

Pokud označíme $x - x_0 = \Delta x$, můžeme definici přepsat jako:

$$f'(x_0) = \lim \Delta x \to 0 \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{12}$$

Geometrický význam derivace v bodě je ten, že se *de facto* jedná o směrnici tečny funkce v daném bodě x_0. Lepší ilustraci přinese Obrázek 3, který se vztahuje k definici (11). Derivace je tedy např. mocným nástrojem při vyšetřování průběhu funkce. V této kapitole se však nadále budeme zabývat metodami výpočtů derivací.



Obrázek 3: Geometrický význam derivace funkce v bodě. Ve chvíli, kdy se $x \to x_0$, pak dostává původní sečna význam tečny funkce v bodě.

Většinou nechceme znát derivaci funkce pouze v jednom bodě, ale rádi bychom znali průběh derivace na celém definičním oboru původní funkce. Proto je vhodné nejdřívě vypočítat obecnou derivaci $f'(x)$ nějaké původní funkce $f(x)$ a následně do ní např. dosazovat bod, ve kterém chceme derivaci počítat. Derivace funkce $f'(x)$ je obecně rovněž nějaká funkce. Jak tuto funkci zjistit si ukážeme nyní.

2.2 Výpočty derivací

Výpočty derivací elementárních funkcí, které plynou z definice nejsou nutné, stačí si je osvojit z následující tabulky:

Tabulka 1: Přehled derivací elementárních funkcí. Tyto vztahy platí samozřejmě pouze tam, kde jsou funkce $f(x)$ definovány.

$f(x)$	$f'(x)$
$konst.$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Ne každá funkce je ale funkcí elementární a velmi často se setkáme s funkcemi, které jsou součtem/rozdílem, součinem nebo podílem více funkcí. Označíme-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce a $f'(x)$ a $g'(x)$ jejich derivace a c je libovolná konstanta pak platí:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \tag{13}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{14}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{15}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \tag{16}$$

Někdy můžeme narazit na tzv. složenou funkci. Obecně se jedná o funkci, jejíž argumentem je další funkce, tedy obecně $f(g(x))$. Funkci f nazýváme vnější funkcí a funkci g jako funkci vnitřní. Příkladem takové složené funkce může být např. $\sin(x^2 - 1)$. V tomto případě je vnitřní funkcí $x^2 - 1$ a vnější funkcí funkce sinus. Derivace složené funkce se pak vypočítá jako:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{17}$$

Slovně řečeno, nejdříve derivujeme vnější funkci f, které ponecháme její argument $g(x)$, jaký je v zadání a poté teprve derivujeme funkci vnitřní (tedy argument vnější funkce) $g(x)$.

Výpočty derivací podle uvedených vzorců jsou poměrně mechanickou záležitostí, nicméně, jedná se o delší výpočty (zejména pak úpravy derivovaných výrazů) a proto je třeba počítat pomalu a dávat pozor na elementární chyby.

Příklad 17. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je rozdílem dvou funkcí – x^4 a $\frac{1}{\sqrt{x}}$ budeme ji tedy derivovat jako rozdíl. První funkce je mocninná a jedná se tedy o tabulkovou derivaci. Zlomek však můžeme jako mocninu přepsat, neboť $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ a derivovat rovněž jako tabulkovou derivaci.

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^4 - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 4x^{4-1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = 4x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \underline{\underline{4x^3 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}}}$$

Příklad 18. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je evidentně podíl dvou funkcí a to x^2 a $x^2 - 2$. Proto ji budeme derivovat jako podíl:

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^2 - 2) - x^2 \cdot (x^2 - 2)'}{(x^2 - 2)^2}$$

Derivace funkce x^2 je $2x$ (jedná se o tabulkovou derivaci). Derivace funkce $x^2 - 2$ je rovněž $2x$ neboť je to derivace rozdílu a derivace dvojky (konstanty) je nula. Můžeme tedy psát:

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^2 - 2) - x^2 \cdot (x^2 - 2)'}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^3 - 4x - 2x^3}{(x^2 - 2)^2} = \underline{\underline{-\frac{4x}{(x^2 - 2)^2}}}$$

Příklad 19. *Derivujme a upravme:*

$$\frac{\sqrt[8]{x^3} - x^2}{x^5}$$

Řešení. Příklad se může zdát poněkud složitý, vzhledem k poměrně ohyzdnému čitateli zlomku. Vže se však zjednoduší, pokud odmocninu přepíšeme jako mocninu a zlomek rozdělíme na součet dvou mocnin:

$$f(x) = \frac{\sqrt[8]{x^3} - x^2}{x^5} = \frac{x^{\frac{3}{8}} - x^2}{x^5} = \frac{x^{\frac{3}{8}}}{x^5} - \frac{x^2}{x^5} = x^{\frac{3}{8}-5} - x^{2-5} = x^{-\frac{37}{8}} - x^{-3}$$

Tuto funkci již zderivujeme jako rozdíl tabulkových derivací:

$$f'(x) = -\frac{37}{8} \cdot x^{-\frac{37}{8}-1} - \left(-3 \cdot x^{-3-1}\right) = -\frac{37}{8} x^{-\frac{45}{8}} + 3x^{-4} = \underline{\underline{-\frac{37}{8 \cdot \sqrt[8]{x^{45}}} + \frac{3}{x^4}}}$$

Příklad 20. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \ln x$$

Řešení. Jedná se o součin dvou funkcí, a to $\sin x$ a $\ln x$. Budeme je proto derivovat jako součin dle (15). Celá funkce je ještě vynásobena konstantou a proto dle (13) přidáme dvojku před celou derivaci:

$$f'(x) = 2 \cdot ((\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)') = 2 \cdot (\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{2 \cdot (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})}}$$

Příklad 21. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je složenou funkcí, přičemž vnější funkcí je funkce sinus a vnitřní funkce (argument vnější funkce) je funkce x^2. Derivujeme proto nejdříve funkci sinus (derivací je kosinus), které ponecháme její argument x^2, takto vzniknou funkci násobíme derivací vnitřní funkce, což je $(x^2)' = 2x$:

$$f'(x) = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = \underline{\underline{2x \cdot \cos(x^2)}}$$

Příklad 22. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Řešení. Zde se jedná o mírně složitější příklad. Uvědomme si, že funkce $f(x)$ je funkce složená, přičemž vnější funkcí je funkce logaritmus a vnitřní funkcí (argumentem vnější funkce) je podíl, který musíme derivovat dle pravidla (16). Nejdříve tedy derivujeme logaritmus, kterému ponecháme argument $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ a následně derivujeme tento argument (vnitřní funkci) dle pravidel pro podíl:

$$f'(x) = \ln'\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{(x^2-1)' \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

Tuto konstrukci dále derivujeme a upravujeme. Uvědomíme si znovu, že derivace výrazu $x^2 - 1$ je $2x$, neboť se jedná o derivaci rozdílu tabulkové derivace x^2 a derivace konstanty, což je nula. Podobně je tomu pro derivaci výrazu $x^2 + 1$. Píšeme tedy:

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

Takový výraz upravíme krácením $x^2 + 1$ a vytýkáním $2x$ v čitateli druhého zlomku:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+1-x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{4x}{x^2+1} = \underline{\underline{\frac{4x}{x^4-1}}}$$

Příklad 23. *Derivujme a upravme:*

$$f(x)\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \ln x}$$

Řešení. V tomto případě je $f(x)$ opět složená funkce, přičemž třetí odmocnina je funkce vnější a funkce vnitřní (argument funkce vnější) je rozdíl $\frac{1}{x} - \ln x$. Funkci si však nejdříve upravíme tak, aby byla ve tvaru mocnin. Pak derivujeme jako složenou funkci:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \ln x} = \sqrt[3]{x^{-1} - \ln x} = (x^{-1} - \ln x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{3}(x^{-1} - \ln x)^{\frac{1}{3}-1}}_{\text{derivace odmocniny}} \cdot \underbrace{\left(-1 \cdot x^{-1-1} - \frac{1}{x}\right)}_{\text{derivace vnitřní funkce}} = \frac{1}{3}(x^{-1} - \ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-x^{-2} - \frac{1}{x}\right)$$

Upravíme do čitelného tvaru:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^{-1} - \ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-x^{-2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-1 - x}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)^2}}$$

Příklad 24. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je v tomto případě několikanásobně složená, což však principiálně nevede k vážnějším komplikacím. Identifikujme nejdříve strukturu této složené funkce: Vnější funkcí je odmocnina. Ta má v argumentu $\ln(x^2 - 1)$, ovšem logaritmus je navíc vnější funkce vzhledem k funkci $x^2 - 1$. Proto nejdříve derivujeme odmocninu (po úpravě na mocninu) se zachováním jejího argumentu $\ln(x^2 - 1)$, následně tento logaritmus se zachováním jeho argumentu $x^2 - 1$ a nakonec výraz $x^2 - 1$:

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 1)} = (\ln(x^2 - 1))^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (\ln(x^2 - 1))^{-\frac{1}{2}}}_{\text{derivace (od)mociny}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 - 1}}_{\text{derivace logaritmu}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\text{derivace } x^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2 - 1)}} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Příklad 25. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{2} - \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Řešení. Jedná se o derivaci funkce, která je rozdílem dvou funkcí, příčemž jedna z nich je součin a druhá podíl.[iv] Funkci si však nejdříve chytře upravíme tak, abychom si nekomplikovali derivování. Sloučíme odmocninu s mocninou v první části a druhou část rozdělíme na dva zlomky a upravíme:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{2} - \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - x^{-2} + \frac{\cos x}{x^2}$$

Takto upravená funkce je již vhodná pro derivování, neboť obsahuje dvě mocninné funkce, které se dají derivovat jednoduše a podíl. Derivujeme proto takto:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} - (-2 \cdot x^{-2-1}) + \frac{-\sin x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-3} + \frac{-x \cdot (x \sin x + 2\cos x)}{x^4}$$

Tento výraz již jen upravíme do racionální podoby a máme výsledek:

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-3} + \frac{-x \cdot (x \sin x + 2\cos x)}{x^4} = \frac{3}{4}\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3}$$

Příklad 26. *Derivujme a upravme:*

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - x}{\pi}\right)$$

[iv] Na funkci $\frac{x \cdot \sqrt{x}}{2}$ můžeme pohlížet jako na součin $x \cdot \sqrt{x}$ vynásobený $\frac{1}{2}$.

Řešení. Funkce $f(x)$ je funkcí složenou, přičemž logaritmus je funkce vnější a výraz $\frac{e^x - x}{\pi}$ funkcí vnitřní (je argumentem vnější funkce). Argument logaritmu si nejdříve přepíšeme jako součin konstanty $\frac{1}{\pi}$ a $e^x - x$, aby se funkce dobře derivovala.

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - x}{\pi}\right) = \ln\left(\frac{1}{\pi} \cdot (e^x - x)\right)$$

Nyní již můžeme přistoupit k derivaci. Nejdříve derivujeme logaritmus, přičemž mu ponecháme jeho argument a ten pak derivujeme zvlášť jako součin konstanty a rozdílu funkcí

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\pi} \cdot (e^x - x)}}_{\text{derivace logaritmu}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot (e^x - 1)}_{\text{derivace argumentu}} = \frac{\pi}{e^x - x} \cdot \frac{e^x - 1}{\pi} = \underline{\underline{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}}$$

V praxi je možné setkat se s **derivacemi vyšších řádů** – druhou ($f''(x)$), třetí ($f'''(x)$) až obecně n-tou derivací ($f^{(n)}(x)$). Jejich výpočet není složitý ale spíše pracný. Druhou derivaci vypočítáme derivováním derivace první. Třetí derivaci vypočteme derivováním druhé derivace atd.

Příklad 27. *Vypočtěme $f'''(x)$ pro funkci:*

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}$$

Řešení. Jedná se o podíl dvou funkcí, proto využijeme pravidla (16). Vypočteme nejdříve první derivaci:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 - x) - x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1 - x + x}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Výsledek první derivace znovu derivujeme. Nezapomeňme na to, že $(1 - x)^2$ je složená funkce (s vnější funkcí druhé mocniny a vnitřní funkcí $1 - x$) a proto její derivace bude $2 \cdot (1 - x) \cdot (-1)$:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(1 - x)^2}\right)' = \frac{0 \cdot (1 - x)^2 - 1 \cdot 2(1 - x) \cdot (-1)}{(1 - x)^4} = \frac{2 \cdot (1 - x)}{(1 - x)^4} = \frac{2}{(1 - x)^3}$$

Třetí derivaci obdržíme derivováním druhé derivace. Opět nutno podotknout, že jmenovatel je složená funkce a je třeba s ní tak nakládat.

$$f'''(x) = \left(\frac{2}{(1 - x)^3}\right)' = \frac{0 \cdot (1 - x)^3 - 2 \cdot 3 \cdot (1 - x)^2 \cdot (-1)}{(1 - x)^6} = \frac{6 \cdot (1 - x)^2}{(1 - x)^6} = \underline{\underline{\frac{6}{(1 - x)^4}}}$$

Příklad 28. *Vypočtěme druhou derivaci funkce:*

$$f(x) = \sin(\cos(x))$$

Řešení. Vypočteme nejdříve první derivaci funkce $f(x)$. Tato funkce je funkcí složenou, přičemž vnější část je funkce sinus a vnitřní funkce kosinus. Proto píšeme:

$$f'(x) = \sin'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

Druhou derivaci vypočteme derivováním $f'(x)$. Je třeba si ale uvědomit, že se jedná o součin funkcí, příčemž funkce $\cos(\cos x)$ je složená:

$$f''(x) = -((\sin x)' \cdot (\cos(\cos x)) + \sin x \cdot (\cos'(\cos x)) \cdot (\cos x)') =$$

$$f''(x) = -(\cos x \cdot \cos(\cos x) + \sin x \cdot (-\sin(\cos x)) \cdot (-\sin x)) = \underline{\underline{-(\cos x \cdot \cos(\cos x) + \sin^2 x \cdot \sin(\cos x))}}$$

2.2.1 Cvičení

1. Derivujte a upravte:

(a)
$$f(x) = \ln(x^2+1) \qquad \left[\frac{x}{x^2+1}\right]$$

(b)
$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 100 \qquad \left[8x^3 - 9x^2 + 10x - 1\right]$$

(c)
$$f(x) = \ln\left(\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4}}\right) \qquad \left[\frac{4\cdot(x-1)}{(x-4)\cdot(x^2-4)}\right]$$

(d)
$$f(x) = \sqrt[3]{\cos(x^3-\pi)} \qquad \left[\frac{x^2\cdot\sin(x^3)}{\sqrt[3]{(-\cos(x^3))^2}}\right]$$

(e)
$$f(x) = 2\sin x + \sin 2x + \sin^2 x + \sin x^2 \qquad \left[2\cos x + 2\cos 2x + 2\sin x\cos x + 2x\cos x^2\right]$$

(f)
$$f(x) = \frac{2x^3 - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x} \qquad \left[\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5} + 4x}\right]$$

(g)
$$f(x) = \frac{x\cdot \mathrm{e}^x}{1+x^2} \qquad \left[\mathrm{e}^x\cdot\frac{x^3-x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\right]$$

(h)
$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}} \qquad \left[-\sqrt{\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right]$$

(i)
$$f(x) = \sin(x^3-x) \qquad \left[(x^2-1)\cdot\cos(x^3-x)\right]$$

(j)
$$f(x) = \frac{12}{1-x^4} \qquad \left[\frac{48x^3}{(1-x^4)^2}\right]$$

(k)
$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-1}{x-3} \qquad \left[\frac{2x^3-11x^2+12x+1}{(x-3)^2}\right]$$

(l)
$$f(x) = 2\sqrt{x+1} + \ln\frac{x+2+2\sqrt{x+1}}{x} \qquad \left[\frac{x-1}{x\sqrt{x+1}}\right]$$

(m)
$$f(x) = \ln\sqrt{1-\sin x}1 + \cos x \qquad \left[-\frac{1}{\cos x}\right]$$

(n)
$$f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x} - x\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \left[\mathrm{e}^{-x^2}\cdot(2x^2-1) + \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}\right]$$

(o)
$$f(x) = \frac{2x^6 - 1}{x^3} \qquad \left[6x^2 - \frac{3}{x^4}\right]$$

(p)
$$f(x) = (x - \ln x)^{100} \qquad \left[\frac{100 \cdot (x-1)(x - \ln x)^{99}}{x}\right]$$

(q)
$$f(x) = 5x^4 - \frac{\pi}{x^3} + \sqrt[8]{x} + \cos x^2 \qquad \left[\frac{1}{8 \cdot \sqrt[8]{x^7}} + \frac{3\pi}{x^4} + 20x^3 - 2x \sin x^2\right]$$

(r)
$$f(x) = (x-3) \cdot (\ln(x-3) - 3) \qquad [\ln(x-3) - 2]$$

(s)
$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\tan x} \qquad [-2 \sin x \cos x]$$

(t)
$$f(x) = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2} \qquad \left[\frac{2 \cdot (1 - 2x)}{(1 - x + x^2)^2}\right]$$

2. Vypočítejte derivace vyšších řádů:

(a)
$$f'''(x) = ? \qquad f(x) = \frac{x-3}{x-2} \qquad \left[\frac{6}{(x-2)^4}\right]$$

(b)
$$f''(x) = ? \qquad f(x) = (\ln x - x) \cdot (\ln x + x) \qquad \left[-\frac{2 \cdot (x^2 + \ln x - 1)}{x^2}\right]$$

(c)
$$f''(x) = ? \qquad f(x) = x^n \qquad \left[(n^2 - n) \cdot x^{n-2}\right]$$

(d)
$$f'''(x) = ? \qquad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \qquad \left[\frac{12 \cdot (10x^6 - 16x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^4}\right]$$

(e)
$$f^{(4)}(x) = ? \qquad f(x) = \ln(1 - x) \qquad \left[-\frac{6}{(1-x)^4}\right]$$

(f)
$$f''(x) = ? \qquad f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}) \qquad \left[\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^3}}\right]$$

(g)
$$f''(x) = ? \qquad f(x) = \tan(x) \qquad \left[\frac{2 \tan x}{\cos^2 x}\right]$$

2.3 Využití derivací pro výpočet limit - L'Hospitalovo pravidlo

V kapitole o limitách jsme se zmínili o limitách typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Někdy tyto limity nelze řešit úpravou ani dalšími postupy. V takovém případě je nutné (a mnohdy dokonce výhodné) využít tzv. **l'Hospitalovo** pravidlo. To zní:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{18}$$

Jinými slovy, limita podílu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$, která je typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ je totožná s limitou podílu derivací $f'(x)$ a $g'(x)$ těchto funkcí. L'Hospitalovo pravidlo je možné využívat v průběhu výpočtu jedné limity i opakovaně, pokud je limita stále typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Vše důkladně rozebereme na příkladech.

Příklad 29. *Vypočítejme limitu:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$$

Řešení. Uvedená limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$, neboť po dosazení obdržíme tento neurčitý výraz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\ln\infty}{\infty^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

Úprava funkce v limitě není možná a proto využijeme l'Hospitalovo pravidlo. To říká, že uvedenou limitu s podílu funkcí $f(x)=\ln x$ a $g(x)=x^2$ se dá vypočíst jako podíl derivací těchto funkcí $f'(x)=\frac{1}{x}$ a $g'(x)=2x$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2\cdot\infty^2}=\frac{1}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

Příklad 30. *Vypočítejme limitu:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^2}$$

Řešení. Zadaná limita je typu $\frac{0}{0}$, neboť po dosazení bodu $x=0$ obdržíme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^2}=\frac{0^3-6\cdot 0+6\sin 0}{0^2}=\frac{0}{0}$$

Vzhledem k tomu, že limita je typu $\frac{0}{0}$, můžeme využít l'Hospitalovo pravidlo. Derivujeme zvlášť čitatel a jmenovatel limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3-6x+6\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{2x}$$

Tato limita je však rovněž typu $\frac{0}{0}$, protože po dosazení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{2x}=\frac{3\cdot 0^2-6+6\cos 0}{2\cdot 0}=\frac{-6+6}{0}=\frac{0}{0}$$

Vzhledem k tomu, že nová limita je typu $\frac{0}{0}$, můžeme znovu využít l'Hospitalovo pravidlo. Derivujeme zvlášť čitatel a jmenovatel limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2-6+6\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-6\sin x}{2}=\lim_{x\to 0}3x-3\sin x$$

Tato limia se již dá řešit pouhým dosazením:

$$\lim_{x\to 0}3x-3\sin x=3\cdot 0-3\cdot\sin 0=\underline{\underline{0}}$$

Příklad 31. *Vypočítejme limitu:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

Řešení. Limita je typu $\frac{0}{0}$, neboť po dosazení bodu $x = 0$ obdržíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{0\cdot \cos 0 - \sin 0}{0^3} = \frac{0}{0}$$

S přihlédnutím k tomu, že limita je typu $\frac{0}{0}$, můžeme využít l'Hospitalovo pravidlo. To říká, že limitu můžeme vypočítat pomocí podílu derivací čitatele a jmenovatele původní limity. Při derivování je třeba dávat pozor, protože čitatel $x\cos x - \sin x$ je rozdíl dvou funkcí, ale jedna z nich je součinem a proto je třeba $x\cos x$ derivovat jako součin dle (15).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \cos x + x\cdot(-\sin x) - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} == \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot \frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Zde jsme využili vlastnosti limity (9), tedy že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Příklad 32. *Vypočítejme limitu:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

Řešení. Uvedená limita je typu $\frac{0}{0}$, jak se snadno můžeme přesvědčit dosazením $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \frac{\tan 0 - 0}{0 - \sin 0} = \frac{0}{0}$$

Vzhledem k typu limity můžeme využít l'Hospitalovo pravidlo. Derivujme tedy čitatele a jmenovatele zlomku a upravme je:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x}$$

Tento výraz upravíme a po zjištění, že je již v bodě 0 definován můžeme $x = 0$ dosadit a vypočíst hodnotu limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos^2 x\cdot(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+\cos 0}{(\cos 0)^2} = \frac{1+1}{1^2} = \underline{\underline{2}}$$

Příklad 33. *Vypočítejme limitu:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x + x + \ln x)}{\mathrm{e}^x + x + \ln x}$$

Řešení. Jedná se o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, jak se můžeme přesvědčit dosazením:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x + x + \ln x)}{\mathrm{e}^x + x + \ln x} = \frac{\ln(\mathrm{e}^\infty + \infty + \ln\infty)}{\mathrm{e}^\infty + \infty + \ln\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Využijeme-li l'Hospitalovo pravidlo, můžeme psát:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x + x + \ln x)}{\mathrm{e}^x + x + \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(\mathrm{e}^x + x + \ln x))'}{(\mathrm{e}^x + x + \ln x)'}$$

V čitateli je přítomna derivace složené funkce, přičemž vnější funkcí je funkce logaritmus a vnitřní funkcí je funkce $e^x + x + \ln x$. Derivujeme proto dle (17) a nadále upravíme krácením:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(e^x + x + \ln x))'}{(e^x + x + \ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x+x+\ln x} \cdot \left(e^x + 1 + \frac{1}{x}\right)}{e^x + 1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x + x + \ln x}$$

To už je limita, která se dá řešit pouhým dosazením $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x + x + \ln x} = \frac{1}{e^\infty + \infty + \ln\infty} = \underline{\underline{0}}$$

2.3.1 Cvičení

Vypočtěte limity:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \qquad [1]$$

2. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2 - 2\sin^2 x}{11\cos^2 x} \qquad \left[\frac{2}{11}\right]$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x + 2}{5x^3 - 1} \qquad \left[\frac{1}{5}\right]$$

4. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\pi + e^{\pi\cdot x})}{\ln(3 + e^{3x})} \qquad \left[\frac{\pi}{3}\right]$$

5. $$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \qquad [-1]$$

6. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \qquad \left[-\frac{2}{\pi}\right]$$

7. $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(e^x + 1) - 2\cdot(e^x - 1)}{x^3} \qquad \left[\frac{1}{6}\right]$$

8. $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 10}}{10x} \qquad \left[-\frac{1}{10}\right]$$

9. $$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \frac{x^2 - \pi}{\sin(x^2)} \qquad [-1]$$

10. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + \ln x^2}{\ln(x + x^2)} \qquad \left[\frac{3}{2te}\right]$$