

Požadavky ke zkoušce

Zkouška z předmětu MATEMATIKA 1 má dvě části

- **Písemná část:** Písemná část se ještě dále rozděluje na *praktickou část* — *písemku* a *teoretickou část* — *test*. Písemka trvá 90 minut a je v ní obsaženo pět příkladů větší obtížnosti. Test trvá 60 minut, obsahuje deset jednodušších otázek, zaměřených na znalosti základních pojmů a metod.

Při písemné části není dovoleno používat literaturu, je však povoleno použít tahák vlastní výroby do velikosti formátu A4. (Použití lupy a mikroskopu není dovoleno.)

Ukázkový test a písemka jsou uvedeny jako součást tohoto dokumentu. Skutečné testy a písemky u jednotlivých termínů budou nižší (maximálně stejné) obtížnosti. Všechny vaše připomínky k ukázkovému testu i písemce jsou vítány.

Bodování: Testové příklady jsou hodnoceny jedním bodem, písemkové dvěma body. Celkem je tedy možné získat 20 bodů z písemné části zkoušky. Další body (maximálně deset) si student přináší od svého cvičícího, který ho ohodnotil za práci v průběhu semestru. Výsledná známka pak odpovídá bodovému ohodnocení takto:

30 — 27 bodů ... A
27 — 24 bodů ... B
24 — 21 bodů ... C
21 — 18 bodů ... D
18 — 15 bodů ... E
15 — 0 bodů ... F.

- **Ústní část:** V případě, že student nesouhlasí se známkou (nebo je-li bodové ohodnocení nerozhodně), vyjasní se situace u ústní části zkoušky.

Ukázková písemka

PÍSEMKA I:

1. Řešte soustavu rovnic s parametrem a , uveďte, pro jaké hodnoty parametru a má soustava právě jedno řešení (a toto řešení nalezněte)

resp. pro jaké hodnoty a nemá soustava žádné řešení resp. pro jaké hodnoty a má soustava nekonečně mnoho řešení (tato řešení zapište pomocí parametru(ů)).

$$\begin{aligned}ax + y + z &= 1 \\x + ay + z &= a \\x + y + az &= a^2\end{aligned}$$

2. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{3x^2}{x-1}$.

3. Těleso vznikne rotací grafu $f(x) = \cos x$ kolem osy x , $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Vypočtěte jeho objem. Vypočtěte polohu těžiště za předpokladu, že hustota tělesa je $\rho(x) = 1$.

4. Vypočtěte délku křivky $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ohraničenou přímkami $x = 0$ a $x = a$ a zapište integrál pro moment setrvačnosti této křivky kolem osy z v případě, že lineární hustota je $\mu(x, y) = 1$.

5. Při stříbě na terč je možné získat $0, \dots, 5$ bodů. Střelec, který učinil sto pokusů získal i bodů v N_i z těchto pokusů, kde $N_0 = 5$, $N_1 = 25$, $N_2 = 25$, $N_3 = 25$, $N_4 = 10$, $N_5 = 10$. Definujme diskrétní náhodnou veličinu X jako počet bodů získaných při jednom výstřelu. Určete:

- Rozdělení náhodné veličiny X .
- Pravděpodobnosti P_i , že střelec při jednom výstřelu získá nejvýše i bodů.
- Střední hodnotu veličiny X .
- Střední kvadratickou odchylku.
- Pravděpodobnost, že počet bodů získaných při jednom výstřelu bude v intervalu $[1, 3]$.

ŘEŠENÍ:

1.

Pro $a = -2$ soustava nemá řešení.

Pro $a = 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení: $x = 1 + t + s$,
 $y = -t$, $z = -s$, kde t, s jsou libovolná reálná čísla.

V ostatních případech má soustava právě jedno řešení: $x = -\frac{a+1}{a+2}$,

$$y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

3. $V = \frac{\pi^2}{4}$, $T = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}, 0, 0)$...snad :-).

4. $L = \frac{1}{2}(e^a - \frac{1}{e^a})$, $J_z = \int_0^a (\cosh^2 t + t^2) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt =$
 $= \int_0^a (\cosh^2 t + t^2) \cdot \cosh t dt.$

5. a) $\{[0, 0.05], [1, 0.25], [2, 0.25], [3, 0.25], [4, 0.1], [5, 0.1]\}$. b) $P_0 = 0.05, P_1 = 0.3, P_2 = 0.55, P_3 = 0.80, P_4 = 0.90, P_5 = 1$. c) 2.4. d) 1.84 e) 0.75.

Ukázkový test

TEST I.

1. Rozhodněte o vzájemné poloze přímk v \mathbf{R}^3 zadaných takto:

$$p : x + y = 2, x - z = -1$$

$$q : x = -1 - t, y = 1 + 2t, z = -t$$

2. Rozhodněte, zda následující matice je regulární. Zdůvodněte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vektor \vec{a} má v bázi $B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ složky $a^1 = 1, a^2 = -1$, v bázi $B_2 = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ složky $a^{1'} = 1, a^{2'} = 1$, vektor \vec{e}'_2 má v bázi B_1 složky $(1, 1)$. Určete matice přechodu mezi bázemi a zapište transformaci složek vektoru z jedné báze do druhé pomocí maticového násobení.

4. Doplňte následující systém vektorů na ortogonální bázi \mathbf{R}^3 a vektory normujte.

$$\vec{a} = (1, 0, 1), \quad \vec{b} = (1, 1, -1)$$

5. Určete definiční obor funkce $y = |\operatorname{tg}(x)| \cdot \frac{\ln(x^2)}{x}$ a rozhodněte o lichosti (resp. sudosti) funkce.

6. Vypočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

7. Rozkladem na parciální zlomky vypočtěte:

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx.$$

8. Metodou per partes vypočtěte:

$$\int (3x^2 + x + 1) \ln x dx.$$

9. Ze skupiny 7 studentů a 4 studentek se má vybrat šestičlenná skupina, ve které budou alespoň 2 studentky. Kolika způsoby to lze provést?

10. Pravděpodobnost, že student A složí zkoušku z Matematiky 1 je p , pravděpodobnost, že student B složí zkoušku z Matematiky 1 je q . Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku složí:

- a) právě jeden ze studentů,
 - b) alespoň jeden ze studentů,
 - c) oba studenti,
 - d) žádný ze studentů.
-
-

ŘEŠENÍ:

1. Různoběžky, průsečík $P = [-3, 5, -2]$.
2. Matice není regulární, neboť má ve schodovitém tvaru nulový řádek.
- 3.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = (\alpha^1, \alpha^2) \cdot \mathbf{S}, \quad (\alpha^1, \alpha^2) = (\alpha^{1'}, \alpha^{2'}) \cdot \mathbf{T}$$

4.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

5. $D_f = \mathbf{R} - \{0, (2k+1)\frac{\pi}{2}\}, k \in \mathbf{Z}$, funkce je lichá.
 6. 0 a $-\infty$.
 7. $\frac{x^2}{2} + \ln \sqrt{|x^2-1|} + C$.
 8. $(x^3 + \frac{x^2}{2} + x) \ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} - x + C$.
 9. 371.
 10. a) $p(1-q) + q(1-p)$ b) $p+q-p \cdot q$ c) $p \cdot q$ d) $1-p-q+p \cdot q$.
-

Otázky k ústní zkoušce

LINEARITA

- příklady lineárních vztahů
- přímka a rovina v \mathbf{R}^3 (parametrické a obecné vyjádření)
- vzájemná poloha rovin v \mathbf{R}^3
- vzájemná poloha přímek v \mathbf{R}^3
- Frobeniova věta

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

- soustava lineárních rovnic, matice soustavy a rozšířená matice soustavy
- ekvivalentní úpravy a Gaussova eliminační metoda
- Frobeniova věta
- soustavy s nekonečně mnoha řešeními (volné neznámé)
- vzájemná poloha rovin a přímek
- příklady

ČÍSELNÉ OBORY

- přirozená čísla (princip úplné indukce)
- celá čísla
- racionální a iracionální čísla
- reálná čísla a operace s reálnými čísly, vlastnosti
- komplexní čísla

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

- komplexní čísla v algebraickém tvaru
- komplexní čísla v goniometrickém tvaru
- operace s komplexními čísly, vlastnosti
- exponenciální tvar komplexního čísla
- Moivrova věta
- příklady

MATICE

- co je to matice, typ matice
- matice se speciálním tvarem (diagonální, trojúhelníková ...)
- operace s maticemi, vlastnosti
- hodnota matice
- čtvercové matice (determinant, regulárnost)
- metody výpočtu inverzní matice
- příklady

VEKTORY

- co je to vektor
- lineární závislost a nezávislost vektorů
- operace s vektory, vlastnosti
- vektorový prostor \mathbf{R}^n a \mathbf{C}^n
- báze a dimenze
- přechod mezi bázemi
- příklady

SKALÁRNÍ A VEKTOROVÝ SOUČIN V \mathbf{R}^3

- skalární součin, norma (velikost) vektoru, odchylka vektorů
- ortogonalita, ortonormalita
- vlastnosti skalárního součinu
- vektorový součin, vlastnosti
- smíšený součin, vlastnosti
- ortonormální báze a matice přechodu mezi ortonormálními bázemi
- příklady

FUNKCE

- co je to funkce (obecně), reálná funkce reálné proměnné
- způsoby zadání funkce
- definiční obor a obor hodnot funkce
- operace s funkcemi, vlastnosti
- inverzní funkce a její graf
- příklady

VLASTNOSTI FUNKCÍ

- co je to reálná funkce reálné proměnné
- funkce sudá, lichá, periodická
- funkce rostoucí, klesající, ...
- prostá funkce
- kdy k dané funkci existuje inverzní
- příklady

LIMITA FUNKCE

- definice limity, limita zprava a zleva
- nevlastní limita a limita v nevlastním bodě
- limita a spojitost
- vlastnosti limit (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, limita složené funkce)
- věta o sevření
- l'Hospitalovo pravidlo
- příklady

SPOJITÉ FUNKCE

- limita
- spojitost zleva, spojitost zprava, spojitost
- vlastnosti spojitých funkcí
- příklady

POSLOUPNOSTI

- co je to posloupnost
- limita posloupnosti
- geometrická posloupnost
- aritmetická posloupnost
- řada a její součet

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

- polynom, rozklad polynomu v \mathbf{R} , kořeny
- racionálně lomenná funkce (ryze lomenná a neryze lomenná, rozklad na parciální zlomky)
- goniometrické a cyklometrické funkce
- mocnina a logaritmus
- hyperbolické funkce
- příklady

DERIVACE

- definice derivace, derivace zprava a zleva
- geometrická interpretace derivace
- vlastnosti derivací (derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, derivace složené funkce)
- derivace elementárních funkcí
- spojitost a derivace
- příklady

PRŮBĚH FUNKCE

- první a druhá derivace funkce
- derivace a vlastnosti funkcí (stacionární body, extrémy, monotónnost, konvexnost, konkávnost a inflexní body)
- nevlastní derivace
- asymptoty se směrnicí a bez směrnice
- příklady

INTEGRÁL

- primitivní funkce
- základní integrační metody
- určitý a neurčitý integrál
- geometrický význam
- příklady

APLIKACE INTEGRÁLU

- plocha pod grafem funkce
- těžiště a momenty setrvačnosti plochy
- geometrické charakteristiky rotačních těles
- křivkový integrál
- geometrické charakteristiky rotačních povrchů
- příklady

KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST

- základní kombinatorické pojmy (variace, kombinace, permutace)
- kombinatorické identity (Pascalův trojúhelník)
- definice pravděpodobnosti
- jevy nezávislé a vylučující se
- podmíněná pravděpodobnost
- binomická pravděpodobnost

PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

- pravděpodobnost
- náhodná veličina s diskrétním a spojitým rozložením
- funkce hustoty pravděpodobnosti
- střední hodnota, střední kvadratická odchylka, ...
- příklady