Zde jsou uvedeny příklady ze cvičení ke knize *Matematika prakticky i korektně*. Tyto příklady jsou také „náhradními příklady za neúčast“ pro studenty kombinované formy. Není však nutné, aby studenti spočítali všechny příklady. Prozatím necháváme na zvážení samotných studentů, jaké množství z těchto příkladů spočítají, měli by však práci věnovat alespoň takovou dobu, jakou stráví jejich prezenční kolegové na cvičeních a přednáškách (tj. 5 hodin týdně).

1.1.4 Cvičení

1. V zoologické zahradě onemocněl hroch. Bylo mu předepsáno 42 mg vitaminu A, 65 mg vitaminu D. K dispozici máme dva přípravky, první obsahuje 10 procent vitaminu A a 25 procent vitaminu D, druhý obsahuje 20 procent vitaminu A a 25 procent vitaminu D. Jak to hrochovi nadávkujeme?

2. Majitel hospody má čtyřmístné, šestimístné a osmimístné stoly. Dohromady má 20 stolů. Při plném obsazení je v hospodě 108 zákazníků. V případě, že je plně obsazeno jen polovina čtyřmístných, polovina šestimístných a čtvrtina osmimístných stolů, je v hospodě právě 46 zákazníků. Kolik je v hospodě kterých stolů?

3. V každé z následujících soustav nalezněte podmínky pro čísla a a b tak, aby měla soustava žádné, resp. právě jedno, resp. nekonečně mnoho řešení.

a) $x - 2y = 1 \;\;,\;\; ax + by = 5,$

b) $3x + y - z = a \;\;,\;\; x - y + 2z = b \;\;,\;\; 5x + 3y - 4z = c,$

c) $x + 2y - 4z = 4 \;\;,\;\; 3x - y + 13z = 2 \;\;,\;\; 4x + y + a^2 z = a + 3,$

d) $2x + y - z = a \;\;,\;\; 2y + 3z = b \;\;,\;\; x - z = c,$

e) $x + ay - z = 1 \;\;,\;\; -x + (a-2)y + z = -1 \;\;,\;\; 2x + 2y + (a-2)z = 1.$

4. Pan František Vopička je hypochondr. Rozhodl se užívat 5 mg vitaminu A, 13 mg vitaminu B a 23 mg vitaminu C denně. K dispozici má tři přípravky. Množství vitaminů v jedné tabletě je dáno následující tabulkou.

Přípravek	A	B	C
1.	1 mg	2 mg	4 mg
2.	1 mg	1 mg	3 mg
3.	0 mg	1 mg	1 mg

Nalezněte všechna možná dávkování tablet v případě, že tablety jsou již dále nedělitelné. Pan František je navíc skrblík. Které řešení si má vybrat, jestliže tableta prvního přípravku stojí 3Kč, druhého 4Kč a třetího 5Kč.

$*$**5.** Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je soustava n rovnic o n neznámých, jejíž matice $\mathbf{A}^T$ je regulární. Taková soustava se nazývá *kramerovská* a má právě jedno řešení tvaru

$$(\chi) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\det \mathbf{B}_1, \dots, \det \mathbf{B}_n),$$

kde matice $\mathbf{B}_i^T$ vznikne nahrazením sloupce (α_i) v matici $\mathbf{A}^T$ sloupcem pravých stran soustavy (β). Určete řešení následujících kramerovských soustav:

(a)

$$\begin{aligned} 3x^1 + 2x^2 + x^3 &= 5 \\ 4x^2 + 5x^3 &= 2 \\ x^1 + 3x^2 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x^1 + 3x^2 - x^3 &= 4 \\ 2x^1 + x^2 &= 4 \\ x^1 - x^2 + 2x^3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x^1 + 3x^2 &= 4 \\ 2x^1 + x^3 &= 0 \\ -x^1 + 2x^2 + x^3 &= \alpha \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 4x^1 + x^2 - x^3 &= \beta^1 \\ - x^2 + x^3 &= \beta^2 \\ 2x^1 + 3x^2 - 2x^3 &= \beta^3 \end{aligned}$$

Za trojici $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ zvolte postupně $(\beta) = (0, 0, 0)$; $(3, 5, -1); (2, -10, 24)$.

6. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B}^T$ na schodovitý tvar.

(a)

$$\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + 2x^3 &= -1 \\ 2x^1 - x^2 + 2x^3 &= -4 \\ 4x^1 + x^2 + 4x^3 &= -2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2x^1 + x^2 - 4x^3 &= 0 \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 &= 0 \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 &= 0 \\ 7x^1 - 13x^3 &= 0 \end{aligned}$$

7. Udejte příklad homogenní soustavy lineárních rovnic s právě jedním řešením. Může mít homogenní systém právě dvě řešení? Zdůvodněte.

8. Ukažte, že dvě roviny v $\mathbf{R}^3$ procházející počátkem mají alespoň jeden další společný bod (mají nekonečně mnoho společných bodů).

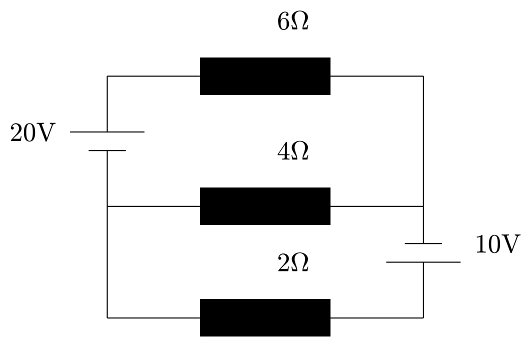
9. Mohou dvě rovnice o třech neznámých mít jednoznačné řešení?

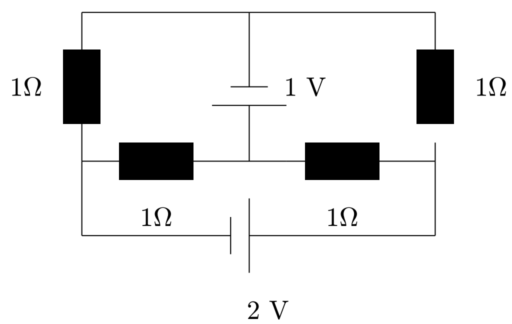
10. Rozhodněte o vzájemné poloze dvojice přímek:

a) $p: x + y + z - 1 = 0, 2x + 3y + 6z - 6 = 0$
$q: y + 4z = 0, 3x + 4y + 7z = 0$

b) $p: x = -1 + 3t, y = -3 - 2t, z = 2 - t$
$q: x = 2 + 2t, y = -1 + 3t, z = 1 - 5t$

$*$**11.** Řešte následující sítě. Použijte Kirchhoffovy zákony.





Návod: Součet všech proudů přitékajících do uzlu je roven součtu všech proudů z uzlu vytékajících, napětí zdroje v uzavřené smyčce je rovnou součtu úbytků napětí na odporech v této smyčce. Úbytek napětí na odporu se vypočte jako součin protékajícího proudu a odporu. Označte si, jako neznámé, proudy v jednotlivých větvích sítě a aplikací těchto zákonů získáte soustavu lineárních rovnic.

12. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B}^T$ na schodovitý tvar.

(a)

$$\begin{aligned} -2x + y &= 2, \\ -4x - 2y &= -4, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 4, \\ 2x^1 + x^2 - x^3 &= 3, \\ 3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= 10, \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 &= 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 &= 0, \\ x^1 + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 &= 0, \\ x^1 + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 &= 0. \end{aligned}$$

13. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny:

a) $\varrho : 5x - z - 4 = 0,\ p : 3x + 5y - 7z + 16 = 0, 2x - y + z - 6 = 0,$

b) $\varrho : y + 4z + 17 = 0,\ p : 2x + 3y + 6z - 10 = 0, x + y + z + 5 = 0.$

14. Rozhodněte o vzájemné poloze trojice rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - 4y + 5z - 21 = 0,\ \varrho_2 : x - 3z + 18 = 0,\ \varrho_3 : 6x + y + z - 30 = 0,$

b) $\varrho_1 : 2x + y - z + 3 = 0,\ \varrho_2 : 3x - z = 0,\ \varrho_3 : 3y + 2z = 0.$

1.2.3 Cvičení

1. Vyádřete v algebraickém tvaru čísla

a) $\left(\frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2,$

b) $\frac{1}{\mathrm{i}} + \frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{1-\mathrm{i}},$

c) $(1+\mathrm{i})^4,$

d) $(2-2\mathrm{i})^5\overline{(2-2\mathrm{i})}^3,$

e) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$

2. Vypočtěte absolutní hodnoty čísel z předchozího příkladu.

3. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel.

a) $z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0,$

b) $z^6 - 0 = 0,$

c) $|z| - z = 1 + 2\mathrm{i},$

d) $|z| = z^3,$

e) $(1-\mathrm{i})z^2 - 2(4+\mathrm{i})z + 3 + 11\mathrm{i} = 0,$

f) $x^3 + 1 = 0$,

g) $x^3 - 1 = 0$.

4. Zapište v goniometrickém tvaru komplexní čísla

a) $1 + \mathrm{i}$,

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4})$,

c) $-\mathrm{i}^5$,

d) $-\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

5. V Gaussově rovině znázorněte množinu, pro kterou jsou splněny následující rovnosti nebo nerovnosti.

a) $|z - 1| \leq 1$,

b) $|z - 1| = |z + 1| + 3$,

c) $|z + 2 - \mathrm{i}| > 2$,

d) $1 \leq |3\mathrm{i}z - 1| < 3$.

$*$**6.** Pro každé $\varphi \in \mathbf{R}$ a každé $n \in \mathbf{N}$ dokažte:

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\varphi}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\varphi}\right)^n = \frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}n\varphi}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}n\varphi}.$$

Návod: Převeďte levou stranu rovnosti na goniometrický tvar, použijte Moivrovu větu.

1.3.5 Cvičení

1. Jsou zadány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & a \\ 0 & 2a & 3 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, které dvojice z těchto matic lze spolu násobit a v jakém pořadí. Násobení proveďte.

$*$**2.** Dokažte $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, kde symbol $\mathbf{A}^T$ značí matici transponovanou k $\mathbf{A}$.

3. U následujících matic zjistěte, zda jsou regulární (u číselných matic) resp. za jakých podmínek jsou regulární (u matic s parametry) a v kladném případě stanovte matice inverzní. Užijte obou způsobů výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ a výsledky porovnejte.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Jsou dány matice

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 0 & \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -\mathrm{i} & 0 & 3 & 0 \\ 1+\mathrm{i} & \mathrm{i}\sqrt{2} & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & 2 \\ 1+\mathrm{i} & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 8-6\mathrm{i} \\ 8-6\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B_5} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete, které ze zadaných matic jsou ve schodovitém tvaru resp. trojúhelníkové.

b) Vypočtěte všechny definované součty a součiny matic $\mathbf{A}_i$ s maticemi $\mathbf{B}_j$.

c) Určete hodnost matic a u čtvercových matic vypočtěte determinant.

5. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n, $\mathbf{E_n}$ jednotková matice typu n/n, $\mathbf{E_m}$ jednotková matice typu m/m. Vypočtěte součiny $\mathbf{AE_n}$ a $\mathbf{E_mA}$.

$*$**6.** Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Dokažte:

a) Matice $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ je symetrická a matice $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ antisymetrická (nad $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$).

b) Každou čtvercovou matici lze zapsat jako součet symetrické a antisymetrické matice.

7. Zjistěte, zda platí toto tvrzení: Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková právě tehdy, když má schodovitý tvar. V kladném případě tvrzení dokažte, v záporném případě je opravte.

8. Určete znaménka následujících permutací čísel $\{1, \dots 9\}$:

a) 1,5,3,4,7,2,8,9,6,

b) 5,2,3,9,8,1,6,7,4,

c) 9,8,7,1,2,3,6,4,5.

$*$**9.** Napište permutaci množiny prvků $\{1, \dots, n\}$, která obsahuje nejvíce inverzí. Určete počet inverzí a znaménko permutace.

$*$**10.** Určete znaménka následujících permutací (tj. rozhodněte, zda se jedná o sudou nebo lichou permutaci):

a) $(2n+1, 2n+2, \dots, 3n-1, 3n, 2n, 2n-1, 2n-2, \dots, 2, 1)$ prvků $\{1, \dots 3n\}$,

b) $(n+1, n+2, \dots, 2n-1, 2n, n, n-1, \dots, 2, 1)$ prvků $\{1, \dots, 2n\}$

c) $(2n, 2n-2, \dots 4, 2, 2n-1, 2n-3, \dots, 3, 1)$ prvků $\{1, \dots, 2n\}$.

$*$**11.** Dokažte následujcící vztahy pro dané matice

a)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

b)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Návod: a) ukažte nejprve přímým vynásobením, že

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

b) Napište matici $\mathbf{A}$ jako součet matice diagonální a matice ostře horní trojúhelníkové a použijte binomickou větu.

1.4.5 Cvičení

1. Určete, zda dané vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ jsou lineárně závislé či nezávislé

a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-2, -3, 1)$, $\vec{w} = (-1, 2, 2)$

b) $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$, $\vec{w} = (-1, 2, -8)$.

2. Určete hodnotu parametru a, pro kterou jsou dané vektory lineárně závislé či nezávislé

a) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$, $\vec{w} = (2, 2, a)$

b) $\vec{u} = (0, 2, a)$, $\vec{v} = (-1, 3, 2)$, $\vec{w} = (2, -4, a)$.

3. Určete, zda daný systém vektorů je ortogonální či ortonormální: $\vec{u} = (1, -2, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 0, 1, -1)$.

4. Určete parametry a , b tak, aby daný systém vektorů byl ortogonální

a) $\vec{u} = (1, 1, 2, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 0, 1, a)$, $\vec{w} = (1, b, 2, 3, -2)$,

b) $\vec{u} = (2, -1, 0, a, b)$, $\vec{v} = (a, b, 0, -2, 1)$, $\vec{w} = (a, 2b, 5, b, -a)$.

5. Určete vektor $\vec{x} = (x, y, z, t)$, který je ortogonální k dané trojici vektorů $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 1, 3)$.

$*$**6.**. Dokažte, že pro smíšený součin $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \equiv \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ platí

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].$$

7. Dokažte následující vztahy, které platí pro vektory v $\mathbf{R}^3$

a) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$,

b) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,

c) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$, $k \in \mathbf{R}$,

d) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

8. Udejte podmínku, která

a) je nutná, ale není dostatečná,

b) není nutná, ale je dostatečná,

c) je nutná a dostatečná,

aby systém vektorů $\vec{a} = (\alpha, \beta, 0)$, $\vec{b} = (\alpha, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, \beta, \gamma)$ byl bází $\mathbf{R}^3$.

9. Skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je roven velikosti jejich vektorového součinu.

a) Určete všechny úhly, které mohou vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírat.

b) Víte-li, že vektorový součin má směr osy z a vektor $\vec{a}$ má směr kladné osy x a navíc velikosti vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou rovny jedné, zakreslete do obrázku všechny možnosti, které připadají v úvahu. Určete velikost $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

10. Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ mají v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ složky $a^1 = -1$, $a^2 = -1$, $a^3 = 0$, $b^1 = 1$, $b^2 = -1$, $b^3 = 0$, $c^1 = 0$, $c^2 = 0$, $c^3 = 2$ a v bázi $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ složky $a^{1'} = 1$, $a^{2'} = -1$, $a^{3'} = 1$, $b^{1'} = -1$, $b^{2'} = 1$, $b^{3'} = 0$, $c^{1'} = 1$, $c^{2'} = 1$, $c^{3'} = 1$. Vyjádřete vektory nečárkované báze jako lineární kombinaci vektorů báze čárkované a naopak, určete matice přechodu.

11. V bázi $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5})$ jsou dány vektory $\vec{a_1} = (1\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ -1)$, $\vec{a_2} = (0\ \ 4\ \ -2\ \ 2\ \ 0)$, $\vec{a_3} = (-1\ \ 1\ \ 0\ \ -4\ \ 2)$, $\vec{a_4} = (-2\ \ 11\ \ -6\ \ -5\ \ 5)$. Určete, jsou-li lineárně závislé či nezávislé.

12. Přechod mezi bázemi B a B' v $\mathbf{R}^4$ je dán vztahy

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\vec{e_1} & = & -\vec{e_1}' & + & \vec{e_2}' & + & \vec{e_3}' & & \\
\vec{e_2} & = & \vec{e_1}' & & & + & 2\vec{e_3}' & & \\
\vec{e_3} & = & \vec{e_1}' & + & \vec{e_2}' & + & \vec{e_3}' & + & \vec{e_4}' \\
\vec{e_4} & = & 3\vec{e_1}' & & & & & + & \vec{e_4}'.
\end{array}
$$

Báze B je ortonormální.

a) Určete matice přechodu T a S. Vyjádřete vektory báze B' jako lineární kombinace vektorů báze B.

b) Vektor $\vec{a} = (1\ \ 0\ \ -2\ \ 1)$ v bázi B. Určete jeho složky v B'.

c) Rozhodněte, zda báze B' je ortonormální, či nikoliv.

13. Určete možné hodnoty determinantu matice přechodu při přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi.

$*$**14.** V $\mathbf{R}^2$ určete matici přechodu od pevně zvolené ortonormální báze $\vec{e}_1$, $\vec{e_2}$ k bázi pootočené o úhel φ. Ukažte, že vynásobením matic příslušných pootočení o úhly φ resp. φ' získáme matici přechodu od původní báze k bázi pootočené o součet těchto úhlů. Závisí výsledek na pořadí násobení?

$*$**15.** V $\mathbf{R}^3$ určete matici přechodu od pevně zvolené ortonormální báze $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ k bázi získané pootočením o úhel φ kolem osy z a následným pootočením o úhel ϑ kolem osy x.
Návod: Určete postupně matice přechodu jednotlivých pootočení a ty potom vynásobte. Bude výsledek záviset na pořadí?

16. Určete vzdálenost bodu $M = [1, 1, 1]$ od roviny určené bodem $A = [0, 0, 0]$ a vektory $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

17. Jsou dány body $A = [0, 0, 1]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [-1, 1, 2]$. Určete bod D ležící na ose x tak, aby rovnoběžnostěn $ABCD$ měl objem 5 objemových jednotek.

2.1.9 Cvičení

1. Určete definiční obor funkcí

a) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$,

b) $y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{16+x^2}$,

c) $y = \sqrt{\ln(4x-x^2)}$,

d) $y = \frac{1}{x^3}|\ln|x||$,

e) $y = |\mathrm{tg}(x)| \cdot \frac{\ln(x^2)}{x}$,

f) $y = \frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3-x)$.

2. Rozhodněte o sudosti resp. lichosti funkcí

a) $y = x^3$,

b) $y = |\mathrm{tg}(x)| \cdot \frac{\ln(x^2)}{x}$,

c) $y = x^2 + 1$,

d) $\ln|x + \sqrt{1+x^2}|$,

e) $y = \frac{1}{x^3}|\ln|x||$,

3. Určete periodu funkcí

a) $y = \sin 3x$,

b) $y = \sin^2 x$,

c) $y = 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x$,

d) $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

4. Následující polynomy rozložte v $\mathbf{R}$ a určete intervaly, na kterých mají kladné resp. záporné znaménko.

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$,

b) $x^6 + 1$,

c) $x^3 - 6x^2 - x + 30$,

d) $x^3 - 1$,

e) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + x)$,

d) $x^6 - 1$.

5. Určete, na kterých intervalech existuje inverzní funkce k následujícím funkcím a najděte ji.

a) $y = \frac{2x-1}{3x+5}$,

b) $y = 10^{x-3}$,

c) $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,

d) $y = \mathrm{tg}^2(x - \frac{\pi}{4})$,

e) $y = x^2 + 1$,

f) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

6. Pokud je třeba, podělením polynomů převeďte neryze lomenné funkce na součet polynomu a ryze lomenné funkce, kterou následně rozložte na parciální zlomky.

a) $\frac{x^5+2x^4-2x^3+2x^2-x+1}{x^4(x^2+1)}$,

b) $\frac{x^4+2x^3-10x^2+22x-71}{x^2+2x-15}$,

c) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$,

d) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$,

e) $\frac{2x^4-2x^3+x^2+1}{(x-1)^2(x^2-x+1)}$.

7. Vypočtěte následující limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{arctg} x}{x}$,

d) $\lim\limits_{x0^+}(\sin x)^x$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{(2x^3-2x)^{\frac{1}{3}}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{arctg} x}{\sqrt{x}}$,

h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

8. Vypočtěte následující limity posloupností:

a) $((-1)^n)$,

b) $(\frac{\sin n+n}{\sin n-n})$.

2.2.7 Cvičení

1. Určete derivaci funkce a obor její existence

a) $\mathrm{e}^{-x^2} \cdot \ln x$,

b) $7^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{-5x}$,

c) $e^{-3x} \cdot \sin 3x$,

d) $\ln(x^2 - a^2) + \ln \frac{x-a}{x+a}$,

e) $\arccos \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$,

f) $2^{\tan x^2}$,

g) $3^{\ln \tan x}$,

h) $\ln(e^{-2x} + x \cdot e^{-2x})$,

i) $x^{(x^2+1)}$,

j) $\sqrt{x}^{(\frac{1}{x+1})}$

.

2. Vyšetřete průběh následujících funkcí:

a) $y = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$,

b) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,

c) $y = \ln \sin x$,

d) $y = cos^2(x)$,

e) $y = \frac{e^x}{x^2}$,

f) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$,

g) $y = x + \frac{1}{1+x}$,

h) $y = \frac{x^2-3}{x-1}$,

i) $y = \frac{1}{x^3-x}$,

j) $y = (x^3 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$,

k) $y = x\mathrm{e}^x$,

l) $y = \frac{1}{1-e^x}$,

m) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

n) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{1-x^2}$.

3. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu [a,b].

$f(x)$	a	b
$x^4 - 8x^2 - 9$	-1	1
$2 \cdot \sin 2x + \cos 4x$	0	$\frac{\pi}{3}$
$2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x$	-1	1
$2 \cdot \ln^3 x - 9 \cdot \ln^2 x + 12 \cdot \ln x$	$\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}$	e^3
$\sin(\sin x)$	-1	1

4. Částice koná harmonické kmity o amplitudě $A = 2\cdot 10^{-4}$m a frekvenci f=400Hz. Určete, jaké největší velikosti rychlosti a zrychlení částice dosáhne.
Návod: Závislost výchylky na čase je $y = A\cdot\cos(2\pi f\cdot t+\varphi)$, derivací této funkce podle času získáme závislost rychlosti, druhou derivací získáme závislost zrychlení. Hledáme stacionární body těchto závislostí.

5. Nad středem kruhové atletické dráhy poloměru R se má zavěsit lampa. V jaké výšce je nutno ji zavěsit, aby dráha byla maximálně osvětlena? Šířku dráhy lze oproti poloměru zanedbat.
Návod: Uvědomte si, že osvětlení je úměrné kosinu úhlu, pod kterým světlo dopadá, a nepřímo úměrné druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Zderivováním získané závislosti určíme stacionární body.

$*$**6.** Z Planckova vyzařovacího zákona (závislost energie vyzářené absolutně černým tělesem na vlnové délce) odvoďte Wienův posunovací zákon.
Návod: Zderivujte závislost $E(\lambda) = K\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{c}{\lambda T}}-1}$ a položte derivaci rovnu nule. Získáte podmínku pro stacionární bod $\lambda_{max} = \frac{\text{konst.}}{T}$.

7. Vypočtěte následující limity funkcí.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x)\cdot\ln x$,

b) $\lim\limits_{x\to 0+}(\mathrm{cotg}x - \frac{1}{x})$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$,

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$,

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0+} (\frac{1}{x})^{\mathrm{tg}x}$,

h) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$.

8. Vypočtěte následující limity posloupností:

a) $(\frac{\ln n}{n})$,

b) $(\frac{n}{\ln n})$,

c) $((\frac{n+1}{n+2})^n)$,

d) $((\frac{n^2}{n^2+1})^{2n^2})$.

9. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \sin^2 x \mathrm{d}x$,

b) $\int \sin^3 x \mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$,

d) $\int \sin 5x \cdot \cos 3x \mathrm{d}x$,

e) $\int \sin^5 x \cdot \cos x \mathrm{d}x$,

f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

g) $\int \mathrm{e}^{\cos x} \cdot \sin^3 x \mathrm{d}x$,

h) $\int x \cdot \sqrt{x^2+a^2} \mathrm{d}x$,

i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$,

j) $\int \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 2x} \mathrm{d}x$,

k) $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$,

l) $\int x \cdot \sin(x^2+1) \mathrm{d}x$,

m) $\int \frac{x}{4+x^4} \mathrm{d}x$,

n) $\int \frac{3x^2+4x+6}{x^2+1} \mathrm{d}x$,

o) $\int \sqrt{2+x+x^2} \mathrm{d}x$,

p) $\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$,

q) $\int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$.

$*$**10.** Odvoďte rekurentní vzorce pro neurčité integrály:

a) $\int \cos^n x \mathrm{d}x$, $(n \neq 0)$,

b) $\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, $(n \neq 1)$,

c) $x^n \cdot \cos x \mathrm{d}x$.

Návod: Příslušný integrál označte jako I_n a pomocí metody per partes jeho výpočet převeďte na výpočet integrálů I_{n-1}, I_{n-2}, ...

11. Má být vybudován bazén tvaru kvádru, čtvercové podstavy o celkovém objemu $1\,\mathrm{m}^3$. Jaké musí mít rozměry (délka strany podstavy a a hloubka h), aby jeho povrch byl minimální?

2.3.8 Cvičení

1. Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r, vypočtěte jeho hmotnost, jestliže má plošnou hustotu číselně rovnu $\sigma(x,y) = \frac{1}{r}|x|$ a je umístěn v počátku.

2. Vypočtěte obsah plochy pod grafem funkce $y = \sin^2 x$, $y = \sin 3x$ pro $x \in [0, \pi]$, vypočtěte hmotnost této plochy, jestliže plošná hustota je $\sigma(x,y) = x$.

3. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$.

4. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami $x + y + y^2 = 2$ a $x = 0$.

$*$**5.** Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x a jedním obloukem cykloidy: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.

6. Vypočtěte pomocí integrálu obsah

a) kruhové úseče,

b) elipsy,

c) trojúhelníka.

7. Vypočtěte pomocí integrálu objem a pro případ konstantní hustoty také moment setrvačnosti kolem osy symetrie a polohu těžiště

a) válce,

b) kužele,

c) koule,

$*$d) elipsoidu (se dvěma stejnými poloosami),

e) kulové úseče.

8. Vypočtěte moment setrvačnosti

a) homogenního oblouku kružnice , vzhledem k ose kolmé na rovinu kružnice a procházející jejím středem,

b) homogenní úsečky (vzhledem k ose kolmé na úsečku a procházející jejím středem, resp. libovolným jiným bodem),

c) zapište integrál pro moment setrvačnosti oblouku kružnice se středem v bodě $(0, 0, 0)$, ležící v rovině xy, která má lineární hustotu $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

9. Vypočtěte polohu těžiště homogenního oblouku šroubovice ($x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) a oblouku šroubovice s hustotou $\varrho(x, y, z) = [z(x + y)]^2$.

10. Asteroida je dána parametrizací $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Zakreslete přibližný obrázek a vypočtěte její délku (pozn. integrovat se bude v mezích od nuly do $\frac{\pi}{2}$ - proč?).

11. Vypočtěte plochu, moment setrvačnosti kolem osy symetrie a polohu těžiště pro následující povrchy pro případ konstantní plošné hustoty $\sigma = 1$.

a) válce,

b) kužele,

c) koule,

12. U každé z křivek vypočtěte charakteristiky uvedené v závorce. Předpokládejte, že mají lineární hustotu $\mu = 1$.

a) KARDIOIDA: $x = a \cos \varphi$, $y = a(\varphi + \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$ (M, X_T, J_Y)

b) ARCHIMEDOVA SPIRÁLA: $r = a \cdot \varphi$ v polárních souřadnicích (M),

c) LOGARITMICKÁ SPIRÁLA: $r = e^{\varphi}$ v polárních souřadnicích (M, X_T, Y_T, J_X, J_Y, J_Z),

d) KRUŽNICE: $r = R$ v polárních souřadnicích, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (M, X_T, Y_T, J_X, J_Y, J_Z),

e) CYKLOIDA: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (M, Y_T, J_X),

f) ASTEROIDA: $x = r \cos^3 t$, $y = r \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ (M, X_T, Y_T, J_X, J_Y, J_Z).

3.1.5 Cvičení

1. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne

a) na každé kostce jiné číslo,

b) samé jedničky,

c) alespoň tři dvojky,

d) právě tři dvojky,

e) všechna čísla stejná,

f) všechna čísla lichá,

g) součet n, $n = 6, \ldots, 36$.

2. Čtyři osoby si v šatně odložily kabát. Šatnářka při odchodu rozdala kabáty náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že

a) všechny osoby budou mít svůj kabát,

b) žádná z osob nebude mít svůj kabát,

c) alespoň jedna osoba bude mít svůj kabát,

d) právě jedna osoba bude mít svůj kabát.

3. Dokažte následující kombinatorické identity:

a)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$*$c)

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r},$$

d)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \qquad n > 0; k \geq 0.$$

4. Klíčivost semen je ϑ (pravděpodobnost, že semínko vyklíčí), zasadíme-li n semen, jaká je pravděpodobnost, že

a) vyklíčí alespoň jedno semeno?

b) vyklíčí alespoň k semen?

c) vyklíčí právě k semen?

5. Ze skupiny 7 studentů a 4 studentek se má vybrat šestičlenná skupina, ve které budou alespoň 2 studentky. Kolika způsoby to lze provést?

$*$**6.** Každý ze dvou parníků může doplout do přístavu vždy jen jednou za den, v kterýkoli okamžik nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu, druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?

$*$**7.** Na linkovaný papír se vzdáleností linek d házíme tyčinku délky $l < d$. Vypočtěte pravděpodobnost, že při jednom hodu tyčinka protne některou z linek.

8. Pravdě podobnost, že student A složí zkoušku z Matematiky 1 je p, pravděpodobnost, že student B složí zkoušku z Matematiky 1 je q. Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku složí:
a) právě jeden ze studentů,
b) alespoň jeden ze studentů,
c) oba studenti,
d) žádný ze studentů.

9. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, jestliže víme, že

a) součet je dělitelný pěti.

b) součet je sudý.

10. Z balíčku standardních mariášových karet taháme čtyři karty. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna z nich bude srdcové eso v případě, že

a) kartu po vytažení nevracíme zpět.

b) kartu po vytažení vracíme zpět.

11. Princ si z deseti dívek, z nichž osm je princezen a dvě jsou čarodějnice, má vybrat nevěstu. Konzultuje se svým dvorním šaškem, který rozezná princeznu s pravděpodobností $\frac{5}{6}$.

a) Šašek soudí, že dívka D je princezna. Určete pravděpodobnost, že to je skutečně princezna.

b) Šašek soudí, že dívka D je čarodějnice. Princ tedy zvolí náhodně jinou dívku. Stanovte pravděpodobnost, že tato náhodně zvolená dívka je princezna.

$*$**12.** Test studijních předpokladů má sto otázek, na každou z nich student může zvolit odpovědi A, B, C, D, z nichž právě jedna je správná. Předpokládejme, že student zná odpověď pouze na k otázek, u otázek, na něž nezná odpověď, zvolí náhodně z nabízených možností. Vybereme z vyplněného testu tohoto studenta jednu otázku náhodně.

a) S jakou pravděpodobností u ní nalezneme správnou odpověď?

b) Předpokládejme, že odpověď je správná. Jaká je pravděpodobnost, že student jenom hádal?

13. Výrobce Levoručka vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10 procent jsou zmetky. Výrobce Nešika vyrobí denně 40 výrobků, z toho 5 procent jsou zmetky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z denní produkce je zmetek a pochází

a) od prvního dělníka,

b) od druhého dělníka.

3.2.3 Cvičení

1. Střelec provedl $N = 150$ výstřelu na terč, který je tvořen soustavou $n = 5$ mezikruží MK_i , $i = 1, \dots, 5$. Mezikruží MK_i přitom zasáhl N_i krát, kde $N_1 = 15, N_2 = 20$, $N_3 = 35$, $N_4 = 45$, $N_5 = 35$. Za zásah mezikruží MK_i získal i-bodu. Náhodnou veličinu X s diskretním rozdělením definujeme jako počet bodů získaných pro jeden náhodný výstřel. Určete

a) rozděleni veličiny X , $\{(x_i, p_i)\}$,

b) pravděpodobnost, že pro náhodný výstřel získá střelec alespoň I bodu, $I = 1, 2, 3, 4, 5$,

c) střední hodnotu veličiny X,

d) střední kvadratickou odchylku veličiny X,

e) pravděpodobnost, že při výstřelu získá střelec počet bodů v intervalu $i \in [2, 4]$.

2. Na letištních záchodech jsou čtyři kabinky. Je dána distribuční funkce obsazení kabinek: $F(0) = 0,10$, $F(1) = 0,35$, $F(2) = 0,60$, $F(3) = 0,95$, $F(4) = 1$. Určete

a) rozdělení náhodné veličiny X odpovídající počtu obsazených kabinek,

b) střední hodnotu veličiny X a její rozptyl,

c) pravděpodobnost, že budou obsazeny alespoň dvě kabinky.

3. Je dána funkce $f(x) = k \cdot x$ pro $0 \leq x \leq 2$ a $f(x) = 0$ jinak. Určete

a) konstantu k tak, aby f byla funkcí hustoty pravděpodobnosti,

b) střední hodnotu a rozptyl,

c) nejpravděpodobnější hodnotu,

d) medián a čtvrtkvantily,

e) distribuční funkci.

4. Je dána funkce $f(x) = \frac{k}{(x+1)^2}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ pro $x < 0$. Určete

a) konstantu k tak, aby funkce byla hustotou pravděpodobnosti,

b) distribuční funkci,

c) nejpravděpodobnější hodnotu, medián a čtvrtkvantily.

5. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{k}{x^2}$ pro $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 0$ jinak, $g(x) = c(x - x^2)$ pro $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$. Určete

a) konstanty k a c tak, aby funkce byly rozdělením pravděpodobnosti,

b) příslušné distribuční funkce,

c) nejpravděpodobnější hodnotu, střední hodnotu, rozptyl, medián pro každé z rozdělení.

5. Házíme dvěmi kostkami. Náhodnou veličinou X označme součet bodů na obou kostkách při jednou hodu. Určete

a) rozdělení veličiny X,

b) distribuční funkci,

c) střední hodnotu, rozptyl, nepravděpodobnější hodnotu,

d) pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude v intervalu $[5, 7]$.

3.3.4 Cvičení

1. Při pokusu byly naměřeny tyto hodnoty napětí a proudu.

Č.	U [V]	I [A]
1.	5,0	0,48
2.	10.0	0,98
3.	15,0	1,36
4.	20,0	2,10
5.	25,0	2,51
1.	30,0	3,00
1.	35,0	3,49
1.	40,0	4,04
1.	45,0	4,47
1.	50,0	5,03

Metodou nejmenších čtverců určete hodnotu odporu a odchylku.

Literatura použitá při cvičení:

- Nicholson, Keith: Elementary Linear Algebra with Applications, Wadsworth Publishers of Canada, Toronto.
- Musilová, Jana; Krupka, Demeter: Lineární a multilineární algebra, UJEP, Brno 1998
- Budíková, Marie; Mikoláš, Štěpán; Osecký, Pavel: Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika, sbírka příkladů, MU, Brno 1996.
- Gillman, Leonard; McDowell Robert: Matematická analýza, SNTL, Praha 1980.
- Herman, Jiří; Kučera, Radan; Šimša, Jaromír: Seminář ze středoškolské matematiky, MU Brno 1994.