# 1 Řešení úloh

## 1.1.4

**1.** Hroch dostane 80 mg prvního a 180 mg druhého přípravku. **2.** V hospodě je 10 čtyřmístných, 6 šestimístných a 4 osmimístné stoly. **3.** (i) pro $ab \neq 2$ právě jedno řešení: $x = \frac{-1-5b}{1-ab}$, $y = \frac{a+5}{2-ab}$, pro $a = -5, ab = 2$ nekonečně mnoho řešení: $x = -1 + \frac{2}{5}t$, $y = t$, pro $ab = 2, a \neq -5$ žádné řešení. (ii) Nemá řešení pro $c + b - 2a \neq 0$, nekonečně mnoho řešení pro $c + b - 2a = 0$. (iii) Nemá řešení pro $a = -3$, nekonečně mnoho řešení pro $a = 3$, v ostatních případech právě jedno řešení. (iv) Pro všechna $a, b, c$ právě jedno řešení: $x = -2+b+5c$, $y = 3a - b - 6c$, $z = -2a + b + 4c$. (v) Pro $a = 1$ nekonečně mnoho řešení: $x = -t$, $y = t$, $z = -1$, pro $a = 0$ žádné řešení, pro $a \neq 1$, $a \neq 0$ právě jedno řešení: $x = a - 1$, $y = 0$, $z = -1$. **4.** První přípravek $8 - t$, druhý $t - 3$, třetí $t$, kde $t = 3, 4, \dots, 8$. Nejlevnější řešení je pro $t = 3$. **5.** (i) $(\frac{69}{39}, \frac{-23}{39}, \frac{34}{39})$, (ii) $(1, 2, 3)$, (iii) $(\frac{-3\alpha+8, \alpha+12, 6\alpha-16}{11})$, (iv) $(0, 0, 0)$, $(2, 5, 10)$, $(-2, 8, -2)$. **6.** (i) $(-3, 8)$, (ii) $(1, 2, -2)$, (iii) $(0, 0, 0)$. **7.** Např. rovnice $x = 0$. Homogenní soustava nemůže mít právě dvě řešení, neboť každá jejich lineární kombinace by byla opět řešením. **8.** Společné body odpovídají řešením soustavy dvou rovnic o třech neznámých. Protože je soustava homogenní (roviny procházejí počátkem), je takových řešení nekonečně mnoho. **9.** Ne, neboť hodnost matice soustavy je vždy menší než počet neznámých, buď nemají žádné řešení, nebo nekonečně mnoho. **10.** (i) rovnoběžné, (ii) mimoběžné. **11.** V první síti tečou ve větvích proudy $\frac{5}{11}$ A, $\frac{40}{11}$ A a $\frac{45}{11}$ A. Ve druhé síti tečou ve větvích proudy $\frac{1}{4}$ A, $\frac{3}{4}$ A a 1 A. **12.** (i) $(t, 2t + 2)$, (ii) žádné řešení, (iii) $(0, 0, 0, 0)$. **13.** (i) různoběžné, průsečík $P = (2, 4, 6)$, (ii) rovnoběžné. **14.** (i) různoběžné, průsečík $P = (3, 5, 7)$, (ii) různoběžné, průsečík $P = (1, -2, 3)$.

## 1.2.3

**1.** a) $-\frac{48}{25}\mathrm{i}$, b) $2+2\mathrm{i}$, c) $-4$, d) $-4096\mathrm{i}$, e) 0. **2.** a) $\frac{48}{25}$, b) $2\sqrt{2}$, c) 4, d) 4096, e) 0. **3.** a) $2+\mathrm{i}; 1-\mathrm{i}$, b) 0, c) $\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}$, d) $0; 1$, e) $1 + 2\mathrm{i}; 2 + 3\mathrm{i}$, f) $-1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, g) $1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. **4.** a) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$, c) $1(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2})$, d) $\frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3})$. **5.** a) uzavřený kruh se středem v bodě $(1+0\mathrm{i})$ a poloměrem 1, b) prázdná množina, c) doplněk otevřeného kruhu se středem v bodě $(-2 + \mathrm{i})$ a poloměrem 2, d) mezikruží se středem v bodě $(0 - \frac{1}{3}\mathrm{i})$ a poloměry $\frac{1}{9}$ resp. $\frac{1}{3}$, vnitří kružnice do množiny patří, vnější nikoli.

## 1.3.5

**1.** $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} a+4 & -6a & 0 & a+4 \\ 2a+1 & -a & -1 & 2a+1 \\ a & 4a & 5 & a \end{pmatrix}$, $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 3a & 2a & 0 & 3a \\ -a+2 & 0 & 6 & -a+2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **3.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $e(ad-bc) \neq 0$, $\frac{1}{e(ad-bc)}\begin{pmatrix} ed & -eb & 0 \\ -ec & ae & 0 \\ 0 & 0 & ad-bc \end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **4.** a) ve schodovitém tvaru jsou $\mathbf{A_6}, \mathbf{B_3}, \mathbf{B_5}$, trojúhelníkové jsou $\mathbf{B_5}, \mathbf{B_6}$, b) definované součty jsou $\mathbf{A_1} + \mathbf{B_1}$, $\mathbf{A_2} + \mathbf{B_6}$, $\mathbf{A_3} + \mathbf{B_1}$, součiny $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_1B_5}$, $\mathbf{A_1B_6}$, $\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_2B_4}$, $\mathbf{A_3B_1}$, $\mathbf{A_3B_5}$, $\mathbf{A_3B_6}$, $\mathbf{A_6B_2}$, $\mathbf{A_6B_4}$, $\mathbf{B_6A_2}$, $\mathbf{B_3A_2}$, $\mathbf{B_1A_1}$, $\mathbf{B_1A_3}$, $\mathbf{B_2A_4}$, $\mathbf{B_2A_5}$, $\mathbf{B_2A_6}$, c) $h\mathbf{A_1} = 3$, $\det\mathbf{A_1} = -25$, $h\mathbf{A_2} = 4$, $\det\mathbf{A_2} = \mathrm{i}(4 + 2\sqrt{2}) - (1 + 2\sqrt{2})$, $h\mathbf{A_3} = 3$, $\det\mathbf{A_3} = -11$, $h\mathbf{A_4} = 2$, $\det\mathbf{A_4} = -(8 - 6\mathrm{i})^2$, $h\mathbf{A_5} = 2$, $\det\mathbf{A_5} = 5$, $h\mathbf{B_1} = 3$, $\det\mathbf{B_1} = -3$, $h\mathbf{B_2} = 2$, $h\mathbf{B_3} = 1, h\mathbf{B_4} = 1, h\mathbf{B_5} = 3, h\mathbf{B_6} = 3$. **5.** $\mathbf{AE_n} = \mathbf{E_mA} = \mathbf{A}$. **7.** Neplatí, například matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; je horní trojúhelníková a přesto není ve schodoviém tvaru. Platí například tvrzení: Je-li čtvercová matice ve schodovitém tvaru, pak je horní trojúhelníková. Také platí tvrzení: Regulární čtvercová matice je horní trojúhelníková právě tehdy, když má schodovitý tvar. **8.** a) $-$, b) $-$, c) $-$. **9.** $n, n-1, \ldots, 2, 1$, $\frac{n(n-1)}{2}$ inverzí. **10.** a) $(-1)^{(4n^2-n)}$, b) $(-1)^{\frac{1}{2}(3n^2-n)}$, c) $(-1)^{\frac{1}{2}(3n^2-n)}$.

## 1.4.5

**1.** a) nezávislé, b) závislé. **2.** a) závislé pro $a = 2 \vee a = 1$, jinak nezávislé, b) nezávislé pro každé $a$. **3.** Jsou ortogonální, nejsou ortonormální. **4.** a) $b = -5 \wedge a = \frac{9}{2}$, b) $a = b = 0 \vee a = b = 1$. **5.** $\vec{x} = (0, s, -s, 0)$. **8.** a) např. $\alpha \neq 0$, b) např. $\alpha = \beta = \gamma = 1$, c) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0$. **9.** a) $\pm\frac{\pi}{4}$, b) $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$; $|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **10.** $\vec{e}_1 = -\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 - \frac{1}{2}\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3)$; $\vec{e}\,'_1 = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$, $\vec{e}\,'_3 = -2\vec{e}_2$; $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. **11.** Závislé. **12.** $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{e}\,'_2 = \frac{5}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{3}{2}\vec{e}_3 + \frac{3}{2}\vec{e}_4$, $\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{2}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$, $\vec{e}\,'_4 = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4$, b) $(0, -1, -1, -1)$, c) ne. **13.** $\pm 1$. **14.** $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. **15.** $\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cdot \mathbf{T_2}$; $\mathbf{T_1} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$; na pořadí obecně závisí. **16.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **17.** $D = [3, 0, 0]$.

## 2.1.9

**1.** a) $\mathbf{R} - \{1, 2\}$, b) $\cup_{k\in\mathbf{Z}}(2k\pi + 3, 2k\pi + \pi + 3)$, c) $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$, d) $\mathbf{R} - \{0\}$, e) $\mathbf{R} - \{0\}$, f) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$. **2.** a) lichá, b) lichá, c) sudá, d) lichá, e) lichá. **3.** a) $\frac{2\pi}{3}$, b) $\pi$, c) $\pi$, d) $2\pi$. **4.** a) $(x-1)^2(x^2+1)$; kladné v $\mathbf{R}$, b) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$; kladné v $\mathbf{R}$, c) $(x+2)(x-3)(x-5)$; kladné $(-2, 3) \cup (5, \infty)$; záporné $(-\infty, -2) \cup (3, 5)$, d) $(x-1)(x^2+x+1)$; kladné $(1, \infty)$; záporné $(-\infty, 1)$, e) $(x+2)(x+1)^2x$; kladné $(\infty, -2) \cup (0, \infty)$; záporné $(-2, -1) \cup (-1, 0)$, f) $(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$; kladné $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; záporné $(-1, 1)$. **5.** a) $x = -\frac{5y+1}{3y-2}$; $\mathbf{R} - \{-\frac{5}{3}\}$, b) $x = 3 + \frac{\ln y}{\ln 10}$; $\mathbf{R}$, c) $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$; $\mathbf{R}$, d)

$x = \frac{\pi}{4} + \arctan(\sqrt{y}) + \frac{k\pi}{2}$ pro $k$ sudé; $x = \frac{\pi}{4} - \arctan(\sqrt{y}) + \frac{(k+1)\pi}{2}$ pro $k$ liché; $\cup_{k\in\mathbf{Z}}(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$, e) $x = \sqrt{y-1}$ pro $x > 0$; $x = -\sqrt{y-1}$ pro $x < 0$, f) $x = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$ pro $x > 0$; $x = -\ln(y+\sqrt{y^2-1})$ pro $x < 0$. **6.** a) $\frac{1}{x^4} + \frac{1+2\,x}{1+x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{x}$, b) $x^2+5+\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x+5}$, c) $-\frac{3}{16\,(x-1)} + \frac{1}{4\,(1+x^2)} + \frac{3}{16\,(x+1)} + \frac{1}{16\,(x+1)^2} + \frac{1}{4\,(1+x^2)^2} + \frac{1}{16\,(x-1)^2}$, d) $\frac{x-1}{4\,(1+x^2)} - \frac{1}{4\,(x+1)} + \frac{x+1}{2\,(1+x^2)^2}$, e) $2 + \frac{-1+2\,x}{x^2-x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$. **7.** a) $\frac{3}{7}$, b) 1, c) 1, d) 1, e) 0, f) $2^{\frac{1}{3}}$, g) 0, h) 2. **8.** a) neexistuje, b) $-1$.

## 2.2.7

**1.** a) $-\frac{e^{(-x^2)}\,(2\,x^2\,\ln(x)-1)}{x}$; $(0,\infty)$,
b) $-7^{(-x^2)}\,e^{(-5\,x)}\,(2\,x\,\ln(7)+5)$; $\mathbf{R}$,
c) $-3\,e^{(-3\,x)}\,(\sin(3\,x)-\cos(3\,x))$; $\mathbf{R}$,
d) $-\frac{2}{-x+a}$; $(a,\infty)$,
e) $\frac{1}{2\,(1+\sqrt{x})^2\,\sqrt{x}\,\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}}}$; $(0,\infty)$,
f) $2^{(1+\tan(x^2))}\,(1+\tan(x^2)^2)\,x\,\ln(2)$; $\mathbf{R}$,
g) $\tan(x)^{(\ln(3)-1)}\,(1+\tan(x)^2)\,\ln(3)$; $\cup_{k\in\mathbf{Z}}(k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2})$,
h) $-\frac{1+2\,x}{x+1}$; $(-\infty,1)$,
i) $x^{(x^2)}\,(2\,x^2\,\ln(x)+1+x^2)$; $\mathbf{R}$,
j) $-\frac{1}{2}\,\frac{x^{(-\frac{1+2\,x}{2\,(x+1)})}\,(x\,\ln(x)-x-1)}{(x+1)^2}$; $(0,\infty)$.
**2.** a) $Df = \mathbf{R}-\{0\}$, klesající na $Df$, inflexní bod 0, konkávní na $(-\infty,0)$, konvexní na $(0,\infty)$. asymptota $y=0$. b) $Df = \mathbf{R}-\{-1\}$, průsečíky $[1,0]$, $[0,-1]$, stac. body $\{-5,1\}$, rostoucí na $(-\infty,-5)\cup(-1,\infty)$, klesající na $(-5,-1)$, inflexní bod 1, konkávní na $(1,\infty)$, konvexní na $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$, asymptoty $y=x$, $x=-1$. c) $Df = \cup_{k\in\mathbf{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$, průsečíky $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,0], k\in\mathbf{Z}$, stac. body $\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, rostoucí na $(2k\pi,(2k+\frac{1}{2})\pi), k\in\mathbf{Z}$, klesající na $((2k+\frac{1}{2})\pi,(2k+1)\pi), k\in\mathbf{Z}$, konvexní na $Df$, asymptoty $y=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. d) $Df=\mathbf{R}$, průsečíky $[\frac{\pi}{2}+k\pi,0], k\in\mathbf{Z}$, $[0,1]$, stac. body $\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, rostoucí na $(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi), k\in\mathbf{Z}$, klesající na $((k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi), k\in\mathbf{Z}$, inflexní body $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, konkávní $(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}), k\in\mathbf{Z}$, konvexní $(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}), k\in\mathbf{Z}$, perioda $\pi$. e) $Df=\mathbf{R}-\{0\}$, stac. bod 2, rostoucí na $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, klesající na $(0,2)$, konkávní na $Df$, asymptoty $y=0$, $x=0$. f) $Df=\mathbf{R}-\{-1,1\}$, průsečíky $[-1,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$, stac. bod 0, rostoucí na $(0,1)\cup(1,\infty)$, klesající na $(-\infty,0)$, inflexní body $\{-1,1\}$, konkávní na $(-1,1)$, konvexní na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, asymptoty $y=1$, $x=0$. g) $Df=\mathbf{R}-\{-1\}$, průsečík $[0,1]$, stac. body $\{0,-2\}$, rostoucí na $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$, klesající na $(-2,-1)\cup(-1,0)$, inflexní bod $-1$, konkávní na $(-1,\infty)$, konvexní na $(-\infty,-1)$, asymptoty $y=x$, $x=-1$. h) $Df=\mathbf{R}-\{1\}$, průsečíky $[\sqrt{3},0]$, $[-\sqrt{3},0]$, $[0,3]$, rostoucí na $Df$, inflexní bod 1, konkávní na $(-\infty,1)$, konvexní na $(1,\infty)$, asymptoty $y=x+1$, $x=1$. i) $Df=\mathbf{R}-\{0,-1,1\}$, stac. body $\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\}$, rostoucí na $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$, klesající na $(-\infty,-1)\cup(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\cup(\frac{\sqrt{3}}{3}),1)\cup(1,\infty)$, konkávní na $(-1,0)\cup(1,\infty)$, konvexní na $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, asymptoty $y=0$, $x=0$, $x=-1$, $x=1$. j) $Df=[-2,\infty)$, průsečíky $[-2,0]$, $[1,0]$, $[0,2^{1/3}]$, stac. bod $-1$, v bodě 1 extrém, rostoucí na $[-2,-1)\cup(1,\infty)$, klesající na $(-1,1)$, konvexní na $Df-\{1\}$, asymptota $y=x$. k) $Df=\mathbf{R}$, průsečík $[0,0]$, stac. bod $-1$, rostoucí na $(-1,\infty)$,

klesající na $(-\infty,-1)$, inflexní bod $-2$, konkávní na $(-2,\infty)$, konvexní na $(-\infty,-2)$, asymptota $y=0$. l) $Df=\mathbf{R}-\{0\}$, rostoucí na $Df$, konkávní na $(-\infty,0)$, konvexní na $(0,\infty)$, asymptoty $y=-1$, $y=0$, $x=0$. m) $Df=\mathbf{R}$, průsečíky $[0,1]$, stac. bod 0, rostoucí na $(0,\infty)$, klesající na $(-\infty,0)$, konkávní na $\mathbf{R}$. n) $Df=(-1,1)$, průsečíky $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$, stac. bod 0, rostoucí na $(-1,0)$, klesající na $(0,1)$, konvexní na $Df$. **3.** a) min $-16$; max $-9$, b) min 1; max $\frac{3}{2}$, c) min $-44$; max $-8$, d) min 4; max 9, e) min $-\sin(\sin(1))$; max $\sin(\sin(1))$. **4.** 0,126 m/s; 316 m/s$^2$. **5.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **7.** a) 0, b) 0, c) e, d) $-\infty$, e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, f) $\frac{1}{2}$, g) 1, h) $\frac{1}{2}$. **8.** a) 0, b) $\infty$, c) $\frac{1}{\mathrm{e}}$, d) $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **9.** a) $-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)+\frac{x}{2}$, b) $\frac{1}{3}\cos(x)(-3+\cos(x)^2)$, c) $\ln(\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1})$, d) $-\frac{1}{2}\cos(2x)^4+\frac{1}{2}\cos(2x)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\cos(2x)$, e) $\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos(x)^2+\frac{1}{2}\cos(x)^4-\frac{1}{6}\cos(x)^6$, f) $-\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+3)$, g) $-\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+3)$, h) $\frac{(x^2+a^2)^{(3/2)}}{3}$, i) $-\frac{\sqrt{3x-1}\,x}{3}+\frac{\sqrt{3x-1}}{9}+\frac{\sqrt{3x+1}\,x}{3}+\frac{\sqrt{3x+1}}{9}$, j) $2\cos(x)$, k) $\frac{2^{(1+\sqrt{x})}}{\ln(2)}$, l) $-\frac{1}{2}\cos(1+x^2)$, m) $\frac{1}{4}\arctan(\frac{x^2}{2})$, n) $3x+2\ln(1+x^2)+3\arctan(x)$, o) $\dfrac{\sqrt{2+x+x^2}}{4}+\dfrac{\sqrt{2+x+x^2}\,x}{2}+\dfrac{7}{8}\operatorname{arcsinh}(\dfrac{\sqrt{7}\,(1+2x)}{7})$, p) $-\frac{1}{2}e^x(\cos(x)-\sin(x))$, q) $\frac{1}{2}\ln(x)^2$. **10.**$a=2^13$, $h=4^{-1}3$.

## 2.3.8

**1.** $S=\pi r^2$, $m=\frac{2}{3}r^2$. **2.** $S_1=\frac{\pi}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $m_1=\frac{\pi^2}{4}$, $m_2=\frac{\pi}{3}$. **3.** $S=\frac{1}{3}$. **4.** $S=\frac{9}{2}$. **5.** $S=3\pi r^2$. **6.** a) $S=r^2(\arccos\frac{r-v}{r}-\frac{r-v}{r}\sqrt{1-(\frac{r-v}{r})^2})$, b) $S=\pi ab$, c) $S=\frac{1}{2}av_a$. **7.** a) $V=\pi r^2v$, $J=\frac{1}{2}mr^2$, $z=\frac{v}{2}$, b) $V=\frac{1}{3}\pi r^2v$, $J=\frac{3}{10}mr^2$, $z=\frac{v}{4}$, c) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, $J=\frac{2}{5}mr^2$, $z=0$, d) $V=\frac{4}{3}\pi a^2b$, $J=\frac{2}{5}ma^2$, $z=0$, e) $V=\frac{1}{3}\pi v^2(3r-v)$, $J=\frac{mv(20r^2-15vr+3v^2)}{10(3r-v)}$, $z=\frac{3(2r-v)^2}{4(3r-v)}$. **8.** a) $J=mr^2$, b) $J=\frac{1}{12}ml^2$, $J=\frac{1}{12}ml^2+md^2$. **9.** a) $T=(0,0,\pi b)$, $T=(0,0,\frac{3\pi b}{2})$. **10.** $l=6a$. **11.** a) $S=2\pi rv$, $J=2\pi r^3v$, $X_t=\frac{v}{2}$; b) $S=\pi r\sqrt{r^2+v^2}$, $J=\frac{\pi r^3}{2}\sqrt{r^2+v^2}$, $X_T=\frac{2}{3}v$ (od vrcholu); c) $S=4\pi r^2$, $J=\frac{8}{3}\pi r^4$ $X_T=0$. **12.** a) $M=4a$, $X_T=\frac{a}{3}$, $J_y=\frac{28}{15}a^3$; b) $M=a\pi\sqrt{1+4\pi^2}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+4\pi^2}-2\pi)$; c) $M=\sqrt{2}(\mathrm{e}^\pi-1)$, $X_T=-\frac{2}{5}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^\pi-1}\right)$; $Y_T=\frac{1}{5}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^\pi-1}\right)$, $J_X=\frac{2\sqrt{2}}{39}(\mathrm{e}^{3\pi}-1)$, $J_Y=\frac{11\sqrt{2}}{39}(\mathrm{e}^{3\pi}-1)$, $J_Z=\frac{\sqrt{2}}{3}(\mathrm{e}^{3\pi}-1)$; d) $M=2\pi R$, $X_T=0$, $Y_T=0$, $J_X=J_Y=\pi R^3$, $J_Z=2\pi R^3$; e) $M=4r$, $Y_T=\frac{16}{3}r$, $J_X=4r^3\frac{128}{15}$; f) $M=6r$, $X_T=Y_T=0$, $J_X=J_Y=\frac{3}{2}r^3$, $J_Z=3r^3$.

## 3.1.5

**1.** a) $\frac{6!}{6^6}$, b) $\frac{1}{6^6}$, c) $\frac{\binom{6}{3}\cdot5^3+\binom{6}{4}\cdot5^2+\binom{6}{5}\cdot5+1}{6^6}$, d) $\frac{\binom{6}{3}\cdot5^3}{6^6}$, e) $\frac{6}{6^6}$, f) $\frac{3^6}{6^6}$, g) např. $P_6=\frac{1}{6^6}$, $P_7=\frac{6}{6^6}$, $P_8=\frac{6+\binom{6}{2}}{6^6}$, $P_9=\frac{6+2\cdot\binom{6}{2}+\binom{6}{3}}{6^6}$, $P_{10}=\frac{6+2\cdot\binom{6}{2}+\binom{6}{2}+3\cdot\binom{6}{3}+\binom{6}{4}}{6^6}$. **2.** a) $\frac{1}{24}$, b) $\frac{9}{24}$, c) $\frac{15}{24}$, d) $\frac{8}{24}$. **4.** a) $1-(a-\vartheta)^n$, b) $\sum_{i=1}^k\binom{n}{i}\vartheta^i(1-\vartheta)^{n-i}$, c) $\binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}$. **5.** 371. **6.** $24^2-\frac{23^2}{2}-\frac{22^2}{2}$. **7.** $\frac{2l}{\pi d}$. **8.** a) $p(1-q)+q(1-p)$, b) $p+q-p\cdot q$, c) $p\cdot q$, d) $1-p-q+p\cdot q$. **9.** **10.** **11.** a) $\frac{20}{21}$, b) $\frac{68}{81}$. **12.** a) $\frac{3k+100}{400}$, b) $\frac{100-k}{3k+100}$ **13.** a) 0,06, b) 0,02.

## 3.2.3

**1.** a) $\{(1,\frac{1}{10}),(2,\frac{2}{15}),(3,\frac{7}{30}),(4,\frac{3}{10}),(5,\frac{7}{30})\}$, b) $P_1=1$, $P_2=\frac{27}{30}$, $P_3=\frac{23}{30}$,

$P_4 = \frac{8}{15}$, $P_5 = \frac{7}{30}$, c) 3,43, d) 1,08, e) $\frac{2}{3}$. **2.** a) $\{(0; 0{,}1), (1; 0{,}25), (2; 0{,}25), (3; 0{,}35), (4; 0{,}05)\}$, b) 1,9; 1,21 c) 0,65. **3.** a) $k = \frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{9}$, c) 2, d) $x_{0,5} = \sqrt{2}$, $x_{0,25} = 1$, $x_{0,75} = \sqrt{3}$, e) $F(x) = 0$ pro $x < 0$, $F(x) = \frac{1}{4}x^2$ pro $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = 1$ pro $x > 2$. **4.** a) $k = 1$, b) $F(x) = \frac{x}{x+1}$ pro $x > 0$, $F(x) = 0$ pro $x \leq 0$, c) 0, d) $x_{0,5} = 1$, $x_{0,25} = \frac{1}{3}$, $x_{0,75} = 3$. **5.** $k = 2$, $c = 6$, $F_1(x) = 0$ pro $x < 1$, $F_1(x) = 2\frac{x-1}{x}$, pro $1 \leq x \leq 2$, $F_1(x) = 1$ pro $x > 2$, $F_2(x) = 0$ pro $x < 0$, $F_2(x) = 3x^2 - 2x^3$ pro $0 \leq x \leq 1$, $F_2(x) = 1$ pro $x > 1$. c) $f: 1, 2\ln 2, 2 - 4\ln^2 2, \frac{4}{3}$, $g: \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}, 1$. **6.** a) $\{(1, 0), (2, \frac{1}{36}), (3, \frac{2}{36}), (4, \frac{3}{36}), (5, \frac{4}{36}), (6, \frac{5}{36}), (7, \frac{6}{36}), (8, \frac{5}{36}), (9, \frac{4}{36}), (10, \frac{3}{36}), (11, \frac{2}{36}), (12, \frac{1}{36})\}$, b) $F(x) = 0$ pro $x \leq 2$, $F(x) = \frac{1}{36}$ pro $x \in (2, 3]$, $F(x) = \frac{3}{36}$ pro $x \in (3, 4]$, $F(x) = \frac{6}{36}$ pro $x \in (4, 5]$, $F(x) = \frac{10}{36}$ pro $x \in (5, 6]$, $F(x) = \frac{15}{36}$ pro $x \in (6, 7]$, $F(x) = \frac{21}{36}$ pro $x \in (7, 8]$, $F(x) = \frac{26}{36}$ pro $x \in (8, 9]$, $F(x) = \frac{30}{36}$ pro $x \in (9, 10]$, $F(x) = \frac{33}{36}$ pro $x \in (10, 11]$, $F(x) = \frac{35}{36}$ pro $x \in (11, 12]$, $F(x) = 1$ pro $x > 12$, c) 7, 7, 5, 83 d) $\frac{15}{36}$.

### 3.3.4

**1.** $10{,}0 \pm 0{,}7$.

### 4.1.6

**1.** a) ano, b) ne, c) ano, d) ano, e) ne, f) ano, g) ano. **2.** a) např. $P = \{\sigma_0 = (1,2,3,4), \sigma_1 = (1,2,4,3)\}$ není normální podgrupou, b) např. podmnožina $P$ všech sudých čísel je normální podgrupou, $\mathbf{Z}/P$ je grupa zbytkových tříd modulo 2, c) např. podmnožina všech diagonálních regulárních matic není normální podgrupou, d) např. $P = \{Z_0, Z_4\}$ je normální podgrupou, příslušná faktorgrupa je grupa všech zbytkových tříd modulo 2. **5.** $\sigma \circ \nu = (2,6,3,4,5,1)$, $\nu \circ \sigma = (3,2,5,4,1,6)$, $\sigma^{-1} = (5,1,2,4,6,3)$, $\sigma^5 = (1,2,3,4,5,6)$. **6.** Označíme-li $\sigma_0 = (1,2,3)$, $\sigma_1 = (2,1,3)$, $\sigma_2 = (1,3,2)$, $\sigma_3 = (3,2,1)$, $\sigma_4 = (2,3,1)$ a $\sigma_5 = (3,1,2)$,

| $\circ$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ | $\sigma_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_0$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ | $\sigma_5$ |
| $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0$ | $\sigma_4$ | $\sigma_5$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
| $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | $\sigma_5$ | $\sigma_0$ | $\sigma_4$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ |
| $\sigma_3$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ | $\sigma_5$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ |
| $\sigma_4$ | $\sigma_4$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_5$ | $\sigma_0$ |
| $\sigma_5$ | $\sigma_5$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0$ | $\sigma_4$ |

**7.** a) okruh ano, těleso ne, b) ani okruh, ani těleso, c) okruh ano, těleso ne, d) $\mathbf{N}$ ani okruh ani těleso, $\mathbf{Z}$ okruh ano, těleso ne, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ jsou okruhem i tělesem. **8.** Např. podokruh sudých čísel v $\mathbf{Z}$. **9.** a) ne, b) ne, c) ano – báze např. $B = \{1, x, \dots, x^n\}$, $\dim\mathbf{V} = n+1$, d) ne, e) ne, f) ano – báze např. $B = \{(2,1)\}$, $\dim\mathbf{V} = 1$, g) ano – báze např. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\mathbf{V} = 2$. **10.** a) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, b) $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -3$, c) $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$. **11.** a) ano – báze např. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\mathbf{P}$=3, doplňující vektor např $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) ano – báze např. $B = \{(1,-1)\}$, $\dim\mathbf{P} = 1$, doplňující vektor např. $(1,0)$, c) ne, d) ne, e) ano – báze např. $B = \{1, x^2, x^4\}$, $\dim\mathbf{P} = 3$, doplňující vektory např. $\{x, x^3\}$, f) ano – báze např. $B = \{(x+1)(x-1), (x+1)(x-1)x, (x+1)(x-1)x^2\}$, $\dim\mathbf{P} = 3$, doplňující vektory např. $\{1, x\}$. **12.** a) $\dim V_1 = 3$, bází jsou jakékoli tři lineárně nezávislé vektory, doplněk $V_1' = \{\vec{o}\}$, $\dim V_2 = 2$, báze např. $B = \{(0,2,1),(1,4,0)\}$, doplněk např. $V_2' = [|(1,0,0)|]$, $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3 = V_1$, $V_1 \cap V_2 = V_2$, b) $\dim V_1 = 2$, bází mohou být např. kterékoli dva z vektorů v zadání, doplněk např. $V_1' = [|(0,0,1,0),(1,0,0,0)|]$, $\dim V_2 = 2$, bází mohou být např. kterékoli dva z vektorů v zadání, doplněk např. $V_2' = [|(1,0,0,0),(0,1,0,0)|]$, $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^4$, $V_1 \cap V_2 = \vec{o}$, c) $\dim V_1 = 2$, bází mohou být např. kterékoli dva z vektorů v zadání, doplněk např. $V_1' = [|1, x^3, x^4, x^5, x^6|]$, $\dim V_2 = 3$, zadané vektory jsou bází $V_2$, doplněk např. $V_2' = [|x^2, x^4, x^5, x^5|]$, $\dim(V_1 + V_2) = 4$, $V_1 + V_2 = [|x+1, x^2+1, 1, x^3|]$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, $V_1 \cap V_2 = [|x^2 + x + 2|]$, d) $\dim V_1 = 3$, báze a doplněk viz předchozí příklad, $\dim V_2 = 2$, báze např. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, doplněk např. $V_2' = \left[\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right|\right]$, $V_1 + V_2 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, báze např. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. **13.** $\dim\mathbf{R}_+ = 1$, báze např. $B = \{2\}$, izomorfismus např. $\mathbf{R}_+ \ni u \to \ln u \in \mathbf{R}$.

## 4.2.6

**1.** a) ne, b) ano, c) ano, d) ne, e) ano. **2.** b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Ker $= [|(1,-1,-1)|]$, Im $= [|(1,0,1),(1,-1,0)|]$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Ker $= \{\vec{o}\}$, Im $= [|(1,1,1),(-1,1,0)|]$, e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, Ker $= [|(1,1,0),(3,0,-1)|]$, Im $= \mathbf{R}$. **4.** a) např. $f(x,y,z) = (x-y+z, x-y+z, x-y+z)$, b) např. $f(x,y,z) = (x+y, x+2y, 0)$, d) např. $f(x,y) = (x-y, x-y)$. **5.** $\mathbf{A} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -9 & 5 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, Ker $= \{\vec{o}\}$, Im $= [|(-1,2,0),(0,-3,5)|]$, $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **6.** a) ano, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) ne. **7.** b) Ker $= \{c | c \in \mathbf{R}\}$, Im $= P_{n-1}(x)$, $d = 1$, $h = n$, c) ne, matice $A = (a^i_j)$, $a^i_j = j-1$ pro $j = 2, \dots n+1$, $i = j-1$, jinak $a^i_j = 0$, $A' = (b^i_j)$, $b^i_j = 1$ pro $j = 2, \dots n+1$, $i = j-1$, jinak $b^i_j = 0$ (matice má pod hlavní diagonálou jedničky, jinak samé nuly).

## 4.3.2

**1.** a) nemá reálné vlastní hodnoty, b) $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 1$, $L_1 = [|(1,1,1)|]$, $\lambda_2 = 3$, $k_2 = 2$, $L_2 = [|(-2,1,4)|]$, c) $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(-2,-1,1)|]$, d) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(1,2,0),(1,0,1)|]$, e) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)|]$, $\lambda_2 = -2$, $k_2 = 1$, $L_2 = [|(1,-1,-1,-1)|]$. **4.** a,b) např. otočení o úhel $\varphi \neq k\pi$ v $\mathbf{R}^2$ nebo zobrazení z cvičení 1a., c) např. zobrazení z cvičení 1b, 1c, 1d, d) např. zobrazení z cvičení 5, e,f) skalární násobek identického zobrazení. **5.** $\lambda_1 = 0$, $k_1 = n+1$, $L_1 = [|1|]$.

**Literatura použitá při cvičení:**


- Nicholson, Keith: Elementary Linear Algebra with Applications, Wadsworth Publishers of Canada, Toronto.
- Musilová, Jana; Krupka, Demeter: Lineární a multilineární algebra, UJEP, Brno 1998
- Budíková, Marie; Mikoláš, Štěpán; Osecký, Pavel: Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika, sbírka příkladů, MU, Brno 1996.
- Gillman, Leonard; McDowell Robert: Matematická analýza, SNTL, Praha 1980.
- Herman, Jiří; Kučera, Radan; Šimša, Jaromír: Seminář ze středoškolské matematiky, MU Brno 1994.


**Poděkování:** Michal Lenc (přečtení), Jiří Bartoš (obrázky), Jakub Zlámal, Josef Klusoň, Tomáš Nečas, Martin Mráz, Lenka Czudková, Tomáš Tyc, Ondřej Přibyla, Marie Budíková, …