Co všechno lze spočítat jednoduchým integrálem

Poznámka: Ve všech případech uvažujeme funkci $f(x)$ definovanou, nezápornou a spojitou na $[a, b]$. Všechny vztahy pro geometrické a fyzikální charakteristiky můžeme použít i pro obecnější případ, kdy bude obrazec omezen opět přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$, místo přímky $y = 0$ však další omezení zajistí graf jiné funkce, řekněme $y = g(x)$ ($g(x) \leq f(x)$ na $[a, b]$). Postupovat budeme tak, že vypočteme příslušnou charakteristiku pro obrazec omezený přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ a grafem funkce $f(x)$, poté odpovídající charakteristiku pro obrazec omezený přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ a grafem funkce $g(x)$, a výsledky odečteme. Všechny uvažované charakteristiky jsou totiž ADITIVNÍ!

• Plocha obrazce ohraničeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$:

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Hmotnost obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$\mu = \int_a^b \sigma(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Poloha těžiště obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$x_T = \frac{1}{\mu}\int_a^b \sigma(x) x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad y_T = \frac{1}{\mu}\int_a^b \frac{1}{2}\sigma(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Momenty setrvačnosti obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$J_x = \frac{1}{3}\int_a^b \sigma(x)\, f^3(x)\,\mathrm{d}x, \qquad J_y = \int_a^b \sigma(x)\, x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Objem tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Hmotnost tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x a jehož hustota $\varrho(x)$ je funkcí pouze proměnné x:

$$\mu = \int_a^b \pi \varrho(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Poloha těžiště tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x a jehož hustota $\varrho(x)$ je funkcí pouze proměnné x:

$$\vec{r}_T = \left(\frac{1}{\mu} \int_a^b \pi \varrho(x)\, x\, f^2(x)\,\mathrm{d}x,\ 0,\ 0 \right).$$

• Moment setrvačnosti (vzhledem k ose symetrie) tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x a jehož hustota $\varrho(x)$ je funkcí pouze proměnné x:

$$J_x = \frac{1}{2}\pi \int_a^b \varrho(x)\, f^4(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Plocha pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x:

$$\mathcal{S} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x.$$

• Hmotnost pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x a který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$\mu = 2\pi \int_a^b \sigma(x)\, f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x.$$

• Poloha těžiště pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x a který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{\mu} \left(2\pi \int_a^b x\, \sigma(x)\, f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x,\ 0,\ 0 \right).$$

• Moment setrvačnosti pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x a který má plošnou hustotu $\sigma(x)$

závislou pouze na proměnné x, vzhledem k ose symetrie:

$$J_x = 2\pi \int\limits_a^b \sigma(x)\, f^3(x) \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Poznámka: Dále uvažujeme, že $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ je hladká (tj. všechny tři funkce jsou spojité i se svou první derivací) parametrizace oblouku, který protíná sám sebe nejvýše v konečně mnoha bodech.

- Délka oblouku:

$$\mathcal{L} = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t$$

- Hmotnost oblouku s lineární hustotou $\lambda(x(t), y(t), z(t))$:

$$\mu = \int\limits_a^b \lambda\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t.$$

- Poloha těžiště oblouku s lineární hustotou $\lambda(x(t), y(t), z(t))$:

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{\mu} \int\limits_a^b x(t)\, \lambda\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t\,, \\
y_T &= \frac{1}{\mu} \int\limits_a^b y(t)\, \lambda\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t, \\
z_T &= \frac{1}{\mu} \int\limits_a^b z(t)\, \lambda\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

- Momenty setrvačnosti oblouku s lineární hustotou $\lambda(x(t), y(t), z(t))$:

$$\begin{aligned}
J_x &= \int\limits_a^b \big(y^2(t) + z^2(t)\big) \lambda\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t, \\
J_y &= \int\limits_a^b \big(x^2(t) + z^2(t)\big) \lambda\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t, \\
J_z &= \int\limits_a^b \big(x^2(t) + y^2(t)\big) \lambda\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$