1. Najděte všechna řešení rovnice

$$|z| = z^3$$

A. Řešení v algebraickém tvaru: $z = a + b\mathrm{i}$

$$\sqrt{a^2+b^2} = a^3 + 3a^2b\mathrm{i} - 3ab^2 - b^3\mathrm{i}.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí levé a pravé strany získáme dvě rovnice pro dvě neznámá reálná čísla a a b:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+b^2} &= a^3 - 3ab^2 \\ 0 &= 3a^2b - b^3 \end{aligned}$$

Vyjádříme b ze druhé rovnice:

$$b = 0 \quad \vee \quad b = \sqrt{3}a \quad \vee \quad b = -\sqrt{3}a$$

Pro každou možnost dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned} b = 0 : \sqrt{a^2} &= a^3 \\ |a| &= a^3 \\ a = 1 \quad &\vee \quad a = 0 \\ z_1 &= 0 + 0\mathrm{i} \\ z_2 &= 1 + 0\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \sqrt{3}a : \sqrt{a^2+3a^2} &= a^3 - 9a^3 \\ 2|a| &= -8a^3 \\ a = 0 \quad &\vee \quad a = -\frac{1}{2} \\ z_1 &= 0 + 0\mathrm{i} \\ z_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = -\sqrt{3}a : \sqrt{a^2+3a^2} &= a^3 - 9a^3 \\ 2|a| &= -8a^3 \\ a = 0 \quad &\vee \quad a = -\frac{1}{2} \\ z_1 &= 0 + 0\mathrm{i} \\ z_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

B. Řešení v goniometrickém tvaru: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$

$$|z| = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi).$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí levé a pravé strany získáme dvě rovnice pro dvě neznámá reálná čísla $|z|$ a φ:

$$\begin{aligned} |z| &= |z|^3 \cos 3\varphi \\ 0 &= |z|^3 \sin 3\varphi \end{aligned}$$

Z druhé rovnice získáváme následující možnosti:

$$|z| = 0 \quad \vee \quad \varphi = 0 \quad \vee \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad \varphi = \frac{4}{3}\pi.$$

Dosazením kterékoli z možností úhlu φ do první rovnice:

$$|z| = |z|^3 \cdot 1,$$

t.j. $|z| = 0 \vee |z| = 1$, řešení tedy budou

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + 0\mathrm{i} \\ z_2 &= 1 + 0\mathrm{i} \\ z_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\ z_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

2. Zakreslete v Gaussově rovině množinu

$$|z - 1| = |z + 1| + 3.$$

Hledáme souřadnice a, b bodu $z = a + \mathrm{i}b$ splňující

$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} + 3.$$

Umocněním obou stran (to můžeme zjevně udělat, neboť jsou to kladná čísla) a následnou úpravou získáme

$$-4a - 9 = 6\sqrt{a^2 + 2a + 1 + b^2}.$$

Tato rovnice má řešení pouze tehdy, je-li na levé straně nezáporné číslo, t.j. pro $a \leq -\frac{9}{4}$, toto řešení získáme umocněním rovnice na druhou:

$$20a^2 + 36b^2 = 45.$$

To je rovnice elipsy s poloosami $\frac{3}{2}$ a $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Žádný její bod však nesplňuje podmínku $a \leq -\frac{9}{4}$, řešením je tedy PRÁZDNÁ MNOŽINA! K tomuto výsledku dojdeme také snadnou geometrickou úvahou. Hledáme množinu bodů takových, že rozdíl jejich vzdáleností od bodů $[1, 0]$ resp. $[-1, 0]$ je roven 3. Když však uvážíme, že body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$ jsou od sebe vzdáleny jen 2, nemůže hledaná situace nikdy nastat.