



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav fyzikální elektroniky  
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

## Fyzikální praktikum 4

### Koherenční délka

jarní semestr 2013

#### 1 Koherenční délka

Z praktického hlediska můžeme přibližně říci, že světlo je koherentní, pokud „dobře interferuje“. Představme si, že zdroj vyzařuje monochromaticky harmonickou vlnu pouze omezenou dobu. Poté se fáze náhodně změní a situace se opakuje. Označme střední hodnotu doby trvání této sinusoidy  $\tau_0$ . Její „oříznutí“ se projeví frekvenčním rozšířením příslušné čáry ve spektru přibližně podle vztahu

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau_0}.$$

Za střední dobu  $\tau_0$  světlo urazí dráhu

$$l_c = c\tau_0 = \frac{c}{\Delta\nu}.$$

Protože

$$|\Delta\nu| = \frac{c}{\lambda^2} |\Delta\lambda|,$$

pro koherenční délku dostaneme vztah

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Při interferenci obvykle původní světlo rozdělíme na dva či více svazků a ty vzájemně zpozdíme. Význam koherenční délky spočívá v tom, že pokud vzájemný dráhový rozdíl mezi svazky překročí koherenční délku, interference vymizí, neboť svazky již nadále nejsou koherentní (vzájemný fázový rozdíl je pak náhodný a interferenční člen vymizí). Pro bílé světlo ( $\lambda \approx 500$  nm,  $\Delta\lambda \approx 300$  nm) je koherenční délka  $l_c \approx 0,8$   $\mu$ m. Proto pozorujeme interferenci např. na mýdlových bublinách, olejových vrstvách, ale ne na skleněné okenní tabuli.

Pro případ monochromatického světla a dvou svazků o intenzitách  $I_1$  a  $I_2$  lze pro výslednou intenzitu psát

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi,$$

kde fázový rozdíl  $\Delta\phi = k\Delta S = \frac{2\pi}{c}\nu\Delta S$  a  $\Delta S$  je (optický) dráhový rozdíl. Pro téměř monochromatické světlo, vyzařované např. atomem na jedné spektrální čáře, zavedme pro oba svazky stejný intenzitní spektrální profil  $f(\nu)$  normovaný  $\int f(\nu)d\nu = 1$ . Protože jednotlivé spektrální příspěvky se sčítají nekoherentně, dostaneme pro výslednou intenzitu čáry

$$I = \int [I_1 f(\nu) + I_2 f(\nu) + 2\sqrt{I_1 I_2} f(\nu) \cos(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta S)] d\nu.$$

Tedy

$$I = \int I_1 f(\nu) d\nu + \int I_2 f(\nu) d\nu + 2 \int \sqrt{I_1 I_2} f(\nu) \cos(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta S) d\nu$$

Po částečné integraci

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \int f(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S}\right)d\nu.$$

Ve zbylém integrálu rozšíříme argument kosinu o frekvenci ve středu čáry  $\nu_0$

$$\int f(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S}\right)d\nu = \int f(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S} + \frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}\right)d\nu$$

a kosinus rozepíšeme

$$\int f(\nu) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}\right) \right] d\nu.$$

Kosiny obsahující pouze  $\nu_0$  vytkneme mimo integrál

$$\overbrace{\left[ \int f(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right)d\nu \right]}^{\gamma^{(r)}} \cos\left(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}\right) - \overbrace{\left[ \int f(\nu) \sin\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right)d\nu \right]}^{\xi^{(r)}} \sin\left(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}\right)$$

protože pro spektrální čáru je  $|\nu - \nu_0| \ll \nu_0$ , integrály jsou velmi pomalou funkcí  $\Delta\mathcal{S}$

$$\gamma^{(r)} = \int f(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right)d\nu$$

$$\xi^{(r)} = \int f(\nu) \sin\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right)d\nu.$$

Při symetrickém profilu je navíc  $\xi^{(r)} = 0$ , takže

$$I = I_1 + I_2 + 2\gamma^{(r)}\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}\right). \quad (1)$$

$\gamma^{(r)}$  má tedy význam stupně koherence. Viditelnost interferenčního jevu je definována jako

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min} + I_{\max}}.$$

Po dosazení extrémních hodnot z (1)

$$\mathcal{V} = \frac{2\gamma^{(r)}\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Pro  $I_1 = I_2$  je viditelnost interferenčního jevu rovna stupni koherence

$$\mathcal{V} = \gamma^{(r)}.$$

Význam předešlého závěru spočívá v tom, že analýzou interferenčních obrazců dokážeme stanovit závislost viditelnosti jevu a tedy i stupně koherence na dráhovém rozdílu. Protože ten je Fourierovou transformací spektrálního profilu, lze zpětnou transformací získat původní spektrální profil. Na tom jsou založeny spektrometry s Fourierovou transformací (např. FTIR). Příklady provázanosti spektrálního profilu a viditelnosti interferenčního jevu jsou na obrázku 1.

## 1.1 Gaussův profil

Spektrální čáry plynů ve výbojkách za nízkého tlaku jsou rozšířeny zejména Dopplerovým jevem, mají tedy Gaussův spektrální profil. Vezměme normovaný Gaussův spektrální profil

$$f_g(\nu) = f_0 e^{-\alpha^2(\nu-\nu_0)^2},$$

$$f_0 = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_{1/2}}, \quad \alpha = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{1/2}},$$

kde  $\Delta\nu_{1/2}$  je plná šířka čáry v polovině výšky (FWHM). Viditelnost  $\mathcal{V}$  interferenčního jevu při použití kvazimonochromatického světelného zdroje s gaussovsky rozšířenou spektrální čarou

$$\mathcal{V}(\Delta\mathcal{S}) = \gamma^{(r)} = \int f_g(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right) d\nu.$$

Po integraci

$$\mathcal{V}_g(\Delta\mathcal{S}) = e^{-\frac{\pi^2 \Delta\mathcal{S}^2}{\alpha^2 c^2}}. \quad (2)$$

Po dosazení za  $\alpha$

$$\mathcal{V}_g(\Delta\mathcal{S}) = e^{-\frac{\pi^2 \Delta\nu_{1/2}^2 \Delta\mathcal{S}^2}{4 \ln 2 c^2}}.$$

Viditelnost je tedy opět popsána Gaussovou funkcí. Fitujeme-li viditelnost funkcí

$$f(x) = A e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2w^2}},$$

pak pro pološířku čáry  $\Delta\nu_{1/2}$  dostaneme

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\sqrt{2 \ln 2} c}{\pi w}.$$

Dosadíme-li za  $\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda_{1/2}$ , pak pro  $\Delta\lambda_{1/2}$  dostaneme

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi w} \lambda_0^2,$$

neboli

$$\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_{1/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2 \ln 2}} w \doteq 2,67 w.$$

## 1.2 Dvojice Gaussových profilů

Spektrum některých prvků (např. sodíku) je tvořeno dvojicí čar s malou vzájemnou vzdáleností  $\delta\lambda$ , tzv. dublety. Ukážeme, že v tomto případě je viditelnost nemonotonní funkcí dráhového rozdílu  $\Delta\mathcal{S}$ .

Napíšeme-li spektrální profil v symetrickém tvaru

$$f_{gg}(\nu) = \frac{f_0}{2} e^{-\alpha^2[\nu-(\nu_0-\delta\nu/2)]^2} + \frac{f_0}{2} e^{-\alpha^2[\nu-(\nu_0+\delta\nu/2)]^2},$$

potom obdobně jako v minulém případě

$$\mathcal{V}(\Delta\mathcal{S}) = \gamma^{(r)} = \int f_{gg}(\nu) \cos\left(\frac{2\pi}{c}(\nu - \nu_0)\Delta\mathcal{S}\right) d\nu.$$

Kosinus převedeme do komplexních exponenciál a jeho argument rozšíříme o  $\pm \frac{2\pi}{c} \frac{\delta\nu}{2} \Delta\mathcal{S}$ . Po integraci, při níž využijeme výsledek výpočtu pro samotný Gaussův profil dostaneme

$$\mathcal{V}_{\text{gg}}(\Delta\mathcal{S}) = e^{-\frac{\pi^2 \Delta\mathcal{S}^2}{\alpha^2 c^2}} \left| \cos\left(\frac{2\pi}{c} \frac{\delta\nu}{2} \Delta\mathcal{S}\right) \right|.$$

První činitel, shodný s výsledkem pro samotný Gaussův profil (2), je nyní silně modulován periodickou funkcí. Pro minima viditelnosti platí

$$\cos\left(\frac{2\pi}{c} \frac{\delta\nu}{2} \Delta\mathcal{S}\right) = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{2\pi}{c} \frac{\delta\nu}{2} \Delta\mathcal{S} = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Mezi dvěma minimy viditelnosti je vzdálenost  $\pi$ . Označíme-li dva nejbližší dráhové rozdíly s minimem viditelnosti  $\Delta\mathcal{S}_1$  a  $\Delta\mathcal{S}_2$ , pak pro frekvenční vzdálenost čar dostaneme

$$\delta\nu = \frac{c}{\Delta\mathcal{S}_2 - \Delta\mathcal{S}_1}.$$

Odpovídající vzdálenost čar ve spektru je pro kvazimonochromatické světlo

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} \delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\mathcal{S}_2 - \Delta\mathcal{S}_1}.$$

Výsledek můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\lambda_0}{\delta\lambda} = \frac{\Delta\mathcal{S}_2 - \Delta\mathcal{S}_1}{\lambda_0}.$$

Jak ho můžeme interpretovat z hlediska experimentu?

Spektrální profil může být ve skutečnosti často nesymetrický. Např. komponenty dubletu sodíku mají v opticky tenkém<sup>1</sup> plazmatu výbojky různou intenzitu.

## 2 Vybavení

V praktiku je k dispozici školní verze Michelsonova interferometru, Newtonova skla a další uspořádání pro pozorování interferenčních jevů.

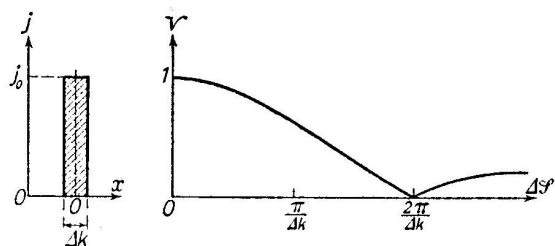
### Úkoly

1. Připravte optickou lavici pro pozorování interference na Michelsonově interferometru. Vyskoušejte různá uspořádání (proužky stejné tloušťky, stejného sklonu). Použijte laser.
2. Okalibrujte převod polohy mezi mikrometrickým šroubem a polohou zrcadla pomocí světelného zdroje se známou vlnovou délkou. Kalibraci otestujte na jiném známém zdroji.
3. Proměřte viditelnost interference s vysocesvítivou LED diodou. Pro záznam interferenčních obrazců a vyhodnocení viditelnosti použijte CCD kameru, videopřevodník a dostupný software. Stanovte viditelnost jako funkci dráhového rozdílu, kterého dosáhnete změnou polohy zrcadla nebo úhlu v samotném interferenčním obrazci. Stanovte koherenční délku, odhadněte spektrální profil zdroje a jeho šířku.
4. Proměřte viditelnost interference s vysokotlakou sodíkovou výbojkou. Opět stanovte koherenční délku, spektrální profil zdroje a jeho šířku.
5. Své odhady porovnejte s výsledky měření spekter zdrojů mřížkovým spektrometrem.

## Reference

- [1] Malý Petr 2008 Optika. Praha:Karolinum.  
 [2] Born M and Wolf E 1970 Principles of Optics. Pergamon Press.

<sup>1</sup>se zanedbatelnou absorpcí

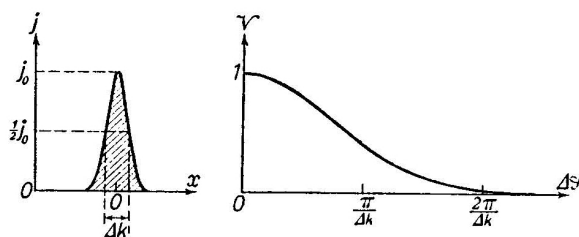


(a)

$$= j_0 \text{ when } |x| < \frac{1}{2} \Delta k,$$

$$= 0 \text{ when } |x| > \frac{1}{2} \Delta k,$$

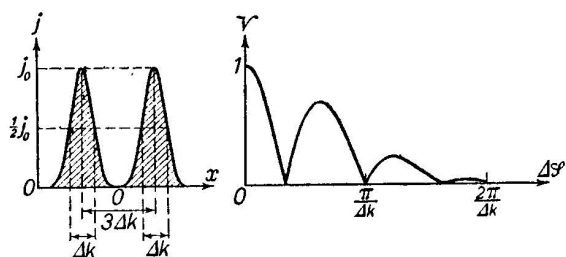
$$\mathcal{V} = \frac{|\sin(\frac{1}{2} \Delta k \Delta \mathcal{S})|}{|\frac{1}{2} \Delta k \Delta \mathcal{S}|}.$$



(b)

$$= j_0 e^{-\alpha^2 x^2},$$

$$\mathcal{V} \sim e^{-\left(\frac{\Delta \mathcal{S}}{2\alpha}\right)^2}.$$



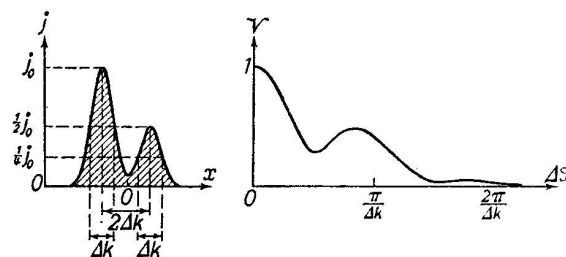
(c)

$$j = j_0 e^{-(\alpha x + \beta)^2} + j_0 e^{-(\alpha x - \beta)^2},$$

$$\mathcal{V} \sim e^{-\left(\frac{\Delta \mathcal{S}}{2\alpha}\right)^2} \left| \cos\left(\frac{\beta}{\alpha} \Delta \mathcal{S}\right) \right|,$$

with

$$\frac{\beta}{\alpha \Delta k} = \frac{3}{2}.$$



(d)

$$j = j_0 e^{-(\alpha x + \beta)^2} + \frac{1}{2} j_0 e^{-(\alpha x - \beta)^2},$$

$$\mathcal{V} \sim \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\Delta \mathcal{S}}{2\alpha}\right)^2} \sqrt{5 + 4 \cos\left(\frac{2\beta}{\alpha} \Delta \mathcal{S}\right)},$$

with

$$\frac{\beta}{\alpha \Delta k} = 1.$$

Obrázek 1: Viditelnost interferenčního jevu pro různé spektrální profily, odvozená za předpokladu kvazimonochromatickéosti světla. V obrázcích b), c), d) je  $\Delta k = 2\sqrt{\ln 2}/\alpha = 1,66/\alpha$ .