

BOHUMIL KVASIL  
THEORETICKÉ ZÁKLADY  
TECHNIKY CENTIMETROVÝCH VLN

SNTL

DOC. ING. DR. BOHUMIL KVASIL

THEORETICKÉ ZÁKLADY  
TECHNIKY  
CENTIMETROVÝCH VLN

*Schváleno výnosem ministerstva školství*

*ze dne 19. října 1955 č. j. 70 287/55 G II/1*

*jako celostátní vysokoškolská učebnice*

*pro příslušné specialise na elektrotechnických fakultách*

Přírodovědecká fakulta univ. v Brně

Hlavní inv. č. 761/S7

Depo v knihovně *exp. fyziky*

Ústavní inv. č. 52/57

Signatura B - 1337 a

PRAHA 1957

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ TECHNICKÉ LITERATURY

## PŘEDMLUVA

Obor radiotechniky se již od svého počátku, od vynálezu radia velkým ruským učencem A. S. Popovem, vyznačuje neobyčejně rychlým rozvojem. Během tohoto mohutného rozmachu došlo k řadě revolučních vynálezů, které daly oboru radiotechniky nový směr. V poslední době se řadí k novým odvětvím radiotechniky ty obory, při nichž se využívá speciálních vlastností šíření decimetrových a centimetrových vln.

Použití decimetrových a centimetrových vln vyžaduje obvodovou techniku zcela odlišnou od té, které používáme na dlouhých, středních a krátkých vlnách. Abychom tuto obvodovou techniku zvládli, je třeba si osvojit důkladně fyzikální podstatu šíření elektromagnetických vln při různých okrajových podmínkách, kterými jsou charakterisovány jednotlivé prvky obvodů v technice centimetrových a decimetrových vln. V této učebnici se popisují hlavní metody, kterých při tom používáme.

Kniha se skládá z devíti hlavních částí. V první části jsou rozvedeny Maxwellovy rovnice a upraveny tak, aby jich bylo možno použít při řešení speciálních elektrodynamických problémů, vyskytujících se v technice centimetrových vln. Druhá část je věnována teorii vedení pro centimetrové vlny, hlavně teorii vlnodů. Při tom se věnuje největší pozornost odvození obecných vlastností, které jsou společně všem vlnovým vlnodům. Podrobněji se při tom probírá vlnod s kruhovým a obdélníkovým průřezem. Na konci této části jsou odvozeny základní fyzikální vlastnosti některých speciálních vedení, používaných v technice centimetrových vln, jako je dielektrický drát a vedení se zpomalující strukturou. Třetí část je věnována dutinovým rezonátorům. Provádí se v ní podrobný rozbor dutinových rezonátorů vlnodového typu a uvádí se základní metody používané při rozboru dutinových rezonátorů obecného tvaru. Ve čtvrté části se probírá buzení vlnodů a dutinových rezonátorů. S touto částí těsně souvisí část pátá, v níž se pojednává o nespojitostech ve vlnovodech. V šesté části se homogenní vedení porovnávají s vlnovodem. Sedmá a osmá část pojednávají o základech difrakce a o vyzářování z vlnodů a trychtřů. Devátá část je matematický doplněk, v němž jsou zopakovány základy vektorové analýzy a základní vlastnosti Besselových funkcí. Na konci této části se také uvádí jednoduché odvození Maxwellových rovnic a okrajových podmínek.

Při zpracování této knihy mi sloužily jako podklad četné práce sovětských vědců zejména Kisuňka, Vvedenského a Grinberga. Z našich pracovníků se zabývali problematikou centimetrových a decimetrových vln, hlavně po stránce fyzikální, prof. Závíška, prof. Žáček a jejich následovníci. Některé jejich práce v tomto oboru lze označit za průkopnické.

Tato kniha je určena jako učebnice pro vysoké školy a pro pracovníky ve výzkumných ústavech. Vznikla z přednášek, které konám na elektrotechnické fakultě ČVUT v Praze. Jejím cílem je, aby čtenář získal takové theoretické základy v oboru centimetrových a decimetrových vln, aby mohl samostatně studovat theoreticky náročnější literaturu a dále rozšiřovat své znalosti z uvedeného oboru.

Kniha pojednává o základech teorie techniky centimetrových vln a probírá zejména vedení, dutinové rezonátory a vlnodů. V závěru knihy je speciální matematický výklad některých fyzikálních pojmů.

Kniha je určena pro posluchače vysokých škol a pro inženýry pracující v oboru vysokofrekvenční elektrotechniky.

stoří: Dr. Augustin Díd, Dr. Oldřich Komíček, Dr. Čestmír Muzikář a Ing. Dr. Miloš Seidl

Redaktor: Rudolf Major

Redakce elektrotechnické literatury — hlavní redaktor Ing. Dr. František Kašpar

lium tohoto díla předpokládá znalost vektorového počtu a znalost řešení některých  
ních diferenciálních rovnic. Dílo obsahuje i některé části, které nelze pro časové  
í na elektrotechnické fakultě přednést. Tyto části jsou výtříšněy drobnějším  
n.

otáci na knize mi byli nápomocni asistenti katedry vysokofrekvenční elektrotech-  
něru radiolokace. Těmto pracovníkům a všem, kteří svými radami a náměty při-  
zlepšení rukopisu a rychlému vydání této knihy, co nejsrdčněji děkuji.

aze dne 3. března 1956.

*Autor*

## OBSAH

Předmluva .....	5
Obsah .....	7
Seznam hlavních použitých znaků .....	11

### I. ÚVODNÍ ČÁST

1. Základní rovnice elektromagnetického pole .....	13
2. Gradientní invariantnost elektromagnetického pole .....	16
3. Úplné řešení elektromagnetického pole jako superpozice pole přičného elektrického a přič- ného magnetického .....	17
4. Jednoznačnost řešení vlnové rovnice .....	20
5. Integrace Maxwellových rovnic v křivočarých souřadnicích .....	21

### II. THEORIE VEDENÍ PRO DECIMETROVÉ A CENTIMETROVÉ VLNY

6. Vlnovody .....	25
7. Příčná vlna magnetická (vlna TM) .....	27
8. Příčná vlna elektrická (vlna TE) .....	31
9. Charakteristická impedance vlnovodu .....	33
10. Odvození měrného vysokofrekvenčního odporu pláště .....	35
11. Výkon přenesený vlnovodem .....	39
12. Výpočet měrného útlumu vlnovodu (příčná vlna magnetická) .....	42
13. Výpočet měrného útlumu vlnovodu (příčná vlna elektrická) .....	44
14. Zvláštní druhy vlnovodu .....	48
14.1. Kruhový vlnovod s příčnou vlnou magnetickou .....	48
14.2. Výpočet měrného útlumu .....	51
14.3. Kruhový vlnovod s příčnou vlnou elektrickou .....	52
14.4. Výpočet měrného útlumu .....	54
15. Souosé vlnovody .....	54
15.1. Souosý vlnovod s příčnou vlnou magnetickou .....	54
15.2. Souosý vlnovod s příčnou vlnou elektrickou .....	57
16. Souosý vodič .....	59
16.1. Výpočet zkrat v sousedním vodiči .....	62
17. Obdélníkové vlnovody .....	64
17.1. Obdélníkový vlnovod s příčnou vlnou magnetickou .....	64
17.2. Obdélníkový vlnovod s příčnou vlnou elektrickou .....	67
18. Šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma rovinnými deskami .....	69
19. Geometrická představa šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma deskami .....	71
20. Rychlost šíření energie ve vlnovodu .....	74
21. Radiální vedení .....	76
22. Silové čáry intenzity elektrického a magnetického pole .....	82
23. Rozbor měrného útlumu vlnovodu .....	87
24. Maximální přenesený výkon .....	89
24.1. Obdélníkový vlnovod s vlnou $TE_{10}$ .....	89
24.2. Kruhový vlnovod s vlnou $TE_{11}$ .....	90
24.3. Maximální výkon přenesený souosým vedením .....	93
25. Šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického válce .....	94

ni elektromagnetické vlny podél vodivého válce	107
ni elektromagnetické vlny podél vodivého válce obaleného dielektrickou vrstvou	110
ni elektromagnetické vlny ve vlnovodu s periodickou strukturou	115
nový vlnovod s hřebinkovou strukturou	120
osé spirálové vedení	122
ni elektromagnetické vlny v trychtřivém vedení	126
Trychtřivé vedení s intenzitou elektrického pole ve směru osy z	126
Trychtřivý vlnovod s elektromagnetickou vlnou, u níž má intenzita elektrického pole směr $\varphi$	129

### III. DUTINOVÉ REZONÁTORY

inové rezonátory vlnovodového typu	133
Vlnovodový rezonátor s příčnou vlnou magnetickou	134
Vlnovodový rezonátor s příčnou vlnou elektrickou	136
inové rezonátory obecného tvaru	137
ni činitele jakosti dutinového rezonátoru vlnovodového typu	140
Resonátor s příčnou vlnou magnetickou	140
Resonátor s příčnou vlnou elektrickou	144
teré speciální dutinové rezonátory vlnovodového typu	147
Válcové rezonátory s kruhovým průřezem	147
Souosý rezonátor	151
Obdélníkový rezonátor	153
lízné metody výpočtu vlastní délky vlny a činitele jakosti dutinových rezonátorů	155
Kvasistacionární metoda	155
Metoda „sešívání“ dutin	167
Poruchová metoda výpočtu dutinových rezonátorů (podle G. V. Kisuňka)	171
tel jakosti dutinového rezonátoru se zřetelem na vodivost dielektrika	185

### IV. BUZENÍ VLNOVODŮ A DUTINOVÝCH REZONÁTORŮ

logonální vlastnosti funkcí plynoucích z řešení vlnové rovnice	187
ni elektromagnetické vlny vidu TE v neomezeném vlnovodu	188
ni elektromagnetické vlny vidu TM v neomezeném vlnovodu	194
ni omezeného vlnovodu	197
ni vlnovodu štěrbinou	201
Buzení příčné elektrické vlny štěrbinou	203
Buzení příčné magnetické vlny štěrbinou	205
ni dutinových rezonátorů	206
Orthogonální vlastnosti vlastních funkcí dutinových rezonátorů	205
Buzení dutinového rezonátoru proudovým prvkem	208
Buzení dutinového rezonátoru štěrbinou	213

### V. NESPOJITOSTI VE VLNOVODECH

logonální vlastnosti příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole	216
vlnovody různého průřezu, spojené obecným prostorovým transformátorem	220
ia ve vlnovodu	223
Clona v obdélníkovém vlnovodu, jejíž hrany jsou rovnoběžné s menším rozměrem vlnovodu	224
Clona v obdélníkovém vlnovodu, jejíž hrany jsou kolmé ke směru intenzity elektrického pole dominantního vidu	227
Clona v kruhovém vlnovodu	229
eni velikosti susceptance clon	229
lled clon používaných ve vlnovodech	233
Kapacitní clona v obdélníkovém vlnovodu	233
Indukční (souměrná) clona v obdélníkovém vlnovodu	233
Kulatý otvor v obdélníkovém vlnovodu	234
Kulatý otvor v kruhovém vlnovodu	234
Kruhová překážka v kruhovém vlnovodu	235
ny s konečnou tloušťkou	235

50. Dvoupólové soustavy vznikající změnou průřezu vlnovodu	236
51. Resonanční okénko v obdélníkovém vlnovodu	239
52. Nespojité způsobené štěrbinou v pláti vlnovodu	241
52.1 Štěrbina v širší stěně vlnovodu, rovnoběžná s osou z	241
52.2 Štěrbina kolmá k ose z	244
53. Výpočet vztažené impedance štěrbiny	245

### VI. NÁHRADNÍ VELENÍ VLNOVODU

54. Obdoba telegrafní rovnice	251
-------------------------------	-----

### VII. VYZAŘOVÁNÍ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY Z VLNOVODŮ, TRYCHTÝŘŮ A DIFRAKCE ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY OD JEDNODUCHÝCH, DOKONALE VODIVÝCH TĚLES

55. Přímá integrace Maxwellových rovnic	255
56. Huygens-Kottlerův vzorec	260
57. Úprava Huygens-Kottlerova vzorce	263
58. Difrakce od odrazné plochy	264
59. Vyzářování z otevřené plochy	265

### VIII. VYZAŘOVÁNÍ Z VLNOVODŮ A TRYCHTÝŘŮ

60. Kruhový vlnovod, vlny vidu $TE_{11}$ a $TE_{01}$	270
61. Vyzářování z obdélníkového vlnovodu	274
62. Difrakce od dokonale vodivé plochy	274

### IX. DODATEK

63. Matematická část	279
63.1 Vektorová analýza	279
63.2 Skalární pole a gradient	280
63.3 Vektorové pole, divergence, Gaussova věta	282
63.4 Stokesova věta	283
63.5 Vektorové operátory v křivčarých souřadnicích	286
63.6 Besselovy funkce	296
64. Základní vlastnosti elektromagnetických vln	296
64.1 Maxwellovy rovnice	296
64.2 Energetické poměry v elektromagnetickém poli	298
64.3 Okrajové podmínky na rozhraních dvou prostředí	299
Literatura	302

## SEZNAM HLAVNÍCH POUŽITÝCH ZNAKŮ

<i>A</i>	vektorový potenciál
<i>B</i>	magnetická indukce; susceptance
<i>D</i>	elektrická indukce (dielektrický posun)
<i>E</i>	intenzita elektrického pole
<i>f</i>	kmitočet
<i>H</i>	intenzita magnetického pole
<i>J</i>	proudová hustota
<i>K</i>	hustota povrchového proudu
<i>N</i>	Umov-Poyntingův vektor
<i>P</i>	výkon
<i>(PQ)</i>	skalární součin vektorů <i>P</i> , <i>Q</i>
<i>PQ</i>	vektorový součin vektorů <i>P</i> , <i>Q</i>
<i>Q</i>	činitel jakosti
<i>V</i>	skalární potenciál
<i>W</i>	energie
<i>Y</i>	admitance
<i>Z</i>	charakteristická impedance
<i>Z<sub>0</sub></i>	charakteristická impedance volného prostoru
<i>α</i>	měrný posun
<i>β</i>	měrný útlum
<i>γ</i>	konstanta přenosu vlnovodu
<i>ε</i>	dielektrická konstanta
<i>ε<sub>0</sub></i>	dielektrická konstanta volného prostoru
<i>μ</i>	magnetická permeabilita
<i>μ<sub>0</sub></i>	magnetická permeabilita volného prostoru
<i>ν</i>	poměr mezního kmitočtu k použitému
<i>Π<sup>e</sup></i>	Hertzův elektrický vektor
<i>Π<sup>m</sup></i>	Hertzův magnetický vektor
<i>ρ</i>	objemová hustota náboje
<i>ρ<sub>v</sub></i>	měrný vysokofrekvenční odpor
<i>σ</i>	plošná hustota náboje
<i>ω</i>	úhlový kmitočet
<i>ω<sub>m</sub></i>	mezní úhlový kmitočet

V knize se používá výhradně jednotkové soustavy MKSA, a proto se za výsledky neuvádějí rozměry. Je-li výsledek v jiných jednotkách, je za výsledkem rozměr uveden.

Prostorové vektory jsou v knize tištěny půlčárkou kursivou, časové vektory a komplexní čísla obyčejnou kursivou. Hertzův elektrický a magnetický vektor je z technických důvodů výjimečně tištěn půlčárkou stojatě.

## I. ÚVODNÍ ČÁST

### 1. Základní rovnice elektromagnetického pole

Při řešení elektromagnetických problémů bude našim úkolem určit závislost intenzity elektrického pole, intenzity magnetického pole, elektrické indukce (dielektrického posunu) a magnetické indukce na prostorových souřadnicích a na čase. Tato závislost se v diferenciálním nebo integrálním tvaru definuje Maxwellovými rovnicemi. Závislost jednotlivých veličin elektromagnetického pole je podle Maxwellových rovnic vyjádřena vektorovými rovnicemi<sup>1)</sup>

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (I-1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (I-2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (I-3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (I-4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (I-5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (I-6)$$

kde  $\mathbf{H}$  je vektor intenzity magnetického pole

$\mathbf{E}$  vektor intenzity elektrického pole

$\mathbf{D}$  vektor elektrické indukce

$\mathbf{B}$  vektor magnetické indukce

$\sigma$  vodivost prostředí

$\varepsilon$  dielektrická konstanta prostředí

$\mu$  magnetická permeabilita

$\mathbf{J}$  hustota vodivého proudu

$\rho$  objemová hustota náboje.

Všechny uvedené vektorové veličiny lze rozložit na složky definované orthogonální soustavou, sestavit pro jednotlivé složky diferenciální rovnice a provést jejich integraci.

Zvolíme na př. intenzitu elektrického pole za veličinu, s jejíž pomocí vyjádříme na základě Maxwellových rovnic všechny ostatní složky elektromagnetického pole. Rozložíme-li intenzitu elektrického pole na tři složky, dostaneme pro každou složku intenzity elektrického pole parciální diferenciální rovnici, jejíž integraci určíme závislost jednotlivých složek na čase a na prostorových souřadnicích.

Klade se otázka, zda lze najít takovou pomocnou veličinu, která by vyhovovala určitě

<sup>1)</sup> Viz kap. IX. Odvození těchto rovnic najde čtenář v různých učebnicích, na př.: Тамм И. Е.: Основы теории электричества. Огиз 1946; Страттон И. А.: Теория электромагнетизма (пřeklad), Огиз 1948.

diferenciální operátorové rovnici, vyjádřené na základě Maxwellových rovnic, a z níž bychom mohli určit všechny složky elektromagnetického pole. Takovými pomocnými veličinami jsou vektorový a skalární potenciál.

Při další aplikaci budeme předpokládat, že časový průběh všech veličin je harmonický. To znamená, že časovou funkci vyjádříme součinitelem  $e^{j\omega t}$ . V tom případě budou platit pro amplitudy jednotlivých veličin elektromagnetického pole takto upravené Maxwellovy rovnice:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (I-7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (I-8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

Zavedeme-li další předpoklad, že chceme určovat rozložení elektromagnetického pole v isotropním prostředí, bude  $\varepsilon = \text{konst}$ ,  $\mu = \text{konst}$ , a potom

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (I-9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (I-10)$$

O magnetickém poli platí, jak plyne z rovnice (I-9), že je to vždy pole vírové, neboť pro jakoukoli intenzitu magnetického pole platí, že  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . Proto lze intenzitu magnetického pole vyjádřit jako rotor pomocného vektoru. Označme tento vektor  $\mathbf{A}$ . Potom platí

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (I-11)$$

Dosadíme-li rovnici (I-11) do rovnice (I-8), dostaneme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Z tohoto vztahu vyplývá

$$\mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{A} + \operatorname{grad} V \quad (I-12)$$

neboť platí identicky, že  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V = 0$ .

Při tom je  $V$  libovolný skalární potenciál. Dosadíme-li rovnici (I-11) do rovnice (I-7), je

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}$$

Intenzita elektrického pole musí vyhovovat vztahu (I-12). Proto

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\sigma + j\omega \varepsilon)(-j\omega \mu) \mathbf{A} + (\sigma + j\omega \varepsilon) \operatorname{grad} V + \mathbf{J} \quad (I-13)$$

Výraz  $(-j\omega \mu)(\sigma + j\omega \varepsilon)$  nahradíme výrazem  $k^2$ . Operátor  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  lze upravit tak, že

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

Upravíme-li podle toho rovnici (I-13), dostaneme

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} - \operatorname{grad} [\operatorname{div} \mathbf{A} - (\sigma + j\omega \varepsilon) V] = -\mathbf{J}$$

<sup>3)</sup> Obecně je intenzita elektrického a magnetického pole obecnou funkcí času. V elektrotechnice však uvádíme nejčastěji periodické časové průběhy, které lze rozložit na jednotlivé harmonické, při čemž mezi jednotlivými harmonickými platí zákon superpozice. Můžeme proto zkoumat každou harmonickou zvlášť. Okamžitá harmonická intenzita elektrického nebo magnetického pole je vyjádřena vztahem

$$e(x, y, z, t) = E(x, y, z) e^{j\omega t}$$

$$h(x, y, z, t) = H(x, y, z) e^{j\omega t}$$

kde  $e(x, y, z, t)$  je okamžitá intenzita elektrického pole (je funkcí místa a času)

$h(x, y, z, t)$  okamžitá intenzita magnetického pole

$E(x, y, z)$  amplituda intenzity elektrického pole (obecně je to komplexní výraz)

$H(x, y, z)$  amplituda intenzity magnetického pole

$\omega$  úhlový kmitočet harmonické.

Dosadíme-li tyto výrazy do Maxwellových rovnic (I-1) až (I-6), dostane rovnice (I-7) a (I-8), kde  $E, H, B$  a  $D$  jsou amplitudy uvedených veličin (jsou obecně komplexní).

Skalární funkce  $V$  může mít libovolný průběh, jak vyplývá z rovnice (I-12). Proto ji zvolíme tak, aby

$$V = \frac{1}{\sigma + j\omega \varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (I-14)$$

Potom se nám zjednoduší předešlá rovnice takto:

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J} \quad (I-15)$$

Je to vlnová nehomogenní rovnice pro pomocný vektor  $\mathbf{A}$ . Tento pomocný vektor budeme v dalším výkladu nazývat vektorovým potenciálem.

Provedme divergenci pravé a levé strany rovnice (I-12). Potom

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -j\omega \mu \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} V \quad (I-16)$$

Na základě Maxwellovy rovnice (I-4) platí pro homogenní prostředí

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Z rovnice (I-14) vyplývá, že  $\operatorname{div} \mathbf{A} = (\sigma + j\omega \varepsilon) V$ , a dále platí, že  $\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \Delta V$ . Proto lze rovnici (I-16) upravit takto:

$$\Delta V + k^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (I-17)$$

Výrazy (I-15) a (I-17) jsou diferenciální rovnice pro vektorový a skalární potenciál. Při tom stačí určit jeden z nich, neboť druhý určíme z prvního na základě vztahu (I-14), který nazýváme Lorentzovou rovnicí. Známe-li průběh vektorového a skalárního potenciálu, určíme jednotlivé složky pole  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  podle rovnic (I-11) a (I-12).

Je tedy elektrické pole dáno vektorovým a skalárním potenciálem. Abychom mohli určit elektromagnetické pole jen z průběhu jedné veličiny, zavedeme nový vektor, který by identicky splňoval podmínku (I-14). Zavedeme proto t. zv. Hertzův vektor  $\mathbf{\Pi}^*$ , který je vyjádřen pomocí vektorového a skalárního potenciálu podle vztahu

$$\mathbf{A} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathbf{\Pi}^* \quad (I-18)$$

$$V = \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^* \quad (I-19)$$

Nahradíme vektorový potenciál ve vlnové rovnici (I-15) Hertzovým vektorem. Potom

<sup>3)</sup> V našem případě má vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  a skalární potenciál  $V$  pomazaný význam. Avšak lze dokázat, že vektorový potenciál je určen průběhem proudové hustoty v dané oblasti a že je určen vzorcem

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int \frac{j\mathbf{e}^{-jk r}}{r} dV$$

kde  $k$  je vlnové číslo

$V$  objem, v němž je dáno proudové uspořádání

$r$  vzdálenost mezi místem, kde určujeme vektorový potenciál, a místem proudové hustoty.

Podobně je dán skalární potenciál prostorovým uspořádáním náboje a jeho velikost určíme podle vzorce

$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int \frac{\rho e^{-jk r}}{r} dV$$

kde  $\rho$  je objemová hustota náboje.



$$\Delta \Pi^e + k^2 \Pi^e = -\frac{J}{(\sigma + j\omega\epsilon)^4} \quad (I-20)$$

Tím jsme dostali nehomogenní vlnovou rovnici Hertzova vektoru. Vyjádříme-li intenzitu elektrického a magnetického pole v závislosti na Hertzově vektoru, plyne z rovnic (I-11) a (I-12)

$$E = k^2 \Pi^e + \text{grad div } \Pi^e \quad (I-21)$$

$$H = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi^e \quad (I-22)$$

Urníme-li určit Hertzův vektor z vlnové rovnice (I-20), umíme určit jednotlivé veličiny elektromagnetického pole ze vztahu (I-21) a (I-22).

## 2. Gradientní invariantnost elektromagnetického pole

Uvažujeme dvě elektromagnetická pole. Jedno pole je dáno Hertzovým vektorem  $\Pi_1^e$ , druhé Hertzovým vektorem  $\Pi_2^e$ . Intenzita magnetického pole bude potom v jednotlivých případech určena fakto:

$$H_1 = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi_1^e$$

$$H_2 = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi_2^e$$

Odečteme-li výraz pro intenzitu magnetického pole  $H_2$  od výrazu pro intenzitu magnetického pole  $H_1$ , platí

$$H_1 - H_2 = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } (\Pi_1^e - \Pi_2^e) \quad (I-23)$$

Dosadíme-li do rovnice (I-7) za  $H_1$  výraz  $(\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi_1^e$ , dostaneme

$$(\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot rot } \Pi_1^e = (\sigma + j\omega\epsilon) E_1 + J$$

Podobně pro druhé pole

$$(\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot rot } \Pi_2^e = (\sigma + j\omega\epsilon) E_2 + J$$

Budící proudovou hustotu  $J$  uvažujeme v obou případech stejnou. Odečteme-li předcházející rovnice, platí

$$\text{rot rot } (\Pi_1^e - \Pi_2^e) = E_1 - E_2 \quad (I-24)$$

Bude-li  $\Pi_1^e = \Pi_2^e$ , bude  $E_1 - E_2$  i  $H_1 - H_2$  rovno nule. To znamená, že obě pole budou totožná. Rozdíl  $E_1 - E_2$  a  $H_1 - H_2$  bude ovšem nulový také tehdy, bude-li

$$\Pi_1^e - \Pi_2^e = \text{grad } \varphi$$

kde  $\varphi$  je libovolná skalární funkce.

Dosadíme-li totiž za  $\Pi_1^e - \Pi_2^e$  uvedený výraz do rovnic (I-23) a (I-24), plyne z toho, že i  $(E_1 - E_2)$  a  $(H_1 - H_2)$  jsou nulové, neboť rot grad  $\varphi$  je při jakémkoli  $\varphi$  nulový. Tím je dokázáno, že se na průběhu intenzity elektrického pole i průběhu intenzity magnetického pole nic nemění, nahradíme-li Hertzův vektor  $\Pi^e$  novým Hertzovým vektorem  $\Pi_1^e$  podle vztahu

$$\Pi_1^e = \Pi^e + \text{grad } \varphi \quad (I-25)$$

<sup>4)</sup> Hertzův vektor  $\Pi^e$  je fyzikálně určen průběhem dipólových momentů a definuje se tímto vztahem:

$$\Pi^e = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{pe^{-jkr}}{r} dV$$

kde  $p$  je objemová hustota dipólových momentů (v dielektriku se tato hustota rovná polarizačnímu vektoru dielektrika)

<sup>5)</sup> vzdálenost mezi místem, kde určujeme Hertzův vektor, a místem dipólových momentů.

Tato vlastnost se nazývá gradientní invariantnost elektromagnetického pole. Hertzův vektor  $\Pi_1^e$  vyhovuje vlnové rovnici (I-20). Proto platí se zřetelem k rovnici (I-25)

$$\Delta \Pi_1^e + k^2 \Pi_1^e = -\frac{J}{\sigma + j\omega\epsilon}$$

Aby i vektor  $\Pi^e$  vyhovoval vlnové rovnici (I-20), tedy

$$\Delta \Pi^e + k^2 \Pi^e = -\frac{J}{\sigma + j\omega\epsilon}$$

musí potenciál  $\varphi$  splňovat podmínku

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (I-26)$$

Gradientní invariantnost elektromagnetického pole nazýváme vlastnost, že obecnému Hertzovu vektoru, kterým je určeno elektromagnetické pole, lze přidat gradient jakékoli skalární funkce, aniž se změní původní velikost intenzity elektrického nebo magnetického pole.

## 3. Úplné řešení elektromagnetického pole jako superpozice příčného elektrického a příčného magnetického pole

Uvedli jsme již, že jednotlivé složky elektromagnetického pole lze vyjádřit pomocí Hertzova vektoru a že Hertzův vektor vyhovuje vlnové rovnici

$$\Delta \Pi^e + k^2 \Pi^e = -\frac{J}{\sigma + j\omega\epsilon}$$

Hertzův vektor je obecně dán v pravotoúhlých souřadnicích třemi složkami:  $\Pi_x^e, \Pi_y^e$  a  $\Pi_z^e$ . Uvážíme-li nejprve pole bez zdrojů, bude vlnová rovnice (I-20) homogenní a pro každou složku Hertzova vektoru bude platit dílčí vlnová rovnice

$$\Delta \Pi_x^e + k^2 \Pi_x^e = 0$$

$$\Delta \Pi_y^e + k^2 \Pi_y^e = 0$$

$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0$$

Kdybychom uměli určit všechny tři uvedené složky Hertzova vektoru, uměli bychom určit všechny veličiny elektromagnetického pole.

Dokážeme, že k úplnému určení elektromagnetického pole stačí zjistit průběh libovolné dvojice složek  $\Pi_x^e, \Pi_y^e$  a  $\Pi_z^e$ . K tomu účelu zavedme nový Hertzův vektor  $\Pi_1^e$ , který je vázán s původním Hertzovým vektorem  $\Pi^e$  vztahem (I-25). Potom

$$\Pi_{1x}^e = \Pi_x^e + \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \Pi_{1y}^e = \Pi_y^e + \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \Pi_{1z}^e = \Pi_z^e + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (I-27)$$

Potenciál  $\varphi$ , jak jsme již uvedli, je libovolná skalární funkce. Volme tuto funkci takovou, aby platilo identity

$$\Pi_{1x}^e = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (I-28)$$

Tuto identitu lze splnit, neboť složka  $\Pi_z^e$  vyhovuje vlnové rovnici

$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0$$

a potenciál  $\varphi$  vyhovuje také vlnové rovnici

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$$

Protože na základě rovnice (I-28) je  $\Pi_z^e = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ , vymizí v rovnicích (I-27) složka  $\Pi_{1z}^e$ . Potom bude Hertzův vektor dán jen dvěma složkami

$$\Pi_1^e = \Pi_{1x}^e \mathbf{x} + \Pi_{1y}^e \mathbf{y} \quad (\text{I-29})$$

kde  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  jsou jednotkové vektory ve směru osy  $x$  a  $y$ . Protože Hertzovým vektorem  $\Pi_1^e$  je úplně určeno elektromagnetické pole, je tím dokázáno, že k úplnému určení elektromagnetického pole stačí zjistit průběh dvou složek Hertzova vektoru.

Kdybychom provedli ještě volbu potenciálové funkce  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  tak, aby identicky bylo  $\Pi_{1y}^e = 0$ , potom  $\Pi_1^e \equiv \Pi_{1x}^e \mathbf{x}$ . Avšak tato složka Hertzova vektoru nedá úplné řešení Maxwellových rovnic, neboť v tomto případě bude

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot}(\Pi_{1x}^e \mathbf{x}) = (\sigma + j\omega\epsilon) [\text{grad} \Pi_{1x}^e \mathbf{x}]$$

Z tohoto výrazu vyplývá, že intenzita magnetického pole by měla jen složky ve směru  $y$  a  $z$ , což nedává úplné řešení elektrického pole.

Úplné řešení Maxwellových rovnic dostaneme tedy určením prostorového uspořádání dvou složek Hertzova vektoru. Zvolme jednu složku ve směru osy  $z$  a druhou složku zvolme tak, aby byla dána lineární kombinací dvou zbylých složek. V rovnicích (I-27)

zvolme derivace potenciálů  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  a  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  (což na základě gradientní invariantnosti elektromagnetického pole můžeme provést) tak, aby bylo

$$\Pi_{1x}^e = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{a} \quad \Pi_{1y}^e = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{b)}$$

Funkce  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  a  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  musí přitom vyhovovat vlnové rovnici [viz vztah (I-26)]. Jen tak lze

b) Na základě gradientní invariantnosti platí

$$\Pi^e = \Pi_1^e + \text{grad } \varphi$$

Z toho vyplývá

$$\Pi_{1x}^e = \Pi_x^e - \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \Pi_{1y}^e = \Pi_y^e - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Přáme se, jaké podmínice vyhovuje skalární funkci  $\varphi$ , aby mezi  $\Pi_{1x}^e$  a  $\Pi_{1y}^e$  platil vztah

$$\Pi_{1x}^e = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{a} \quad \Pi_{1y}^e = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

kde  $\varphi$  je libovolná skalární funkce, vyhovující vlnové rovnici.

Dosadíme-li za  $\Pi_{1x}^e$  a  $\Pi_{1y}^e$  příslušné výrazy, dostaneme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Pi_x^e - \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Pi_y^e - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Hertzův vektor  $\Pi^e$  je předešlem daná veličina (vyhovující všem fyzikálním podmínkám daného elektromagnetického problému).

Derivujme první identitu podle  $y$  a sečteme je. Potom bude

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \Pi_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y^e}{\partial y}$$

To je nehomogenní Laplaceova diferenciální rovnice. Pravou stranu známe. Určíme-li z této rovnice funkci  $\varphi$ , budou složky Hertzova vektoru  $\Pi_{1x}^e$  a  $\Pi_{1y}^e$  (vyrovňeno z původního Hertzova vektoru  $\Pi^e$  a na základě gradientní invariantnosti) vyhovovat vztahu

$$\Pi_{1x}^e = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \Pi_{1y}^e = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

substitucí obecně provést. Potom

$$\Pi_1^e = \Pi_{1x}^e \mathbf{x} + \Pi_{1y}^e \mathbf{y} + \Pi_{1z}^e \mathbf{z} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{y} + \Pi_{1z}^e \mathbf{z}$$

Výraz  $\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{y}$  se rovná složce rotoru ve směru osy  $z$ . Proto

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{y} = \text{rot}(\psi \mathbf{z})$$

Nahradili jsme tedy Hertzův vektor dvěma vektory: vektorem  $\Pi_{1z}^e \mathbf{z}$  a rotorem  $\text{rot}(\psi \mathbf{z})$ . Přitom musí obě skalární funkce  $\Pi_{1z}^e$  i  $\psi$  vyhovovat vlnové rovnici. Výraz  $\psi \mathbf{z}$  si označíme vektorem  $\frac{\Pi_z^m}{i + j\omega\epsilon}$ . Potom platí, vypustíme-li index 1

$$\Pi^e = \Pi_z^e + \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \text{rot} \Pi_z^m$$

Intenzitu elektrického a magnetického pole určíme z Hertzova vektoru podle vztahů (I-21) a (I-22). Bude tedy

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot} \Pi_z^e + \text{rot} \text{rot} \Pi_z^m \quad (\text{I-30})$$

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^e + \text{grad} \text{div} \Pi_z^e - j\omega\mu \text{rot} \Pi_z^m \quad (\text{I-31})$$

Upravíme-li výraz pro intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}$  tím, že rozvedeme  $\text{rot} \text{rot} \Pi_z^m$ , dostaneme

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot} \Pi_z^e + \text{grad} \text{div} \Pi_z^m - \Delta \Pi_z^m$$

Hertzův vektor  $\Pi_z^e$  vyhovuje vlnové rovnici, proto  $\Delta \Pi_z^m = -k^2 \Pi_z^m$  a

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot} \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^m + \text{grad} \text{div} \Pi_z^m \quad (\text{I-32})$$

Všimněme si blíže jednotlivých členů rovnice (I-31) a (I-32). Z výrazu (I-31) je zřejmé, že se intenzita elektrického pole skládá ze dvou částí; jedna z nich je funkci Hertzova vektoru  $\Pi_z^e$  a druhá funkcí Hertzova vektoru  $\Pi_z^m$ . Označíme složku intenzity elektrického pole, danou Hertzovým vektorem  $\Pi_z^e$ , výrazem  $\mathbf{E}_1$ , a intenzitu elektrického pole, danou Hertzovým vektorem  $\Pi_z^m$ , výrazem  $\mathbf{E}_2$ . Potom

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

kde

$$\mathbf{E}_1 = k^2 \Pi_z^e + \text{grad} \text{div} \Pi_z^e \quad (\text{I-33})$$

$$\mathbf{E}_2 = -j\omega\mu \text{rot} \Pi_z^m \quad (\text{I-34})$$

Stejně rozdělíme intenzitu magnetického pole. Při tom

kde

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

$$\mathbf{H}_1 = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot} \Pi_z^e \quad (\text{I-35})$$

$$\mathbf{H}_2 = k^2 \Pi_z^m + \text{grad} \text{div} \Pi_z^m \quad (\text{I-36})$$

Elektromagnetické pole s intenzitou elektrického pole  $\mathbf{E}_1$  a intenzitou magnetického pole  $\mathbf{H}_1$  nemá složku intenzity magnetického pole ve směru osy  $z$ , má jen příčné složky ve směru  $z$  [viz rovnici (I-35)]. Proto toto elektromagnetické pole nazýváme příčným (transversálním) polem magnetickým a označujeme je znakem TM nebo E.

Elektromagnetické pole s intenzitami  $E_z$  a  $H_z$  má jen příčné složky elektrické [viz rovnici (I-34)]. Nazveme je příčným polem elektrickým a označíme je znakem TE nebo H.

Dokázali jsme, že Maxwellovy rovnice lze vyřešit zavedením Hertzových vektorů  $\Pi_z^e$  a  $\Pi_z^m$  a že jejich obecné řešení je dáno superposicí příčných vln elektrických a příčných vln magnetických.

#### 4. Jednoznačnost řešení vlnové rovnice

V předcházejícím článku jsme zjistili, že úplné uspořádání elektromagnetického pole budeme znát tehdy, budeme-li znát průběh Hertzova vektoru  $\Pi_z^e$  a  $\Pi_z^m$ . Pro oba tyto Hertzovy vektory platí vlnové rovnice

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e &= 0 \\ \Delta \Pi_z^m + k^2 \Pi_z^m &= 0 \end{aligned}$$

Položíme si otázku, je-li toto určení Hertzových vektorů, t. j. že vyhovují vlnové rovnici, postačující k určení jejich prostorového uspořádání. Uvažujme Hertzův vektor  $\Pi_z^e$ . Kdyby vlnová rovnice nebyla postačující pro určení  $\Pi_z^e$ , bylo by možných více řešení. Označme dvě taková eventuelní řešení  $\Pi_{z1}^e$  a  $\Pi_{z2}^e$ . Jejich rozdíl označíme  $M$ . Potom

$$\begin{aligned} M &= \Pi_{z1}^e - \Pi_{z2}^e \\ \text{Vidíme, že i výraz } M &\text{ bude vyhovovat vlnové rovnici} \\ \Delta M + k^2 M &= 0 \end{aligned}$$

Na základě Greenovy věty platí

$$\int_V \{M \Delta M + (\text{grad } M)^2\} dV = M \int_S \frac{\partial M}{\partial n} dS \quad (\text{I-37})$$

Bude-li hodnota Hertzova vektoru nebo jeho derivace ve směru normály na ploše  $S$  předepsána, bude na ploše  $S$  výraz  $M$  nebo  $\frac{\partial M}{\partial n}$  nulový, neboť na ploše  $S$  je v tomto případě Hertzův vektor jednoznačný. Potom bude platit

$$\int_V \{M \Delta M + (\text{grad } M)^2\} dV = 0 \quad (\text{I-38})$$

Aby tento vztah platil identicky, musí být v jakémkoli bodě prostoru  $V$  vektor  $M$  nulový. To znamená, že v každém místě oboru  $V$  bude mít Hertzův vektor jen jednu hodnotu, neboť

$$M = \Pi_{z1}^e - \Pi_{z2}^e = 0$$

z čehož platí identita

$$\Pi_{z1}^e = \Pi_{z2}^e \quad (\text{I-39})$$

Z těchto úvah vyplývá, že vlnová rovnice Hertzových vektorů určuje jednoznačně jejich prostorové uspořádání tehdy, jsou-li předepsány hodnoty Hertzových vektorů nebo jejich derivací podle normály na ploše  $S$ , omezující uvažovaný obor. Musí být tedy kromě vlnové rovnice

$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0$$

dán buď vztah  $\Pi_z^e = f_1(Q)$  na ploše  $S$ , nebo  $\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial n} = f_2(Q)$  na ploše  $S$ , kde funkce  $f_1(Q)$  nebo  $f_2(Q)$  je určitá funkce bodu  $Q$ , ležícího na ploše  $S$ . Této podmínce říkáme okrajová podmínka.

## 5. Integrace Maxwellových rovnic v křivočarých souřadnicích

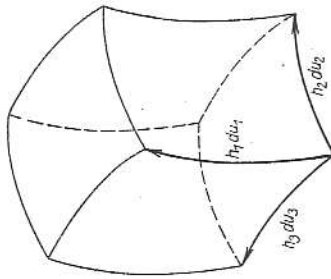
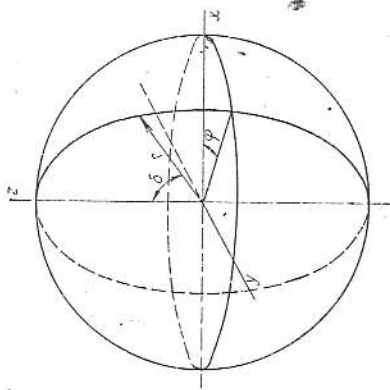
V mnohých praktických případech je třeba řešit Maxwellovy rovnice v křivočarých souřadnicích, abychom mohli jednoduše splnit okrajové podmínky. Určíme, za jakých okolností lze provést integraci Maxwellových rovnic řešením vektorových potenciálů, s jejichž pomocí by bylo možno jednoduše určit velikost elektromagnetického pole vyjádřit.

Budeme hledat řešení Maxwellových rovnic v obecných křivočarých ortogonálních souřadnicích. Tyto souřadnice označíme  $u_1, u_2, u_3$ . Vztahy

$$u_1 = \text{konst}; u_2 = \text{konst}; u_3 = \text{konst}$$

představují rovnice ploch. Na př. v kulových souřadnicích  $u_1 = r, u_2 = \delta, u_3 = \varphi$  (viz obr. 1) rovnice  $r = \text{konst}$  představuje kulovou plochu se středem v počátku,  $\delta = \text{konst}$  kuželovou plochu s vrcholem v počátku a  $\varphi = \text{konst}$  rovinu, procházející osou kulových souřadnic  $z$ .

Uvedené plochy  $u_1 = \text{konst}, u_2 = \text{konst}, u_3 = \text{konst}$  se protínají v křivkách, které navzájem svírají u křivočarých ortogonálních souřadnic pravý úhel (viz obr. 2).



Obr. 1. Znázornění kulových souřadnic.

Obr. 2. Křivočaré ortogonální souřadnice.

Označme jednotkové vektory ve směru tečen průsečných křivek  $u_1, u_2$  a  $u_3$ . Elementární oblouky ve směru průsečných křivek označíme  $ds_1, ds_2$  a  $ds_3$ . Při tom platí (viz kap. IX), že

$$ds_1 = h_1 du_1, \quad ds_2 = h_2 du_2, \quad ds_3 = h_3 du_3,$$

kde  $h_1, h_2, h_3$  jsou Laméovy koeficienty křivočarých souřadnic.

Dokážeme, že jednotlivé složky elektromagnetického pole lze vyjádřit pomocí společné potenciální funkce jen tehdy, bude-li mezi Laméovými koeficienty platit tento vztah:

$$h_1 = 1 \text{ (nebo konstanta).}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2}{h_3} \right) = 0$$

Maxwellovy rovnice pro prostředí bez zdrojů mají tvar

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega \mu \mathbf{H} & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} &= j\omega \epsilon \mathbf{E} & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádříme je v křivočarých souřadnicích, kde platí pro složky rotoru tyto identity:

$$\begin{aligned} \text{rot}_{u_1} \mathbf{E} &= -\frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (E_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (E_3 h_3) \right] \\ \text{rot}_{u_2} \mathbf{E} &= -\frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (E_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (E_1 h_1) \right] \\ \text{rot}_{u_3} \mathbf{E} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (E_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_2} (E_2 h_2) \right] \end{aligned}$$

Použijeme-li těchto vztahů v první Maxwellově rovnici, dostaneme

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial u_3} (E_2 h_2) + \frac{\partial}{\partial u_2} (E_3 h_3) &= -j\omega \mu h_2 h_3 H_1 \\ -\frac{\partial}{\partial u_1} (E_3 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (E_1 h_1) &= -j\omega \mu h_1 h_3 H_2 \\ -\frac{\partial}{\partial u_2} (E_1 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_1} (E_2 h_2) &= -j\omega \mu h_1 h_2 H_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-40)$$

Obdobně bychom dostali rozvedením druhé Maxwellovy rovnice

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial u_3} (H_2 h_2) + \frac{\partial}{\partial u_2} (H_3 h_3) &= j\omega \epsilon h_2 h_3 E_1 \\ -\frac{\partial}{\partial u_1} (H_3 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (H_1 h_1) &= j\omega \epsilon h_1 h_3 E_2 \\ -\frac{\partial}{\partial u_2} (H_1 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_1} (H_2 h_2) &= j\omega \epsilon h_1 h_2 E_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

Obecné řešení elektromagnetického pole je dáno superposicí příčných vln magnetických a příčných vln elektrických. Příčné vlny magnetické jsou v tomto případě ty, které nemají složku intenzity magnetického pole ve směru té souřadnice, u níž se Laméův koeficient rovná jedné. Příčné vlny elektrické nemají ve směru této souřadnice složku intenzity elektrického pole. Úplné řešení Maxwellových rovnic lze tedy u křivočarých souřadnic vyjádřit superposicí vln typu TM a TE jen tehdy, rovná-li se v některé z nich Laméův koeficient jedné. Toto tvrzení podáváme bez důkazu.

Nejdříve budeme uvažovat příčné vlny magnetické (TM). Je-li v našem případě souřadnice  $u_1$  taková, že její Laméův koeficient  $h_1 = 1$ , bude u příčných magnetických vln složka intenzity magnetického pole nulová ve směru  $u_1$ . Bude tedy  $H_1 = 0$ . Potom se rovnice (1-40) a (1-41) zjednoduší takto:

$$\frac{\partial}{\partial u_2} (E_3 h_3) = \frac{\partial}{\partial u_3} (E_2 h_2) \quad (1-42)$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_1} (E_3 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} E_1 = -j\omega \mu h_2 h_3 H_2 \quad (1-43)$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_2} E_1 + \frac{\partial}{\partial u_1} (E_2 h_2) = -j\omega \mu h_2 h_3 H_3 \quad (1-44)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3} (H_2 h_2) + \frac{\partial}{\partial u_2} (H_3 h_3) = j\omega \epsilon h_2 h_3 E_1 \quad (1-45)$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 H_3) = j\omega \epsilon h_3 E_2 \quad (1-46)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (H_2 h_2) = j\omega \epsilon h_2 E_3 \quad (1-47)$$

Rovnice (1-42) bude identicky splněna tehdy, dosadíme-li za  $E_2 h_2$  výraz  $\frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_2}$  a za  $E_3 h_3$  výraz

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_3} \quad . \text{Potom} \quad (1-48)$$

$$E_2 h_2 = \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (1-48)$$

$$E_3 h_3 = \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_3} \quad (1-49)$$

a rovnice (1-42) bude představitel identitu. Dosadíme-li nyní výrazy (1-48) a (1-49) do rovnice (1-43) a (1-44), dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \left( -\frac{\partial^2 A}{\partial u_1^2} + E_1 \right) = -j\omega \mu h_2 h_3 H_2 \quad (1-50)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left( -E_1 + \frac{\partial^2 A}{\partial u_1^2} \right) = -j\omega \mu h_2 h_3 H_3 \quad (1-51)$$

Derivujeme první z těchto rovnic podle proměnné  $u_2$  a druhou podle proměnné  $u_3$ . Takto upravené rovnice sečteme. Dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_3 \partial u_2} \right) = -j\omega \mu \left( \frac{\partial}{\partial u_2} (h_2 H_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_3 H_3) \right)$$

Z toho plyne

$$\frac{\partial}{\partial u_2} (h_2 H_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_3 H_3) = 0$$

Tento vztah bude platit identicky tehdy, bude-li

$$h_2 H_2 = j\omega \epsilon \frac{\partial A}{\partial u_3}; \quad h_3 H_3 = -j\omega \epsilon \frac{\partial A}{\partial u_2} \quad (1-52)$$

Tím se zachová vztah mezi funkcí  $A$ , složkou intenzity elektrického pole  $E_1$ , a složkami magnetického pole  $H_2$  a  $H_3$  [rovnice (1-50) a (1-51)]. Dosadíme-li rovnice (1-52) do rovnice (1-50) a (1-51), dostaneme pro složku  $E_1$  intenzity elektrického pole

$$E_1 = \frac{\partial^2 A}{\partial u_1^2} + k^2 A \quad (1-53)$$

Složky  $E_2$  a  $E_3$  určíme z výrazů (1-48) a (1-49)

$$E_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (1-54)$$

$$E_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_3} \quad (1-54.1)$$

Složky intenzity magnetického pole určíme na základě vztahu (1-52)

$$H_2 = j\omega \epsilon \frac{1}{h_2} \frac{\partial A}{\partial u_3} \quad (1-55)$$

$$H_3 = -j\omega \epsilon \frac{1}{h_3} \frac{\partial A}{\partial u_2} \quad (1-55.1)$$

Vyjadříme-li intenzitu elektrického a magnetického pole ve vektorovém tvaru, vyplývá z předchozích vztahů

$$\mathbf{E} = \text{grad} \frac{\partial A}{\partial u_1} + k^2 A \mathbf{u}_1 \quad (1-56)$$

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \text{rot} (\mathbf{u}_1 A) \quad (1-57)$$

Abychom určili diferenciální rovnici pro pomocný potenciál  $A$ , dosadíme výrazy pro  $E_1$ ,  $E_2$  a  $E_3$  do rovnice (1-45). Pak dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_1^2} + \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial A}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial A}{\partial u_3} \right) \right] + k^2 A = 0 \quad (1-58)$$

Diferenciální rovnici pro  $A$  dostaneme také z podmínky  $\text{div} \mathbf{E} = 0$ . V obecných křivočarých souřadnicích je

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (E_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (E_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (E_3 h_1 h_2) \right]$$

Dosadíme-li za  $E_1$ ,  $E_2$  a  $E_3$  výrazy odvozené pomocí potenciálu  $A$ , dostaneme pro  $A$  diferenciální rovnici

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial u_1^2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left( k^2 h_2 h_3 A \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{h_1 h_2}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial u_1 \partial u_3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \right) \right] = 0 \quad (1-59)$$

Uvedli jsme již na začátku, že  $h_1 = 1$  (uvažujeme příčné vlny magnetické). Rovnice (1-58) a (1-59) jsou dvě diferenciální rovnice pro pomocný potenciál  $A$ . Měli byt řešení pomocného potenciálu jednoznačné, musí být obě rovnice identické. Rovnice (1-58) a (1-59) budou totožné jen tehdy, bude-li

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_3}{h_2} \right) = 0$$

Potom při  $h_1 = 1$  bude platit

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( h_2 h_3 \frac{\partial A}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( h_2 h_3 \frac{\partial A}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( h_2 h_3 \frac{\partial A}{\partial u_3} \right) \right] = 0$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (I-58), vidíme, že s ní bude identická, bude-li se výraz v lomené závorce rovnat nule. Tím jsme dokázali, že jednotlivé složky elektromagnetického pole u příčné magnetické vlny lze vyjádřit pomocným potenciálem jen tehdy, vyhovují-li Laméovy koeficienty těmto podmínkám:

$$h_1 = 1; \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2}{h_3} \right) = 0$$

nebo

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_3}{h_2} \right) = 0$$

Porovnejme ještě rovnici (I-58) s vlnovou rovnicí. Vlnová rovnice pro pomocný potenciál  $A$

$$\Delta A + k^2 A = 0$$

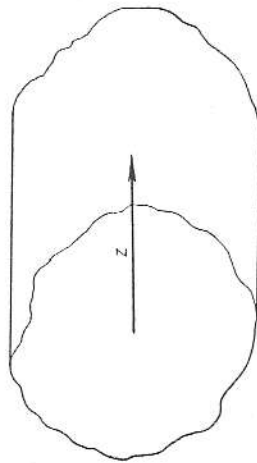
vyjádřená v křivových souřadnicích, u nichž Laméův koeficient  $h_1 = 1$ , má tvar

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( h_2 h_3 \frac{\partial A}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( h_2 \frac{\partial A}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( h_2 \frac{\partial A}{\partial u_3} \right) \right] + k^2 A = 0$$

Tato rovnice bude totožná s rovnicí (I-58), bude-li

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3) = 0 \quad (I-60)$$

To platí jen pro obecné válcové souřadnice, kdy  $h_2$  a  $h_3$  nejsou funkcemi  $u_1$  (u kruhových válcových souřadnic nejsou funkcemi  $z$ ).



Obr. 3. Obecné válcové souřadnice.

Stejně bychom postupovali u příčných vln elektrických. Pomocný potenciál, který v tomto případě označíme  $C$ , musí vyhovovat diferenciální rovnici (I-58) a pro jednotlivé složky pole budou platit vztahy

$$H = \text{grad} \frac{\partial C}{\partial u_1} + k^2 C u_1 \quad (I-61)$$

$$E = -j\omega \mu \text{rot} (C u_1) \quad (I-62)$$

## II. THEORIE VEDENÍ PRO DECIMETROVÉ A CENTIMETROVÉ VLNY

### 6. Vlnovody

Ve vysokofrekvenční elektrotechnice v oboru dlouhých, středních a krátkých vln se obyčejně používá při rozvodu vysokofrekvenční energie drátových vedení nebo sousových vodičů.

Drátových vedení nelze však použít v technice velmi krátkých vln (decimetrových a centimetrových), neboť jejich útlum při kmitočtech těchto vln je nepřijatelně velký a drátová vedení, jejichž úseky jsou srovnatelně dlouhé s délkou vlny, vyzařují. Proto se v rozsahu centimetrových a decimetrových vln používá jako napájecího vedení a rozvodného vedení vlnovodů nebo sousových vodičů.

Vlnovody jsou kovové dutiny, jimiž se šíří elektromagnetická vlna. Mají tu vlastnost, že se jimi šíří elektromagnetická vlna teprve od určitého kmitočtu. Vlnovodem se přenese jen ta elektromagnetická vlna, jež má vyšší kmitočet než určitý kmitočet, který nazveme mezním.

Poznáme, že měrný útlum elektromagnetické vlny ve vlnovodu je v určitých případech velmi malý a že se proto vlnovod velmi dobře hodí k přenášení elektromagnetické energie. Se zřetelem na vhodné vybudování se budeme v dalších částech zabývat geometrickým uspořádáním intenzity elektrického a magnetického pole. Zjistíme, že fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny závisí na kmitočtu a určíme délku vlny ve vlnovodu jako funkci rozměrů vlnovodu a kmitočtu.

Tyto vlastnosti odvodíme nejdříve u vlnovodu obecného průřezu a pak přejdeme k vlnovodům se zvláštním průřezem.<sup>1)</sup>

V kap. I jsme již poznali, že úplné řešení Maxwellových rovnic je dáno u pravouhlých (kartézských) souřadnic superposicí příčných magnetických a elektrických vln. Vlnovod je zvláštní případ dielektrického drátu (dielektrického válce). Uvidíme v části 21, v níž pojednáme o šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického drátu, že nemůže obecně existovat samostatně příčná magnetická vlna nebo příčná elektrická vlna. Jen ve zvláštních případech může vzniknout vlna TM nezávisle na vlně TE nebo naopak. Shledáme, že jeden z těchto zvláštních případů je vlnovod omezený ideálně vodivým pláštěm. Proto se budeme v dalších částech zabývat zvlášť vlnami TM a zvlášť vlnami TE.

Prostorové uspořádání intenzity elektrického a magnetického pole ve vlnovodu určíme řešením Maxwellových rovnic s příslušnou okrajovou podmínkou. Při tom vyjádříme intenzitu elektrického a magnetického pole pomocí dvou Hertzových vektorů, které jsme označili  $\Pi_e$  a  $\Pi_m$ . Intenzita elektrického a magnetického pole, příslušející příčné magnetické vlně, byla dána vztahy (I-33) a (I-34), a příslušející příčné vlně elektrické vztahy (I-34) a (I-36).

<sup>1)</sup> Doporučujeme, aby čtenář při studiu článků 6 až 13 studoval současně článek 14, v němž se pojednává o zvláštních druzích vlnovodů.

Hertzovy vektory  $\Pi_1$  a  $\Pi_2$  vyhovují homogenní vlnové rovnici, jde-li o pole bez zdrojů,

$$\Delta \Pi_1 + k^2 \Pi_1 = 0 \quad (\text{II-1})$$

$$\Delta \Pi_2 + k^2 \Pi_2 = 0 \quad (\text{II-2})$$

Důkaz, že obecné řešení Maxwellových rovnic lze vyjádřit superposicí příčných vln elektrických a magnetických, byl proveden v pravouhlých souřadnicích. Protože obecné vlnové souřadnice mají jednu souřadnici kartézskou, označíme ji  $z$ , rozšíří se platnost tohoto důkazu i na obecné vlnové souřadnice, neboť pomocí složky Hertzova vektoru  $\Pi^z$  a  $\Pi^m$  ve směru  $z$  lze vyjádřit všechny veličiny pole.

Aby řešení vlnových rovnic Hertzových vektorů bylo jednoznačné, musíme k nim ještě přiřadit okrajové podmínky [viz rovnice (I-4)]. Uvedli jsme, že je vlnovod omezen vodivým pláštěm. Budeme-li předpokládat, že je plášť dokonale vodivý, vyplývá okrajová podmínka z toho, že tečná složka intenzity elektrického pole na plášti je nulová. Kdyby totiž nebyla tečná složka intenzity elektrického pole u dokonale vodivého pláště vlnovodu nulová, vznikl by v plášti nekonečně velký vodivý proud, což není fyzikálně možné. Prakticky je vodivost kovů, z nichž se vyrábějí vlnovody, tak velká, že tento předpoklad je téměř vždy splněn.

Označme jednotkový vektor, ležící v libovolném směru tečné roviny pláště vlnovodu, znakem  $\mathbf{t}$ . Na základě okrajové podmínky bude tečná složka intenzity elektrického pole na plášti nulová. Proto musí na plášti platit pro jakýkoli směr vektoru  $\mathbf{t}$

$$(\mathbf{E}\mathbf{t}) = 0$$

Jednotkový vektor  $\mathbf{t}$  vyjádříme vektorovým součinem dvou jednotkových vektorů, kolmých na  $\mathbf{n}$ . Jeden tento vektor bude ležet ve směru normály, označíme jej  $\mathbf{n}$ , a druhý bude kolmý na  $\mathbf{t}$  a  $\mathbf{n}$ , označíme jej  $\mathbf{t}'$  (viz obr. 4). Tento vektor bude ležet také v tečné rovině.

Potom platí, že  $\mathbf{t} = [\mathbf{n}\mathbf{t}']$ , a tedy

$$(\mathbf{E}\mathbf{t}) = (\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{t}']) = 0 \quad (\text{na plášti})$$

Použijeme-li cyklické záměny v předcházejícím složeném skalárním součinu, dostaneme

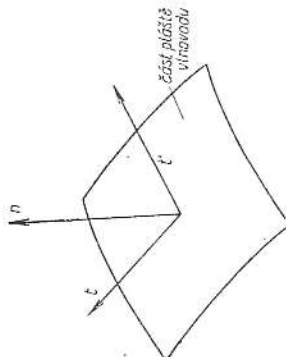
$$(\mathbf{t}'[\mathbf{E}\mathbf{n}]) = 0$$

Protože vektor  $\mathbf{t}$  je libovolného směru v tečné rovině, bude i vektor  $\mathbf{t}'$  libovolného směru.

Aby předešlý výraz platil identicky pro jakýkoli směr  $\mathbf{t}$ , musí platit

$$[\mathbf{E}\mathbf{n}] = 0 \quad (\text{na plášti}) \quad (\text{II-3})$$

Je tedy možné vyjádřit okrajovou podmínku, aby tečná složka intenzity elektrického pole byla na dokonale vodivém plášti nulová, vztahem (II-3). Podmínka (II-3) nám předpisuje hodnotu tečné složky intenzity elektrického pole na plášti. Protože můžeme vyjádřit intenzitu elektrického pole Hertzovými vektory  $\Pi_1^z$  a  $\Pi_2^z$ , je vztahem (II-3) předepsána velikost Hertzových vektorů  $\Pi_1^z$  a  $\Pi_2^z$  na plášti. Touto podmínkou a vlnovými rovnicemi (II-1) a (II-2) jsou Hertzovy vektory  $\Pi_1^z$  a  $\Pi_2^z$  v oboru vlnovodu jednoznačně určeny.



Obr. 4. Uspořádání vektorů  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}'$ .

## 7. Příčná vlna magnetická (vlna TM)

Nejprve určíme prostorové uspořádání elektromagnetického pole ve vlnovodu u příčné magnetické vlny. Dokázali jsme v čl. 3, že v tomto případě je intenzita elektrického a magnetického pole určena vztahy

$$\mathbf{H}_1 = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi_1^z$$

$$\mathbf{E}_1 = k^2 \Pi_1^z + \text{grad div } \Pi_1^z$$

Při tom Hertzův vektor  $\Pi_1^z$  vyhovuje vlnové rovnici

$$\Delta \Pi_1^z + k^2 \Pi_1^z = 0$$

Tato vlnová rovnice je parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Budeme ji řešit metodou separace proměnných. Poznáme, že tato metoda vede k fyzikálně možnému řešení. Na základě metody separace proměnných budeme předpokládat, že Hertzův vektor  $\Pi_1^z$  je dán součinem dvou funkcí

$$\Pi_1^z = T_1(u, v) T_2(z) \quad (\text{II-4})$$

Přitom  $T_1(u, v)$  je jen funkci příčných souřadnic  $u, v$ , ležících v rovinně kolmé k ose vlnovodu, a  $T_2(z)$  je funkci podélné souřadnice  $z$ . Funkce  $T_1(u, v)$  udává geometrické uspořádání Hertzova vektoru v průřezu vlnovodu a  $u, v$  jsou obecné příčné vlnové souřadnice, které vhodně zvolíme podle tvaru průřezu vlnovodu. Na př. u obdélníkového vlnovodu zvolíme za  $u$  a  $v$  souřadnice  $x$  a  $y$ , u kruhového vlnovodu souřadnice  $r$  a  $\varphi$ . Dosadíme výraz (II-4) do rovnice (II-1). Potom

$$\Delta(T_1 T_2) + k^2(T_1 T_2) = 0$$

Na základě pouček z vektorové analýzy lze vyjádřit Laplaceův operátor, aplikovaný na součin dvou skalárních funkcí, takto:

$$\Delta(T_1 T_2) = T_2 \Delta T_1 + T_1 \Delta T_2 + 2(\text{grad } T_1 \cdot \text{grad } T_2)$$

Protože jednotkové vektory, příslušející obecným vlnovým souřadnicím  $u, v, z$ , tvoří orthogonální soustavu vektorů, je směr grad  $T_1$  kolmý na směr grad  $T_2$ , a proto

$$\Delta(T_1 T_2) = T_2 \Delta T_1 + T_1 \Delta T_2$$

Dosadíme-li tento vztah do vlnové rovnice (II-1), dostaneme

$$T_1 \Delta T_2 + T_2 \Delta T_1 + k^2 T_1 T_2 = 0$$

Abychom oddělili proměnné, děleme celou předcházející rovnici výrazem  $T_1 T_2$ . Tím se rozpadne levá část předcházející rovnice na dvě části, z nichž jedna je jen funkcí příčných souřadnic  $u$  a  $v$  a druhá je funkcí souřadnice  $z$ . Bude tedy

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2} + k^2 = 0 \quad (\text{II-5})$$

Výraz  $\frac{\Delta T_1}{T_1}$  je jen funkcí příčných souřadnic  $u, v$  a výraz  $\frac{\Delta T_2}{T_2}$  jen funkcí souřadnice  $z$ .

Součet obou těchto výrazů musí dávat pro jakoukoli souřadnici konstantu. To může nastat jen tehdy, bude-li  $\frac{\Delta T_1}{T_1}$  i  $\frac{\Delta T_2}{T_2}$  konstantní. Bude tedy platit

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = -\Gamma^2 \quad \text{a} \quad \frac{\Delta T_2}{T_2} = -\gamma^2 \quad (\text{II-6})$$

Konstantu  $\Gamma^2$  volíme zápornou, jak uvidíme dále, proto, abychom mohli jednoduše splnit

okrajovou podmínku na plášti vlnovodu. Totéž platí o konstantě  $\gamma$ . Mezi zvolenými konstantami  $I$  a  $\gamma$  musí platit v souhlase s rovnicí (II-5)

$$-\gamma^2 = I^2 - k^2 \quad (\text{II-7})$$

Funkce  $T_2$  je funkcí jedné proměnné, funkcí  $s$ , a proto druhá z rovnic (II-6) je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu

$$\frac{d^2 T_2}{ds^2} = -\gamma^2 T_2$$

Její řešení je toto:

$$T_2 = C_1 e^{\gamma s} + C_2 e^{-\gamma s} \quad (\text{II-8})$$

Obr. 5. Uspořádání jednotkových vektorů  $t, n, z$ .

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty. Veličina  $\gamma$  je charakteristická veličina pro šíření vln ve směru osy  $z$  a nazývá se konstantou přenosu. Je vyjádřena vztahem (II-7). Při tom  $k^2$  nezávisí na tvaru vlnovodu a závisí jen na konstantách prostředí (dielektrické konstantě, magnetické permeabilitě a vodivosti). Veličinu  $I$  v rovnici (II-7) určíme z okrajových podmínek. Vlnová rovnice (II-1) dává nekonečně mnoho řešení a jednoznačnost řešení je dána při uvedeném tvaru vlnovodu předepsanými okrajovými podmínkami.

Předpokládáme, že plášť vlnovodu je dokonale vodivý. V tom případě musí mít tečná složka intenzity elektrického pole na plášti vlnovodu nulovou hodnotu. Tento předpoklad je oprávněn proto, že se plášť vlnovodu zhotovují z kovů velké vodivosti (obvykle z mosazi s posířibíleným povrchem) a že následkem povrchového jevu ubývá pole v plášti exponenciálně tak rychle, že při použití velmi vysokých kmitočtů pole ve vzdálenosti řádu  $10^{-3} - 10^{-4}$  mm od povrchu prakticky mizí. Protože rozměry vlnovodu jsou řádu použitelné délky vlny, je uvedené předpoklad s velkou přesností oprávněn.

Abyste byla tečná složka intenzity elektrického pole na plášti nulová, musí být vektorový součin intenzity elektrického pole a jednotkového vektoru ve směru normály na plášti nulový

$$[E_n] = 0 \quad (\text{na plášti})$$

Označíme-li jednotkovými vektory  $t, n$  a  $z$  směry tečny průřezové křivky vlnovodu, normály průřezové křivky a osy vlnovodu (viz obr. 5), lze vektor intenzity elektrického pole na plášti vyjádřit ve složkách těchto vektorů. Potom

$$E = E_t t + E_n n + E_z z$$

kde  $E_t$  je složka intenzity elektrického pole ve směru tečny  $k$  průřezové křivce

$E_n$  složka ve směru normály  $k$  průřezové křivce

$E_z$  složka ve směru osy vlnovodu.

Vektorový součin  $[E_n]$ , dosadíme-li za vektor  $E$  příslušné složky, bude mít tvar

$$[(E_t t + E_n n + E_z z) n] = 0 \quad (\text{II-9})$$

Vektorový součin jednotkových navzájem kolmých vektorů dává jednotkový vektor, kolmý na základní vektory. Proto

$$[tn] = z, \quad [nn] = 0, \quad [zn] = -t$$

a dosazením do rovnice (II-9)

$$E_z z - E_t t = 0$$

Abyste tento vztah platil identicky, musí být na plášti

$$E_t = 0, \quad E_z = 0$$

Všimneme si nejdříve složky  $E_z$ . Podle rovnice (I-33) vyjádříme tuto složku pomocí Hertzova vektoru. Při tom

$$E_z = k^2 \Pi_z + \text{grad}_z \text{div} \Pi_z$$

Podle rovnice (II-4) je  $\Pi_z = T_1(u, v) T_2(s)$ . Provedeme-li vektorové operace, dostaneme

$$\text{div} \Pi_z = T_1(u, v) \frac{\partial T_2(s)}{\partial s}$$

$$\text{grad}_z \text{div} \Pi_z =$$

$$= T_1(u, v) \frac{\partial^2 T_2(s)}{\partial s^2}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do výrazu pro  $E_z$ , je

$$E_z = k^2 T_1 T_2 + T_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial s^2}$$

Tento výraz se má pro jakoukoli hodnotu souřadnice  $s$  rovnat na plášti nule. Aby tomu tak bylo, musí být na plášti

$$T_1 = 0 \quad (\text{II-10})$$

Složka intenzity elektrického pole ve směru tečny průřezové křivky vlnovodu je dána na základě rovnice (I-33) takto:

$$E_t = (\text{grad} \text{div} \Pi_t) = \frac{\partial T_2}{\partial s} (\text{grad} T_1 t)$$

při čemž  $t$  je jednotkový vektor ve směru tečny. Protože

$$(\text{grad} T_1 t) = \frac{dT_1}{ds}$$

kde  $ds$  je element oblouku průřezové křivky, je

$$E_t = \frac{\partial T_2}{\partial s} \frac{\partial T_1}{\partial s} \quad (\text{II-10.1})$$

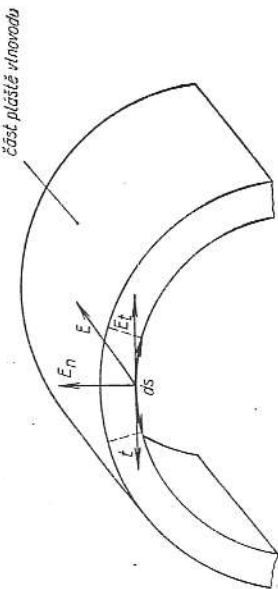
Okrajová podmínka (II-10) vyplývá ze vztahu, že tečná složka intenzity elektrického pole ve směru osy  $z$  musí být na plášti vlnovodu nulová. Dokázali jsme dále, že musí platit podmínka (II-10.1), má-li být také tečná složka intenzity elektrického pole ve směru průřezové křivky nulová. Z obou těchto vztahů vyplývá, že bude-li splněna podmínka (II-10), bude tím současně splněna i podmínka (II-10.1). Je-li totiž hodnota funkce na dané křivce nulová, musí být také derivace této funkce ve směru tečny dané křivky (derivace podle elementu oblouku) nulová.

Učíme tedy funkci  $T_1$  řešením vlnové rovnice

$$\Delta T_1 + I^2 T_1 = 0$$

s okrajovou podmínkou, že na plášti je

$$T_1 = 0$$



Obr. 6. Rozložení intenzity elektrického pole na plášti vlnovodu (u vlny TM).

Tím určíme uspořádání Hertzova vektoru příčné magnetické vlny (TM). Řekli jsme již, že funkce  $T_1$  je funkcí příčných souřadnic. Přistoupíme-li k vlastnému řešení vlnové rovnice funkce  $T_1$ , musíme se nejdříve rozhodnout, v jakých souřadnicích provedeme řešení.

Příčné souřadnice zvolíme pro daný průřez vlnovodu takové, abychom mohli určit jednoduše z okrajové podmínky všechny neznámé veličiny. Jde hlavně o konstantu  $\Gamma$ . Zavedeme tedy takové souřadnice  $u, v$ , aby mohl být obrys průřezu vlnovodu vyjádřen rovnicí

$$u = \text{konst} \quad \text{nebo} \quad v = \text{konst}$$

nebo lineární kombinací obou těchto funkcí. Příčnou konstantu určíme potom z okrajové podmínky, že na plášti vlnovodu je

$$T_1 = 0$$

Konstanta  $\Gamma$  bude funkcí rozměrů vlnovodu. Budeme-li ji znát, budeme moci určit konstantu přenosu  $\gamma$  podle vztahu (II-7)

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \Gamma^2} \quad (\text{II-11})$$

Konstanta přenosu  $\gamma$  je charakteristická veličina při určování uspořádání pole v podélném směru. Z výrazu (II-4) vyplývá, že se příčné uspořádání pole při jakémkoli  $z$  nemění, že se mění se souřadnicí  $z$  jen amplituda pole a že tato změna je dána funkcí  $T_2(z)$ .

Z teorie rovinné vlny je známo, že se elektromagnetická vlna šíří prostředím bez útlumu jen tehdy, je-li konstanta přenosu imaginární. V tom případě bude okamžitá hodnota Hertzova vektoru

$$\Pi_z^e = T_1(u, v)(C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) e^{i\omega t}$$

kde  $\gamma$  je absolutní hodnota konstanty přenosu. Po vynásobení pravé strany dostaneme

$$\Pi_z^e = C_1 T_1(u, v) e^{(\omega t + \gamma z)} + C_2 T_1(u, v) e^{i(\omega t - \gamma z)}$$

Každý člen pravé strany předcházejícího výrazu znázorňuje rovinnou vlnu Hertzova vektoru. Obě tyto vlny mají pro dané místo průřezu, určené souřadnicemi  $u, v$ , stejnou amplitudu a fázi, šíří se však v opačném směru.

Konstanta přenosu  $\gamma$  bude imaginární veličinou jen tehdy [viz rovnici (II-11)], bude-li vlnové číslo  $k$  reálné a větší než konstanta  $\Gamma$ . Vlnové číslo  $k$  je vždy reálné, zanedbáme-li vodivost prostředí. Je totiž obecně

$$k^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

Je-li  $\sigma = 0$ , je potom  $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ . Konstanta  $\Gamma$  je, jak poznáme, vždy reálná. Bude-li vlnové číslo  $k$  komplexní (t. j. nezanedbáme-li ztráty v prostředí), bude konstanta přenosu komplexní a rovinná vlna Hertzova vektoru ve směru osy vlnovodu se bude šířit jako tluměná vlna. Protože prostředí uvnitř vlnovodu tvoří vzduch, jehož vodivost je proti výrazu  $\omega\varepsilon$  zanedbatelná, budeme uvažovat vlnové číslo reálné. V tomto případě bude konstanta přenosu  $\gamma$  imaginární jen tehdy, bude-li  $k^2 > \Gamma^2$ . Mezní případ nastane, je-li  $k = \Gamma$ . Uvážíme-li, že  $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  a  $\Gamma$  je pro daný tvar vlnovodu konstanta, vidíme, že uvedenou podmínkou bude omezen použitelný úhlový kmitočet  $\omega$ . Vyplývá z toho totiž, že musí být

$$\omega \geq \frac{\Gamma}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Není-li splněna tato podmínka, je konstanta přenosu reálná veličina a elektromagnetická vlna se utlumí. Mezní případ je tehdy, je-li

$$\omega_m = \frac{\Gamma}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{II-12})$$

Úhlový kmitočet, který je dán tímto vztahem, nazýváme mezním úhlovým kmitočtem. Potom platí, že se elektromagnetická vlna šíří vlnovodem jen tehdy, je-li její kmitočet vyšší než mezní. Známe-li konstantu přenosu, určíme fázovou rychlost šíření podle známého vztahu

$$v = \frac{\omega}{\gamma}$$

Podle rovnice (II-11) je absolutní hodnota konstanty přenosu

$$|\gamma| = \sqrt{k^2 - \Gamma^2} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{\omega^2}}$$

Protože

$$\frac{\Gamma^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \omega_m \quad [\text{podle rovnice (II-12)}]$$

je

$$|\gamma| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2} \quad (\text{II-13})$$

Fázová rychlost šíření bude potom dána výrazem

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}}$$

Jde-li o vzduchové prostředí, je  $\mu = \mu_0$  a  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ps}}$  a potom

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$$

kde  $c$  je fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny ve volném prostoru.

Proto fázová konstanta šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}} \quad (\text{II-14})$$

V tomto vztahu je  $\omega_m$  opět mezní úhlový kmitočet a je nižší než použitý úhlový kmitočet  $\omega$ . Proto je jmenovatel výrazu (II-14) menší než jedna a fázová rychlost šíření větší než rychlost světla. To je charakteristická vlastnost šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu. Z výrazu (II-14) je zřejmé, že fázová rychlost šíření ve vlnovodu je funkcí kmitočtu. Tím je charakterisována dispersní vlastnost šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu.

## 8. Příčná vlna elektrická (vlna TE)

Ve vlnovodu může vzniknout nezávisle na příčné magnetické vlně příčná vlna elektrická. Odvodíme základní vlastnosti šíření této vlny.

Intenzitu magnetického a elektrického pole u příčné elektrické vlny jsme určili v kap. I vztahy (I-34) a (I-36)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m \\ \mathbf{E} &= -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m \end{aligned}$$



Hertzův vektor  $\Pi_z^m$  při tom splňuje podmínku vlnové rovnice

$$\Delta \Pi_z^m + k^2 \Pi_z^m = 0 \quad (\text{II-15})$$

Postup při řešení této vlnové rovnice bude stejný jako u příčných vln magnetických. Integrální konstanty a konstantu přenosu  $\gamma$  však určíme z jiných okrajových podmínek. Budeme předpokládat, že

$$\Pi_z^m = T_1 T_2$$

kde  $T_1$  je opět jen funkcí příčných souřadnic a  $T_2$  jen funkcí proměnné  $z$ .

Pro tyto jednotlivé funkce platí, podobně jako u vlny vidu TM, dílčí vlnové rovnice

$$\begin{aligned} \Delta T_1 + I^2 T_1 &= 0 \\ \Delta T_2 + \gamma^2 T_2 &= 0 \end{aligned}$$

Druhá z těchto rovnic má opět řešení

$$T_2 = C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}$$

Abychom mohli jednoznačně rozřešit první z těchto rovnic, musíme znát okrajové podmínky. Tyto podmínky vyplývají opět z toho, že na plášti vlnovodu je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. V našem případě jde o příčné vlny elektrické, a proto tečná složka intenzity elektrického pole bude mít jen směr tečný k průřezové křivce. Proto

$$E_t = 0 \quad (\text{na plášti})$$

Je-li  $\mathbf{n}$  jednotkový vektor ve směru normály pláště a  $\mathbf{z}$  jednotkový vektor ve směru osy vlnovodu, bude jednotkový vektor ve směru tečný k průřezové křivce vlnovodu dán výrazem

$$\mathbf{t} = [\mathbf{nz}]$$

neboť jednotkový vektor ve směru tečný je kolmý k jednotkovému vektoru ve směru normály a k jednotkovému vektoru ve směru osy vlnovodu. Intenzita elektrického pole je dána výrazem

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m$$

Nahradíme-li vektor  $\Pi_z^m$  absolutní hodnotou a jednotkovým vektorem  $\mathbf{z}$ , je

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m = -j\omega\mu \text{rot } (I^2 \mathbf{z}) = -j\omega\mu [\text{grad } I^2 \mathbf{z}]$$

Složku intenzity elektrického pole ve směru tečný k průřezové křivce dostaneme jako skalární součin vektoru intenzity elektrického pole s jednotkovým vektorem  $\mathbf{t}$  tečný k průřezové křivce. Proto

$$E_t = -j\omega\mu (\mathbf{t} [\text{grad } I^2 \mathbf{z}]) = -j\omega\mu (\text{grad } I^2 [\mathbf{zt}])$$

Protože jednotkové vektory  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  tvoří ortogonální soustavu, je

$$[\mathbf{zt}] = \mathbf{n}$$

a potom

$$E_t = -j\omega\mu (\text{grad } I^2 \mathbf{n}) = -j\omega\mu \frac{\partial I^2}{\partial n}$$

Nahradíme-li absolutní hodnotu Hertzova vektoru součinem skalárních funkcí  $T_1$  a  $T_2$  a uvážíme-li, že derivace podle normály se bude týkat jen funkce  $T_1$ , bude

$$E_t = -j\omega\mu T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} \quad (\text{II-16})$$

Aby se tento výraz rovnal na plášti vlnovodu pro jakoukoli hodnotu  $z$  nule, musí platit

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{na plášti}) \quad (\text{II-17})$$

Pro konstantu přenosu  $\gamma$  platí též výraz jako u příčných vln magnetických

$$\gamma = \sqrt{k^2 - I^2} \quad (\text{II-18})$$

Pro mezní kmitočty bude  $\gamma = 0$  a odtud dostaneme pro něj podobný vztah jako u příčných magnetických vln, a to

$$\omega_m = \frac{I}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Vlnovou rovnici funkce  $T_1$

$$\Delta T_1 + I^2 T_1 = 0$$

budeme řešit pro daný průřez vlnovodu zavedením vhodných souřadnic jako u příčných magnetických vln. Avšak okrajová podmínka je v tomto případě jiná než u příčných magnetických vln. Je dána vztahem (II-17). Řešením vlnové rovnice určíme prostorové uspořádání funkce  $T_1$  a z okrajové podmínky určíme konstantu  $I$ . Známe-li tyto veličiny, umíme určit složky pole a všechny důležité parametry šíření.

## 9. Charakteristická impedance vlnovodu

Charakteristická impedance vlnovodu je veličina daná poměrem absolutní hodnoty příčné složky intenzity elektrického pole a absolutní hodnoty příčné složky intenzity magnetického pole u nekonečně dlouhého vlnovodu. Dokážeme, že je nezávislá na souřadnicích. Proto můžeme vyjádřit v každém místě průřezu vlnovodu příčnou složku intenzity magnetického pole pomocí příčné složky intenzity elektrického pole a charakteristické impedance vlnovodu. Uvidíme, že charakteristická impedance vlnovodu u vln vidu TM je menší a u vln vidu TE větší než charakteristická impedance vlnového prostoru.

U příčných vln magnetických je příčná složka intenzity elektrického pole dána se zřetelem na rovnici (I-33) výrazem

$$E_t = \text{grad, div } \Pi_z^m = \frac{\partial T_2}{\partial z} \text{ grad, } T_1$$

Absolutní hodnota tohoto vektoru je

$$|E_t| = \frac{\partial T_2}{\partial z} |\text{grad, } T_1| \quad (\text{II-19})$$

při čemž index  $t$  operátoru grad znamená, že jde o příčnou složku gradientu, t. j. o složku kolmou k ose vlnovodu.

Pro intenzitu magnetického pole platí vztah (I-35). Nahradíme-li vektor  $\Pi_z^m$  absolutní hodnotou  $I^2$  a jednotkovým vektorem  $\mathbf{z}$ , dostaneme

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi_z^m = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } (I^2 \mathbf{z}) = (\sigma + j\omega\epsilon) [\text{grad } I^2 \mathbf{z}]$$

Z tohoto výrazu přímo vyplývá, že intenzita magnetického pole má jen příčný směr (jde o vlny vidu TM). Dosadíme-li za  $I^2$  funkci  $T_1 T_2$ , je potom

$$\mathbf{H}_t = (\sigma + j\omega\epsilon) T_2 [\text{grad, } T_1 \mathbf{z}] = (\sigma + j\omega\epsilon) T_2 \text{ grad, } T_1 [\mathbf{tz}]$$

kde  $\mathbf{t}$  je jednotkový vektor vektoru grad  $T_1$ .

Tento jednotkový vektor je kolmý k jednotkovému vektoru  $\mathbf{z}$ . Z předšlého výrazu plyne, že absolutní hodnota příčné složky intenzity magnetického pole je

$$|H_t| = (\sigma + j\omega\epsilon) T_2 |\text{grad}_t T_1| \quad (\text{II-20})$$

Charakteristickou impedanci vlnovodu označíme  $Z$ . Definovali jsme ji jako poměr absolutní hodnoty příčné složky intenzity elektrického pole k absolutní hodnotě příčné složky magnetického pole. Se zřetelem na rovnice (II-19) a (II-20) dostaneme

$$Z = \frac{|E_t|}{|H_t|} = \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{1}{T_2} \quad (\text{II-21})$$

Pro funkci  $T_2$  jsme odvodili

$$T_2 = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}$$

Konstanta přenosu  $\gamma$  může být obecně komplexní veličinou s reálnou kladnou částí. Bude-li vlnovod nějak omezen v podélném směru, určíme konstanty  $C_1$  a  $C_2$  z okrajových podmínek na omezujících částech. Bude-li vlnovod na jedné straně neomezen, je okrajová podmínka na neomezené části taková, že pro  $z \rightarrow \infty$  musí být složky intenzity elektrického a magnetického pole nulové. To znamená, že pro  $z \rightarrow \infty$  musí  $T_2 \rightarrow 0$ . Protože však pro  $z \rightarrow \infty$ ,  $e^{\gamma z} \rightarrow \infty$ , může být okrajová podmínka splněna jen tehdy, bude-li konstanta  $C_1$  nulová. Potom

$$T_2 = C_2 e^{-\gamma z}$$

Kdyby byl vlnovod neomezen na opačném konci, bude  $C_2 = 0$  a

$$T_2 = C_1 e^{\gamma z}$$

Obecně lze psát, že u neomezeného vlnovodu je

$$T_2 = C e^{\pm \gamma z}$$

kde znaménko v exponentu udává, kterým směrem se šíří elektromagnetická vlna.

Na základě těchto výsledků upravíme výraz (II-21) na

$$Z = \frac{\pm j\gamma}{\sigma + j\omega\epsilon} \quad (\text{II-22})$$

kde  $\gamma$  je v tomto případě absolutní hodnota imaginární konstanty přenosu. Platí pro ni vztah (II-1). Dosadíme-li jej do rovnice (II-22), bude pro vzduchové prostředí

$$Z = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (\text{II-23})$$

Při tom jsme zanedbali v rovnici (II-23) vodivost prostředí  $\sigma$ , neboť ve vlnovodu je dielektrikem obyčejně vzduch, u něhož  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  a  $\mu = \mu_0$ .

Poměr mezního kmitočtu k použitému jsme nahradili znakem  $\nu$ .

U příčných vln elektrických je dána intenzita elektrického a magnetického pole výrazy (I-34) a (I-36). Na základě těchto vztahů určíme příčné složky

$$\begin{aligned} E_t &= -j\omega\mu_0 \text{rot } \Pi_z^m \\ H_t &= \text{grad}_t \text{div } \Pi_z^m \end{aligned}$$

Dosadíme-li za  $\Pi_z^m$  opět skalární funkci  $T_1 T_2$ , která je absolutní hodnotou vektoru  $\Pi_z^m$ , a jednotkový vektor  $\mathbf{z}$ , dostaneme

$$E_t = -j\omega\mu_0 T_2 |\text{grad}_t T_1| [\mathbf{t}z] \quad (\text{II-24})$$

$$H_t = \frac{\partial T_2}{\partial z} |\text{grad}_t T_1| \mathbf{t} \quad (\text{II-25})$$

kde  $\mathbf{t}$  je jednotkový vektor gradientu funkce  $T_1$ .

Dosadíme-li absolutní hodnoty těchto vektorů do výrazu pro charakteristickou impedanci vlnovodu, bude

$$Z = \frac{|E_t|}{|H_t|} = -j\omega\mu_0 \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad (\text{II-26})$$

Pro nekonečně dlouhý vlnovod, kde  $T_2 = C e^{\pm \gamma z}$ , je

$$Z = \pm \frac{\omega\mu_0}{|\gamma|} \quad (\text{II-27})$$

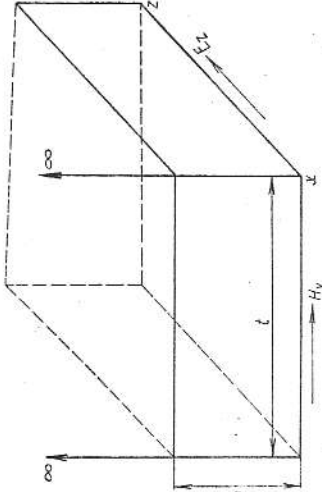
Dosadíme-li za konstantu přenosu odvozený výraz (II-18), platí pro charakteristickou impedanci vlnovodu se vzduchovým dielektrikem ( $\epsilon_0, \mu_0$ ) vztah

$$Z = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{1 - \nu^2}} \quad (\text{II-28})$$

Z rovnice (II-25) a (II-27) vyplývá, že charakteristická impedace vlnovodu není funkcí příčných souřadnic, nýbrž je při daných rozměrech vlnovodu konstantní. Protože číslo  $\nu$  je menší než jedna, neboť kritický kmitočet je vyšší než použitý, je u příčných vln magnetických charakteristická impedace šíření menší než charakteristická impedace vlnového prostoru, kdežto u příčných vln elektrických je větší.

## 10. Odvození měrného vysokofrekvenčního odporu pláště

Plášť vlnovodu není ideálně vodivý. Konečná vodivost pláště způsobuje, že okrajová podmínka je jiná než u dokonale vodivého pláště. U dokonale vodivého pláště byla tečná složka intenzity elektrického pole na povrchu nulová. Je-li vodivost pláště konečná, vyplývá okrajová podmínka z rovnosti tečných složek intenzity elektrického pole a z rovnosti normálních složek intenzity magnetického pole na rozhraní dielektrického prostředí a vodivého prostředí. V plášti vzniknou proudy, které způsobí energetické ztráty a tím dostupný úbytek vyzařované energie ve směru osy vlnovodu. Abychom mohli určit velikost ztrát, musíme znát vysokofrekvenční proudy v plášti a vysokofrekvenční odpor pláště. Pro kvantitativní závěry o velikosti vysokofrekvenčního proudu a odporu je třeba nejdříve určit uspořádání pole, proud a odpor v jednoduchém vodiči obdélníkového průřezu (obr. 7).



Obr. 7. Jednoduchý vodič obdélníkového průřezu.

Předpokládáme, že intenzita elektrického pole má jen složku ve směru osy  $z$  a magnetické pole má jen složku kolmou k ose  $z$ , v našem případě směr osy  $x$ . Podle Maxwellových rovnic platí

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}_z + j\omega \epsilon \mathbf{E}_z \\ \operatorname{rot}_x \mathbf{E} &= -j\omega \mu \mathbf{H}_x \end{aligned}$$

Takové uspořádání pole vznikne tehdy, když připojíme na povrchu vodiče mezi místo se souřadnicemi  $y = 0$ ,  $z = 0$  a místo se souřadnicemi  $y = 0$ ,  $z = z_0$  vysokofrekvenční napětí. Toto napětí vyvolá vysokofrekvenční proud ve směru osy  $z$  a tento proud způsobí magnetické pole ve směru osy  $x$ . Intenzitu elektrického pole dostaneme jako gradient potenciálu, a proto bude mít směr osy  $z$ .

Protože jde o vodič, u něhož převládá vodivý proud proti posuvnému, je  $\sigma \gg \omega \epsilon$  a potom je

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \mathbf{H}_x &= \sigma \mathbf{E}_z \\ \operatorname{rot}_x \mathbf{E}_z &= -j\omega \mu \mathbf{H}_x \end{aligned}$$

Provedeme-li vektorové úkony, dostaneme mezi intenzitou elektrického a magnetického pole tyto vztahy:

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma E_z \quad (\text{II-29})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega \mu H_x \quad (\text{II-30})$$

Uřídíme-li z těchto rovnic intenzitu magnetického pole, platí pro ni diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 H_x}{dy^2} = j\sigma \omega \mu H_x \quad (\text{II-31})$$

To je jednoduchá diferenciální rovnice, jejíž integrál je

$$H_x = C_1 e^{\gamma_1 y} + C_2 e^{-\gamma_1 y} \quad (\text{II-32})$$

kde  $\gamma_1 = \sqrt{j\sigma \omega \mu}$ .

Konstanty v rovnici (II-32) určíme z okrajových podmínek. Pro souřadnici  $y = \infty$  musí být velikost intenzity magnetického pole nulová. Aby tomu tak bylo, musí být  $C_1 = 0$ . Potom je

$$H_x = C e^{-\gamma_1 y} \quad (\text{II-33})$$

kde jsme konstantu  $C_2$  nahradili obecnou konstantou  $C$ . Intenzitu elektrického pole určíme z rovnice (II-30)

$$E_z = C \frac{\gamma_1}{\sigma} e^{-\gamma_1 y} \quad (\text{II-34})$$

Konstanta přenosu  $\gamma_1$  je komplexní veličina. Oddělíme-li reálnou část od imaginární, je

$$\gamma_1 = b + ja$$

kde  $b = a = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}}$ .

Známe-li výrazy pro intenzitu magnetického a elektrického pole, určíme ztráty na jednotku délky vodiče. Ztrátový výkon  $dP$  v elementárním objemu je dán tímto vztahem:

$$dP = \frac{1}{2} \sigma E_z E_z^* dV \quad (\text{II-35})$$

kde  $E_z^*$  je intenzita elektrického pole komplexně sdružená k  $E_z$   $dV$  elementární objemu.

V našem případě (viz obr. 7) je  $dV = t dy$  (jde o jednotku délky vodiče), při čemž  $t$  je šířka vodiče. Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (II-35), dostaneme

$$dP = \frac{1}{2} \sigma E_z E_z^* t dy$$

jsou-li  $E_z$  a  $E_z^*$  vyjádřeny maximální hodnotou. Intenzita elektrického pole  $E_z$  je určena výrazem (II-34). Proto

$$dP = \frac{1}{2} C^2 e^{-2\gamma_1 y} (\gamma_1^2 + a^2) t \frac{1}{\sigma} dy$$

Celkové ztráty vlivem vodivosti  $\sigma$  dostaneme integrací po celém průřezu kovového vodiče

$$P_z = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} C^2 e^{-2\gamma_1 y} (\gamma_1^2 + a^2) dy = \frac{1}{2} C^2 (\gamma_1^2 + a^2) \frac{t}{2b\sigma} \quad (\text{II-36})$$

Tento ztrátový výkon můžeme vyjádřit také tak, že

$$P_z = \frac{1}{2} Z_{vt} I_c^2$$

kde  $Z_{vt}$  je celkový odpor kovového vodiče  $I_c$  celkový proud procházející vodičem.

Podle Stokesovy věty platí

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{s}) = \int_V (\operatorname{rot} \mathbf{H} dV)$$

V našem případě  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}_z$  a  $\oint (\mathbf{H} d\mathbf{s}) = H_x t$ , neboť integrujeme po obvodu obdélníka se stranami  $t$ ,  $\infty$ ,  $\infty$ ,  $t$  (viz obr. 7) a příspěvek k cirkulaci od stran  $\infty$ ,  $\infty$  je nulový, neboť intenzita magnetického pole je kolmá ke stranám označeným  $\infty$ ,  $\infty$ . Na straně  $t$  pro  $y = \infty$  je intenzita magnetického pole  $H_x$  nulová. Po dosazení dostaneme

$$H_x \int_{y=0}^t \sigma E_z t dy = I_c$$

protože  $\sigma E_z$  je proudová hustota  $t dy$  element průřezu.

Na základě vztahu (II-33) je

$$H_x \int_{y=0}^t = C$$

a tedy

$$I_c = C t \quad (\text{II-37})$$

Celkový ztrátový výkon  $P_z$  ve vodiči je

$$P_z = \frac{1}{2} Z_{vt} I_c^2$$

a z toho

$$Z_{vt} = \frac{2P_z}{I_c^2}$$

Dosadíme-li za  $P_z$  výraz (II-36) a za  $I_c$  výraz (II-37), je

$$Z_{vt} = \frac{b}{\sigma t} \quad (\text{II-38})$$

neboť  $b = a$ .

Porovnáme-li tento odpor s odporem pro stejnosměrný proud vodiče s rozměry  $\tau$  a fiktivní tloušťkou  $d$ , platí

$$\frac{b}{\sigma} = \frac{1}{\sigma d},$$

$$d = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad (\text{II-39})$$

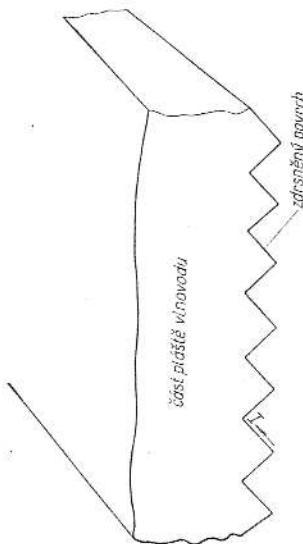
a z toho

kde  $f$  je kmitočet

$\sigma$  vodivost prostředí

$\mu$  magnetická permeabilita prostředí.

Tloušťku  $d$  nazýváme hloubkou vniku vysokofrekvenčního proudu.



Obr. 8. Zidealizovaný drsný povrch vodiče.

Výrazem (II-38) je určen vysokofrekvenční odpor vodiče, jehož příčný rozměr je  $\tau$  a podélný rozměr se rovná jedné. Vysokofrekvenční odpor, který přísluší příčnému rozměru  $\tau$  jednotkové délky, nazýváme měrným vysokofrekvenčním odporem. Budeme jej označovat  $z_{vt}$ . Při tom platí

$$z_{vt} = \frac{b}{\sigma} \quad (\text{II-40})$$

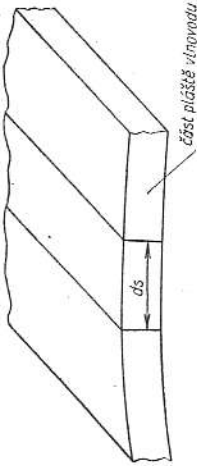
kde

$$b = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}}$$

V technice centimetrových a decimetrových vln se používá obvykle jako vodivého materiálu stříbra. Dosadíme-li do rovnice (II-39) za  $\sigma$  vodivost stříbra, jehož  $\mu = \mu_0$ , zjistíme, že hloubka vniku bude v uvedeném vlnovém rozsahu velmi malá, řádově  $10^{-2}$  až  $10^{-4}$  mm. Šíří se tedy vysokofrekvenční proud u samého povrchu vodiče. Protože je hloubka vniku velmi malá, bude mít na velikost vysokofrekvenčního odporu podstatný vliv hladkost povrchu. Skutečný povrch si pro výpočet zidealizujeme tak, jak je znázorněn na obr. 8. Na tomto obrázku je průřez povrchu vytvořen pravouhlými rovnostrannými trojúhelníky. Z obrázku je vidět, že se dráha vysokofrekvenčního proudu prodlouží  $\sqrt{2}$ krát. Při tom měrný vysokofrekvenční odpor je

$$z_{vt} = \frac{b}{\sigma} \sqrt{2} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \quad (\text{II-41})$$

U vodičů jiných průřezů se proud šíří také jen ve velmi tenké vrstvě na povrchu, a proto výpočet odporu takového vodiče zjednodušíme tím, že odpor budeme počítat jako odpor tenkostěnné trubky stejného tvaru jako je vodič. Odpor takového vodiče, který přísluší



Obr. 9. Zobrazení části ploché vlnovodu.

elementárnímu oblouku  $ds$  a jednotkové délce, můžeme v tomto případě vyjádřit vztahem

$$Z_{vt} = \frac{b}{\sigma ds} \quad (\text{II-42})$$

kde  $ds$  je elementární oblouku průřezové křivky (obr. 9).

## 11. Výkon přenesený vlnovodem

V předcházejícím článku jsme naznačili, jak určit měrný vysokofrekvenční odpor ploště. Nyní určíme výkon přenesený vlnovodem a dokážeme, že měrný útlum vlnovodu  $\beta$  je dán vztahem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P}$$

kde  $P_z$  je ztrátový výkon na jednotku délky vlnovodu

$P$  výkon přenesený vlnovodem.

Určíme nejdříve výkon přenesený vlnovodem u příčné vlny magnetické. Výkon přenesený vlnovodem je dán integrací Poyntingova vektoru po průřezu vlnovodu. Je tedy

$$P = \frac{1}{2} \int_S ([\mathbf{E} \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{z}) dS$$

kde  $\mathbf{z}$  je jednotkový vektor ve směru osy vlnovodu. V integrálu budou platné jen příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole. Proto lze prostě psát, že výkon přenesený vlnovodem je

$$P = \frac{1}{2} \int_S E_t H_t^* dS$$

Vyjádříme-li intenzitu magnetického pole pomocí intenzity elektrického pole na základě rovnice (II-21), platí

$$P = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} \int_S E_t E_t^* dS \quad (\text{II-43})$$

Příčná složka intensity elektrického pole [viz rovnici (I-33)] je (při tom  $H_z^e = T_1 T_2$ )

$$E_t = \frac{\partial T_2}{\partial z} \text{grad}_t T_1$$

Podélná funkce  $T_2$  má, jak bylo odvozeno, obecně při nekonečně dlouhém vlnovodu tvar

$$T_2 = Ce^{-\gamma z}$$

Uvážíme-li ztráty ve vlnovodu, bude konstanta přenosu  $\gamma$  komplexní. V tomto případě

$$\gamma = \beta + j\alpha$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (II-43), dostaneme

$$P = \frac{1}{2} C^2 \frac{1}{Z} \gamma \gamma^* e^{-2\beta z} \int_s |\text{grad } T_1|^2 dS \quad (\text{II-44})$$

Změnu tohoto výkonu ve směru osy vlnovodu určíme z derivace výrazu (II-44) podle  $z$ . Potom

$$dP = -2\beta \frac{1}{2} C^2 \frac{1}{Z} \gamma \gamma^* e^{-2\beta z} dz \int_s |\text{grad } T_1|^2 dS = -2\beta P dz$$

Z toho je

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{dP}{P dz}$$

Výraz  $\frac{dP}{dz}$  znamená změnu výkonu na jednotku délky. Tato změna výkonu je způsobena ztrátami výkonu v plášti vlnovodu následkem konečné vodivosti pláště a ztrátami v dielektriku, způsobenými vodivostí dielektrika. Záporné znaménko ve výrazu pro  $\beta$  znamená, že jde o úbytek výkonu. Lze proto psát

$$P_s = -\frac{dP}{dz}$$

kde  $P_s$  znamená ztrátový výkon na jednotku délky. Dosadíme-li tento výraz do výrazu pro měrný útlum, dostaneme<sup>2)</sup>

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_s}{P} \quad (\text{II-45})$$

Je-li plášť vlnovodu zhotoven z kovu dobré vodivosti (stříbro, měď), jsou ztráty malé a téměř celý výkon je přenesen vlnovodem. V tomto případě, při výpočtu přeneseného výkonu vlnovodem, lze zanedbat vliv útlumu a pokládat konstantu přenosu za čistě imaginární. Potom v rovnici (II-44) je  $\gamma \gamma^* = \gamma^2$ ,  $e^{-2\beta z} \rightarrow 1$  a

$$P = \frac{1}{2} C^2 \frac{1}{Z} \gamma^2 \int_s |\text{grad } T_1|^2 dS \quad (\text{II-46})$$

Integrál v této rovnici upravíme podle Greenovy věty. Podle ní platí pro funkci  $T_1$  (dvou nezávisle proměnných)

$$\int_s |\text{grad } T_1|^2 dS = -\int_s T_1 \Delta T_1 dS + \oint_s T_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} ds$$

kde  $S$  je plocha průřezu vlnovodu  
 $s$  obrysová křivka průřezu vlnovodu.

Funkce  $T_1$  vyhovuje vlnové rovnici, a proto

$$\Delta T_1 = -\Gamma^2 T_1$$

Funkce  $T_1$  při příčných magnetických vlnách je na křivce  $s$  nulová a  $\frac{\partial T_1}{\partial n}$  je při příčných elektrických vlnách na křivce  $s$  také nulová. Proto

$$\int_s |\text{grad } T_1|^2 dS = \Gamma^2 \int_s T_1^2 dS \quad (\text{II-46.1})$$

Upravíme-li podle tohoto vztahu výraz (II-46), zjistíme, že přenesený výkon u příčných magnetických vln lze vyjádřit výrazem

$$P = \frac{1}{2} C^2 \frac{1}{Z} \Gamma^2 \int_s T_1^2 dS \quad (\text{II-47})$$

kde  $C$  je konstanta, závislá na způsobu vybuzení vlnovodu.

<sup>2)</sup> Obvyklejší se definuje měrný útlum vedení podle vztahu

$$\Gamma = \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{P_k}{P} \quad (\text{II-45.1})$$

kde  $P_k$  je výkon na konci vedení jednotkové délky

$P$  výkon na počátku tohoto vedení.

Všimneme si, že jakých podmínek se tento vzorec změní na vzorec (II-45). Ze vzorce (II-45.1) vyplývá

$$\frac{P_k}{P} = e^{-2\beta}$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{P - P_k}{P} = \frac{1 - e^{-2\beta}}{1}$$

Protože ztrátový výkon je dán rozdílem výkonů  $P - P_k$ , platí

$$\frac{P_s}{P} = 1 - e^{-2\beta}$$

kde  $P_s$  je ztrátový výkon.

Rozložíme  $e^{-2\beta}$  v mocninovou řadu

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{2\beta}{1!} + \frac{4\beta^2}{2!} \dots$$

Bude-li měrný útlum  $\beta$  značně menší než jedna, bude platit s dostatečnou přesností

$$e^{-2\beta} \approx 1 - 2\beta$$

Potom

$$\frac{P_s}{P} = 2\beta$$

z čehož

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_s}{P} \quad (\text{Np})$$

Tento vzorec souhlasí se vzorcem (II-45). Platí tedy pro měrný útlum  $\beta$ , vyjádřený v neperech, vzorec (II-45) tehdy, je-li  $\beta \ll 1$ .

U příčných elektrických vln bude výkon přenesený vlnovodem dán také integrací Umov-Poyntingova vektoru po průřezu vlnovodu. Bude tedy přenesený výkon

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S E_t H_t^* ds$$

V tomto výrazu si vyjádříme intenzitu elektrického pole pomocí intenzity magnetického pole a charakteristické impedance. Potom

$$P = \frac{1}{2} Z \int_S H_t H_t^* ds$$

Absolutní hodnota vektoru příčné složky intenzity magnetického pole je podle rovnice (I-36) (kde  $\Pi_z^m = T_1 T_s$ )

$$H_t = \frac{\partial T_s}{\partial z} \operatorname{grad} T_1 C$$

Provedeme-li derivaci podle  $z$ , dosadíme-li do výrazu pro přenesený výkon, dostaneme, že přenesený výkon

$$P = \frac{1}{2} C^2 Z \gamma^2 \int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 ds$$

Použijeme-li opět Greenovy věty, je potom

$$P = \frac{1}{2} C^2 Z \gamma^2 \Gamma^2 \int_S T_1^2 ds \quad (\text{II-48})$$

Ve výrazu (II-47) má konstanta  $C$  v soulahu s rovnicemi (I-33) a (I-35) rozměr [Vm], ve výrazu (II-48) v soulahu s rovnicemi (I-34) a (I-36) rozměr [Am].

Vzorcem (II-47) je určen výkon přenesený vlnovodem, šíří-li se v něm vlna vidu TM, a vzorcem (II-48) je určen výkon přenesený vlnovodem, šíří-li se v něm vlna vidu TE.

## 12. Výpočet měrného útlumu vlnovodu (příčná vlna magnetická)

V předěšlém článku jsme odvodili obecný výraz pro měrný útlum vlnovodu a pro výkon přenesený vlnovodem. Abychom mohli určit měrný útlum, musíme provést výpočet ztrátového výkonu v plášti vlnovodu. Tento ztrátový výkon je způsoben proudem, který teče ve směru osy  $z$ . U příčných magnetických vln má intenzita magnetického pole směr kolmý na osu vlnovodu, a proto intenzita magnetického pole na plášti vybudí jen proud ve směru osy vlnovodu.

Pro vysokofrekvenční odpor, který přísluší jednotkové délce, jsme odvodili výraz (II-42)

$$Z_{rt} = \frac{b}{\sigma ds}$$

kde  $ds$  je element oblouku průřezové křivky vlnovodu. Proud, který přísluší elementu  $ds$ , označíme  $I_c'$  (viz obr. 10).

Podle Stokesovy věty platí

$$\oint_{s'} (\mathbf{H} \mathbf{s}) ds = \int_{s'} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{z}) ds = \int_{s'} \sigma \mathbf{E}_z ds = I_c'$$

kde  $S'$  je plocha elementárního průřezu kovového pláště

$I_c'$  proud příslušný vyčárkovanému elementu.

V našem případě je cirkulace magnetického pole podél křivky, omezující element plochy, dána vztahem

$$\oint (\mathbf{H} \mathbf{s}) ds = H_s ds$$

kde  $H_s$  je tečná složka intenzity magnetického pole k průřezové křivce vlnovodu. Bude tedy

$$I_c' = H_s ds$$

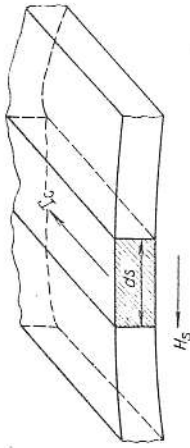
Známe-li celkový proud procházející plošným elementem a vysokofrekvenční odpor elementu, bude element ztrátového výkonu, rozptýleného v uvažovaném plošném elementu a příslušujícího jednotkové délce vlnovodu,

$$dP_s = \frac{1}{2} Z_{rt} I_c' I_c'^*$$

Provedme integraci tohoto výrazu podél křivky omezující průřez vlnovodu. Potom se zítelem na výraz pro  $Z_{rt}$  a pro  $I_c'$

$$P_s = \frac{1}{2} \int \frac{b}{\sigma} H_s H_s^* ds \quad (\text{II-49})$$

Obr. 10. Uspořádání tečné složky intenzity magnetického pole a podélného proudu (vlna TM).



Uřídíme tečnou složku intenzity magnetického pole. Označíme-li směr normály jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}$ , směr osy vlnovodu jednotkovým vektorem  $\mathbf{z}$  a směr tečny  $\mathbf{s}$ , je tečná složka intenzity magnetického pole dána skalárním součinem vektorů  $(\mathbf{H} \mathbf{s})$ . Intenzita magnetického pole je určena rovnicí (I-35). Předpokládejme, že vlnovod je naplněn ideálním dielektrikem, a proto  $\sigma = 0$ . Potom

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \operatorname{rot} \Pi_z^m = j\omega \epsilon \operatorname{rot} (\Pi_z^m \mathbf{z}) = j\omega \epsilon [\operatorname{grad} \Pi_z^m \mathbf{z}]$$

Provedeme-li skalární součin tohoto vektoru s jednotkovým vektorem ve směru  $\mathbf{s}$ , dostaneme

$$H_s = (\mathbf{H} \mathbf{s}) = j\omega \epsilon ([\operatorname{grad} \Pi_z^m \mathbf{z}] \mathbf{s}) = j\omega \epsilon (\operatorname{grad} \Pi_z^m [\mathbf{z} \mathbf{s}])$$

Vektorový součin jednotkových vektorů  $\mathbf{z}$  a  $\mathbf{s}$  je jednotkový vektor ve směru normály  $\mathbf{n}$ , a proto

$$H_s = j\omega \epsilon (\operatorname{grad} \Pi_z^m \mathbf{n}) = j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial n} \quad (\text{II-49.1})$$

Hertzův vektor  $\Pi_z^m$  je dán součinem příčné funkce  $T_1$  a podélné funkce  $T_z$ . Protože směr normály je určen příčnými souřadnicemi, bude

$$\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial n} T_z$$

a proto

$$H_s = j\omega \epsilon_0 T_z \frac{\partial T_1}{\partial n}$$

Pro nekonečně dlouhý vlnovod je  $T_z = Ce^{-\gamma z}$ , a proto

$$H_z H_z^* = \omega^2 \epsilon^2 C^2 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2$$

Dosadíme tento výraz do (II-49). Potom

$$P_z = \frac{1}{2} \frac{a}{\sigma} \omega^2 \epsilon_0^2 C^2 \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds = \frac{1}{2} \epsilon_0 \omega^2 \epsilon_0^2 C^2 \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds \quad (\text{II-50})$$

kde  $\epsilon_0 = \frac{b}{\sigma}$  je měrný vysokofrekvenční odpor.

Měrný útlum je dán vztahem (II-45). Dosadíme-li do tohoto vztahu za  $P_z$  (II-50) a za  $P$  (II-47), dostaneme

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \omega^2 \epsilon^2 C^2 \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds}{C^2 \frac{1}{Z} \Gamma^2 \int_s T_1^2 ds}$$

Charakteristická impedance příčných magnetických vln podle (II-22) je

$$Z = \frac{\gamma}{\omega \epsilon}$$

a proto

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds}{\Gamma^2 Z \int_s T_1^2 ds}$$

Dosadíme ještě za  $Z$  výraz (II-23). Potom

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds}{\Gamma^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_s T_1^2 ds} (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{II-51})$$

Podle uvedeného vztahu určíme měrný útlum vlnovodu, známe-li příčnou funkci  $T_1$ . Určíme ji, jak jsme již uvedli, řešením vlnové rovnice s příslušnou okrajovou podmínkou. Toto řešení provedeme pro jednotlivé druhy vlnovodu v čl. 14. Ve vzorci (II-51) je  $\epsilon_0$  měrný vysokofrekvenční odpor pláště [viz rovnici (II-41)].

### 13. Výpočet měrného útlumu vlnovodu (příčná vlna elektrická)

Protože příčná elektrická vlna obsahuje příčnou i podélnou složku intenzity magnetického pole, budou v tomto případě způsobeny ztráty v plášti vlnovodu jednak proudem, který teče v tečném směru k průřezové křivce, jednak proudem, jehož směr je rovnoběžný

s osou vlnovodu. Podélná složka intenzity magnetického pole vyvolá proud tečného směru a složka intenzity magnetického pole v tečném směru k průřezové křivce vyvolá proud tekoucí ve směru osy vlnovodu (obr. 11).

Ztrátový výkon bude tedy dán součtem ztrátového výkonu způsobeného podélným proudem a ztrátového výkonu způsobeného tečným proudem. Proto

$$P_z = P_{z1} + P_{z2}$$

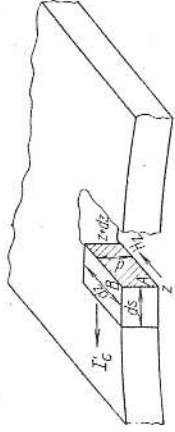
kde  $P_{z1}$  je ztrátový výkon způsobený proudem tečného směru

$P_{z2}$  ztrátový výkon způsobený proudem podélného směru.

Určíme nejprve ztrátový výkon  $P_{z1}$ .



Obr. 11. Orientace proudu tečného směru (vlna TE).



Obr. 12. Uspořádání tečných složek intenzity magnetického pole a proudů (vlna TE).

Proud, který způsobí tyto ztráty, prochází ploškou, jež je na obr. 12 znázorněna čárkováně.

Ztrátový výkon přísluší jednotkové délce vlnovodu. V určitém místě na průřezové křivce vytkneme plošku, ležící v rovině normály a osy  $z$ . Magnetické pole  $H_z$  vyvolá proud procházející touto ploškou. Tento proud označíme  $I_{c1}$  a určíme jej podle Stokesovy věty. Obecně platí

$$\oint (H_z ds) = \int_s (\text{rot}_s H) dS$$

kde  $\text{rot}_s H$  je složka  $\text{rot} H$  ve směru tečny k průřezové křivce v uvažovaném místě. V dokonale vodivém prostředí pláště je

$$\int_s (\text{rot}_s H) dS = \int_s \sigma E_s dS = I_{c1}$$

proto

$$\oint (H_z ds) = I_{c1}$$

Cirkulaci provedeme po plošce, označené na obr. 12 čárkováně. Tato ploška má rozměry  $dz, d, dz, d$ , při čemž  $d$  je tloušťka pláště vlnovodu. Proto

$$\oint (H_z ds) = H_z dz - H_z dz + (H_z n) d - (H_z n) d$$

pro bod  $A$  pro bod  $B$  v místě  $z$  v místě  $z + dz$

Když jsme zjišťovali průběh složek elektromagnetického pole ve vodivém prostředí, zjistili jsme, že se pole šíří jen ve velmi tenké vrstvě, nesrovnatelně menší, než je tloušťka pláště  $d$ . Proto lze příspěvek k cirkulaci od elementu  $dz$  v místě  $B$  zanedbat. Skalární součin  $(H_z n)$  je nulový, neboť  $H_z$  je kolmý k jednotkovému vektoru normály  $n$ . Proto

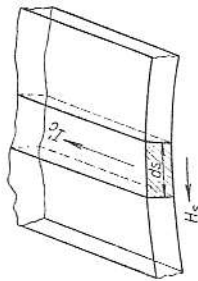
$$I_{c1} = H_z dz \quad (\text{v místě } A)$$

Vysokofrekvenční odpor uvažované plošky označíme  $Z_{vt}$ , při tom je

$$Z_{vt} = \frac{b \, ds}{\sigma \, dz}$$

neboť jde o vodič, jehož průřez tvoří strany  $dz$  a délku strana  $ds$ . Potom platí pro element ztrát

$$dP_{z1} = \frac{1}{2} Z_{vt} I_{vt} I_{vt}^* = \frac{1}{2} \frac{b}{\sigma} H_z H_z^* dz \, ds$$



Ztrátový výkon  $P_{z1}$  na jednotku délky určíme integrací pře-  
dešleho výrazu přes plášt o jednotkové délce

$$P_{z1} = \frac{1}{2} \varrho_{vt} \int_{z=0}^1 \int H_z H_z^* dz \, ds \quad (\text{II-52})$$

kde  $\varrho_{vt} = \frac{b}{\sigma}$ . Intensita magnetického pole u příčných elek-  
trických vln je dána vztahem (I-36)

$$H = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m$$

kde  $\Pi_z^m$  je Hertzův magnetický vektor. Tento vektor je dán součinem funkcí  $T_1 T_2$ . Potom

$$\text{grad div } \Pi_z^m = \text{grad div } T_1 T_2 = -\gamma^2 T_1 T_2 = -\gamma^2 \Pi_z^m$$

Proto

$$H_z = (k^2 - |\gamma|^2) \Pi_z^m$$

Se zřetelem na rovnici (II-18) je

$$I^2 = (k^2 - |\gamma|^2)$$

kde  $|\gamma|$  je absolutní hodnota imaginární veličiny  $j\gamma$ . Proto

$$H_z = I^2 \Pi_z^m = I^2 T_1 T_2$$

Dosadíme tento výraz do (II-52). Potom

$$P_{z1} = \frac{1}{2} \varrho_{vt} \int_{z=0}^1 \int I^4 T_1^2 T_2^2 dz \, ds = \frac{1}{2} \varrho_{vt} I^4 C^2 \int T_1^2 ds \quad (\text{II-53})$$

neboť  $T_2 T_2^* = C^2 e^{i\gamma z} e^{-i\gamma z} = C^2$ .

Ztrátový výkon  $P_{z2}$  je způsoben proudem tekoucím ve směru osy  $z$ . Tento proud je  
vyvolán složkou intenzity magnetického pole ve směru tečny k průřezové křivce (obr. 13).  
Proud prochází vycárkovanou ploškou. Vysokofrekvenční odpor vodiče, jehož průřez  
tvoří vycárkovaná ploška a jehož délka je  $dz$ , je

$$Z_{vt} = \frac{b \, dz}{\sigma \, ds}$$

a element ztrátového výkonu, ztraceného v uvažované části pláště vlnovodu, je

$$dP_{z2} = \frac{1}{2} Z_{vt} I_z I_z^* \quad (\text{II-54})$$

Proud  $I_z$  určíme podle Stokesovy věty. Podle Stokesovy věty platí

$$\oint (\mathbf{H} \, ds) = I_z$$

V našem případě

$$\oint (\mathbf{H} \, ds) = H_z \, ds$$

neboť na ostatních částech obrysu vycárkované plochy je příspěvek k cirkulaci nulový.  
Intenzitu magnetického pole v tečném směru určíme jako skalární součin intenzity mag-  
netického pole příčného směru (kolmého na osu  $z$ ) a jednotkového vektoru ve směru tečny  
k průřezové křivce. Je tedy

$$H_z = (\mathbf{H} \mathbf{s})$$

V souhlase s rovnici (I-36) je

$$H_z = \text{grad}_t \text{div } \Pi_z^m = \frac{\partial T_2}{\partial z} \text{grad}_t T_1$$

$$H_z = \frac{\partial T_2}{\partial z} (\text{grad}_t T_1 \mathbf{s}) = \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial s}$$

kde  $\frac{\partial T_1}{\partial s}$  je derivace funkce  $T_1$  ve směru oblouku k průřezové křivce. Podle toho je proud  
 $I_z$  dán vztahem

$$I_z = \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial s} ds$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (II-54), bude ztrátový výkon

$$P_{z2} = \frac{1}{2} \varrho_{vt} \int_{z=0}^1 \int \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial T_2^*}{\partial z} \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 dz \, ds$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial T_2^*}{\partial z} = C^2 \gamma^2$$

bude

$$P_{z2} = \frac{1}{2} \varrho_{vt} \gamma^2 C^2 \int \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds \quad (\text{II-55})$$

Celkový ztrátový výkon je dán součtem  $P_{z1}$  a  $P_{z2}$ . Proto

$$P_z = P_{z1} + P_{z2} = \frac{1}{2} \varrho_{vt} C^2 \left[ I^4 \int T_1^2 ds + |\gamma|^2 \int \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds \right] \quad (\text{II-56})$$

Útlum příčné elektrické vlny určíme stejně jako u příčných vln magnetických, tedy podle  
vztahu (II-45). Výkon přenesený vlnovodem u příčné elektrické vlny je určen rovnicí  
(II-48). Proto

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P} = \frac{1}{2} \frac{\varrho_{vt} C^2 \left[ I^4 \int T_1^2 ds + |\gamma|^2 \int \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds \right]}{C^2 Z |\gamma|^2 I^2 \int T_1^2 ds}$$



Vyjádříme-li  $I$  výrazem pomocí mezního kmitočtu ( $I = \omega_m \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ),  $|\gamma|$  výrazem pomocí mezního kmitočtu

$$\left[ \gamma = \left| \frac{\omega_m \mu_0}{\omega} \right| \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_m}{\omega} \right)^2} \right]$$

a  $Z$  pomocí mezního kmitočtu

$$\left[ Z = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_m}{\omega} \right)^2} \right]$$

dostaneme

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ \int_s^{\infty} \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds - (1 - \nu)^2 + \int_s^{\infty} T_1^2 ds \sqrt{1 - \nu^2} \right] \quad (\text{II-57})$$

Vzorcem (II-57) je určen měrný útlum vlnovodu, šíří-li se v něm příčná elektrická vlna. Při tom je vysokofrekvenční odpor  $\rho_{vt}$  dán výrazem (II-41).

#### 14. Zvláštní druhy vlnovodů

##### 14.1 Kruhový vlnovod s příčnou vlnou magnetickou

V předcházejících částech jsme uvažovali vlnovody obecného průřezu. Odvodili jsme všechny charakteristické hodnoty vlnovodu v závislosti na příčné funkci  $T_1$ . Řekli jsme, že tuto funkci určíme řešením dílčí vlnové rovnice

$$\Delta T_1 + I^2 T_1 = 0$$

s příslušnou okrajovou podmínkou. U příčných elektrických vln byla tato okrajová podmínka taková, že na plášti vlnovodu musí být  $T_1 = 0$ . U příčných elektrických vln musilo na plášti  $\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$ , aby byla splněna okrajová podmínka.

Podélná funkce  $T_2$  je společně s vlnovým vlnovodem, a bylo dokázáno, že

$$T_2 = C_1 e^{I^2 z} + C_2 e^{-I^2 z}$$

Protože rovnice vlnové plochy se jednoduše vyjádří ve vlnových souřadnicích, budeme počítat dílčí vlnovou rovnici funkce  $T_1$  ve vlnových souřadnicích. Bude tedy  $T_1$  funkcí  $r$  a  $\varphi$ .

Ve vlnových souřadnicích platí

$$\Delta T_1 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial T_1}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right)$$

Ve vztahu se nevyskytuje  $\frac{\partial T_1}{\partial z}$ , neboť  $\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0$ , protože funkce  $T_1$  nezávisí na  $z$ . Dosadíme uvedený výraz do dílčí vlnové rovnice a dostaneme

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + I^2 T_1 = 0$$

Tuto parciální diferenciální rovnici budeme řešit metodou separace proměnných. Proto předpokládáme, že  $T_1 = R\Theta$ , při čemž  $R$  je funkce jen souřadnice  $r$  a  $\Theta$  funkce souřadnice  $\varphi$ . Potom

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Theta + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} R + I^2 R\Theta = 0$$

Znásobíme-li tuto rovnici výrazem  $\frac{r^2}{R\Theta}$ , dostaneme

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} + I^2 r^2 = 0$$

Po úpravě bude

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + I^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} \quad (\text{II-58})$$

Tento vztah musí platit identicky pro jakoukoli hodnotu souřadnic  $r$  a  $\varphi$ . Aby to mohlo být splněno, musí se levá i pravá strana rovnat stejné konstantě. Může být obecně kladná nebo záporná. Znaménko konstanty volíme takové, abychom dostali fyzikálně možné řešení.

Uvažujeme oba případy. Zvolíme-li znaménko kladné, bude platit

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} = n^2 \quad (\text{II-59})$$

kde  $n^2$  je čítec zvolené konstanty.

Řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$\Theta = C_1 e^{n\varphi} + C_2 e^{-n\varphi}$$

To znamená, že by všechny fyzikální veličiny (intenzita elektrického pole, intenzita magnetického pole atd.) závisely na souřadnici  $\varphi$  podle uvedeného vztahu. V tomto případě by se při kladném znaménku konstanty  $n^2$  všechny veličiny zvětšovaly nebo zmenšovaly v intervalu  $0 < \varphi < \infty$  (po případě  $-\infty < \varphi < 0$ ). Uspořádání veličin elektromagnetického pole nemůže být určeno touto závislostí, protože by výsledné pole v daném místě nebylo jednoznačné. Tomuto místu lze totiž přiřadit souřadnici  $\varphi$  nebo  $\varphi + 2\pi$ , obecně  $\varphi + 2m\pi$ , kde  $m = 0, 1, 2, \dots$ , při čemž každé této souřadnici přísluší jiná hodnota funkce  $\Theta$ .

Zvolíme-li znaménko konstanty  $n^2$  záporné, bude platit

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (\text{II-60})$$

Tato diferenciální rovnice má řešení

$$\Theta = C \cos(n\varphi + \varphi_0),$$

kde  $\varphi_0$  je počátek čtení souřadnice  $\varphi$

$C$  integrační konstanta.

Funkce  $\cos(n\varphi + \varphi_0)$  má v daném místě jen jednu hodnotu pro souřadnici  $\varphi$ ,  $\varphi + 2\pi$ , obecně  $\varphi + 2m\pi$ , neboť je periodická s periodou  $2\pi$ . Bude to však platit jen tehdy, bude-li  $n$  celé číslo. Kdyby totiž  $n$  nebylo celé číslo, nemohlo by pro danou souřadnici  $\varphi$  platit

$$\cos n\varphi = \cos(n\varphi + 2m\pi)$$

což je podmínkou jednoznačnosti funkce  $\Theta$  pro danou souřadnici  $\varphi$ .

Rovnici (II-58) lze se zřetelem na výraz (II-59.1) upravit na tvar

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \Gamma^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

Je to Besselova diferenciální rovnice, jejíž řešení je dáno součtem dvou partikulárních integrálů

$$R = C_1 J_n(\Gamma r) + C_2 N_n(\Gamma r)$$

kde  $J_n(\Gamma r)$  je Besselova funkce prvního druhu  $n$ -tého řádu argumentu ( $\Gamma r$ )  
 $N_n(\Gamma r)$  Neumannova funkce  $n$ -tého řádu argumentu ( $\Gamma r$ ).

Protože Hertzův vektor

$$H_z^e = T_1 T_3$$

lze psát na základě odvozených výrazů

$$H_z^e = [C_1 J_n(\Gamma r) + C_2 N_n(\Gamma r)] \cos(np\varphi + \varphi_0)(C_3 e^{\gamma z} + C_4 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-61})$$

$H_z^e$  musí mít konečnou hodnotu v celém průřezu vlnovodu. Budeme-li zkoumat vztah (II-61) v jednotlivých bodech průřezu vlnovodu, zjistíme, že Hertzův vektor by byl pro  $r = 0$  nekonečný, neboť Neumannova funkce je při tomto argumentu nekonečná. Aby bylo řešení (II-61) fyzikálně možné, musí proto být  $C_2 = 0$ . Potom, sdružíme-li konstanty, dostaneme

$$H_z^e = J_n(\Gamma r)(C_1 e^{\gamma z} + C_3 e^{-\gamma z}) \cos np\varphi \quad (\text{II-62})$$

kde, jde-li o kruhový osově souměrný vlnovod, položíme počátek čtení souřadnice  $\varphi$  do místa  $\varphi_0$ , takže  $\varphi_0$  lze pokládat za nulové. Není-li vlnovod osově souměrný (jde-li na př. o průřez vlnovodu ve tvaru výseče), nelze toto zjednodušení zavést.

V rovnici (II-62) neznáme ještě přesně určení konstanty  $\Gamma$  a  $n$ . Avšak víme, že u příčných magnetických vln musí platit se zřetelem na okrajové podmínky, že na plášti vlnovodu je

$$T_1 = 0$$

Průřezová křivka pláště je kružnice, jejíž rovnice je

$$r = a$$

Musí tedy platit

$$J_n(\Gamma a) \cos np\varphi = 0$$

Tento vztah musí platit pro jakékoli  $\varphi$ . Z toho plyne

$$J_n(\Gamma a) = 0 \quad (\text{II-63})$$

Okrajová podmínka (II-63) bude splněna, bude-li

$$\Gamma a = \alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \alpha_{3p}, \dots$$

kde  $\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \dots$  jsou kořeny rovnice (II-63). Kořeny Besselových funkcí některých řádů jsou uvedeny v tabulkách (viz Jahnke-Emde: Funktiontafeln). V tab. I jsou první čtyři kořeny Besselových funkcí řádů od 0 do 3.

Tabulka I

$m \backslash n$	0	1	2	3
1	2,405	3,832	5,136	6,380
2	5,520	7,016	8,417	9,761
3	8,654	10,173	11,020	13,015
4	11,792	13,823	14,796	

Z tab. I i z grafického uspořádání Besselových funkcí je zřejmé, že Besselova funkce každého řádu má nekonečně mnoho kořenů (argumentů), při nichž je hodnota Besselovy funkce nulová).

Pořadí těchto kořenů označíme indexem  $m$ .

Index  $n$  znamená při našem označení řád Besselovy funkce. Obecný kořen Besselovy funkce budeme označovat  $\alpha_{nm}$ . Při tom jde o kořen Besselovy funkce  $n$ -tého řádu  $m$ -tého pořadí. Protože obecně plyne z rovnice (II-63), že  $\Gamma a = \alpha_{nm}$ , lze určit konstantu  $\Gamma$ . Označíme dále  $\Gamma_{nm}$  konstantu  $\Gamma$ , příslušnou kořenu  $\alpha_{nm}$ , podle vztahu

$$\Gamma_{nm} a = \alpha_{nm}$$

Potom

$$\Gamma_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{a}$$

Z výsledku vidíme, že vlnové rovnici s předešlými okrajovými podmínkami (jde-li o dva rozměry) vyhovuje  $\cos^2$  řešení. Každé z nich je vlastním řešením vlnové rovnice. Lze tedy tvrdit, že obecné řešení vlnové rovnice je dáno superposicí vlastních řešení. Bude tedy obecné uspořádání elektromagnetické vlny určeno superposicí jednotlivých vln, jejichž uspořádání je dáno vlastními funkcemi vlnové rovnice. Tyto vlny se budou lišit velikostí a způsobem šíření. Pojďme o tom v části, týkající se buzení vlnovodu. Známe-li tedy pro daný vid vlny konstanty  $\Gamma$  a  $n$ , můžeme určit konstantu přenosu a mezní kmitočet. Absolutní hodnotu konstanty přenosu určíme z podmínky (II-7)

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \Gamma^2}$$

a mezní kmitočet z podmínky (II-12)

$$\omega_m = \frac{\Gamma}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Známe-li konstantu  $\Gamma$ , určíme uspořádání jednotlivých složek elektromagnetického pole podle rovnic (I-33) a (I-35)

$$E_r = j\Gamma\gamma J_n(\Gamma r) \cos n\varphi (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-64})$$

$$E_\varphi = \frac{j\gamma n}{r} J_n(\Gamma r) \sin n\varphi (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-65})$$

$$E_z = \Gamma^2 J_n(\Gamma r) \cos n\varphi (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-66})$$

$$H_r = -(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{n}{r} J_n(\Gamma r) \sin n\varphi (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-67})$$

$$H_\varphi = -(\sigma + j\omega\epsilon) \Gamma J_n(\Gamma r) \cos n\varphi (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-68})$$

#### 14.2 Výpočet měrného útlumu

Měrný útlum vlnovodu s příčnými magnetickými vlnami určíme podle vzorce (II-51). U kruhového vlnovodu jsme odvodili pro příčnou funkci vztah

$$T_1 = J_n(\Gamma r) \cos np\varphi$$

Dosadíme-li jej do rovnice (II-51), dostaneme

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\rho_{ct}}{2} \frac{1}{\Gamma^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a J_n(\Gamma r) \cos^2 n\varphi a \, d\varphi}{a^2 \pi} = \\ &= \frac{\rho_{ct}}{2} \frac{1}{\Gamma^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^2 \int_0^a J_n^2(\Gamma r) a}{\int_0^a \int_0^a J_n^2(\Gamma r) \cos^2 n\varphi r \, dr \, d\varphi} \\ &= \frac{\rho_{ct}}{2} \frac{1}{\Gamma^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^2 \int_0^a J_n^2(\Gamma r) a}{\int_0^a J_n^2(\Gamma r) r \, dr} \end{aligned}$$

Při úpravě tohoto vztahu použijeme rekurentních vzorců, které platí pro Besselovy funkce

$$J_n' = -\frac{n}{r} J_n + J_{n-1} \quad \text{nebo} \quad J_n' = \frac{n}{r} J_n - J_{n+1}$$

Dále použijeme Lommelova integrálu

$$\int_0^a r J_n^2(\Gamma r) \, dr = \frac{a^2}{2} [J_n^2(\Gamma a) - J_{n-1}(\Gamma a) J_{n+1}(\Gamma a)]$$

Dosadíme-li tyto výrazy do vzorce pro útlum, dostaneme se zřetelem na okrajové podmínky  $[J_n(\Gamma a) = 0]$  výraz

$$\beta = \rho_{ct} \frac{(1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}}}{\int_0^a \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \, a} \quad (II-69)$$

kde  $\nu_{mn}$  je poměr kritického kmitočtu daného vidu a použitého kmitočtu  $\rho_{ct}$  měrný vysokofrekvenční odpor pláště, viz rovnici (II-41) a poloměr vlnovodu.

#### 14.3 Vlnovod kruhového průřezu s příčnou vlnou elektrickou

Vlnová rovnice pro tento druh vlnění je stejná jako u příčné magnetické vlny. Jde tedy o vylučení magnetického Hertzova vektoru, pro který platí dílčí vlnová rovnice

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$$

s okrajovou podmínkou, že na plášti vlnovodu je

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

Provedeme-li integraci této vlnové rovnice, dostaneme podobně jako u vlny TM pro funkci  $T_1$  vztah

$$T_1 = [C_1 J_n(\Gamma r) + C_2 N_n(\Gamma r)] \cos n\varphi$$

Funkce  $T_1$ , která určuje uspořádání a velikost pole v příčném směru, musí být po celém průřezu vlnovodu konečná. Předcházející výraz splní tuto podmínku jen tehdy, je-li

$C_2 = 0$ , neboť Neumannova funkce pro nulový argument má nekonečnou hodnotu. Potom je

$$T_1 = C J_n(\Gamma r) \cos n\varphi \quad (II-70)$$

Konstantu  $\Gamma$  určíme z okrajové podmínky, t. j. z podmínky, aby tečná složka intenzity elektrického pole na okraji byla nulová. To se stane tehdy, když na plášti vlnovodu je

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$$

Tato podmínka bude u kruhového vlnovodu splněna pro jakýkoli úhel  $\varphi$  tehdy, bude-li

$$J_n'(\Gamma a) = 0 \quad (II-71)$$

kde  $a$  je poloměr vlnovodu.

To platí pro  $\Gamma a = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , kde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  jsou kořeny rovnice (II-71). Obecně lze tedy psát

$$\Gamma_{nm} a = \alpha_{nm}$$

kde  $\alpha_{nm}$  je kořen derivace Besselovy funkce  $n$ -tého řádu  $m$ -tého pořadí. Tyto kořeny jsou pro některé hodnoty  $n$  a  $m$  uvedeny v tab. II.

Tabulka II

$m \backslash n$	0	1	2	3
1	3,832	1,841	3,054	4,201
2	7,016	5,231	6,706	8,015
3	10,173	8,536	9,969	11,346
4	13,324	11,705	13,170	

Známe-li kořen  $\alpha_{nm}$ , určíme  $\Gamma_{nm}$  takto:

$$\Gamma_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{a}$$

Z příčné funkce  $T_1$  určíme Hertzův vektor podle vztahu

$$H_z = J_n \left( \frac{\alpha_{nm}}{a} r \right) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (II-72)$$

Pro konstantu přenosu a mezní kmitočet platí tytéž vztahy jako u příčné vlny magnetické. Jednotlivé složky pole určíme na základě vztahů (I-34) a (I-36):

$$E_r = i\omega\mu \frac{n}{r} J_n(\Gamma r) \sin n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (II-73)$$

$$E_\varphi = i\omega\mu \Gamma J_n'(\Gamma r) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (II-74)$$

$$H_r = i\Gamma \gamma J_n(\Gamma r) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (II-75)$$

$$-H_\varphi = i \frac{\gamma n}{r} J_n(\Gamma r) \sin n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (II-76)$$

$$H_z = \Gamma^2 J_n(\Gamma r) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (II-77)$$

#### 14.4 Výpočet měrného útlu

Podle vzorce (II-57) platí pro měrný útlu přičných elektrických vln tento obecný vztah:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_{vt}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds + \int_s T_1^2 ds \right] + \frac{1}{2} \frac{\rho_{vt}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_s T_1^2 ds + \int_s T_2^2 ds \right]$$

Dosaďme do tohoto vzorce za funkci  $T_1$  odvozenou hodnotu v rovnici (II-70). Potom dostaneme pro jednotlivé výrazy v předcházejícím vzorci

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} = \frac{\partial T_1}{a \partial \varphi} = -\frac{n}{a} J_n(Ja) \sin n\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} J_n^2(Ja) n^2 \varphi$$

$$\int_0^{2\pi} T_1^2 ds = a J_n^2(Ja) \pi$$

$$\int_s T_1^2 ds = \frac{1}{2} a^2 \pi \left( 1 - \frac{n^2}{J_n^2(Ja)} \right) J_n^2(Ja)$$

Na základě toho

$$\beta = \frac{\rho_{vt}}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (1 - \nu_{mn}^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{n^2}{J_n^2(Ja) \left( 1 - \frac{n^2}{J_n^2(Ja)} \right)} (1 - \nu_{mn}^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{n^2}{J_n^2(Ja)}} \right] = \frac{\rho_{vt}}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (1 - \nu_{mn}^2)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{n^2}{\nu_{mn}^2 - n^2} + \nu_{mn}^2 \right) \quad (\text{II-78})$$

kde  $\rho_{vt}$  je měrný vysokofrekvenční odpor pláště, viz rovnici (II-41)

$a$  poloměr vlnovodu

$\alpha_{nm}$   $m$ -tý kořen derivace Besselovy funkce  $n$ -tého řádu

$\nu_{mn}$  poměr mezního knutočtu k použitému.

#### 15. Souosé vlnovody

##### 15.1 Souosý vlnovod s příčnou vlnou magnetickou

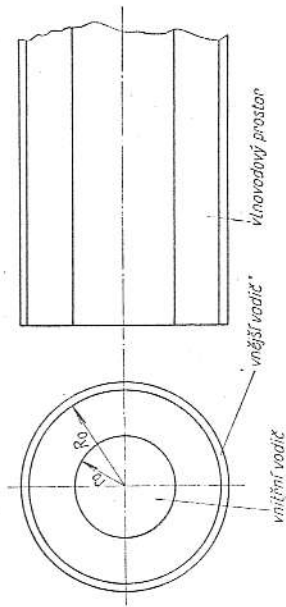
Při řešení příčné magnetické vlny v kruhovém vlnovodu jsme dostali pro Hertzův vektor vztah

$$T_2 = [C_1 J_n(Jr) + C_2 N_n(Jr)] [C_3 e^{i\varphi z} + C_4 e^{-i\varphi z}] \cos n\varphi$$

kteří platí i pro souosý vlnovod (obr. 14).

U kruhového vlnovodu jsme vypustili člen s Neumannovou funkcí, neboť Neumannova funkce při nulovém argumentu má nekonečnou hodnotu. Kdybychom ponechali Neumannovu funkci, byly by všechny složky pole v místě vlnovodu se souřadnicí  $r = 0$  nekonečné. Tento výsledek by nebyl fyzikálně možný.

U souosého vlnovodu je tomu však jinak. Souosý vlnovod neobsahuje souřadnici  $r = 0$ , a proto nelze člen s Neumannovou funkcí vypustit.



Obr. 14. Příčný a podélný řez souosým vlnovodem.

Neznámou konstantu  $I$  určíme z okrajových podmínek. U příčné magnetické vlny bude okrajová podmínka vyjádřena vztahem, že na plášti vlnovodu

$$T_1 = C_1 J_n(Jr) + C_2 N_n(Jr) = 0$$

Rovnice okraje mezikruhového pláště jsou

$$r = R_0; \quad r = r_0$$

Proto plynou z okrajových podmínek vztahy

$$C_1 J_n(JR_0) + C_2 N_n(JR_0) = 0 \quad (\text{II-79})$$

$$C_1 J_n(Jr_0) + C_2 N_n(Jr_0) = 0 \quad (\text{II-80})$$

To jsou homogenní rovnice s neznámými  $C_1$  a  $C_2$ . Tyto rovnice mají netriviální řešení jen tehdy, rovná-li se jejich determinant nule

$$J_n(Jr_0) N_n(JR_0) - J_n(JR_0) N_n(Jr_0) = 0 \quad (\text{II-81})$$

Dosaďme za  $Jr_0$  nový výraz  $\chi$ . Potom je

$$JR_0 = \frac{R_0}{r_0} \chi = c\chi$$

kde  $c = \frac{R_0}{r_0}$ .

Rovnice (II-81) se změni tak, že

$$J_n(\chi) N_n(c\chi) - N_n(\chi) J_n(c\chi) = 0 \quad (\text{II-81.1})$$

Označme  $\chi_{nm}$   $m$ -tý nezáporný kořen rovnice (II-81.1), kde poměr  $c$  má danou hodnotu a  $n$  je řád Besselových funkcí, které v ní vystupují. Hodnoty kořenů rovnice (II-81.1) pro  $c = 1$  až  $c = 2,5$  a  $n = 0$  až  $n = 3$  jsou v tab. III.

Tabulka III. Číselné vyjádření výrazu  $(c-1)\chi^{nm}$  pro  $m > 0$

$c$	$n$	$m$	01	11	21	31	02
1,0			3,142	3,142	3,142	3,142	6,283
1,5			3,141	3,143	3,147	3,154	6,283
2,0			3,123	3,197	3,400	3,700	6,273
2,5			3,130	3,235			6,206

Ačkoli hodnota výrazu  $(c-1)\chi$  pro  $c=1$  nemá praktický význam, uvádí se proto, aby bylo vidět, že se výraz  $(c-1)\chi$  blíží násobkům čísla  $\pi$ , konverguje-li konstanta  $c$  k jedné. V tab. III tedy vidíme, že velikost výrazu  $(c-1)\chi$  nezávisí na řádu Besselovy funkce, nýbrž jen na pořadí kořene (na čísle  $m$ ).

Pro mezní kmitočet platí vzorec (II-12). Vyjádříme-li úhlový kmitočet délkou vlny, platí pro mezní délkou vlny

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\Gamma}$$

$$\text{V našem případě } \Gamma = \frac{\chi}{r_0}, \text{ a proto } \lambda_m = \frac{2\pi r_0}{\chi}$$

V tab. III jsou číselně vyjádřeny výrazy  $(c-1)\chi$ . Vyjádříme-li mezní délkou vlny tímto výrazem, platí proto

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{(c-1)\chi} (R_0 - r_0) \quad (\text{II-82})$$

Všimneme si blíže výrazu  $(c-1)\chi_{nm}$  uvedeného v tab. III. Vidíme, že hodnoty výrazu  $(c-1)\chi_{nm}$  se dosti přesně blíží hodnotám  $m\pi$ . Dosadíme-li proto do rovnice (II-82) za  $(c-1)\chi$  uvedeně přibližné výrazy, dostaneme pro mezní délkou vlny

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{m\pi} (R_0 - r_0) = \frac{2}{m} (R_0 - r_0) \quad (\text{II-82.1})$$

Určíme ještě jednotlivé složky elektromagnetického pole. Z rovnic (II-79) a (II-80) určíme vzájemný vztah mezi konstantami  $C_1$  a  $C_2$  výrazem

$$C_2 = -C_1 \frac{J_n(\Gamma r_0)}{N_n(\Gamma r_0)}$$

Vyjádříme-li Hertzův vektor se zřetelem na uvedený vztah mezi konstantami  $C_2$  a  $C_1$ , dostaneme

$$\Pi_z^i = C_1 \left( J_n(\Gamma r) - \frac{J_n(\Gamma r_0)}{N_n(\Gamma r_0)} N_n(\Gamma r) \right) \cos n\varphi (C_3 e^{i\gamma z} + C_4 e^{-i\gamma z})$$

V této rovnici vytkneme výraz  $\frac{1}{N_n(\Gamma r_0)}$  a označíme  $\frac{C_1}{N_n(\Gamma r_0)}$  novou konstantou  $C$ . Pak bude

$$\Pi_z^i = C [J_n(\Gamma r) N_n(\Gamma r_0) - J_n(\Gamma r_0) N_n(\Gamma r)] \cos n\varphi (C_3 e^{i\gamma z} + C_4 e^{-i\gamma z})$$

Označme výraz  $[N_n(\Gamma r_0) J_n(\Gamma r) - J_n(\Gamma r_0) N_n(\Gamma r)]$  výrazem  $Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0)$ . Hertzův vektor potom bude

$$\Pi_z^i = Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-83})$$

Při tom jsme sdužili konstanty takto:  $CC_3 = C_1$  a  $CC_4 = C_2$ .

Vyjádříme-li nyní složky elektromagnetického pole na základě Hertzova vektoru podle rovnice (II-83), platí

$$E_r = i\Gamma \gamma Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-84})$$

$$E_\varphi = j \frac{\gamma^2}{r} Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0) \sin n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-85})$$

$$E_z = I^2 Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-86})$$

$$H_r = -(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{n}{r} Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0) \sin n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-87})$$

$$H_\varphi = -(\sigma + j\omega\epsilon) \Gamma Z_n(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-88})$$

### 15.2 Souosý vlnovod s příčnou vlnou elektrickou

Při určování Hertzova vektoru u příčné elektrické vlny v kruhovém vlnovodu jsme dospěli k výrazu

$$\Pi_z^m = (C_1 J_n(\Gamma r) + C_2 N_n(\Gamma r)) \cos n\varphi (C_3 e^{i\gamma z} + C_4 e^{-i\gamma z})$$

Konstantu  $\Gamma$  určíme z okrajové podmínky pro příčné elektrické vlny, t. j. z podmínky, že na plášti vlnovodu  $\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r} = 0$ . V našem případě musí tedy na plášti platit, že pro jakékoli  $\varphi$

$$C_1 J_n'(\Gamma r) + C_2 N_n'(\Gamma r) = 0$$

Tato podmínka platí pro  $r = r_0$  a  $r = R_0$ ; tedy

$$C_1 J_n'(\Gamma r_0) + C_2 N_n'(\Gamma r_0) = 0 \quad (\text{II-89})$$

$$C_1 J_n'(R_0) + C_2 N_n'(R_0) = 0 \quad (\text{II-90})$$

Tato soustava má řešení, je-li její determinant nulový

$$J_n'(\Gamma r_0) N_n'(R_0) - J_n'(R_0) N_n'(\Gamma r_0) = 0 \quad (\text{III-91})$$

Z rovnice (III-91) určíme velikost  $\Gamma$ . Zavedeme opět novou veličinu  $\chi$  podle vztahu  $\Gamma r_0 = \chi$  a poměr velkého a malého poloměru označíme  $c$ . Kořen rovnice (III-91) označíme  $\chi_{nm}$ , kde  $n$  je řád Besselových funkcí ve výrazu (III-91) a  $m$  pořadí kořene. V tab. IV a V jsou uvedeny hodnoty výrazu  $(c+1)\chi_{n1}$  pro  $m=1$  a výrazu  $(c-1)\chi_{nm}$  pro  $m > 1$ .

Tabulka IV. Číselné vyjádření výrazu  $(c+1)\chi$  pro  $m=1$

$c$	$n$	11	21	31
1,0		2,00	4,00	6,00
1,5		2,00	4,020	6,018
2,0		2,031	4,023	5,937
2,5		2,038	3,980	5,75

Tabulka V. Číselné vyjádření výrazu  $(c-1)\chi$  pro  $m > 1$

$c$	$m$	02	12	22	32	03
1		3,142	3,142	3,142	3,142	6,283
1,5		3,161	3,188	3,270	3,400	6,293
2,0		3,197	3,282	3,500		6,312
3,0		3,271	3,516			6,37

Mezní délku vlny určíme pro  $m = 1$  podle vztahu

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{(c+1)\chi} (R_0 + r_0) \quad (\text{II-92})$$

Z tab. IV je zřejmé, že  $(c+1)\chi \approx 2\pi$ . Proto přibližně platí, že mezní délka vlny je

$$\lambda_m = \frac{\pi}{n} (R_0 + r_0) \quad (\text{II-92.1})$$

Při  $m > 1$  je

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{(c-1)\chi} (R_0 - r_0) \quad (\text{II-93})$$

Z druhé tabulky vyplývá

$$(c-1)\chi \approx (m-1)\pi$$

Proto pro mezní délku dostaneme pro  $m > 1$  přibližný výraz

$$\lambda_m = \frac{2(R_0 - r_0)}{m-1} \quad (\text{II-93.1})$$

Bude nás zajímat, který z uvedených druhů vlnění v sousedním vlnovodu bude hlavní, uvážíme-li vidy TM i vidy TE. Bude to vid, u něhož při daných rozměrech sousedního vlnovodu bude mezní délka vlny nejdelší. Porovnáme-li výrazy (II-82.1), (II-92.1) a (II-93.1), vidíme, že hlavním videm bude vid TE<sub>11</sub>. U tohoto druhu vlnění platí pro mezní délku vlny

$$\lambda_m = 2\pi \frac{R_0 + r_0}{2}$$

Je tedy mezní délka vlny hlavního vidu sousedního vlnovodu rovna délce kružnice, jejíž poloměr je dán střední hodnotou velkého a malého poloměru.

Určíme-li z rovnic (II-89) a (II-90) vztah mezi konstantami  $C_1$  a  $C_2$ , dostaneme

$$C_2 = -C_1 \frac{J_1(Ir_0)}{N_1'(Ir_0)}$$

Dosadíme-li tuto konstantu do vzorce pro Hertzův magnetický vektor, bude

$$H_z^m = [J_n(Ir) N_n'(Ir_0) - J_n'(Ir_0) N_n(Ir)] \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

Označíme-li výraz  $J_n(Ir) N_n'(Ir_0) - J_n'(Ir_0) N_n(Ir)$  výrazem  $Z_n(Ir, Ir_0)$ , bude Hertzův vektor

$$H_z^m = Z_n(Ir, Ir_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-94})$$

Jednotlivé složky elektromagnetického pole, vyjádřené na základě (I-34) a (I-36), jsou dány vzorci

$$E_r = j\omega\mu \frac{n}{r} Z_n(Ir, Ir_0) \sin n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-95})$$

$$E_\varphi = j\omega\mu I Z_n'(Ir, Ir_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-96})$$

$$H_r = jI\gamma Z_n'(Ir, Ir_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-97})$$

$$H_\varphi = j\frac{\gamma n}{r} Z_n(Ir, Ir_0) \sin n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-98})$$

$$H_z = I^2 Z_n'(Ir, Ir_0) \cos n\varphi (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-99})$$

## 16. Sousový vodič

Zvláštním druhem elektromagnetické vlny v sousém vlnovodu je vid TEM (příčná vlna elektricko-magnetická). Tento vid má takové uspořádání intenzit elektrického a magnetického pole, že žádná z nich nemá složku ve směru osy vlnovodu. Protože u vlny TEM platí, že  $E_z = I^2 I_0$ , a u vlny TE  $H_z = I^2 I_0$ , může vzniknout vid TEM jen tehdy, je-li  $I$  nulová.

Existence vidu TEM je podmíněna geometrickým uspořádáním vlnovodu. Lze dokázat, že vidy TEM mohou vzniknout jen tehdy, jde-li o několikanasobně souvislou oblast. Průběh intenzity elektrického a magnetického pole je v tomto případě stejný jako u statického pole. Na povrchu vodiče musí být tečná složka intenzity elektrického pole nulová, a proto je směr silových čar elektrického pole kolmý k ploše vodičů. V našem případě je vedení vytvořeno válcovými plochami. Okrajová podmínka

$$[Er] = 0$$

přechází v tomto případě v podmínku, že uvažované válcové plochy musí být ekvipotenčníální.

Bude-li  $I = 0$ , musí se změnit dílčí vlnová rovnice

$$\Delta T_1 = I^2 T_1 = 0$$

na Laplaceovu rovnici

$$\Delta T_1 = 0$$

Potom dostaneme pro příčnou funkci  $T_1$  též tvar jako při řešení statického pole. Protože  $I = 0$ , je na základě řešení rovnice (II-66)  $E_z = 0$  a na základě řešení rovnice (II-77)  $H_z = 0$ . Intenzita elektrického pole i intenzita magnetického pole budou mít směr příčný (kolmý k ose vlnovodu). Takové vlny nazýváme příčnými vlnami elektricko-magnetickými a označujeme je TEM.

Protože  $I = 0$ , je  $\gamma = k$ . Je tedy konstanta přenosu u vln TEM též jako konstanta přenosu rovinné vlny ve volném prostoru. Příčná konstanta  $I$  musí vyhovovat u příčných magnetických vln podmínce (II-81) a u příčných vln elektrických podmínce (II-91). Položíme otázku, za jakých okolností bude některá z těchto podmínek splněna i pro  $I = 0$ . Při podrobnějším rozboru zjistíme, že to bude jen tehdy, budeme-li vlny TEM považovat za zvláštní případ vln TM s osově souměrným průběhem, kdy  $n = 0$ . V tomto případě bude rovnice (II-81) vyjádřena takto:

$$J_0(Ir_0) N_0'(Ir_0) - J_0'(Ir_0) N_0(Ir_0) = 0$$

Tato rovnice bude splněna i pro  $\Gamma = 0$ . Dílčí vlnová rovnice pro funkci  $T_1$  přejde pak v Laplaceovu rovnici

$$\Delta T_1 = 0$$

Na základě výrazu (II-58) bude mít Laplaceova rovnice tvar

$$\frac{1}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} = 0$$

U této rovnice budeme moci splnit okrajové podmínky, t. j. že vnější i vnitřní plášť předstávají ekvipotenciální plochu, jen tehdy, bude-li pole osově souměrné, t. j. nebude-li závislet na souřadnici  $\varphi$ . V tomto případě přejde předcházející rovnice na tvar

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = 0$$

Řešení této diferenciální rovnice je

$$R = C_1 \ln r + C_2$$

Známe-li příčnou funkci, určíme Hertzův vektor pro nekonečně dlouhé vedení

$$\Pi_z^e = (C_1 \ln r + C_2) e^{-jkz} \quad (\text{II-100})$$

Známe-li Hertzův vektor, určíme intenzitu magnetického pole podle rovnice (I-35) a intenzitu elektrického pole podle rovnice (I-33). Potenciál pole je dán vztahem (viz čl. 1)

$$V = \text{div} \Pi_z^e$$

Dosadíme-li za  $\Pi_z^e$  výraz (II-100), je

$$V = -jk(C_1 \ln r + C_2) e^{jkz}$$

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek. Předpokládáme, že vnitřní vodič má potenciál  $V_0$  a vnější vodič potenciál nulový. Má-li vnější vodič poloměr  $R_0$  a vnitřní vodič poloměr  $r_0$ , platí pro vnější plášť

$$C_1 \ln R_0 + C_2 = 0$$

Z toho

$$C_2 = -C_1 \ln R_0$$

Potom

$$V = -jkC_1 \ln \frac{r}{R_0} e^{-jkz}$$

Potenciál na vnitřním plášti je

$$V_0 = -jkC_1 \ln \frac{r_0}{R_0} e^{-jkz} \quad (\text{II-101})$$

Intenzita magnetického pole je dána vztahem (I-35)

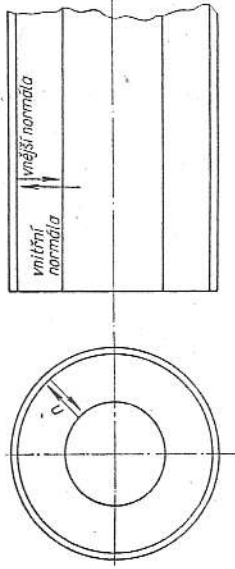
$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot} \Pi_z^e$$

Protože Hertzův vektor nezávisí na souřadnici  $\varphi$ , bude mít intenzita magnetického pole jen složku ve směru  $\varphi$ , a to

$$H_\varphi = -(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r} = -(\sigma + j\omega\epsilon) C_1 \frac{1}{r} e^{-jkz} \quad (\text{II-102})$$

Známe-li intenzitu magnetického pole, lze určit průběh proudu ve vnějším a vnitřním vodiči. Celkový proud ve vnějším plášti je dán známým výrazem

$$I_e = \oint (\mathbf{H} \, d\mathbf{s})$$



Obr. 15. Orientace normály v sousém vlnovodu.

V našem případě

$$I_{e1} = \oint H_\varphi R_0 \, d\varphi$$

Dosadíme-li za  $H_\varphi$  výraz z rovnice (II-102), je

$$I_{e1} = r - (\sigma + j\omega\epsilon) 2\pi C_1 e^{-jkz} \quad (\text{II-103})$$

Proud procházející vnitřním vodičem

$$I_{e2} = -\oint H_\varphi r_0 \, d\varphi = (\sigma + j\omega\epsilon) 2\pi C_1 e^{-jkz} \quad (\text{II-104})$$

V tomto křivkovém integrálu je záporné znaménko proto, že normála vnitřního vodiče má opačný směr než normála vnějšího vodiče (obr. 15).

Intenzitu elektrického pole určíme z Hertzova vektoru podle vztahu (I-33)

$$\mathbf{E} = \text{grad} \text{div} \Pi_z^e$$

Protože  $\Pi_z^e$  není funkcí úhlové souřadnice, bude mít intenzita elektrického pole jen složku ve směru poloměru. Bude tedy

$$E_r = -jkC_1 \frac{1}{r} e^{-jkz} \quad (\text{II-105})$$

Vzorce (II-101), (II-102), (II-103) a (II-104) určují všechny důležité veličiny sousého vodiče. Zbývá nám určit ještě velikost charakteristické impedance šíření a vlnového odporu.

Charakteristická impedance šíření je dána poměrem příčné složky intenzity elektrického pole a příčné složky intenzity magnetického pole

$$Z = \frac{E_r}{H_\varphi}$$

Dosadíme-li za  $E_r$  a  $H_\varphi$  výrazy odvozené v rovnicích (II-105) a (II-102), je charakteristická impedance šíření  $Z$  dána vztahem

$$Z = \frac{jk}{\sigma + j\omega\epsilon}$$





## 17. Obdélníkový vlnovod

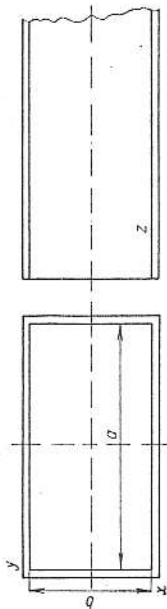
17.1 Obdélníkový vlnovod s příčnou vlnou magnetickou

Díleč vlnovou rovnici

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$$

řešíme v tomto případě v pravouhlych souřadnicích. Budeme předpokládat, že funkce  $T_1$  je dána součinem funkcí  $X$  a  $Y$ ; při tom je funkce  $X$  závislá jen na souřadnici  $x$  a funkce  $Y$  jen na souřadnici  $y$ . Je tedy

$$T_1 = XY$$



Obr. 16. Příčný a podélný řez obdélníkovým vlnovodem.

Dosaďme-li tento výraz do vlnové rovnice, dostaneme po oddělení proměnných výraz

$$1 \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2 Y}{dy^2} + \Gamma^2 = 0 \quad (\text{II-110.1})$$

Levá strana této rovnice je rozdělena na tři členy, z nichž první je jen funkcí  $x$ , druhý jen funkcí  $y$  a třetí je konstanta. Tato rovnice bude identicky splněna jen tehdy, bude-li se každý člen levé strany rovnat konstantě. Můžeme tedy psát

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\xi^2 \quad (\text{II-111})$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\eta^2 \quad (\text{II-112})$$

Konstanty  $\xi^2, \eta^2$  mohou mít buď kladné, nebo záporné znaménko. Určíme, kterého z těchto znamének je třeba použít, abychom dostali možné fyzikální řešení. Všimneme si nejdříve případu, kdy bude znaménko konstant  $\xi^2$  a  $\eta^2$  kladné. V tomto případě budou mít diferenciální rovnice (II-111) a (II-112) řešení

$$X = C_1 e^{\xi x} + C_2 e^{-\xi x}$$

$$Y = C_3 e^{\eta y} + C_4 e^{-\eta y}$$

Funkce  $T_1$ , o které platí, že  $T_1 = XY$ , bude mít tvar

$$T_1 = (C_1 e^{\xi x} + C_2 e^{-\xi x})(C_3 e^{\eta y} + C_4 e^{-\eta y})$$

Konstanty  $C_1, C_2, C_3, C_4, \xi, \eta$  určíme z okrajové podmínky

$$T_1 = 0 \quad (\text{na plášt})$$

Okraj pláště obdélníkového vlnovodu je dán rovnicemi

$$x = a, \quad x = 0, \quad y = b, \quad y = 0$$

Abyste byla splněna okrajová podmínka na straně obdélníka, jejíž rovnice je  $x = 0$ , při jakékoli velikosti souřadnice  $y$ , musí platit

$$C_1 + C_2 = 0$$

Podobně platí pro stranu  $x = a$

$$C_1 e^{\xi a} + C_2 e^{-\xi a} = 0$$

Řešením těchto dvou rovnic dostaneme tyto vztahy pro  $C_1, C_2$ ,  $\xi$ :

$$C_1 = -C_2$$

$$e^{\xi a} = e^{-\xi a}$$

Poslední vztah lze splnit jen tehdy, je-li  $\xi = 0$ . Totéž by platilo o konstantě  $\eta$ . Avšak za těchto okolností by byla funkce  $T_1$  pro jakoukoli hodnotu  $x$  a  $y$  nulová. Zvolíme-li tedy konstanty  $\xi^2, \eta^2$  kladné, dospějeme k triviálnímu řešení.

Zvolme proto konstanty  $\xi^2, \eta^2$  záporné. Potom platí

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\xi^2 \quad (\text{II-111.1})$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\eta^2 \quad (\text{II-112.1})$$

Výsledné řešení těchto diferenciálních rovnic je toto:

$$X = C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \eta x$$

$$Y = C_3 \sin \xi y + C_4 \cos \eta y$$

a funkce příčných souřadnic  $T_1$

$$T_1 = XY = (C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x)(C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y)$$

Se zřeteltem na okrajové podmínky musí být tato funkce na plášt vlnovodu nulová. Aby zmizela funkce  $T_1$  při hodnotě  $x = 0$  při jakékoli hodnotě souřadnice  $y$ , musí být  $C_2 = 0$ , neboť  $\cos$  nulového argumentu se rovná jedné. Kdyby konstanta  $C_2$  nebyla nulová, nemohla by se splnit okrajová podmínka na straně s rovnicí  $y = 0$ . Je tedy po vyloučení konstant  $C_2$  a  $C_4$

$$T_1 = C \sin \xi x \sin \eta y$$

kde  $C$  nahrazuje součin  $C_1 C_3$ .

Funkce  $T_1$  musí být nulová také na stranách s rovnicemi  $x = a$  a  $y = b$ . Aby byly při  $x = a$  funkce  $T_1$  nulová pro jakoukoli hodnotu  $y$ , musí být

$$\sin \xi a = 0$$

To nastane tehdy, je-li  $\xi a = \pm m\pi$ , kde  $m$  je celé číslo. V dalším textu budeme uvažovat jen kladné znaménko, neboť při kvalitativním rozboru bychom zjistili, že by se jednotlivé složky pole lišily při záporném  $m$  jen znaménkem, nikoli geometrickým uspořádáním.

Potom

$$\xi = \frac{m\pi}{a}$$

Stejně musí pro  $y = b$  a jakoukoli souřadnici  $x$  platit

$$\sin \eta b = 0$$

Z toho

$$\eta b = \pm n\pi$$

kde  $n$  je celé číslo. Budeme uvažovat opět jen kladné znaménko. Pak

$$\eta = \frac{n\pi}{b}$$

Potom

$$T = C \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

a Hertzův vektor (pro nekonečně dlouhý vlnovod)

$$\vec{H}_z = C \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \quad (\text{II-113})$$

Z rovnice (II-110.1) použitím rovnic (I-111.1) a (II-112.1) určíme vztah mezi konstantami  $\xi$ ,  $\eta$  a  $\Gamma$  vzorcem

$$\Gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

Dosadíme-li za  $\xi$  a  $\eta$  odvozené výrazy, bude

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (\text{II-114})$$

Na základě rovnice (II-7) platí pro konstantu přenosu

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (\text{II-115})$$

Pro mezní kmitočet jsme odvodili vzorec (II-12). Upravíme-li tento vzorec v soulase s rovnicí (II-114), bude

$$\omega_{\text{m}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

a z toho mezní délka vlny

$$\lambda_{\text{m}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}} \quad (\text{II-116})$$

Známe-li prostorové uspořádání Hertzova vektoru, určíme jednotlivé složky intenzity elektrického a magnetického pole podle rovnic (I-33) a (I-35)

$$E_z = \Gamma^2 \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-117})$$

$$E_x = j\gamma \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-118})$$

$$E_y = j\gamma \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-119})$$

$$H_x = (\sigma + j\omega\epsilon) \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-120})$$

$$H_y = -(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}) \quad (\text{II-121})$$

Z výsledku je zřejmé, že i při obdélníkovém vlnovodu má vlnová rovnice  $\omega^2$  řešení. Každé toto řešení představuje uspořádání pole jednotlivého vidu příčné magnetické vlny.

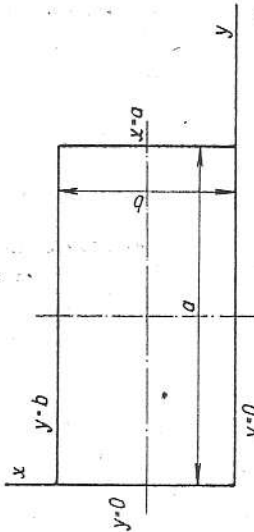
Měrný útlum vlnovodu obdélníkového průřezu s příčnou magnetickou vlnou se určí podle výrazu (II-51). Za funkci  $T_1$  dosadíme v tomto vzorci odvozený výraz pro obdélníkový vlnovod

$$T_1 = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (II-51), zjistíme, že měrný útlum je

$$\beta = \frac{2Q_1(m^2 b^2 + n^2 a^2)}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} ab(m^2 b^2 + n^2 a^2)}} \quad (\text{II-122})$$

Obr. 17. Rozměry průřezu obdélníkového vlnovodu.



### 17.2 Obdélníkový vlnovod s příčnou vlnou elektrickou

Abychom určili uspořádání Hertzova vektoru u obdélníkového vlnovodu, musíme opět provést řešení vlnové rovnice

$$\Delta T_1 = \Gamma^2 T_1$$

s okrajovou podmínkou. Tato podmínka je u příčných elektrických vln taková, že na plášti vlnovodu je

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$$

Řešení vlnové rovnice pro funkci  $T_1$  provedeme opět v pravotočivých souřadnicích. Výsledné uspořádání funkce  $T_1$  je potom stejné, jako u příčných vln magnetických, a to

$$T_1 = (C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x)(C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y)$$

Konstanty  $C_1, C_2, C_3, C_4$  a  $\eta$  určíme z okrajové podmínky.

Na stranách  $x = 0$  a  $x = a$  je derivace funkce  $T_1$  podle normály dána derivací podle souřadnice  $x$ , kdežto na stranách  $y = 0$  a  $y = b$  je dána derivací podle  $y$ .

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \xi(C_1 \cos \xi x - C_2 \sin \xi x)(C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \eta(C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x)(C_3 \cos \eta y - C_4 \sin \eta y)$$

Pro  $x = 0$  musí být  $\frac{\partial T_1}{\partial x}$  pro jakékoli  $y$  nulové. Z toho plyne, že to lze splnit jen tehdy,

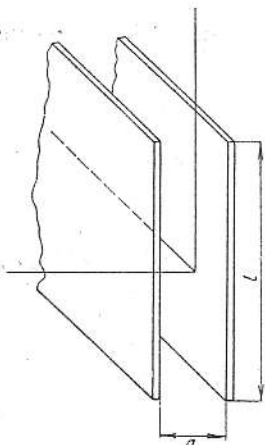
když  $C_1 = 0$ . Z týchž důvodů musí být při  $y = 0$ ,  $C_3 = 0$ . Aby byla při  $x = a$  derivace

$\frac{\partial T_1}{\partial x}$  při každém  $y$  nulová, musí být

$$\sin \xi a = 0$$

### 18. Šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma rovinnými deskami

V této části si všimneme vlastností šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma rovinnými deskami. Při podrobném rozboru bychom zjistili, že při tomto zvláštním případě obecného vlnovodu existuje řada vlastních řešení, řada jednotlivých vidů. Nebudeme podrobně popisovat vyšší vidy. Všimneme si jen základního vidu mezi dvěma rovinnými deskami, t. j. vidu TEM. Zjistíme, že této vlně přísluší takové geometrické uspořádání pole, při němž jednotlivé složky nezávisí na souřadnici  $x$ .



Obr. 18. Páskové vedení.

Je-li vlnovod na stranách, příslušných rozměru  $b$ , neomezen, přejde vlnovod ve dvě rovinné rovnoběžné desky. Uspořádání elektromagnetického pole mezi dvěma rovinnými deskami určíme řešením vlnové rovnice s příslušnými okrajovými podmínkami. Na rozdíl od vlnovodu se zde změni okrajová podmínka na boční otevřené stěně vedení. Aby nastalo šíření elektromagnetické vlny v podélném směru, nesmí nastat vyzařování v postranním směru, neboť elektromagnetická vlna šířící se v podélném směru by se velmi tlumila. Okrajová podmínka na postranních stěnách vyplývá tedy z toho, že složky Umov-Poyntingova vektoru, který způsobuje vyzařování v postranním směru, musí být na okraji (postranním) nulové. V další části budeme uvažovat jen ten případ, kdy složky pole jsou závislé na souřadnici  $y$ , nikoli na souřadnici  $x$ .

V tomto případě nemohou vzniknout příčné elektrické vlny. Složka intenzity magnetického pole ve směru osy  $z$  vyvolává v deskách proud, tekoucí ve směru  $x$ . Protože proud je přímo úměrný složce  $H_z$ , která v tomto případě nezávisí na souřadnici  $x$ , byl by i proud nezávislý na souřadnici  $x$ , tedy konstantní se zřetelem na rozměr  $x$ . Avšak takový proud ve skutečnosti nemůže vzniknout, neboť by nebyl na hranách desk uzavřen. Průto pole, které by bylo nezávislé na souřadnici  $x$ , přísluší u rovnoběžných desek jen příčným vlnám magnetickým.

Díčí vlnová rovnice

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$$

bude v tomto případě jen funkcí souřadnice  $y$ . Proto bude její řešení

$$T_1 = C_1 \sin \Gamma y + C_2 \cos \Gamma y$$

Protože musí být splněna okrajová podmínka  $T_1 = 0$  pro  $y = 0$  a  $y = b$ , plyne z toho, že pro libovolné  $b$  musí být

$$\sin \Gamma b = 0$$

a z toho

$$\Gamma = \frac{n\pi}{b}$$

Proto

$$T = C \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{a} \quad H_z = C \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\Gamma z} \quad (\text{II-130})$$

To nastane tehdy, je-li  $\xi = \frac{n\pi}{a}$ , kde  $m$  je celé číslo. Aby  $\frac{\partial T_1}{\partial y} = 0$  při  $y = b$ , musí být

$$\sin \eta b = 0$$

z čehož

$$\eta = \frac{m\pi}{b}$$

Na základě těchto výsledků bude

$$T_1 = \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (\text{II-123})$$

a Hertzův vektor

$$H_z = \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-123.1})$$

Známe-li Hertzův vektor, určíme jednotlivé složky pole podle rovnic (I-34) a (I-36)

$$H_x = \Gamma^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-124})$$

$$H_y = -i\gamma \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-125})$$

$$H_z = -i\gamma \frac{m\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-126})$$

$$E_x = j\omega\mu \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-127})$$

$$E_y = -j\omega\mu \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-128})$$

Měrný útlum určíme z výrazu (II-57), dosadíme-li za funkci  $T_1$  výraz (II-123). Potom bude

$$\beta = \frac{2\epsilon_0 \epsilon}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{b}{\epsilon}} \left[ \frac{\frac{b}{a} m^2 + n^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \sqrt{1 - \frac{\gamma_{mn}^2}{\epsilon}} + \frac{\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 \gamma_{mn}^2}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_{mn}^2}{\epsilon}}} \right] \dots; \quad m \neq 0, n \neq 0 \quad (\text{II-129})$$

$$\beta = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \left( \frac{1}{b} + \frac{2}{a} \gamma_{m0}^2 \right) \left( 1 - \frac{\gamma_{m0}^2}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \dots; \quad m \neq 0, n = 0$$

$$\beta = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \gamma_{0n}^2 \right) \left( 1 - \frac{\gamma_{0n}^2}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \dots; \quad m = 0, n \neq 0$$

Vyjádříme-li složky pole pomocí Hertzova vektoru  $\Pi_z$ , dostaneme

$$E_x = \Gamma^2 \sin \frac{\pi x}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

$$E_y = i\gamma \frac{\pi \epsilon}{b} \cos \frac{\pi x}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z})$$

$$H_x = (\sigma + j\omega\epsilon) \frac{\pi \epsilon}{b} \cos \frac{\pi x}{b} y (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

Všimneme si nyní zvláštního případu šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma rovinnými deskami, t. j. případu, kdy intenzita elektrického pole má jen směr osy  $y$  a její velikost nezávisí na souřadnici  $y$ . Jak uvidíme, přísluší tento případ dílčí vlnové rovnici, kde  $\Gamma = 0$ . Potom

$$\Delta T_1 = 0$$

Protože jde o rovinné desky, kdy funkce  $T_1$  nezávisí na proměnné  $x$ , je

$$\frac{d^2 T_1}{dy^2} = 0$$

Integraci této diferenciální rovnice dostaneme

$$T_1 = C_1 y + C_2$$

a Hertzův vektor

$$\Pi_z = (C_1 y + C_2)(C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

Jednotlivé složky pole budou potom dány vztahy

$$E_y = jk(C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-131})$$

$$H_x = (\sigma + j\omega\epsilon)(C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-132})$$

$$E_x = 0; \quad H_y = 0; \quad E_z = 0$$

Tím jsme dokázali, že elektromagnetická vlna mezi dvěma deskami, definovaná Laplaceovou diferenciální rovnicí, je příčná vlna elektricko-magnetická (TEM). Konstanta přenosu je stejná, jako konstanta přenosu ve volném prostoru

$$\gamma = k$$

neboť

$$\Gamma = 0$$

Zbývá nám ještě určit charakteristickou impedanci šíření a vlnový odpor dvou rovinných desek. Z rovnic (II-131) a (II-132) vyplývá, že charakteristická impedance je

$$Z = \frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Je tedy charakteristická impedance stejná jako ve volném prostoru.

Abychom mohli určit vlnový odpor, musíme znát napětí mezi deskami a proud procházející deskami.

Napětí mezi deskami bude dáno krývkovým integrálem skalárního součinu intenzity

elektrického pole a elementu křivky. Integrujeme v našem případě po přímočaré spojnici bodů A a B. Je tedy

$$U = \int_A^B (E \, ds) = \int_0^d E \, dy$$

kde  $d$  je vzdálenost obou desek.

Dosadíme-li za intenzitu elektrického pole výraz (II-131), dostaneme u nekonečně dlouhého vlnovodu

$$U = -jkC_2 e^{-i\gamma z} d$$

Proud procházející deskou je dán cirkulací intenzity magnetického pole po křivce, znázorněné na obr. 19.

Protože intenzita magnetického pole je ve směru  $x$  konstantní, je

$$I_c = \pm H_x l = \pm j\omega\epsilon C_2 e^{-i\gamma z} l$$

kde  $l$  je šířka destičky.

Horní znaménko přísluší proudu tekoucímu v horní desce a dolní znaménko proudu tekoucímu v dolní desce. Vlnový odpor bude dán poměrem napětí a proudu nekonečného vlnovodu

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{jkC_2 e^{-i\gamma z} d}{j\omega\epsilon C_2 e^{-i\gamma z} l} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d}{l} \quad (\text{II-133})$$

## 19. Geometrická představa šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma deskami

V této části dokážeme, že elektromagnetickou vlnu, šířící se mezi dvěma deskami a ve vlnovodu vůbec, lze si představit jako superpozici rovinných vln, šířících se pod určitým úhlem k ose  $z$ . Každému vidu elektromagnetické vlny přísluší určitý úhel.

Pro příčnou vlnu magnetickou jsme odvodili pro Hertzův vektor výraz

$$\Pi_z = C \sin \frac{m\pi}{b} y e^{-i\gamma z}$$

kde  $m$  je celé číslo (odpovídá původně označenému číslu  $n$ ).

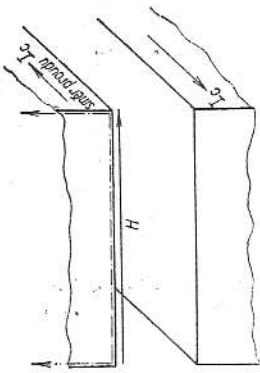
Funkci  $\sin \frac{m\pi}{b} y$  vyjádříme pomocí exponenciálních funkcí. Při tom

$$\sin \frac{m\pi}{b} y = \frac{1}{2j} \left( e^{j\frac{m\pi}{b} y} - e^{-j\frac{m\pi}{b} y} \right)$$

Hertzův vektor je pak

$$\Pi_z = C \frac{1}{2j} \left( e^{j\frac{m\pi}{b} y} - e^{-j\frac{m\pi}{b} y} \right) e^{-i\gamma z} = \frac{C}{2j} \left( e^{j\left(\frac{m\pi}{b} y - \gamma z\right)} - e^{-j\left(\frac{m\pi}{b} y + \gamma z\right)} \right) \quad (\text{II-134})$$

Každý výraz v závorce charakterizuje rovinnou vlnu šířící se určitým směrem.

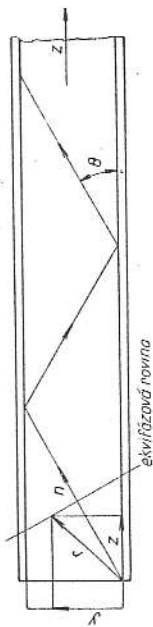


Obr. 19. Orientace proudu v páskovém vedení.

Všimneme si nejdříve první z nich. Tato vlna je totožná s rovinnou vlnou, šířící se určitým směrem. Označme předpokládaný směr jednotkovým vektorem  $n$ . Potom

$$e^{i\left(\frac{m\pi}{b}y - \gamma z\right)} = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}n)}$$

kde  $\mathbf{r}$  je vektor, určující polohu místa (obr. 20).



Obr. 20. Šíření dílčí rovinné vlny v obdélníkovém vlnovodu.

Vektor  $\mathbf{r}$  rozložíme do směrů  $\mathbf{z}$  a  $\mathbf{y}$ . Potom je

$$\mathbf{r} = y\mathbf{y} + z\mathbf{z}$$

kde  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{z}$  jsou jednotkové vektory ve směru os  $y$  a  $z$ . Potom

$$(\mathbf{r}n) = y(\mathbf{y}n) + z(\mathbf{z}n) = y \sin \theta + z \cos \theta$$

kde  $\theta$  je úhel sevřený jednotkovými vektory  $\mathbf{z}$  a  $\mathbf{n}$ . Na základě těchto vztahů musí platit tato identita:

$$e^{i\left(\frac{m\pi}{b}y - \gamma z\right)} = e^{i(k_y \sin \theta + k_z \cos \theta)}$$

Uvedená identita bude splněna tehdy, bude-li

$$\frac{m\pi}{b} = k \sin \theta \quad \text{a} \quad -\gamma = k \cos \theta$$

Z toho

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{m\pi}{b\gamma}$$

Při tom konstanta přenosu

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

Vyjádříme-li konstantu přenosu pomocí mezního kmitočtu, je

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}$$

Potom

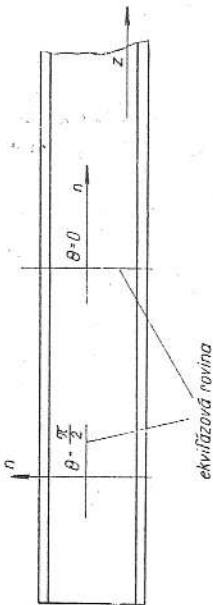
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 - 1}} \quad (\text{II-135})$$

Z tohoto výrazu vyplývá, že se úhel, který je sevřen směrem šíření dílčí rovinné vlny a osou vlnovodu  $z$ , mění s kmitočtem. Je-li použitý kmitočet roven meznímu kmitočtu, potom je

$$\operatorname{tg} \theta \rightarrow -\infty \quad \text{a} \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

V tomto případě se rovinná vlna šíří směrem kolmým na osu  $z$ , a proto se energie vlnovodu

vodem nešíří. Jestliže  $\omega \rightarrow \infty$ , potom  $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$  a  $\theta \rightarrow 0$ . Dílčí rovinná vlna se pak šíří směrem  $z$ .



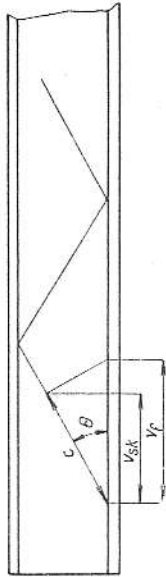
Obr. 21. Zvláštní případy šíření rovinné elektromagnetické vlny v páskovém vedení.

Z obrázku je vidět, že se při určitém kmitočtu a typu vlny dílčí vlna šíří pod určitým úhlem  $\theta$ . Při tom ekvifázová rovina se šíří ve směru jednotkového vektoru  $\mathbf{n}$  rychlostí světla. Budeme-li zkoumat, jakou rychlostí se šíří průsečík ekvifázové roviny s osou  $z$ , zjistíme, že se šíří ve směru  $z$  rychlostí

$$v_l = c \frac{1}{\cos \theta}$$

To znamená, že se šíří rychlostí větší než rychlost světla. Pro případ, kdy je úhel  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , je fázová rychlost šíření nekonečná. Při  $\theta = 0$  (kmitočty velmi vysoké), je, jak je vidět z obr. 21, fázová rychlost šíření rovna rychlosti světla.

Přenos energie vlnovodem se zprostředkuje rovinnou vlnou rychlostí světla, ovšem pod určitým úhlem k ose vlnovodu.



Obr. 22. Znárodnění fázové a skupinové rychlosti ve vlnovodu.

Tato elektromagnetická rovinná vlna se tedy šíří křikou čarou rychlostí světla, a proto se energie šíří ve směru osy  $z$  rychlostí, rovnající se průmětu rychlosti světla na osu  $z$ , tedy

$$v_{sk} = c \cos \theta$$

Rychlost, jíž se šíří energie elektromagnetické vlny, nazývá se skupinovou rychlostí. Vztah mezi fázovou rychlostí, skupinovou rychlostí a rychlostí světla lze určit z trojúhelníku ABC (obr. 22), kde podle Euklidovy věty platí

$$c^2 = v_l v_{sk} \quad (\text{II-136})$$

Tento výraz platí pro každý vlnovod. Určíme z něho skupinovou rychlost

$$v_{sk} = \frac{c^2}{v_l} \quad (\text{II-137})$$

Z toho vyplývá, že skupinová rychlost je menší než rychlost světla.

Dosud jsme se zabývali rovinnou vlnou, charakterizovanou prvním členem pravé strany rovnice (II-134). Druhým členem této rovnice je také určena rovinná vlna, šířící se směrem, který je souměrný ke směru první rovinné vlny vzhledem k ose  $z$ . Výsledná vlna Hertzova vektoru je potom dána superposicí uvedených dvou dílčích rovinných vln.

### 20. Rychlost šíření energie ve vlnovodu

Přenesený výkon je určen elektromagnetickou energií, která prochází danou plochou  $S$  za vteřinu. Je tedy

$$P = \frac{1}{2} \int_S ([EH^*] \cdot n) \, dS$$

kde  $P$  je přenesený výkon.

Označíme-li rychlost šíření elektromagnetické energie  $v_{ak}$ , znamená výraz  $\frac{1}{v_{ak}}$  dobu, za kterou postoupí elektromagnetická energie o jednotku délky (v našem případě o 1 m). Za tuto dobu se nahromadí elektromagnetická energie v objemu vytvořeném válcem jednotkové délky se základnou  $S$ . Protože přenesený výkon určuje elektromagnetickou energii procházející plochou  $S$  za vteřinu, bude energie procházející plochou  $S$  za dobu  $\frac{1}{v_{ak}}$  dána výrazem

$$W = |P| \frac{1}{v_{ak}}$$

kde  $W$  je energie elektromagnetického pole ve válci jednotkové délky.

Z této podmínky plyne

$$v_{ak} = \frac{|P|}{W} \tag{II-138}$$

Určíme nejdříve rychlost elektromagnetické energie u příčné magnetické vlny. Jak jsme již odvodili, platí u tohoto vidu vlnění pro intenzitu elektrického a magnetického pole vztahy

$$E = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e \tag{II-139}$$

$$H = j\omega \epsilon \text{rot } \Pi_z^e \tag{II-140}$$

Elektromagnetická energie je dána součtem elektrické a magnetické energie. Je tedy

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{4} \int_V \epsilon (EE^*) \, dV + \frac{1}{4} \int_V \mu (HH^*) \, dV$$

V našem případě je objem  $V$  vytvořen válcem, jehož průřez se rovná průřezu vlnovodu a jehož délka se rovná jedné. Proto

$$W = \frac{1}{4} \int_{s_0}^1 \int_S \epsilon (EE^*) \, dS \, dz + \frac{1}{4} \int_{s_0}^1 \int_S \mu (HH^*) \, dS \, dz$$

Proto rychlost energie  $v_{ak}$  určíme výrazem

$$v_{ak} = \frac{1}{2 \int_S ([EH^*] \cdot n) \, dS} \frac{1}{\int_{s_0}^1 \int_S \epsilon (EE^*) \, dS \, dz + \int_{s_0}^1 \int_S \mu (HH^*) \, dS \, dz} \tag{II-141}$$

Za intenzitu elektrického a magnetického pole dosadíme příslušné výrazy. Intenzita elektrického pole u příčné magnetické vlny má podélnou i příčnou složku. Proto lze psát

$$E = E_z + E_t$$

kde  $E_z$  je složka ve směru osy  $z$

$E_t$  složka kolmá na směr  $z$ .

Protože  $\Pi_z^e = T_1 T_2$  při čemž u nekonečně dlouhého vlnovodu  $T_2 = e^{j\gamma z}$ , plyne z rovnice (I-33) a (I-35)

$$E_z = \Gamma^2 \Pi_z^e = \Gamma^2 T_1 T_2$$

$$E_t = \text{grad}_t \text{div } T_1 T_2 = j\gamma T_2 \text{grad}_t T_1$$

$$H = H_t = j\omega \epsilon \text{rot}_t (\Pi_z^e) = j\omega \epsilon [\text{grad}_t \Pi_z^e] = j\omega \epsilon T_2 [\text{grad}_t T_1]$$

Potom

$$(EE^*) = \Gamma^4 T_1^* T_2 T_2^* + \gamma^2 T_2^* T_2^* |\text{grad}_t T_1|^2$$

neboť funkce  $T_1$  je vždy reálná (charakterizuje geometrické uspořádání pole v příčném směru). Uvedli jsme již, že  $T_2 = e^{j\gamma z}$ .

Proto  $T_2 T_2^* = 1$  a potom

$$(EE^*) = \Gamma^4 T_1^2 + \gamma^2 |\text{grad}_t T_1|^2$$

Obdobně platí pro intenzitu magnetického pole

$$(HH^*) = \omega^2 \epsilon^2 |\text{grad}_t T_1|^2$$

Ve výrazu pro Umov-Poyntingův vektor, jehož směr má směr šíření elektromagnetické vlny, u nás směr osy vlnovodu, uplatňují se jen příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole. Příčnou složku intenzity magnetického pole vyjádříme pomocí příčné složky intenzity elektrického pole podle (II-26). Potom

$$E_t = ZH_t \quad \text{a} \quad ([EH^*] \cdot n) = E_t H_t^* = ZH_t H_t^*$$

Dosadíme-li za  $H_t$  příslušný výraz, je

$$E_t H_t^* = Z \omega^2 \epsilon_0^2 |\text{grad } T_1|^2$$

Uvažíme-li všechny tyto odvozené výrazy, dostaneme dosazením do rovnice (II-141) pro rychlost šíření energie vztah

$$v_{ak} = \frac{2Z\omega^2 \epsilon_0^2 \int_S |\text{grad } T_1|^2 \, dS}{\Gamma^4 \epsilon_0 \int_S T_1^2 \, dS + \gamma^2 \epsilon_0 \int_S |\text{grad } T_1|^2 \, dS + \omega^2 \epsilon_0^2 \mu_0 \int_S |\text{grad } T_1|^2 \, dS}$$

Podle rovnice (II-46.1) dostaneme

$$\int_S |\text{grad } T_1|^2 \, dS = \Gamma^2 \int_S T_1^2 \, dS$$

Proto

$$v_{ak} = \frac{2Z\omega^2 \epsilon_0^2 \Gamma^2}{\Gamma^4 \epsilon_0 + \Gamma^2 \gamma^2 \epsilon_0 + \omega^2 \epsilon_0^2 \mu_0 \Gamma^2} = \frac{2Z\omega^2 \epsilon_0}{\Gamma^2 + \gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0}$$

Na základě rovnice (II-18) platí

$$\Gamma^2 + \gamma^2 = k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

Potom

$$v_{ak} = \frac{2Z\omega^2 \epsilon_0}{2\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} = \frac{Z}{\mu_0}$$

Charakteristická impedance u příčné magnetické vlny je určena vztahem (II-23). Proto

$$\eta_{\text{sk}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{1 - \beta^2} = c \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{II-142})$$

Z tohoto výrazu vyplývá, že rychlost šíření elektromagnetické energie ve vlnovodu je menší než rychlost světla. Tato rychlost se též nazývá skupinovou rychlostí. Porovnáme-li vztah (II-142) se vztahem (II-137), v němž bychom dosadili za fázovou rychlost výraz (II-19), vidíme, že se oba vztahy shodují.

Obdobně bychom odvodili rychlost šíření elektromagnetické energie ve vlnovodu s příčnou elektrickou vlnou. Zjistili bychom, že také pro tuto rychlost platí vztah (II-142).

## 21. Radiální vedení

V této části pojednáme o šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma deskami, uspořádanými podle obr. 23.

Desky mají tvar mezikruží. Vnitřní poloměr mezikruží budiž  $r_0$ . Vyšetříme podrobněji případ, kdy je směr intenzity elektrického pole kolmý k rovině desek a kdy je elektrické pole nezávislé na vzdálenosti obou desek. Prakticky nejdůležitější je vidět vlnění, u něhož je magnetické a elektrické pole osově souměrné, neboť elektromagnetická vlna v radiálním vedení se nejčastěji vybuzuje zdrojem s osovou souměrností. Poznáme, že pole, které by mělo tyto vlastnosti, bude příčné elektro-magnetické.

Protože jde o kruhový tvar desek, budeme hledat řešení Maxwellových rovnic ve válcových souřadnicích. Vzhledem k tomu, že zkoumáme pole osově souměrné, bude intenzita elektrického a magnetického pole jen funkcí poloměru  $r$ .

Elektromagnetické pole s uvedenými vlastnostmi bude zvláštním případem příčné magnetické vlny kruhového vlnovodu.

Hertzův vektor příčné magnetické vlny, kterým vyjádříme všechny složky pole, vyhovuje vlnové rovnici, jež má ve válcových souřadnicích tvar

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0$$

Definované elektromagnetické pole nezávisí ani na souřadnici  $\varphi$ , ani na souřadnici  $z$ . Proto se vlnová rovnice změní takto:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} + k^2 \Pi_z = 0$$

Řešením této rovnice jsou partikulární integrály s Besselovými funkcemi

$$\Pi_z = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr) \quad (\text{II-143})$$

Jednotlivé složky pole určíme z Hertzova vektoru podle vztahů (I-33) a (I-35). Protože  $\Pi_z$  nezávisí na  $z$ , bude ve vztahu (I-33)  $\text{div } \Pi_z = 0$ , a proto

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_z = k^2 \Pi_z = k^2 (C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)) \quad (\text{II-144})$$

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_\varphi = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \Pi_z = (\sigma + j\omega\epsilon) k [C_1 J_0'(kr) + C_2 N_0'(kr)] \quad (\text{II-145})$$

Ze vztahů (II-144) a (II-145) vyplývá, že intenzita elektrického pole má jen směr osy  $z$  a intenzita magnetického pole má směr jednotkového vektoru  $\varphi$ . Jiné složky v tomto případě nevzniknou. Směr šíření je kolmý k vektoru intenzity elektrického a magnetického pole. V daném případě je to směr jednotkového vektoru  $r$ . Energie se tedy šíří radiálním směrem.



Obr. 24. Rozměry radiálního vedení.

Protože intenzita elektrického a magnetického pole nemá ve směru šíření elektromagnetické energie složku, příslušný tento způsob uspořádání elektromagnetického pole příčnému elektricko-magnetickému vidu (vidu TEM).

Určíme dále průběh proudu procházejícího deskami a průběh napětí mezi deskami ve směru poloměru. Dokážeme, že závislost proudu a napětí na poloměru  $r$  bude podobná závislosti proudu a napětí u homogenního vedení. Zásadní rozdíl však bude v tom, že radiální vedení bude vedení nehomogenní, že vlnový odpor tohoto vedení bude funkcí poloměru  $r$ .

Průběh napětí a proudu určíme z průběhu intenzity elektrického a magnetického pole. Napětí v obecném místě, daném poloměrem  $r$ , určíme z křivkového integrálu intenzity elektrického pole

$$U = \oint (\mathbf{E} \, ds) = \int_0^d E_z \, dz = E_z d$$

neboť intenzita elektrického pole je ve směru  $z$  konstantní.

Je tedy

$$U = k^2 d [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (\text{II-146})$$

kde  $d$  je vzdálenost mezi oběma deskami.

Proud procházející deskami je dán cirkulací magnetického pole po křivce, znázorněná na obr. 25.

Celkový proud prochází válcovou plochou, jejíž poloměr je  $r$ . Kružnice poloměru  $r$  omezuje tuto válcovou plochu. Podle Stokesovy věty platí

$$\oint (\mathbf{H} \, ds) = \int_S (\text{rot } \mathbf{H} n) \, dS$$

V našem případě je křivka  $c$ , po níž provádíme křivkový integrál, kružnice poloměru  $r$  a plocha  $S$  uvažovaná válcová plocha, umístěná ve vodorovném prostředu. V tomto prostředu platí

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma_r \mathbf{E}$$

V našem případě má normála na válcovou plochu  $S$  směr poloměru  $r$ . Proto

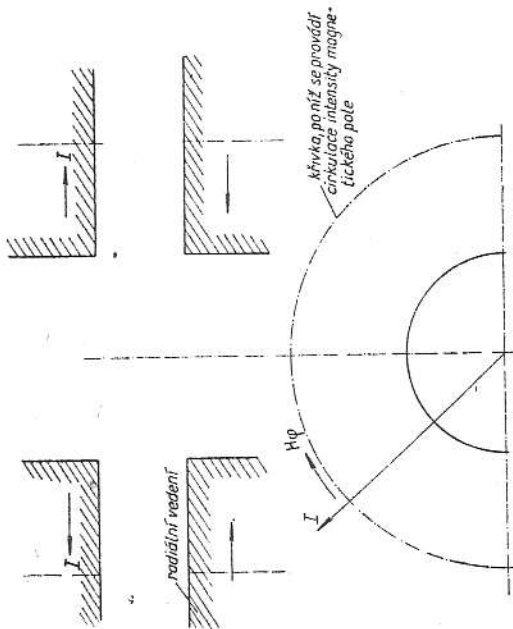
$$\oint (\mathbf{H} \, ds) = \int_S \text{rot } \mathbf{H} \, dS = \int_S \sigma_r E_r \, dS = I_c$$

kde  $I_c$  je celkový proud, vrékající do válcové plochy  $\sigma_r$ , vodivosti kovového pláště.

Protože provádíme cirkulaci po kružnici poloměru  $r$  a intenzita magnetického pole není funkcí  $\varphi$ , je

$$2\pi r H_\varphi = I_c \quad (II-145)$$

$$I_c = 2\pi r(\sigma + j\omega\epsilon_0) k[C_1 J_0'(kr) + C_2 N_0'(kr)] \quad (II-147)$$



Obr. 25. Orientace proudu v radiálním vedení.

Zanedbáme-li vodivost v prostředí mezi dvěma deskami, je

$$I_c = 2\pi r j\omega\epsilon_0 k[C_1 J_0'(kr) + C_2 N_0'(kr)] \quad (II-147.1)$$

Nyní vyjádříme konstanty  $C_1$  a  $C_2$  pomocí výrazu pro napětí a proud na konci vedení. Napětí a proud na konci vedení označíme  $U_k$  a  $I_k$ . Toto napětí a tento proud odpovídají maximálnímu poloměru  $R_0$ . Proto

$$U_k = k^2 d [C_1 J_0(kR_0) + C_2 N_0(kR_0)] \quad (II-148)$$

$$I_k = 2\pi R_0 j\omega\epsilon_0 k [C_1 J_0'(kR_0) + C_2 N_0'(kR_0)] \quad (II-149)$$

Z těchto dvou rovnic určíme konstanty  $C_1$  a  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{U_k N_0'(kR_0) - 2\pi R_0 j\omega\epsilon_0 k I_k N_0(kR_0)}{J_0(kR_0) N_0'(kR_0) - J_0'(kR_0) N_0(kR_0)} \quad (II-150)$$

$$C_2 = \frac{J_0(kR_0) I_k - 2\pi R_0 j\omega\epsilon_0 k I_k J_0'(kR_0)}{J_0(kR_0) N_0'(kR_0) - J_0'(kR_0) N_0(kR_0)} \quad (II-151)$$

Pro derivaci Besselovy a Neumannovy funkce prvního řádu platí

$$J_0'(kR_0) = -J_1(kR_0) \quad \text{a} \quad N_0'(kR_0) = -N_1(kR_0)$$

Dále platí mezi Besselovou a Neumannovou funkcí vztah

$$N_{n-1}(x) J_n(x) - N_n(x) J_{n-1}(x) = \frac{2}{\pi x}$$

Proto jmenovatel vztahu (II-150) a (II-151) upravíme takto:

$$N_0'(kR_0) J_0(kR_0) - N_0(kR_0) J_0'(kR_0) = \frac{2}{\pi k R_0}$$

$$= N_0(kR_0) J_1(kR_0) - N_1(kR_0) J_0(kR_0) = \frac{2}{\pi k R_0}$$

Na základě toho upravíme vztahy (II-150) a (II-151) tak, že

$$C_1 = \frac{U_k N_1(kR_0) - \frac{I_k}{2\pi R_0 j\omega\epsilon_0 k} N_0(kR_0)}{\frac{2}{\pi k R_0}}$$

$$C_2 = \frac{J_0(kR_0) \frac{I_k}{2\pi R_0 j\omega\epsilon_0 k} + \frac{U_k}{k^2 d} J_1(kR_0)}{\frac{2}{\pi k R_0}}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty konstant do rovnic (II-148) a (II-149), dostaneme pro napětí  $U$  a proud  $I$  příslušný poloměru  $r$ , výrazy

$$U = U_k \frac{J_1(kR_0) N_0(kr) - N_1(kR_0) J_0(kr)}{2\pi k R_0} - j I_k \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J_0(kR_0) N_0(kr) - N_0(kR_0) J_0(kr)}{\pi k R_0} \quad (II-152)$$

$$I = I_k \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = j U_k \frac{N_1(kR_0) J_1(kr) - J_1(kR_0) N_1(kr)}{2\pi k R_0} - I_k \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J_0(kR_0) N_1(kr) - J_1(kr) N_0(kR_0)}{\pi k R_0} \quad (II-153)$$

Tyto rovnice si zjednodušíme zavedením pomocných výrazů.

Výraz  $\frac{J_1(kR_0) N_0(kr) - N_1(kR_0) J_0(kr)}{2\pi k R_0}$  označíme symbolicky  $C_s(kr, kR_0)$ .

Tento výraz budeme nazývat velkým radiálním kosinem. Obdobně zavedeme ještě další výrazy

$$\frac{J_0(kR_0) N_0(kr) - N_0(kR_0) J_0(kr)}{2\pi k R_0} = \text{sn}(kr, kR_0) \quad (\text{malý radiální sinus})$$



$$\frac{N_0(kR_0) J_1(kr) - J_0(kR_0) N_1(kr)}{2\pi kR_0} = \text{cs}(kr, kR_0) \quad (\text{malý radiální kosinus})$$

$$\frac{J_1(kR_0) N_1(kr) - N_1(kR_0) J_1(kr)}{2\pi kR_0} = \text{sn}(kr, kR_0) \quad (\text{velký radiální sinus})$$

Na základě těchto pomocných výrazů lze psát rovnice (II-152) a (II-153) takto:

$$U = U_k \text{Cs}(kr, kR_0) - jI_k \frac{d}{2\pi R_0} \text{sn}(kr, kR_0) \quad (\text{II-154})$$

$$I \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = I_k \frac{d}{2\pi R_0} \text{cs}(kr, kR_0) - jU_k \text{Sn}(kr, kR_0) \quad (\text{II-155})$$

Rovnice (II-154) a (II-155) udávají vztah mezi proudem a napětím na dvou paralelních deskách ve tvaru mezikruží, je-li známa velikost proudu a napětí na konci desek. Jde o příčnou vlnu elektricko-magnetickou. Takový druh vedení nazýváme radiálním vedením. Rovnice (II-154) a (II-155) jsou obdobou telegrafní rovnice homogenního vedení.

Všimneme si dále zvláštních případů impedančního zakončení radiálního vedení. Je-li radiální vedení nakrátko, je na konci vedení nulové napětí. Potom napětí a proud v místě, definovaném poloměrem  $r$ , je

$$U = -jI_k \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{Sn}(kr, kR_0)$$

$$I = \frac{r}{R_0} I_k \text{Cs}(kr, kR_0)$$

Impedance radiálního vedení v místě  $r$  je pak dána poměrem  $\frac{U}{I}$ . Označíme ji  $Z_k$ . Potom

$$Z_k = \frac{U}{I} = -j \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J_0(kR_0) N_0(kr) - N_0(kR_0) J_0(kr)}{N_0(kR_0) J_1(kr) - J_0(kR_0) N_1(kr)}$$

Výraz  $\frac{J_0(kR_0) N_0(kr) - N_0(kR_0) J_0(kr)}{N_0(kR_0) J_1(kr) - J_0(kR_0) N_1(kr)}$  označíme  $\text{tn}(kr, kR_0)$  a nazvěme jej malou radiální tangentou. Její převrácená hodnota se nazývá malou radiální kotangentou.

Je tedy

$$Z_k = j \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{tn}(kr, kR_0) \quad (\text{II-156})$$

Výraz

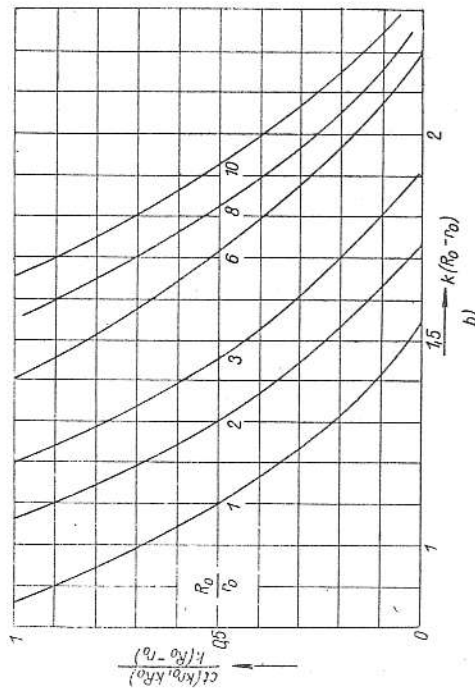
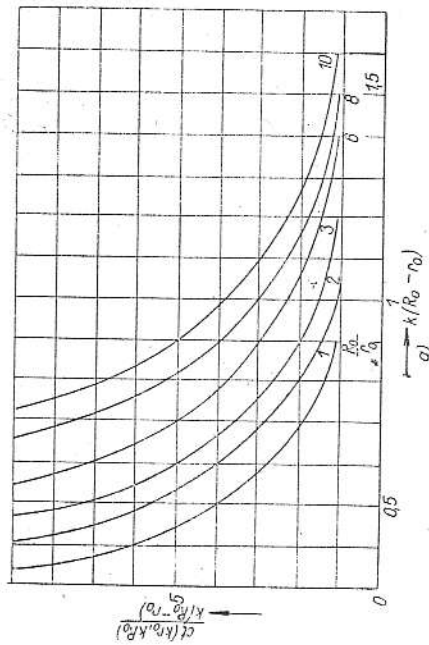
$$\frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

je ekvivalentní vlnový odpor radiálního vedení v místě  $r$ . Tento ekvivalentní vlnový odpor je funkcí poloměru  $r$ , a proto radiální vedení je vedení nehomogenní.

Je-li radiální vedení naprázdno, je proud na konci nulový. V tomto případě je

$$U = U_k \text{Cs}(kr, kR_0)$$

$$I \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = -jU_k \text{Sn}(kr, kR_0)$$



Obr. 26. Křivky malé radiální kotangenty.

Potom vstupní impedance radiálního vedení naprázdno je

$$Z_p = \frac{U}{I} = j \frac{\text{Cs}(kr, kR_0)}{\text{Sn}(kr, kR_0)} \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = j \frac{d}{2\pi r} \text{Ct}(kr, kR_0) \quad (\text{II-157})$$

Výraz  $Ct(kr, kR_0)$  nazýváme velkou radiální kotangentou. Je tedy

$$Ct(kr, kR_0) = \frac{J_1(kR_0) N_0(kr)}{J_1(kR_0) N_1(kr)} - \frac{N_1(kR_0) J_0(kr)}{N_1(kR_0) J_1(kr)}$$

Její převrácená hodnota je velká radiální tangenta. Křivky radiálních funkcí jsou uvedeny v tabulkách v knize Marcwitz: Waveguides Handbook (Příručka o vlnovodech). Radiálních vedení se velmi často používá v technice centimetrových vln. Tvoří jednotlivé části tlumivky, rotačních spojek, jednoduchých dutinových rezonátorů a podobně. Převodění problému geometrického uspořádání elektromagnetického pole v uvedených obvodových částech na problémy týkající se radiálních vedení zjednoduší podstatně výpočet, neboť obtížné problémy elektromagnetického pole převedeme na problémy běžné obvodové techniky, používané u delších vln.

Na obr. 26a, b jsou zobrazeny upravené funkce radiální kotangenty v závislosti na argumentu.

## 22. Silové čáry intenzity elektrického a magnetického pole

Při určování maximálního přeneseného výkonu, při podlačování vyšších vidů v dutinových rezonátorech i pro jiné účely je třeba znát uspořádání silových čar elektrického a magnetického pole ve vlnovodu.

Silové čáry jsou čáry, jejichž tečny určují směr intenzity pole v daném místě. Směr intenzity pole je obecně určen třemi složkami pole, obvykle složkami ve směru ortogonálních souřadnic.

Rovnici silové čáry ve vektorovém tvaru určíme z podmínky, že vektor intenzity elektrického nebo magnetického pole musí mít směr jednotkového vektoru ve směru tečny silové čáry. Směr tečny je stejný jako směr elementárního oblouku silové čáry. Zavedeme-li obecně ortogonální souřadnice  $u_1, u_2, u_3$ , je elementární oblouk dán ve vektorovém tvaru vztahem

$$ds = ds_1 u_1 + ds_2 u_2 + ds_3 u_3$$

kde  $ds_1, ds_2, ds_3$  jsou elementární oblouky křivčočarých souřadnic ve směru jednotkových vektorů  $u_1, u_2, u_3$  (viz kap. IX). V obecných křivčočarých ortogonálních souřadnicích jsou oblouky  $ds_1, ds_2, ds_3$  určeny takto:

$$ds_1 = h_1 du_1; \quad ds_2 = h_2 du_2; \quad ds_3 = h_3 du_3$$

kde  $h_1, h_2, h_3$  jsou Laméovy koeficienty. Potom je

$$ds = h_1 du_1 u_1 + h_2 du_2 u_2 + h_3 du_3 u_3$$

Směr intenzity elektrického pole musí být totožný se směrem elementárního oblouku silové čáry, určeného obecně předěšším výrazem. To se stane tehdy, bude-li platit identita

$$[E ds] = 0$$

neboť vektor  $E$  musí být rovnoběžný s vektorem  $ds$ . Rozvedeme-li tento vektorový součin do jednotlivých složek ve směru  $u_1, u_2, u_3$ , dostaneme

$$[E ds] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ E_{u_1} & E_{u_2} & E_{u_3} \\ h_1 du_1 & h_2 du_2 & h_3 du_3 \end{vmatrix} = u_1(E_{u_2} h_3 du_3 - E_{u_3} h_2 du_2) + \\ + u_2(E_{u_3} h_1 du_1 - E_{u_1} h_3 du_3) + u_3(E_{u_1} h_2 du_2 - E_{u_2} h_1 du_1) = 0$$

Tato identita bude splněna tehdy, budou-li koeficienty u jednotlivých jednotkových vektorů  $u_1, u_2, u_3$  nulové. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} E_{u_1} h_3 du_3 - E_{u_3} h_2 du_2 &= 0, \\ E_{u_2} h_1 du_1 - E_{u_1} h_3 du_3 &= 0 \\ E_{u_1} h_2 du_2 - E_{u_2} h_1 du_1 &= 0 \end{aligned}$$

Z těchto podmínek dostaneme vztahy

$$\frac{E_{u_1}}{h_1 du_1} = \frac{E_{u_2}}{h_2 du_2} = \frac{E_{u_3}}{h_3 du_3} \quad (\text{II-158})$$

Obdobně bychom dostali pro rovnice silové čáry magnetického pole vztahy

$$\frac{H_{u_1}}{h_1 du_1} = \frac{H_{u_2}}{h_2 du_2} = \frac{H_{u_3}}{h_3 du_3} \quad (\text{II-159})$$

Protože uspořádání intenzity elektrického a magnetického pole závisí nejen na prostorových souřadnicích, nýbrž i na čase  $t$ , musíme vycházet při odvozování rovnic silových čar z obecných okamžitých hodnot.

Pro vid  $TE_{10}$  je okamžitá hodnota Hertzova vektoru v obdélníkovém vlnovodu dána vztahem

$$H_z^m = C \cos \frac{\pi}{a} x \cos(\omega t - \gamma z)$$

který vznikl ze vztahu

$$H_z^m = \operatorname{Re} C \cos \frac{\pi}{a} x e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Odvodíme-li příslušné složky intenzity elektrického a magnetického pole, dostaneme

$$E_x = 0; \quad E_y = -Cj\omega\mu \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \cos(\omega t - \gamma z)$$

$$H_x = -Cj\gamma \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \sin(\omega t - \gamma z); \quad H_y = 0$$

$$H_z = C\Gamma^2 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(\omega t - \gamma z)$$

Rovnice silových čar budou potom určeny diferenciálními vztahy

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x}; \quad \frac{dy}{H_y} = \frac{dx}{H_x}$$

$$\frac{dz}{E_z} = \frac{dx}{E_x}; \quad \frac{dz}{H_z} = \frac{dx}{H_x}$$

Protože  $E_x = 0$ , je  $dx = 0$ , z čehož  $x = C_1$ . Dále je  $E_z = 0$ , a proto je  $dz = 0$ . Z toho  $z = C_2$ .

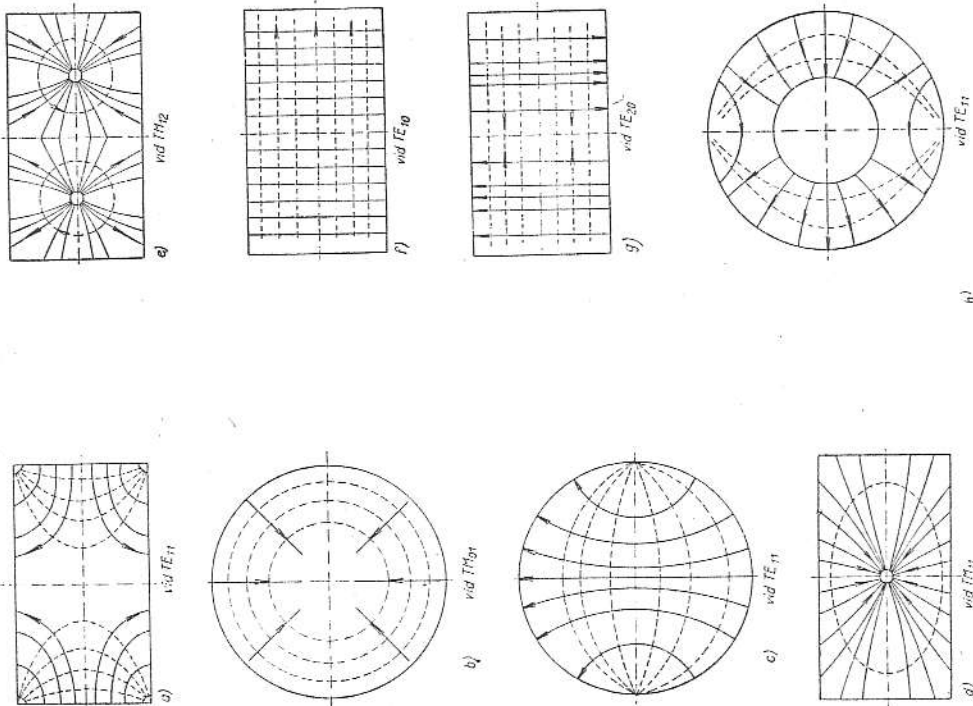
Rovnice  $x = C_1$  při různém  $C_2$  jsou rovnicemi silových čar intenzity elektrického pole v rovině kolmé na osu vlnovodu a rovnice  $z = C_2$  při různém  $C_1$  jsou rovnicemi silových čar intenzity elektrického pole v podélném směru.

Silové čáry intenzity magnetického pole v rovině  $xz$  jsou dány rovnicemi

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dz}{H_z}$$



Na obr. 29 jsou znázorněny elektrické a magnetické silové čáry některých nejdůležitějších vidů obdélníkového, kruhového a sousosého vlnovodu.



Obr. 29. Uspořádání silových čar elektrického a magnetického pole různých vidů; — silové čáry elektrického pole; - - - silové čáry magnetického pole.

### 23. Rozbor měrného útlumu vlnovodu

V této části probereme podrobněji závislost měrného útlumu na kmitočtu. U příčné vlny magnetické je měrný útlum dán obecně výrazem (II-51). V tomto výrazu je  $\varrho_{rt}$  měrný vysokofrekvenční odpor, o němž platí

$$\varrho_{rt} = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2\sigma}}$$

Funkce  $T_1$  je příčná funkce vlnovodu a je určena geometrickými vlastnostmi vlnovodu. Není tedy závislá na kmitočtu. Totéž platí o konstantě  $\Gamma$ . Na kmitočtu závisí ve vztahu (II-51) kromě  $\varrho_{rt}$  ještě poměr mezního kmitočtu k použitému kmitočtu. Označí-li jsme jej  $\beta$ ,

Upravme vzorec (II-51) takto:

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma} \frac{1}{\Gamma^2}} \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds \sqrt{\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

Označme souhrn výrazů, které nezávisí, na kmitočtu  $A$ .

Potom

$$\beta = A \sqrt{\frac{\omega^3}{\omega^2 - \omega_0^2}} \quad (\text{II-160})$$

Při tom

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma} \frac{1}{\Gamma^2}} \int_s \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \int_s T_1^2 ds}$$

Ze vztahu (II-160) vyplývá, že měrný útlum bude nekonečně velký pro  $\omega = \omega_0$  (obr. 30).

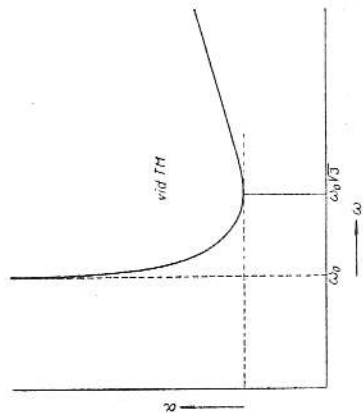
Kdybychom vztah (II-160) znázornili graficky, dostali bychom křivku na obr. 30. Právě se, pro jaké  $\omega$  bude měrný útlum minimální. Abychom tuto otázku vyřešili, musíme určit minimum výrazu, který je pod odmocninou v (II-160). Označme tento výraz  $\chi$ . Potom bude

$$\chi = \frac{\omega^3}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Minimum bude při takovém  $\omega$ , při němž

$$\frac{d\chi}{d\omega} = 0$$

Najdeme-li toto minimum, zjistíme, že výraz  $\chi$  je minimální pro  $\omega/\sqrt{3}\omega_0$ .



Obr. 30. Charakteristický průběh útlumu vidu TM v kruhovém vlnovodu.

Zvláštním případem vlny TM je vlna TEM. Příkladem vysokofrekvenčního vedení s vlnou TEM je sousový vodič. Pro útlum sousového vodiče (II-110).

V tomto vzorci je  $\frac{b}{\sigma} = \frac{Q_{\text{re}}}{\sigma} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2\sigma}}$ . Všechny ostatní členy výrazu (II-110) jsou kmitočtově nezávislé. Proto bude měrný útlum u tohoto vedení monotonně vzrůstat s  $\sqrt{\omega}$ .

Měrný útlum příčné elektrické vlny je obecně určen vzorcem (II-57). Kdybychom u tohoto vidu vlnění podrobně zkoumali závislost útlumu na kmitočtu, zjistili bychom, že tato závislost bude mít minimum pro určitý kmitočet a že tento minimální kmitočet bude funkcí geometrického uspořádání vlnovodu a vidu vlnění.

Všimneme si však podrobněji měrného útlumu kruhového vlnovodu s příčnou elektrickou vlnou, která je osově souměrná a nezávisí určitě podle (II-78), kde  $n = 0$ . V tomto případě je

$$\beta = \frac{Q_{\text{re}}}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \beta^2}$$

Tento výraz upravíme podobně jako v předějším případě tak, že od dělící členy nezávislé na kmitočtu od členů na kmitočtu závislých. Potom bude

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma a}} \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

Po úpravě

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma a}} \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} \frac{\omega_0}{\mu \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)}} \omega$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že člen závislý na kmitočtu (označíme jej  $\chi$ ) zmenšuje se monotonně s kmitočtem

$$\chi = \frac{\omega_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)}} \omega$$

Měrný útlum kruhového vlnovodu s osově souměrným videm elektromagnetické vlny TE se tedy monotonně zmenšuje s kmitočtem.

## 24. Maximální přenesený výkon

Výkon přenášený vlnovodem je omezen elektrickou pevností dielektrického prostředí. Toto prostředí je obvykle vzduchové, anebo je vlnovod vyplněn speciálním plynem, aby se zvětšila elektrická pevnost. V této části budeme uvažovat vlnovod se vzduchovým prostředím.

Velikost intenzity elektrického pole je dána způsobem vybuzení. Způsob vybuzení (velikost proudu v budícím elementu) je ne přímo zahrnut v konstantě C ve výrazu pro Hertzův vektor. Tak na př. bylo odvozeno, že při kruhovém vlnovodu je

$$H_z = C J_n(J_r) \cos n\varphi e^{-\gamma z}$$

kde C je konstanta určující způsob vybuzení.

Postup při výpočtu maximálního přeneseného výkonu bude potom tento: Zjistíme polohu maximální intenzity elektrického pole a určíme absolutní hodnotu intenzity v tomto místě. Tato hodnota nesmí překročit maximální dovolenou elektrickou pevnost. Z této podmínky určíme konstantu C v Hertzově vektoru a dosadíme ji do výrazu pro přenesený výkon, z čehož dostaneme maximální přenesený výkon.

U příčných magnetických vln má intenzita elektrického pole složky ve všech třech souřadných směrech, tedy i ve směru osy vlnovodu. Je tedy obecně

$$E = \sqrt{E_{x1}^2 + E_{x2}^2 + E_{x3}^2}$$

Přitom E je funkcí tří proměnných, při nekonečně dlouhém vlnovodu funkcí dvou proměnných, neboť amplituda elektrického pole je po celé délce konstantní. U příčných elektrických vln má intenzita elektrického pole složky jen v rovině kolmé na osu vlnovodu.

Dále uvedeme jako příklad výpočet maximálního přeneseného výkonu obdélníkového vlnovodu s vlnou TE<sub>10</sub>, kruhového vlnovodu s vlnou TE<sub>11</sub> a sousového vodiče.

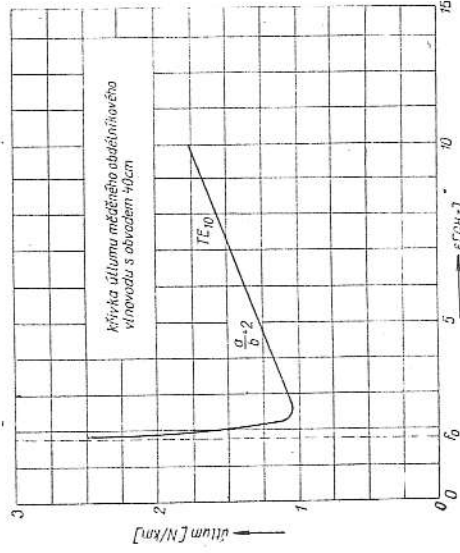
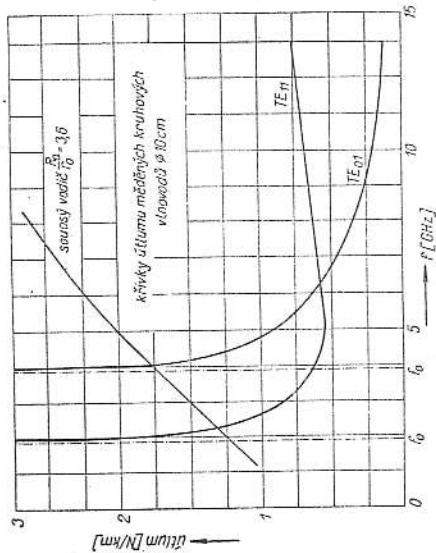
### 24.1 Obdélníkový vlnovod s vlnou TE<sub>10</sub>

Intenzita elektrického pole u obdélníkového vlnovodu s vlnou TE<sub>10</sub> (obr. 32) je určena vztahem (II-128) pro  $m = 1$  a  $n = 0$ . Absolutní hodnota této intenzity při nekonečně dlouhém (nebo impedančně přizpůsobeném) vlnovodu je

$$|E_y| = \omega \mu \frac{\pi}{a} C \sin \frac{\pi}{a} x$$

Protože maximální hodnota výrazu  $\sin \frac{\pi}{a} x$  je při argumentu  $x = \frac{a}{2}$ , bude

$$|E_y|_{\text{max}} = \omega \mu \frac{\pi}{a} C$$



Obr. 31. Křivky útlumu; a — sousového vodiče (vid TEM) a kruhového vlnovodu (vidy TE); b — obdélníkového vlnovodu (vid TE<sub>10</sub>).

a z toho

$$C = |E_y|_{\max} \frac{a}{\pi \omega \mu} \quad (\text{II-161})$$

Výkon přenesený vlnovodem určíme u příčných elektrických vln podle vzorce (II-48). Je tedy přenesený výkon

$$P = \frac{1}{2} C^2 Z \gamma^2 I_0^2 \int_S T_1^2 dS \quad (\text{II-162})$$

U vlny TE<sub>10</sub> je  $\Gamma = \frac{\pi}{a}$ , charakteristická impedance šíření je

$$Z = \frac{\omega \mu}{\gamma}$$

a konstanta C podle rovnice (II-161) je C =

$$|E|_{\max} \frac{a}{\pi \omega \mu}. \text{ Příčná funkce } T_1 \text{ u vlny TE}_{10} \text{ je}$$

$$T_1 = \cos \frac{\pi}{a} x$$

Dosadíme-li všechny tyto výrazy do rovnice (II-162), dostaneme

$$P_{\max} = \frac{1}{2} E_{\max}^2 \frac{a^2}{\pi^2 \omega^2 \mu^2} \gamma^2 \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} x dx dy$$

Po úpravě tohoto vztahu platí

$$P_{\max} = \frac{1}{4} ab \frac{E_{\max}^2}{Z} \quad (\text{II-163})$$

kde  $Z = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$  je charakteristická impedance vlny TE<sub>10</sub>

$E_{\max}$  maximální přípustná elektrická pevnost.

### 24.2 Kruhový vlnovod s vlnou TE<sub>11</sub>

Příčné složky intenzity elektrického pole u kruhového vlnovodu s vlnou TE<sub>11</sub> jsou dány vztahy (II-73) a (II-74), kde  $n = 1$ . U vlny TE<sub>11</sub> (obr. 33) je tedy pro nekonečně dlouhý vlnovod

$$E_r = j\omega \mu C \frac{1}{r} (J_1(r)) \sin \varphi e^{-\gamma z}$$

$$E_\varphi = j\omega \mu C \gamma J_1'(J_1(r)) \cos \varphi e^{-\gamma z}$$

Absolutní hodnota intenzity elektrického pole je určena odmocninou ze součtu čtverců absolutních hodnot jednotlivých složek. Je tedy v tomto případě

$$E = C \omega \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{r^2} J_1^2(J_1(r)) \sin^2 \varphi + J_1'^2(J_1(r)) \cos^2 \varphi} \quad (\text{II-164})$$

Určíme polohu, v níž má intenzita elektrického pole maximální absolutní hodnotu. To bude tehdy, bude-li výraz pod odmocninou maximální. Označíme-li tento výraz  $\chi$ , dostaneme pro extrémní funkce  $\chi$  tyto podmínky:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = 0$$

Z těchto dvou podmínek určíme polohu maximální hodnoty intenzity elektrického pole. Protože

$$\chi = \frac{1}{r^2} J_1^2(J_1(r)) \sin^2 \varphi + \gamma^2 J_1'^2(J_1(r)) \cos^2 \varphi$$

je

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{1}{r^4} (2J_1(J_1(r)) J_1'(J_1(r)) r^2 \Gamma - J_1^2(J_1(r)) 2r) \sin^2 \varphi + \Gamma^2 2J_1'(J_1(r)) J_1(J_1(r)) \Gamma \cos^2 \varphi = 0 \quad (\text{II-164.1})$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2} J_1^2(J_1(r)) \sin 2\varphi - \Gamma^2 J_1'^2(J_1(r)) \sin 2\varphi = 0 \quad (\text{II-165})$$

Z toho vyplývá, že extrémní hodnoty funkce  $\chi$  budou při

$$\sin 2\varphi = 0$$

To nastane tehdy, bude-li

$$2\varphi = m\pi$$

kde  $m$  je celé číslo.

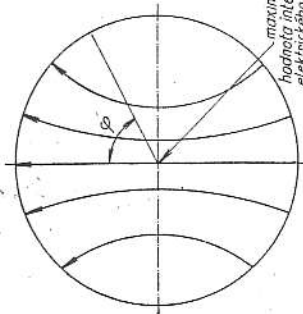
Bude-li  $m$  sudé číslo, bude  $\frac{m}{2}$  obecně celé číslo a potom pro  $\varphi = \frac{m}{2} \pi$  bude funkce  $\sin \varphi$  nulová. Se zřetelem na tento výsledek se rovnice (II-164.1) upraví takto:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \Gamma^2 \cdot 2J_1'(J_1(r)) J_1(J_1(r)) \Gamma = 0$$

To bude platit tehdy, bude-li buď  $J_1'(J_1(r)) = 0$ , nebo  $J_1(J_1(r)) = 0$ . Konstanta  $\Gamma$  je dána u vlny TE<sub>11</sub> výrazem  $\Gamma = \frac{1,84}{a}$ . Vztah  $J_1'(J_1(r)) = 0$  bude splněn pro  $r = a$ , neboť potom  $J_1'(J_1(r)) = J_1' \left( \frac{1,84}{a} a \right) = J_1'(1,84) = 0$ , protože číslo 1,84 je prvním kořenem funkce  $J_1'(x) = 0$ .

Ze vztahu

$$J_1'(J_1(r)) = 0$$



Obr. 33. Uspořádání intenzity elektrického pole v kruhovém vlnovodu (vid TE<sub>11</sub>).

vyplývá, že při daném  $\Gamma = \frac{1,84}{a}$  bude předcházející vztah splněn pro  $r > a$ , tedy pro souřadnici  $r$ , vycházející mimo obor vlnovodu.

Z podmínky extrému tedy vyplývá, že při  $\varphi = \frac{m}{2}\pi$ , kde  $m$  je sudé číslo, by byla extrémní hodnota intenzity elektrického pole  $E$  na povrchu při  $r = a$ .

Pro tyto souřadnice ( $\varphi = \frac{m}{2}\pi$ ,  $r = a$ ) je však absolutní hodnota intenzity elektrického pole nulová [viz rovnici (II-164)]. Nemá tedy absolutní hodnota intenzity elektrického pole v místech se souřadnicemi  $\varphi = \frac{m}{2}\pi$  ( $m$  je sudé číslo),  $r = a$  maximální hodnotu. Proto musíme vyšetřit, má-li maximální hodnotu pro  $\varphi = \frac{m}{2}\pi$ , kde  $m$  je liché číslo. Bude-li  $m$  liché číslo, bude při  $\varphi = m\frac{\pi}{2}$  funkce  $\cos^2 \varphi$  nulová a funkce  $\sin \varphi$  bude rovna jedné. Bude tedy v tomto případě složka intenzity elektrického pole ve směru  $\varphi$  nulová a složka intenzity elektrického pole ve směru  $r$  bude

$$E_r = j\omega\mu \frac{1}{r} J_1(\Gamma r) C e^{-\Gamma z} \quad (\text{II-166})$$

Souřadnici  $r$ , při níž je absolutní hodnota intenzity elektrického pole maximální, určíme buď z podmínky (II-164), kde  $\cos \varphi = 0$  a  $\sin \varphi = 1$ , nebo z maxima výrazu (II-166). Maximum výrazu pro  $E_r$  bude tehdy, bude-li

$$\frac{dE_r}{dr} = 0$$

Z derivace dostáváme podmínku

$$\frac{J_1(\Gamma r) \Gamma r - J_1(\Gamma r)}{r^2} = 0$$

Z toho vyplývá

$$J_1(\Gamma r) = J_1(\Gamma r) \Gamma r$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jedno z nich je  $r = 0$ . Ostatní řešení vyjdou pro poloměry větší, než je poloměr vlnovodu. Z tohoto výsledku vyplývá, že extrémní hodnota intenzity elektrického pole je v místě vlnovodu, jehož válcové souřadnice jsou

$$r = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Ze znaménka druhé derivace bychom zjistili, že jsou to maximální hodnoty.

Potom je

$$|E|_{\max} = C j\omega\mu \frac{1}{r} J_1(\Gamma r) = \frac{1}{2} j\omega\mu C \Gamma \quad (\text{pro } r = 0)$$

neboť platí

$$\frac{J_1(\Gamma r)}{r} = \frac{1}{2} \Gamma \quad (\text{pro } r = 0)$$

Z těchto podmínek lze vyjádřit absolutní hodnotu konstanty  $C$  pomocí maximální intenzity elektrického pole

$$|C| = \frac{|E|_{\max} \cdot 2}{\omega\mu\Gamma}$$

Dosadíme nyní odvozený výraz pro  $C$  do (II-48). Potom bude

$$P_{\max} = \frac{1}{2} E_{\max}^2 \frac{1}{\omega^2 \mu^2} \Gamma^2 Z_0^2 \Gamma^2 \int_s T_1^2 dS$$

Po úpravě dostaneme

$$P_{\max} = 2E_{\max}^2 \frac{1}{Z_0} \int_s T_1^2 dS$$

Dosadíme-li do integrálu za funkci  $T_1$  výraz  $J_1(\Gamma r) \cos \varphi$ , dostaneme po integraci po kruhovém průřezu vlnovodu a použitím Lommelova integrálu

$$\int_s T_1^2 dS = \frac{1}{2} a^2 \pi \left( 1 - \frac{1}{\Gamma^2 a^2} \right) J_1^2(\Gamma a)$$

U kruhového vlnovodu s vlnou  $TE_{11}$  je konstanta  $\Gamma = \frac{\alpha_{11}}{a}$ , kde  $a$  je poloměr vlnovodu.

Proto

$$\int_s T_1^2 dS = \frac{1}{2} a^2 \pi \left( \frac{\alpha_{11}^2 - 1}{\alpha_{11}^2} \right) J_1^2(\alpha_{11})$$

Dosadíme-li tento výsledek do výrazu pro maximální přenesený výkon  $P_{\max}$ , platí

$$P_{\max} = a^2 \pi \frac{E_{\max}^2}{Z_0} \left( \frac{\alpha_{11}^2 - 1}{\alpha_{11}^2} \right) J_1^2(\alpha_{11})$$

U příčné elektrické vlny  $TE_{11}$  je  $\alpha_{11} = 1,84$ . Vyjádříme-li číselně předešlý výraz, dostaneme

$$P_{\max} = 0,2 a^2 \pi \left( \frac{E_{\max}^2}{Z_0} \right) \quad (\text{II-167})$$

kde  $P_{\max}$  je maximální výkon přenesený kruhovým vlnovodem s vlnou  $TE_{11}$ ,  $E_{\max}$  největší přípustná elektrická pevnost  $Z_0$  charakteristická impedance vlnovodu s vlnou  $TE$ . Charakteristická impedance je

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\alpha_{11} \lambda}{1 - \frac{\alpha_{11}^2}{2\pi^2 a^2}}}$$

### 24.3 Maximální výkon přenesený sousovým vedením

Intenzitu elektrického pole určíme v sousovém vodiči podle výrazu (II-105)

$$E_r = -jkC_1 \frac{1}{r} e^{-jkz}$$

a intenzitu magnetického pole podle (II-102)

$$H_{\varphi} = -j\omega\epsilon_0 C \frac{1}{r} e^{-jkr}$$

Ze vztahu pro  $E_r$  vyplývá, že maximální hodnota intenzity elektrického pole je na povrchu vnitřního vodiče, kde je poloměr nejmenší. Označíme-li vnitřní poloměr  $r_0$ , je

$$|E_{\max}| = kC \frac{1}{r_0}$$

z toho

$$C = \frac{|E_{\max}| r_0}{k}$$

Potom

$$|E_r| = E_{\max} \frac{r_0}{r} e^{-jkr}$$

a

$$|H_{\varphi}| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\max} \frac{r_0}{r} e^{-jkr}$$

Výkon přenesený sousým vodičem je dán integrací Umov-Poyntingova vektoru po průřezu sousého vedení. Proto

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} E_r H_{\varphi}^* r dr d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\max}^2 r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{dr}{r} d\varphi = \pi r_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\max} \ln \frac{R_0}{r_0} \quad (\text{II-168})$$

kde  $r_0$  je poloměr vnitřního vodiče

$R_0$  poloměr vnějšího vodiče

$E_{\max}$  největší přípustná intenzita elektrického pole.

Tímto vzorcem je určen maximální výkon přenesený sousým vodičem. Ve vztacích (II-163), (II-167) a (II-168) dosadíme za  $E_{\max}$  největší přípustnou pevnost dielektrického prostředí vlnovodu. U vzduchu je tato elektrická pevnost při normálních atmosférických podmínkách  $3 \cdot 10^6$  [V/m].

## 25. Šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického válce

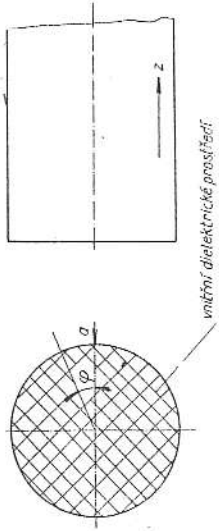
V tomto článku pojednáme o šíření elektromagnetické vlny podél drátu (válce). Nejprve budeme uvažovat dielektrický válec (obr. 34), později zvláštní druhy válcového vedení, totiž válec z dokonale vodivé hmoty a válec z dokonale vodivé hmoty obalený dielektrickou vrstvou.

Naším úkolem bude určit podmínky šíření, délku vlny, rozložení elektrického a magnetického pole a měrný tlum vedení.

Vlastnosti šíření elektromagnetické vlny podél válcového drátu určíme řešením Maxwellových rovnic ve válcových souřadnicích.

Maxwellovy rovnice převedeme na vlnové rovnice Hertzova magnetického a elektrického vektoru. Okrajové podmínky budou takové, aby na hranici dielektrického válce, umístěného ve vzduchovém prostředí, byly tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole spojité. V nekonečnu budeme pokládat intenzitu elektrického a magnetického pole za nulovou.

Dokázali jsme, že úplné řešení elektromagnetického pole je dáno superposicí pole, určeného v pravouhlých souřadnicích některou složkou Hertzova elektrického vektoru a některou složkou Hertzova magnetického vektoru. U válcových souřadnic je pravouhlou souřadnicí souřadnice  $z$ , a proto bude výsledné pole v dielektrickém drátě dáno polem složky Hertzova magnetického vektoru  $H_z^m$  a složky Hertzova elektrického vektoru  $H_z^e$ .



Obr. 34. Dielektrický válec.

Intenzita elektrického pole u příčné magnetické vlny (Hertzova elektrického vektoru) se určí podle rovnice (I-33) a intenzita elektrického pole u příčné vlny elektrické (Hertzova magnetického vektoru) se určí podle rovnice (I-34). Výsledná intenzita elektrického pole bude dána součtem výrazů (I-33) a (I-34). Proto

$$E = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e - j\omega\mu \text{ rot } \Pi_z^m \quad (\text{II-169})$$

Výslednou intenzitu magnetického pole dostaneme součtem výrazů (I-35) a (I-36). Potom

$$H = j\omega\epsilon \text{ rot } \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m \quad (\text{II-170})$$

Při tom jsme zanedbali vodivost dielektrického prostředí.

Hertzovy vektory  $\Pi_z^e$  a  $\Pi_z^m$  vyhovují vlnové rovnici. Proto je

$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0 \quad (\text{II-171})$$

a

$$\Delta \Pi_z^m + k^2 \Pi_z^m = 0 \quad (\text{II-172})$$

Řešíme-li tyto vlnové rovnice ve válcových souřadnicích, dostaneme pro  $\Pi_z^e$  tento vztah (pro nekonečně dlouhý drát):

$$H_z^e = C_1^{(0)} J_0(J_0^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{j\omega r} + C_4^{(0)} e^{-j\omega r}) e^{-\gamma_0 z} \quad (\text{II-173})$$

Tento vztah platí pro dielektrický drát. Proto neuvážujeme Neumannovu funkci jako partikulární integrál. Výraz pro  $H_z^e$  bychom odvodili stejně jako u kruhového vlnovodu. Index (i) znamená, že jde o parametry, které náležejí dielektrickému drátu (vnitřnímu prostředí).

Výsledné řešení Hertzova magnetického vektoru bude obdobné

$$H_z^m = C_2^{(0)} J_0(J_0^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{j\omega r} + C_6^{(0)} e^{-j\omega r}) e^{-\gamma_0 z} \quad (\text{II-174})$$



Obdobně jako u kruhového vlnovodu platí mezi konstantami  $\gamma_1, \Gamma$  a konstantou přenosu vlnového prostoru  $k_1$  (s dielektrickou konstantou a permeabilitou stejnou, jako má vnitřní vodič) vztahy

$$\gamma_1^{(0)} = \sqrt{\Gamma_1^{(0)2} - k_1^2} \quad (\text{II-175})$$

$$\gamma_2^{(0)} = \sqrt{\Gamma_2^{(0)2} - k_1^2} \quad (\text{II-176})$$

Konstantu  $\Gamma$  ve vlnovodu jsme považovali vždy za kladnou reálnou veličinu, neboť ve vlnovodu jde o elektromagnetické pole, kde se zretelem na okrajové podmínky musí být konstanta  $\Gamma$  jen reálná a kladná, aby bylo řešení uvnitř vlnovodu jednoznačné (fyzikálně možné).

Uvažujeme-li však dielektrický drát, jehož vnější prostředí je obsaženo v intervalu  $a < r < \infty$ , může být konstanta  $\Gamma$  obecně komplexní. Zanedbáme-li ztráty v dielektrickém prostředí a ztráty ve vnějším vzduchovém prostředí, bude v tomto případě konstanta  $\Gamma$  imaginární a kladná. Rychlost šíření elektromagnetické vlny ve vnějším prostředí ( $a < r < \infty$ ) může být menší nebo v krajním případě stejná jako rychlost světla. To znamená, že příslušná konstanta přenosu  $\gamma$  musí být větší nebo v krajním případě rovna konstantě přenosu  $k$  ve vlnném prostředí. Protože

$$\gamma = \sqrt{k_2^2 - (\Gamma_1^{(0)})^2}$$

vyplývá z toho, že při  $\gamma > k$  bude konstanta  $\Gamma$  imaginární.

Hertzův vektor pro vnější prostředí dostaneme také řešením vlnové rovnice ve válcových souřadnicích. Protože vnější prostor není směrem ke vzrůstajícímu poloměru omezen, bude výhodné vyjádřit řešení Hertzova vektoru Hankelovými funkcemi, neboť u těchto funkcí budeme moci jednoduše splnit okrajové podmínky v nekonečnu. Platí tedy pro Hertzův elektrický a magnetický vektor ve vnějším dielektrickém prostředí

$$\Pi_z = [C_1^{(0)} H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) + C_2^{(0)} H_n^{(2)}(\Gamma_1^{(0)} r)] (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} \quad (\text{II-177})$$

Abychom mohli posoudit vlastnosti Hertzova vektoru pro  $r \rightarrow \infty$ , nahradíme Hankelovy funkce jejich asymptotickými hodnotami pro  $|\Gamma_1^{(0)}| r \rightarrow +\infty$ . Jak známo, platí (viz Jahnke-Erdde: Funktionentafeln) tyto asymptotické odhady:

$$H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \Gamma_1^{(0)} r}} e^{i \left[ \Gamma_1^{(0)} r - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]}$$

$$H_n^{(2)}(\Gamma_1^{(0)} r) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \Gamma_1^{(0)} r}} e^{-i \left[ \Gamma_1^{(0)} r - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]}$$

Z toho plyne, je-li  $r \Gamma_1^{(0)} > 0$ :  $H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) \rightarrow 0$  pro  $r \rightarrow +\infty$  a  $H_n^{(2)}(\Gamma_1^{(0)} r) \rightarrow +\infty$  pro  $r \rightarrow +\infty$ . Je-li  $r \Gamma_1^{(0)} < 0$ , je tomu právě naopak.

V našem případě, uvažujeme-li praktické využití dielektrického drátu, bude, jak jsme již uvedli, konstanta  $\Gamma_1^{(0)}$  imaginární. V tomto případě by byla Hankelova funkce druhého druhu neomezená pro  $r \rightarrow +\infty$ . Tento případ však není fyzikálně možný. Abychom dostali fyzikálně možné řešení, musí být konstanta  $C_2^{(0)}$  nulová. Proto

$$\Pi_z = C_1^{(0)} H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} \quad (\text{II-178})$$

Obdobně bychom dostali pro Hertzův magnetický vektor ve vnějším prostředí

$$\Pi_z = C_2^{(0)} H_n^{(1)}(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} + C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-179})$$

V tomto vztahu konstanta  $C_2^{(0)}$  není totožná s konstantou  $C_2^{(0)}$  ve výrazu (II-177). Pro konstanty  $\Gamma_1^{(0)}, \gamma_1^{(0)}, \Gamma_2^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, k_2$  platí stejně jako u Hertzova elektrického vektoru

$$\gamma_1^{(0)} = \sqrt{\Gamma_1^{(0)2} - k_2^2} \quad (\text{II-180})$$

$$\gamma_2^{(0)} = \sqrt{\Gamma_2^{(0)2} - k_2^2} \quad (\text{II-181})$$

Známe-li vztahy pro Hertzův elektrický a magnetický vektor, určíme jednotlivé složky pole ze vztahů (II-169) a (II-170). Po provedení jednotlivých vektorových operací dostaneme tyto vztahy:

pro vnitřní prostředí:

$$E_r = -C_1^{(0)} \gamma_1^{(0)} \Gamma_1^{(0)} J_n(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} + \\ + C_2^{(0)} \omega \mu_1 n \frac{1}{r} J_n(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} - C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-182})$$

$$E_\varphi = -C_1^{(0)} \gamma_1^{(0)} j n \frac{1}{r} J_n(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} - C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} + \\ + C_2^{(0)} j \omega \mu_1 \Gamma_2^{(0)} J_n(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} + C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-183})$$

$$E_z = I_1^{(0)2} C_1^{(0)} J_n(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} \quad (\text{II-184})$$

$$H_r = -C_1^{(0)} \omega \epsilon_1 n \frac{1}{r} J_n(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} - C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} - \\ - C_2^{(0)} \gamma_2^{(0)} \Gamma_2^{(0)} J_n(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} + C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-185})$$

$$H_\varphi = -C_1^{(0)} j \omega \epsilon_1 \Gamma_1^{(0)} J_n(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} - \\ - C_2^{(0)} \gamma_2^{(0)} j n \frac{1}{r} J_n(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} - C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-186})$$

$$H_z = C_2^{(0)} \Gamma_2^{(0)2} J_n(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} + C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-187})$$

pro vnější prostředí:

$$E_r = -C_1^{(0)} \gamma_1^{(0)} \Gamma_1^{(0)} H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} + \\ + C_2^{(0)} \omega \mu_2 n \frac{1}{r} H_n^{(1)}(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} - C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-188})$$

$$E_\varphi = -C_1^{(0)} \gamma_1^{(0)} j n \frac{1}{r} H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} - C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} + \\ + C_2^{(0)} j \omega \mu_2 \Gamma_2^{(0)} H_n^{(1)}(\Gamma_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{in\varphi} + C_6^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-189})$$

$$E_z = I_1^{(0)2} C_1^{(0)} H_n^{(1)}(\Gamma_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{in\varphi} + C_4^{(0)} e^{-in\varphi}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} \quad (\text{II-190})$$

$$H_r = -C_1^{(0)} \omega \varepsilon_2 \frac{1}{r} H_n^{(1)}(I_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{nr} - C_4^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} - C_2^{(0)} \gamma_2^{(0)} I_2^{(0)} H_n^{(1)}(I_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{nr} + C_6^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-191})$$

$$H_\varphi = -C_1^{(0)} j \omega \varepsilon_2 I_1^{(0)} H_n^{(1)}(I_1^{(0)} r) (C_3^{(0)} e^{nr} + C_4^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} - C_2^{(0)} \gamma_2^{(0)} j n \frac{1}{r} H_n^{(1)}(I_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{nr} - C_6^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-192})$$

$$H_z = C_2^{(0)} I_2^{(0)2} H_n^{(1)}(I_2^{(0)} r) (C_5^{(0)} e^{nr} + C_6^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} \quad (\text{II-193})$$

Všechny konstanty  $C, I$  a  $\gamma$  určíme z okrajových podmínek. Okrajové podmínky vyplývají z rovnosti tečných složek intenzity elektrického a magnetického pole na rozhraní obou dielektrik. Toto rozhraní je dáno vlnovou plochou poloměru  $r = a$ . Proto je

$$E_r^{(0)} = E_r^{(e)}; \quad H_\varphi^{(0)} = H_\varphi^{(e)}; \quad H_z^{(0)} = H_z^{(e)}; \quad E_z^{(0)} = E_z^{(e)}$$

kde index (i) značí pole uvnitř dielektrického drátu a index (e) pole vně drátu. Platí tedy

$$\begin{aligned} & -C_1^{(0)} \gamma_1^{(0)} j n \frac{1}{a} J_n(I_1^{(0)} a) (C_3^{(0)} e^{nr} - C_4^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} + \\ & + C_2^{(0)} j \omega \varepsilon_2 I_2^{(0)} \frac{1}{a} J_n(I_2^{(0)} a) (C_5^{(0)} e^{nr} + C_6^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} = \\ & = -C_1^{(e)} \gamma_1^{(e)} j n \frac{1}{a} H_n^{(1)}(I_1^{(e)} a) (C_3^{(e)} e^{nr} - C_4^{(e)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(e)} z} + \\ & + C_2^{(e)} j \omega \varepsilon_2 I_2^{(e)} \frac{1}{a} H_n^{(1)}(I_2^{(e)} a) (C_5^{(e)} e^{nr} + C_6^{(e)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(e)} z} \end{aligned} \quad (\text{II-194})$$

$$\begin{aligned} & -C_1^{(0)} j \omega \varepsilon_1 I_1^{(0)} \frac{1}{a} J_n'(I_1^{(0)} a) (C_3^{(0)} e^{nr} + C_4^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} - \\ & - C_2^{(0)} \gamma_2^{(0)} j n \frac{1}{a} J_n(I_2^{(0)} a) (C_5^{(0)} e^{nr} - C_6^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} = \\ & = -C_1^{(e)} j \omega \varepsilon_1 I_1^{(e)} \frac{1}{a} H_n^{(1)'}(I_1^{(e)} a) (C_3^{(e)} e^{nr} + C_4^{(e)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(e)} z} - \\ & - C_2^{(e)} \gamma_2^{(e)} j n \frac{1}{a} H_n^{(1)}(I_2^{(e)} a) (C_5^{(e)} e^{nr} - C_6^{(e)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(e)} z} \end{aligned} \quad (\text{II-195})$$

$$I_1^{(0)2} C_1^{(0)} J_n(I_1^{(0)} a) (C_3^{(0)} e^{nr} + C_4^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(0)} z} = I_1^{(e)2} C_1^{(e)} H_n^{(1)}(I_1^{(e)} a) (C_3^{(e)} e^{nr} + C_4^{(e)} e^{-nr}) e^{-\gamma_1^{(e)} z} \quad (\text{II-196})$$

$$C_2^{(0)} I_2^{(0)2} J_n(I_2^{(0)} a) (C_5^{(0)} e^{nr} + C_6^{(0)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(0)} z} = C_2^{(e)} I_2^{(e)2} H_n^{(1)}(I_2^{(e)} a) (C_5^{(e)} e^{nr} + C_6^{(e)} e^{-nr}) e^{-\gamma_2^{(e)} z} \quad (\text{II-197})$$

Tyto vztahy musí platit identicky pro jakoukoli úhlovou souřadnici  $\varphi$  a souřadnici  $z$ . To je možné jen tehdy, je-li

$$\gamma_1^{(0)} = \gamma_2^{(0)} = \gamma_1^{(e)} = \gamma_2^{(e)} = \gamma$$

Z rovnic (II-175), (II-176), (II-180) a (II-181), uvažujeme-li předcházející výsledek, vyplývá

$$I_1^{(0)} = I_2^{(0)} = I_1$$

$$I_1^{(e)} = I_2^{(e)} = I_2$$

Identity (II-194), (II-195), (II-196) a (II-197) jsou splnitelné pro jakékoli  $\varphi$  jen tehdy, budou-li buď všechny konstanty u součinitele  $e^{nr}$  nulové, nebo všechny konstanty u součinitele  $e^{-nr}$  nulové, nebo bude-li  $C_3^{(0)} = C_4^{(0)} = C_5^{(0)} = C_6^{(0)} = C_3^{(e)} = C_4^{(e)} = C_5^{(e)} = C_6^{(e)}$  a  $C_2^{(0)} = -C_2^{(e)}$ . Zvolíme případ, kdy budou konstanty  $C$  u součinitele  $e^{-nr}$  nulové. Za těchto okolností se identity (II-194), (II-195), (II-196) a (II-197) zjednoduší takto:

$$\begin{aligned} & -C_1^{(0)} \gamma n \frac{1}{a} J_n(I_1 a) + C_2^{(0)} \omega \mu_1 I_1 J_n(I_1 a) = \\ & = -C_1^{(e)} \gamma n \frac{1}{a} H_n^{(1)}(I_2 a) + C_2^{(e)} \omega \mu_2 I_2 H_n^{(1)}(I_2 a) \end{aligned} \quad (\text{II-198})$$

$$\begin{aligned} & C_1^{(0)} \omega \varepsilon_1 I_1 J_n(I_1 a) + C_2^{(0)} \gamma n \frac{1}{a} J_n(I_1 a) = \\ & = C_1^{(e)} \omega \varepsilon_2 I_2 H_n^{(1)}(I_2 a) + C_2^{(e)} \gamma n \frac{1}{a} H_n^{(1)}(I_2 a) \end{aligned} \quad (\text{II-199})$$

$$I_1^2 C_1^{(0)} J_n(I_1 a) = I_2^2 C_1^{(e)} H_n^{(1)}(I_2 a) \quad (\text{II-200})$$

$$I_1^2 C_2^{(0)} J_n(I_1 a) = I_2^2 C_2^{(e)} H_n^{(1)}(I_2 a) \quad (\text{II-201})$$

Při tom jsme nahradili součiny konstant  $C_1^{(0)} C_3^{(0)}, C_2^{(0)} C_5^{(0)}, C_1^{(e)} C_3^{(e)}, C_2^{(e)} C_5^{(e)}$  jednoduchými konstantami  $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_1^{(e)}, C_2^{(e)}$  (tyto konstanty nejsou totožné s konstantami v součinech).

K těmto identitám bychom dospěli i tehdy, kdybychom zvolili konstantu  $C$  u součinitele  $e^{nr}$  nulovou nebo kdybychom zvolili  $C_3^{(0)} = C_4^{(0)}, C_5^{(0)} = -C_6^{(0)}, C_3^{(e)} = C_4^{(e)}, C_5^{(e)} = -C_6^{(e)}$ . Řešením identit (II-200) a (II-201) vyjádříme konstantu  $C_1^{(0)}$  pomocí konstanty  $C_1^{(e)}$  a konstantu  $C_2^{(0)}$  pomocí konstanty  $C_2^{(e)}$ .

$$C_1^{(0)} = C_1^{(e)} \frac{I_1^2}{I_2^2} \frac{J_n(I_1 a)}{H_n^{(1)}(I_2 a)}$$

$$C_2^{(0)} = C_2^{(e)} \frac{I_1^2}{I_2^2} \frac{J_n(I_1 a)}{H_n^{(1)}(I_2 a)}$$

Dosadíme-li tyto konstanty do (II-198) a (II-199), dostaneme po úpravě

$$C_1^{(0)} \gamma n \frac{1}{a} \left( \frac{I_1^2 - I_2^2}{I_2^2} \right) = C_2^{(e)} \left[ \omega \mu_2 I_2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \frac{H_n^{(1)'}(I_2 a)}{H_n^{(1)}(I_2 a)} - \omega \mu_1 I_1 \frac{J_n'(I_1 a)}{J_n(I_1 a)} \right] \quad (\text{II-202})$$

$$C_2^{(0)} \gamma n \frac{1}{a} \left( \frac{I_1^2 - I_2^2}{I_2^2} \right) = C_1^{(e)} \left[ \omega \varepsilon_1 I_1 \frac{J_n(I_1 a)}{J_n(I_1 a)} - \omega \varepsilon_2 I_2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \frac{H_n^{(1)'}(I_2 a)}{H_n^{(1)}(I_2 a)} \right] \quad (\text{II-203})$$

To jsou dvě homogenní rovnice s neznámými konstantami  $C_1^{(e)}$  a  $C_2^{(e)}$ . Tyto rovnice mají řešení, rovnají-li se jejich determinant nule. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} & \gamma^2 n^2 \frac{1}{a^2} \left( \frac{I_1^2 - I_2^2}{I_2^2} \right) = \left[ \omega \mu_2 I_2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \frac{H_n^{(1)'}(I_2 a)}{H_n^{(1)}(I_2 a)} - \omega \mu_1 I_1 \frac{J_n'(I_1 a)}{J_n(I_1 a)} \right] \left[ \omega \varepsilon_1 I_1 \frac{J_n'(I_1 a)}{J_n(I_1 a)} - \right. \\ & \left. - \omega \varepsilon_2 I_2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \frac{H_n^{(1)'}(I_2 a)}{H_n^{(1)}(I_2 a)} \right] \end{aligned}$$

Abychom zjednodušili předešlou rovnici, dělíme ji výrazem  $\Gamma_1 a^2$  a dosadíme za  $\Gamma_1 a$  výraz  $u$  a za  $\Gamma_3 a$  výraz  $v$ . Je-li dále  $\gamma = |\gamma|$  (nutná podmínka pro šíření elektromagnetické vlny), je

$$|\gamma|^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right) = \left[ \frac{\mu_1 J_n(u)}{u J_n(u)} - \frac{\mu_2}{v} \frac{H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v)} \right] \left[ \frac{k_1^2}{\mu_1 u} \frac{J_n(u)}{J_n(u)} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \frac{H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v)} \right] \quad (\text{II-204})$$

O konstantě přenosu ve vnitřním dielektrickém válci platí

$$|\gamma|^2 = k_1^2 - \Gamma_1^2 \quad (\text{II-205})$$

ve vnějším dielektrickém prostředí

$$|\gamma|^2 = k_2^2 - \Gamma_2^2 \quad (\text{II-206})$$

Byla-li splněna podmínka (II-204) netriviálního řešení rovnic (II-202) a (II-203), lze vyjádřit konstantu  $C_3^{(0)}$  pomocí konstanty  $C_1^{(0)}$ . Tyto konstanty představují amplitudy pole příčné vlny elektrické a příčné vlny magnetické. Váže se tedy velikost příčného elektrického pole s velikostí příčného pole magnetického vztahem (II-202) nebo (II-203) a nelze je obecně vzájemně oddělit. Takové vlny nazýváme vlnami hybridními. Jen u osově souměrného pole, kdy  $n = 0$ , rozštěpí se rovnice (II-204) na dva vztahy

$$\frac{\mu_1}{u} \frac{J_n(u)}{J_n(u)} - \frac{\mu_2}{v} \frac{H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v)} = 0 \quad (\text{II-207})$$

a

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 u} \frac{J_n(u)}{J_n(u)} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \frac{H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v)} = 0 \quad (\text{II-207.1})$$

Rovnice (II-207) odpovídá příčným vlnám elektrickým a rovnice (II-207.1) příčným vlnám magnetickým. Tyto vlny mohou existovat v tomto zvláštním případě samostatně. Nebude-li vnější prostředí dielektrikum, nýbrž ideální vodič s nekonečnou vodivostí, budou tečné složky intenzity elektrického pole na hranici obou prostředí nulové. Proto budou v rovnicích (II-184) a (II-183)  $E_z$  a  $E_\varphi$  nulové. Z toho vyplývají podmínky pro konstanty  $\Gamma$

$$J_n(\Gamma_1 a) = 0 \quad \text{nebo} \quad J_n'(\Gamma_1 a) = 0$$

Tyto vztahy odpovídají okrajovým podmínkám vlnovodů. Při tom existuje také samostatně vlna TM a vlna TE.

Vztah (II-204) upravíme ještě tak, že nahradíme derivace Besselových funkcí na základě rekurentních vzorců. Potom dostaneme

$$\begin{aligned} n^2 \gamma^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right) - n^2 \frac{k_1^2}{\mu_1 u} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} &= -n^2 \frac{k_1^2}{\mu_1 u} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} - \frac{k_1^2}{u^2} \frac{J_{n-1}(u)}{J_n(u)} - \frac{k_2^2}{v^2} \frac{H_{n-1}^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v)} \\ &- \left( \frac{\mu_2 k_1^2}{\mu_1 u v} + \frac{\mu_1 k_2^2}{\mu_2 u v} \right) \frac{J_n(u) H_n^{(1)}(u)}{J_n(u) H_n^{(1)}(u)} - \frac{k_2^2}{v^2} \frac{H_{n-1}^{(1)}(v) H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v) H_n^{(1)}(v)} \end{aligned} \quad (\text{II-208})$$

Abychom zjednodušili levou stranu této rovnice, dosadíme za  $v = a\Gamma_2$  a  $u = a\Gamma_1$  a za  $\gamma$  příslušné výrazy (II-205) a (II-206):

$$\begin{aligned} n^2 \left( \frac{\gamma^2}{v^4} - 2 \frac{\gamma^2}{v^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{u^4} - \frac{k_1^2}{u^4} - \frac{k_2^2}{v^4} \right) &= n^2 \left( \frac{k_2^2}{v^4} - \frac{\Gamma_2^2}{v^4} + \frac{k_1^2}{u^4} - \frac{\Gamma_1^2}{u^4} - 2 \frac{\gamma^2}{v^2 u^2} - \frac{k_1^2}{u^4} - \frac{k_2^2}{v^4} \right) = \\ &= \left( -\frac{1}{a^4 \Gamma_2^2} - \frac{1}{a^4 \Gamma_1^2} - \frac{1}{a^4 \Gamma_1^2 \Gamma_2^2} + \frac{k_2^2 - \Gamma_2^2}{a^4 \Gamma_1^2 \Gamma_2^2} - \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{a^4 \Gamma_1^2 \Gamma_2^2} \right) n^2 = \\ &= \frac{1}{a^4} \left( -\frac{k_1^2 + k_2^2}{\Gamma_1^2 \Gamma_2^2} \right) n^2 = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{u^2 v^2} n^2 \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (II-208), dostaneme se zřetelkem k tomu, že

$$k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \quad \text{a} \quad k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{u^2} \frac{J_{n-1}(u)}{J_n(u)} + \frac{1}{u v} (\mu_2 \varepsilon_1 + \mu_1 \varepsilon_2) \frac{J_n(u) H_n^{(1)}(v)}{J_n(u) H_n^{(1)}(v)} + \\ + \frac{\mu_2 \varepsilon_2}{v^2} \frac{H_{n-1}^{(1)}(v) H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v) H_n^{(1)}(v)} = \frac{\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2}{u^2 v^2} n^2 \end{aligned} \quad (\text{II-209})$$

Z této rovnice a z výrazů (II-205) a (II-206) určíme pro daný poloměr dielektrického válce neznámé konstanty  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  a konstantu přenosu  $\gamma$ . Příštími tedy určitěmu poloměru a konstantám prostředí  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1$  a  $\mu_2$  určitá konstanta přenosu. Může nastat případ, kdy při určitém poloměru a určitém prostředí bude konstanta přenosu stejná jako konstanta přenosu při šíření ve volném prostoru (prostředí mimo dielektrický válec je vzduchové). V tomto případě bude fázová rychlost šíření stejná jako fázová rychlost šíření volného prostoru. Všimneme si tohoto případu podrobněji. Protože

$$\gamma = \sqrt{k_2^2 - \Gamma_2^2}$$

je třeba při splnění podmínky, aby fázová rychlost v prostředí mimo válec byla totožná s fázovou rychlostí volného prostoru, aby platilo

$$\gamma = k_2, \quad \text{a tedy aby} \quad \Gamma_2 = 0$$

Potom i  $v = 0$ .

Dosadíme-li v rovnici (II-209) za argument ( $v$ ) nulu, dostaneme podmínku pro určení konstanty  $u$ , známé-li rozměry válce a elektrické konstanty. Abychom mohli zkoumat, jaké vlastnosti má výraz (II-209), blíží-li se konstanta  $v$  nule, nahradíme Hankelovy funkce příslušnými výrazy pro malé argumenty (viz tabulky Jahnke-Emde).

Pro  $v \rightarrow 0$

$$H_n^{(1)}(v) \rightarrow -\Gamma \frac{(n-1)!}{\pi} \left( \frac{v}{2} \right)^{-n} \quad (\text{II-210})$$

$$H_n^{(1)}(v) \rightarrow i \frac{(n-1)!}{\pi} n \left( \frac{v}{2} \right)^{-(n+1)} \quad (\text{II-211})$$

Výrazy (II-210) a (II-211) dostaneme tím, že v řadě, kterou je definována Hankelova funkce, zanedbáme členy vyšších řádů, počínaje druhým.

Podíl výrazů (II-211) a (II-210) při

$$v \rightarrow 0 \quad \text{je} \quad \frac{H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v)} \rightarrow -\frac{n}{v} \quad \text{a} \quad \text{podíl} \quad \frac{H_{n-1}^{(1)}(v) H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)}(v) H_n^{(1)}(v)} \rightarrow \frac{n}{n-1}$$

Dosadíme tyto hodnoty do rovnice (II-209). Potom bude

$$\frac{\mu_1 \varepsilon_1 J_{n-1}(u) J_{n+1}(u)}{u^2} - \frac{1}{uv} (\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2) \frac{J_n(u)}{v} + \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{v^2} \frac{n}{n-1} = \frac{\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2}{u^2 v^2} n$$

Násobíme tuto rovnici výrazem  $v^2$ . Potom pro  $v \rightarrow 0$  je

$$-\frac{1}{u} (\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2) \frac{J_n(u)}{J_n(u)} + \mu_2 \varepsilon_2 \frac{1}{n-1} = \frac{\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2}{u^2} n$$

Protože podle rekurentních vzorců je

$$J_n'(u) = -\frac{n}{u} J_n(u) + J_{n-1}(u)$$

dostaneme po úpravě

$$n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\mu_2 - \mu_1) - u(\mu_2 \varepsilon_1 + \mu_1 \varepsilon_2) \frac{J_{n-1}(u)}{J_n(u)} + u^2 \frac{\mu_2 \varepsilon_2}{n-1} = 0 \quad (\text{II-212})$$

Řešíme-li tuto rovnici, určíme konstantu  $u$  při daných dielektrických konstantách prostředí  $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$ , je-li fázová konstanta šíření totožná s fázovou rychlostí šíření elektromagnetické vlny ve volném prostoru.

Všimneme si jednotlivých případů výrazu (II-212). Pro  $\mu_2 = \mu_1$  je pro  $n > 1$

$$\frac{J_{n-1}(u)}{J_n(u)} \frac{1}{u} = \frac{\varepsilon_2}{(n-1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad (\text{II-213})$$

Tento výraz se ještě více zjednoduší tehdy, je-li  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ . Potom se se vzrůstajícím  $\varepsilon_1$  blíží pravá strana v (II-213) nule a pro  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$  nastává případ, kdy

$$J_{n-1}(u) \rightarrow 0 \quad (\text{II-214})$$

Všimneme si nyní případu, kdy  $n = 0$ . Uvedli jsme již, že za těchto okolností se výchozí výraz (II-204) rozpadne na výrazy (II-207) a (II-207.1) a že se podle dielektrického drátu mohou šířit zvlášť vlny TE a zvlášť vlny TM. Dosadíme tedy v rovnicích (II-207) a (II-207.1) za  $n = 0$  a  $v = 0$  (sledujeme stále případ, kdy se fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického drátu rovná rychlosti světla). Potom při  $\mu_1 = \mu_2$  je

$$\frac{1}{u} \frac{J_0'(u)}{J_0(u)} + \frac{1}{v^2} = 0$$

Při tom jsme nahradili výraz  $\frac{H_0^{(1)'}(v)}{H_0^{(1)}(v)}$  přibližným výrazem pro  $v \rightarrow 0$ . Z tohoto vztahu vyplývá

$$J_0(u) = -\frac{1}{u} J_0'(u) v^2$$

Je-li  $v = 0$ , potom

$$J_0(u) = 0 \quad (\text{II-215})$$

Z této podmínky určíme konstantu  $u$  při  $v = 0$  a  $n = 0$ . Ze vztahu (II-213) vyplývá, že při  $n = 1$  musí být

$$J_1(u) = 0 \quad (\text{II-216})$$

Protože první kořen rovnice (II-216) dostaneme při  $u = 0$ , plyne z toho

$$aI_1 = 0$$

a tedy  $a = 0$ , neboť  $I_1$  nemůže být nulové. Podle (II-205) a (II-206) platí totiž

$$\gamma^2 = k_1^2 - I_2^2$$

$$\gamma^2 = k_2^2 - I_2^2$$

a protože uvážujeme případ, kdy  $I_2 = 0$ , je

$$I_1^2 = k_1^2 - k_2^2$$

Konstanta  $I_1$  nezávisí na rozměrech válce, a proto se v tomto případě může šířit po válci elektromagnetická vlna s jakýmkoli kmitočtem. Tento druh vln, podobný uspořádáním pole vlnovodovému vidu TE<sub>11</sub>, je dominantním videm.

Zjistili jsme tedy u předěšlého případu, že existuje takový druh šíření elektromagnetické vlny, při němž se fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny blíží rychlosti světla, blíží-li se poměr dielektrického válce nule.

V následující části si podrobněji všimneme tohoto druhu šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického válce. Budeme sledovat i obecný případ, kdy fázová rychlost šíření bude menší než rychlost světla. V tomto případě musí být  $\gamma > k_2$  a ze vztahu (II-206) je zřejmé, že příčná konstanta  $I_2$  bude imaginární. Je tedy

$$I_2 = j|I_2|$$

a podle rovnic (II-205) a (II-206) je

$$|I_2|^2 = k_1^2 - k_2^2 - I_1^2 \quad (\text{II-217})$$

Výraz  $v = aI_2$  je také imaginární. Označme  $v = j|v|$ , kde  $|v|$  je absolutní hodnota. Podle rovnice (II-205) je

$$\gamma^2 = k_1^2 - I_1^2 = k_1^2 - \frac{u^2}{a^2}, \text{ neboť } u = I_1 a$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (II-204), dostaneme pro  $n = 1$  a  $\mu_1 = \mu_2$

$$\left[ \frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_1(u)} - \frac{1}{v} \frac{H_1^{(1)'}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] \left[ \frac{k_1^2}{u} \frac{J_1(u)}{J_1(u)} - \frac{k_2^2}{v} \frac{H_1^{(1)'}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] = \\ = \left( k_1^2 - \frac{u^2}{a^2} \right) \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)$$

Protože

$$J_1'(u) = -\frac{1}{u} J_1(u) + J_0(u)$$

a

$$H_1^{(1)'}(v) = -\frac{1}{v} H_1^{(1)}(v) + H_0^{(1)}(v)$$

je

$$\left[ \frac{1}{u} \left( -\frac{1}{u} + \frac{J_0(u)}{J_1(u)} \right) - \frac{1}{v} \left( -\frac{1}{v} + \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right) \right] \left[ k_1^2 \left( -\frac{1}{u} + \frac{J_0(u)}{J_1(u)} \right) - \frac{k_2^2}{v} \left( -\frac{1}{v} + \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right) \right] = \left( k_1^2 - \frac{u^2}{a^2} \right) \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)$$

Při tom je

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

kde  $\lambda_1$  je délka vlny ve volném prostoru s konstantami  $\epsilon_1, \mu_1$   
 $\lambda_2$  délka vlny ve volném prostoru s konstantami  $\epsilon_2, \mu_2$ .

Dosadíme-li do předchozího výrazu za  $v = |v|$ , je

$$\left[ -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \frac{J_0(u)}{J_1(u)} - \frac{1}{|v|^2} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] \left[ -\frac{1}{\lambda_1^2 u^2} + \frac{1}{\lambda_2^2 |v|} \frac{J_0(u)}{J_1(u)} - \frac{1}{\lambda_2^2 |v|^2} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] - \frac{1}{\lambda_2^2 |v|} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} - \frac{u^2}{a^2} \right) \left( -\frac{1}{|v|^2} - \frac{1}{u^2} \right)$$

Při tom musíme uvážit, že  $H_0^{(1)}(v) = \frac{|H_0^{(1)}(v)|}{j}$  a  $H_1^{(1)}(v) = |H_1^{(1)}(v)|$ . Potom

$$\left[ -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \frac{J_0(u)}{J_1(u)} - \frac{1}{|v|^2} + \frac{1}{|v|} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] \left[ -\frac{1}{\lambda_1^2 u^2} + \frac{1}{\lambda_2^2 |v|} \frac{J_0(u)}{J_1(u)} - \frac{1}{\lambda_2^2 |v|^2} + \frac{1}{\lambda_2^2 |v|} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} - \frac{u^2}{a^2} \right) \left( -\frac{1}{|v|^2} - \frac{1}{u^2} \right) \quad (\text{II-218})$$

Vlnová délka volného prostoru s konstantami  $\epsilon_1$  a  $\mu_1$  je  $\lambda_1 = c_1 \frac{1}{f}$ , kde  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}$  a  $f$  je kmitočet. Obdobně vlnová délka volného prostoru s elektrickými konstantami  $\epsilon_2$  a  $\mu_2$  je

$$\lambda_2 = c_2 \frac{1}{f}, \text{ kde } c_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$$

Potom poměr vlnových délek v obou prostředích je

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$

$$\text{Pro } \mu_1 = \mu_2 \text{ je } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

$$\lambda_2^2 = \lambda_1^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \lambda_1^2 \kappa \quad (\text{II-219})$$

$$\text{kde } \kappa = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Násobme rovnici (II-218) čtvrcem poloměru  $a^2$  a dosadíme za  $\lambda_2$  příslušný výraz z rovnice (II-219). Dostaneme

$$\left[ \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} \frac{J_0(u)}{J_1(u)} + \frac{1}{|v|^2} + \frac{1}{|v|} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] \left[ \frac{a^2}{\lambda_2^2} \kappa - \frac{a^2}{\lambda_2^2} \frac{J_0(u)}{J_1(u)} + \frac{a^2}{\lambda_2^2 |v|^2} - \frac{a^2}{\lambda_2^2 |v|} \frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \right] = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda_2^2} \kappa - u^2 \right) \left( \frac{1}{|v|^2} + \frac{1}{u^2} \right) \quad (\text{II-220})$$

Mimo to z rovnice (II-217) vyplývá

$$|\Gamma_2|^2 = k_1^2 - k_2^2 - \Gamma_1^2$$

protože  $\Gamma_2$  je imaginární výraz.

Vyjádříme konstanty přenosu  $k_1$  a  $k_2$  pomocí vlnových délek

$$\Gamma_2^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} \kappa - \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} - \Gamma_1^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} (\kappa - 1) - \Gamma_1^2$$

Z toho

$$|v| = |\Gamma_2 a| = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^2}{\lambda_2^2} (\kappa - 1) - u^2} \quad (\text{II-221})$$

Řešením rovnic (II-220) a (II-221) dostaneme výrazy  $u$  a  $|v|$  pro určitý poměr dielektrických konstant  $\kappa$  a pro určitý poměr poloměru  $a$  k vlnové délce  $\frac{a}{\lambda_2}$ .

Označme výrazem  $\lambda_e$  vlnovou délku elektromagnetické vlny v dielektrickém válci. Protože

$$\lambda_e = c_e \frac{1}{f}$$

kde  $c_e$  je fázová rychlost v dielektrickém válci

$f$  kmitočet

a protože

$$\lambda_2 = \frac{c}{f}$$

kde  $\lambda_2$  je vlnová délka ve volném prostoru ( $\epsilon_2 \equiv \epsilon_0, \mu_2 \equiv \mu_0$ )

$c$  rychlost šíření elektromagnetické vlny ve volném prostoru, je

$$\frac{c_e}{c} = \frac{\lambda_e}{\lambda_2}$$

Při tom délka vlny v dielektrickém válci je

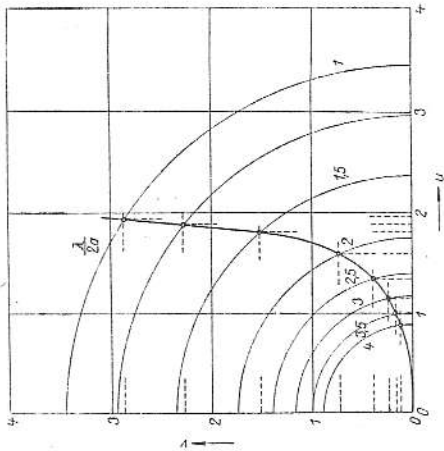
$$\lambda_e = \frac{2\pi a}{\gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_2^2 - \Gamma_2^2}} = \sqrt{\frac{2\pi a}{\lambda_2^2 - v^2}}$$

a potom poměr rychlostí je

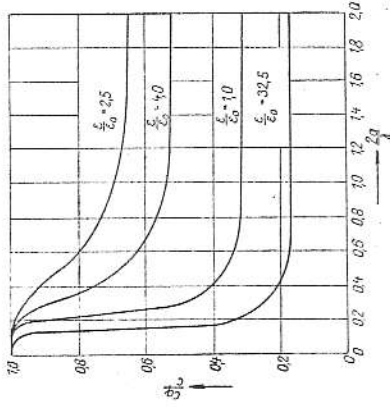
$$\frac{c_e}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_2^2}{4\pi^2 a^2} v^2}} \quad (\text{II-222})$$

Naneseme-li na osu  $y$  velikost  $|v|$  a na osu  $x$  velikost  $u$ , dostaneme závislost  $|v|$  na  $u$  podle rovnice (II-220) a druhou závislost mezi  $u$  a  $v$  podle rovnice (II-221). Závislost podle rovnice (II-221) je znázorněna řadou kružnic, jejichž poloměr je definován poměrem dielektrického válce, dielektrickou konstantou válce a délkou vlny ve volném prostoru  $\lambda_2$ .

Obě tyto závislosti znázorňuje obr. 35 pro poměrnou dielektrickou konstantu  $\kappa = 2,5$ . Známe-li tedy poměr  $\frac{a}{\lambda_0}$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_c$  určíme z uvedené křivky hodnoty  $|\varphi|$  a  $u$ . Z těchto veličin potom vypočítáme poměr  $\frac{C_1^{(0)}}{C_2^{(0)}}$  nebo  $\frac{C_2}{C_1}$  podle rovnice (II-222). Poměr  $\frac{C_2}{C_1}$  v závislosti na poměru  $\frac{a}{\lambda_0}$  pro různé  $\kappa$  je graficky znázorněn na obr. 36.



Obr. 35. Grafické znázornění rovnice (II-220) a rovnice (II-221).



Obr. 36. Grafické znázornění závislosti poměru fázové rychlosti k rychlosti světla na parametru  $\frac{a}{\lambda_0}$  při různých dielektrických konstantách.

Uvedli jsme již, že v dielektrickém válci nemohou existovat samostatné vlny TM nebo TE mimo případ, kdy pole je cirkulárně souměrné ( $n=0$ ). Takové vlny, u nichž intenzita elektrického pole i intenzita magnetického pole mají všechny složky, tedy i ve směru osy válce, nazýváme vlnami hybridními.

Intenzita elektrického a intenzita magnetického pole v dielektrickém válci jsou dány vztahy (II-182) až (II-187), kde  $\gamma_1^{(0)} = \gamma_2^{(0)} = \gamma_3^{(0)} = \gamma_4^{(0)} = \gamma$ ,  $\Gamma_1^{(0)} = \Gamma_2^{(0)} = \Gamma_3^{(0)} = \Gamma_4^{(0)} = \Gamma$ ,  $C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = C_3^{(0)} = C_4^{(0)} = C$  a kde jsme nahradili konstanty  $C_1^{(0)}C_2^{(0)}$ ,  $C_3^{(0)}C_4^{(0)}$ ,  $C_1^{(0)}C_3^{(0)}$  a  $C_2^{(0)}C_4^{(0)}$  novými konstantami  $C_1^{(0)}$ ,  $C_2^{(0)}$ ,  $C_3^{(0)}$  a  $C_4^{(0)}$ .

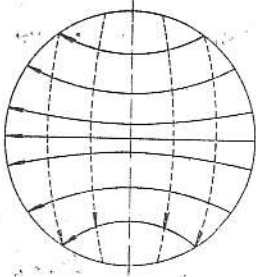
V těchto vztazích neznáme konstanty  $C_1^{(0)}$ ,  $C_2^{(0)}$ ,  $C_3^{(0)}$  a  $C_4^{(0)}$ . Poměr těchto konstant určíme z okrajových podmínek, zahrnutých v rovnicích (II-202) a (II-203). Z první rovnice vyplývá:

$$C_1^{(0)} \gamma n \frac{1}{a} \left( \frac{\Gamma_2^{(0)} - \Gamma_3^{(0)}}{\Gamma_2^{(0)}} \right) = C_2^{(0)} \left[ \omega \mu_0 \Gamma_2^{(0)} \frac{\Gamma_1^{(0)}}{\Gamma_2^{(0)}} \frac{H_n^{(0)}(\Gamma_2 a)}{H_n^{(0)}(\Gamma_3 a)} - \omega \mu_0 \Gamma_1^{(0)} \frac{J_n(\Gamma_1 a)}{J_n(\Gamma_2 a)} \right]$$

Z toho dostaneme po úpravě výraz pro poměr  $\frac{C_1^{(0)}}{C_2^{(0)}}$  při  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  pro  $n = 1$ :

$$\frac{C_1^{(0)}}{C_2^{(0)}} = -j \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J_1(u)}{J_1(u)} \frac{H_0^{(0)}(v)}{H_1^{(0)}(v)} \frac{1}{1 - \left| \frac{u}{v} \right|^2} \quad (\text{II-223})$$

Z křivek na obr. 34 jsme určili výrazy  $u$ ,  $v$  a  $\lambda_c$  při daných rozměrech dielektrického válce a dané dielektrické konstantě válce. Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (II-223), určíme poměr  $\frac{C_1^{(0)}}{C_2^{(0)}}$ . Známe-li tento poměr, lze určit tvar pole, dosadíme-li jej do výrazů pro jednotlivé složky pole. Tvar pole u vlny  $s = n = 1$  se podobá vlnovodovému vidu  $TE_{11}$  (obr. 37). Z výrazu (II-223) je zřejmé, že poměr  $\frac{C_1^{(0)}}{C_2^{(0)}}$  (poměr složek pole TM a TE) je funkcí poměru.



Obr. 37. Uspořádání silových čar intenzity elektrického a magnetického pole donutivního vidu v dielektrické tyči.

Jsou-li poloměr drátu a dielektrická konstanta takové, že se fázová rychlost ve vnějším prostředí blíží rychlosti světla, bude se konstanta  $|\varphi|$  blížit nule. Provedeme-li pro tento případ rozbor vztahu (II-223) pro  $n = 1$ , zjistíme, že konstanta  $C_1^{(0)}$ , která přísluší příčné magnetické vlně, bude za nedbatelně malá proti konstantě  $C_2^{(0)}$ , která přísluší příčné vlně elektrické. Za těchto okolností bude v dielektrickém drátě převládat vlna  $TE_{11}$ .

Dielektrického drátu použijeme při konstrukci dielektrické antény.

## 26. Šíření elektromagnetické vlny podél vodivého válce

V tomto článku pojednáme o šíření elektromagnetické vlny podél vodivého válce, obklopeného dokonalým dielektrikem. Budeme uvažovat jen osové souměrné pole ( $n=0$ ). Uvedli jsme již, že v tomto případě mohou existovat příčné vlny elektrické a magnetické nezávisle na sobě. Všíme-li si podrobněji příčné vlny magnetické. Princip řešení uspořádání pole bude stejný jako u dielektrického válce. Rozdíl bude jen v tom, že musíme uvážit vlny vodivosti válce. Pro souměrné pole válcovitého vodiče ( $n=0$ ) jsme odvodili okrajové podmínky (II-207) a (II-207.1). Při tom vztah (II-207.1) odpovídá vlně TM. Nahradíme-li v této rovnici  $J_0^{(0)}$  výrazem  $-J_1^{(0)}$  a  $H_0^{(0)}$  výrazem  $-H_1^{(0)}$  (II-207), dostaneme

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 u} J_0^{(0)}(u) = \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \frac{H_1^{(0)}(v)}{H_0^{(0)}(v)} \quad (\text{II-224})$$

Při tom je  $k_1^2 = -j\omega\mu_1(\sigma + j\omega\epsilon_1)$  a  $k_2^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$ . Je-li vodivost  $\sigma \gg \omega\epsilon_1$ , jak u vodičů bývá, je  $k_1^2 = -j\omega\mu_1\sigma$ . Podle rovnice (II-205) a (II-205) platí

$$\Gamma_1^2 = k_1^2 - \gamma^2 \quad \text{a} \quad \Gamma_2^2 = k_2^2 - \gamma^2$$

Jde-li o vodič, jehož vodivost  $\sigma$  je velká, je  $|k_1 a| \gg 1$ , a tedy i  $\Gamma_1 a = u \gg 1$ . Proto v rovnicích (II-224) vyjádříme  $J_1^{(0)}(u)$  a  $J_0^{(0)}(u)$  asymptotickými odhady. Protože  $k_1 = \sqrt{-j\omega\mu_1\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}}$ , je  $k_1$  komplexní číslo. U dokonale vodivého válce  $\sigma \rightarrow \infty$  a potom  $k_1$  bude komplexní číslo, u něhož se reálná i imaginární část blíží nekonečnu. Abychom určili hodnotu Besselových funkcí  $J_1^{(0)}(u)$  a  $J_0^{(0)}(u)$  při  $|u| \rightarrow \infty$ , vyjádříme je pomocí Hankelových funkcí

$$J_1^{(0)}(u) = \frac{H_1^{(1)}(u) + H_1^{(2)}(u)}{2}$$

$$J_0^{(0)}(u) = \frac{H_0^{(1)}(u) + H_0^{(2)}(u)}{2}$$

Pro  $u \rightarrow \infty$  platí

$$H_1^{(1)}(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{j(u - \frac{\pi}{4})}$$

$$H_1^{(2)}(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-j(u - \frac{3}{4}\pi)}$$

$$H_0^{(1)}(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{j(u - \frac{1}{4}\pi)}$$

$$H_0^{(2)}(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-j(u - \frac{1}{4}\pi)}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do výrazu pro  $J_1(u)$  a  $J_0(u)$ , dostaneme

$$J_1(u) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi u} \left[ e^{j(u - \frac{3}{4}\pi)} + e^{-j(u - \frac{3}{4}\pi)} \right]$$

$$J_0(u) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi u} \left[ e^{j(u - \frac{1}{4}\pi)} + e^{-j(u - \frac{1}{4}\pi)} \right]$$

Uvedli jsme, že konstanta  $u$  je komplexní číslo. Označme ji  $u = x + iy$ . Potom bude

$$J_1(u) = J_0(x + iy) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi(x + iy)} \left( e^{jx - y - j\frac{3}{4}\pi} + e^{-jx + y - j\frac{3}{4}\pi} \right)$$

$$J_0(u) = J_0(x + iy) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi(x + iy)} \left( e^{jx - y - j\frac{1}{4}\pi} + e^{-jx + y - j\frac{1}{4}\pi} \right)$$

a jejich podíl je

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)} \rightarrow \frac{e^{jx} e^{-y} e^{-j\frac{3}{4}\pi} + e^{-jx} e^{y} e^{-j\frac{3}{4}\pi}}{e^{jx} e^{-y} e^{-j\frac{1}{4}\pi} + e^{-jx} e^{y} e^{-j\frac{1}{4}\pi}} = \frac{e^{-2y} e^{j\pi} + e^{2y} e^{-j\pi}}{e^{-2y} e^{j\pi} + e^{2y} e^{-j\pi}} = \frac{e^{j\pi} + e^{-j\pi}}{e^{j\pi} + e^{-j\pi}} = 1$$

Bliží-li se imaginární složka veličiny  $u$  nekonečnu ( $y \rightarrow \infty$ ), potom

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)} \rightarrow \frac{e^{j\frac{3}{4}\pi}}{e^{-j\frac{1}{4}\pi}} = e^{j\pi} = 1$$

a vztah (II-224) upravíme takto:

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} = -j \frac{\mu_1 k_2^2}{\mu_2 k_1^2} u$$

Bude-li  $\sigma \rightarrow \infty$ , bude  $k_1 \rightarrow \infty$  a předcházející výraz se zjednoduší na

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \rightarrow 0$$

To nastane tehdy, je-li  $v = 0$ . (Výraz  $\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)}$  při  $v \rightarrow 0$  se také blíží nule.) Potom příčná konstanta

$$\Gamma_2 = 0 \text{ a}$$

Je-li vodivost válce  $\sigma$  konečná, je i  $k_1$  konečná a potom je

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} = -j u \frac{k_2^2}{k_1^2} \quad (\text{je-li } \mu_1 = \mu_2) \quad (\text{II-225})$$

Konstanta  $u = \Gamma_2 a = a / \sqrt{k_1^2 - \gamma^2}$ . Konstanta přenosu  $\gamma$  se nebudou příliš lišit od konstanty přenosu volného vzduchového prostoru  $k_2$ , neboť při dobré vodivosti kovu  $v \rightarrow 0$ , jak jsme právě dokázali.

Potom  $u = a / \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$  a je-li  $k_1 \gg k_2$ , bude

$$u \approx k_1 a$$

Dosadíme-li do rovnice (II-225), platí

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} = -j \frac{k_2^2}{k_1^2} a$$

Uvedli jsme, že při dobré vodivosti  $\sigma$  platí  $v \rightarrow 0$ . Nahradíme-li tedy Hankelovy funkce v předcházejícím výrazu příbližným výrazem pro  $v \rightarrow 0$ , dostaneme

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \xrightarrow{v \rightarrow 0} -v \ln \frac{\gamma v}{2j}$$

kde  $\gamma_0 = 1,7811$  je Eulerova konstanta.

Potom

$$v^2 \ln \frac{\gamma v}{2j} = j \frac{k_2^2}{k_1^2} a \quad (\text{II-226})$$

Dosadíme pro jednodušost za výraz  $\left( \frac{\gamma v}{2j} \right)^2$  veličinu  $\eta$ . Dostaneme

$$v^2 = -\frac{4\eta}{\gamma^2}$$

Na základě toho upravíme rovnici (II-226) tak, že

$$\eta \ln \eta = -j \frac{\gamma_0^2 k_2^2}{2 k_1^2} a$$

a nahradíme-li výraz  $-j \frac{\gamma_0^2 k_2^2}{4 k_1^2} a$  pomocným znakem  $w$ , bude platit

$$\eta \ln \eta = w$$

Tuto transcendentní rovnici budeme řešit methodou postupného přiblížení podle Sommerfelda. Podle této metody lze psát pro  $(n + 1)$ né přiblížení, je-li  $\eta_n$   $n$ té přiblížení, rovnici

$$\eta_{n+1} \ln \eta_{n+1} = w$$

Za první přiblížení výrazu  $\ln \eta_n$  můžeme brát  $-20$ . Potom bude

$$\eta_{n+1} = \frac{w}{-20}$$

Tento vztah představuje druhé přiblížení. Uvedený postup několikrát opakujeme, čímž dostaneme dostatečně přesný výsledek. Tak určíme  $\eta$  z toho  $v$ . Při tom

$$v = \Gamma_2 a$$

a tedy

$$\Gamma_2 = \frac{v}{a}$$

Známe-li  $\Gamma_2$ , určíme konstantu přenosu  $\gamma$  z výrazu

$$\gamma = \sqrt{k_2^2 - \Gamma_2^2}$$

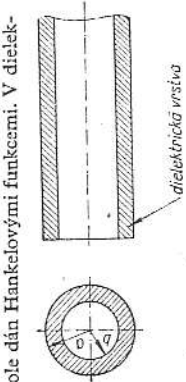
Při tom zjistíme, že tato konstanta přenosu má hodnotu, jež se málo liší od  $k_2$  ( $k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ) a má malou reálnou část. Tato malá reálná hodnota podmiňuje malý útlum při šíření elektromagnetické vlny. Známe-li konstantu přenosu, určíme strukturu pole podle stejných vztahů, jichž jsme použili při výpočtu složek pole ve vlnovodu. Při tom zjistíme, že intenzity pole ve vodiči rychle ubývá a že ubývá i v kruhovém vodiči příbližně podle téhož zákona, jako ve vodičném pásku, t. j. exponenciálně.

Těchto vlastností vodičného drátu použijeme k přenosu elektromagnetické vlny. Nevýhodou takového přenosu elektromagnetické vlny je to, že je k němu třeba dosti velkého prostoru ve vnějším prostředí dielektrického drátu, neboť pole ve vnějším prostředí se pomalu zmenšuje se vzdalujícím poleměrem. Vlastnosti přenosu elektromagnetické energie se v tomto směru zlepšují, obalíme-li vodič drát dielektrickou vrstvou.

## 27. Šíření elektromagnetické vlny podél vodivého válce obaleného dielektrickou vrstvou

Provedeme výpočet elektromagnetického pole vodivého válce, který je obalen dielektrickou vlnovou vrstvou. Budeme uvažovat pole osově souměrné ( $n = 0$ ) vidu TM. Pro dielektrický drát s osově souměrnou vlnou vidu TM jsme odvodili okrajové podmínky (II-207.1)

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 \mu} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \frac{k_0^2}{\mu_0 v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)}$$



Obr. 38. Vodivý váleček obalený dielektrickou vrstvou.

Ve volném prostoru mimo dielektrický váleček je průběh pole dán Hankelovými funkcemi. V dielektrické vrstvě (mezikruhovém válci) je pole dáno Besselovými a Neumannovými funkcemi. Ve vodivém válci předpokládáme pole nulové (obr. 38). Protože je pole dielektrické vrstvě dáno Besselovými a Neumannovými funkcemi, upravíme okrajovou podmínku (II-207.1) pro tento případ tak, že místo výrazů  $J_1(u)$  a  $J_0(u)$  dosadíme výrazy  $C_1 J_1(u) + C_2 N_1(u)$  a  $C_1 J_0(u) + C_2 N_0(u)$ . Při tom  $u = \Gamma_1 a$ , kde  $a$  je vnější poloměr dielektrické mezivrstvy. Dostaneme tedy na vnějším povrchu dielektrické vrstvy okrajovou podmínku

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 \mu} \frac{C_1 J_1(u) + C_2 N_1(u)}{C_1 J_0(u) + C_2 N_0(u)} = \frac{k_0^2}{\mu_0 v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)} \quad (\text{II-227})$$

kde  $v = \Gamma_2 a$ .

Druhá okrajová podmínka vyplývá z toho, že na povrchu vodivého válce, jehož poloměr je  $b$ , je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. Protože jde v tomto případě o vlnu vidu TM, musí být na povrchu pláště složka intenzity elektrického pole ve směru osy  $z$  nulová. Tato složka elektrického pole je na povrchu vodivého válce úhňrná výrazu  $C_1 J_0(w) + C_2 N_0(w)$ , a proto musí platit

$$C_1 J_0(w) + C_2 N_0(w) = 0 \quad (\text{II-228})$$

kde  $w = \Gamma_1 b$ . Z této poslední podmínky vyplývá

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(w)}{N_0(w)}$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (II-227), dostaneme

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 \mu} \frac{J_1(u) N_0(w) - J_0(w) N_1(u)}{J_0(u) N_0(w) - J_0(w) N_0(u)} = \frac{k_0^2}{\mu_0 v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)} \quad (\text{II-229})$$

Při tom, jak jsme již uvedli,  $u = \Gamma_1 a$ ,  $v = \Gamma_2 a$  a  $w = \Gamma_1 b$ . Konstanta přenosu je ve vnitřním prostředí i v prostředí dielektrika stejná a je dána výrazem

$$\gamma = \sqrt{k_0^2 - \Gamma_2^2} = \sqrt{k_1^2 - \Gamma_1^2}$$

Při praktickém provedení drátu tohoto druhu se snažíme, aby tloušťka dielektrika byla poměrně malá vzhledem k průměru drátu. Dále si budeme všímat jen tohoto případu. Protože  $u \rightarrow w = \Gamma_1(a-b)$  a je-li  $a-b$  malé číslo, lze psát, že  $u-w = \Gamma_1 \delta b$ . Nahradíme takto změnu poloměru diferenciálem. Hodnotu výrazu  $J_0(\Gamma_1 b)$  určíme z hodnoty  $J_0(\Gamma_1 a)$  a diferenciální změny této funkce. Platí tedy

$$J_0(\Gamma_1 b) = J_0(\Gamma_1 a) - dJ_0(\Gamma_1 a) = J_0(\Gamma_1 a) - \frac{\partial J_0(\Gamma_1 a)}{\partial a} da$$

Při tom

$$\frac{\partial J_0(\Gamma_1 a)}{\partial a} = -\Gamma_1 J_1(\Gamma_1 a)$$

a

$$da \doteq (a-b)$$

Porom

$$J_0(\Gamma_1 b) = J_0(\Gamma_1 a) + \Gamma_1 J_1(\Gamma_1 a)(a-b)$$

a obdobně

$$N_0(\Gamma_1 b) = N_0(\Gamma_1 a) + \Gamma_1 N_1(\Gamma_1 a)(a-b)$$

Dosadíme-li tyto vztahy do okrajové podmínky rovnice (II-229), dostaneme

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 \mu} \frac{J_1(u) N_0(w) + J_1(u) N_1(w) \Gamma_1(a-b) - J_0(w) N_1(u) - J_1(u) N_0(w) \Gamma_1(a-b)}{J_0(u) N_0(w) + J_0(u) N_1(w) \Gamma_1(a-b) - J_0(w) N_0(u) - J_1(u) N_0(w) \Gamma_1(a-b)} = \frac{k_0^2}{\mu_0 v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)}$$

Je-li  $\mu_1 = \mu_0$ , dostaneme po úpravě

$$\frac{k_1^2}{\mu} \frac{J_1(u) N_0(w) - J_0(w) N_1(u)}{\Gamma_1 [J_0(w) N_1(u) - J_1(u) N_0(w)](a-b)} = \frac{k_0^2}{v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)}$$

a z toho

$$\frac{k_1^2}{\mu} \frac{1}{\Gamma_1(a-b)} = \frac{k_0^2}{v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)} \quad (\text{II-230})$$

Abyste byla fázová rychlost šíření menší než rychlost světla, musí být  $v$  imaginární. Hankelova funkce nultého řádu prvního druhu imaginárního argumentu je záporné imaginární číslo. Hankelova funkce prvního řádu prvního druhu imaginárního argumentu je záporné reálné číslo. Protože v praxi se u povrchových vln uvažovaného druhu uplatňují takové vlny, jejichž fázová rychlost se málo liší od rychlosti světla, bude konstanta  $v$  malá a Hankelovy funkce lze pak nahradit jejich aproximačními hodnotami při malých argumentech. Při malých argumentech platí pro Hankelovy funkce vztahy

$$H_0^{(1)}(jv) \rightarrow -j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma_e v}; \quad H_1^{(1)}(jv) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \frac{2}{v}$$

a

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \rightarrow j|v| \ln \frac{2}{\gamma_e v} = -jv \ln \frac{\gamma_e |v|}{2}$$

kde  $\gamma_e$  je Eulerova konstanta.

Potom se rovnice (II-230) zjednoduší tak, že

$$-\frac{\mu}{k_1^2} \Gamma_1(a-b) = \frac{|v|^2}{k_0^2} \ln \frac{\gamma_e |v|}{2}$$

V tomto případě je  $|v|$  absolutní hodnota a  $\Gamma_1 = \frac{\mu}{a}$ ; proto

$$-\frac{\mu^2}{k_1^2} \frac{a-b}{a} = \frac{|v|^2}{k_0^2} \ln \frac{\gamma_e |v|}{2} \quad (\text{II-231})$$

Mezi konstantou  $\mu$  a konstantou  $|v|$  platí na základě rovnosti konstanty přenosu v obou prostředích vztah

$$k_1^2 - \Gamma_1^2 = k_0^2 + |\Gamma_2|^2$$

neboť  $\Gamma_2 = j|\Gamma_2|$ .

Uvážíme-li, že  $\Gamma_1 a = u$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  a  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon}$ , kde  $\epsilon$  je poměrná dielektrická konstanta dielektrické vrstvy, je

$$u^2 = \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 (\epsilon - 1) - |v|^2$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (II-231), dostaneme

$$-\left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} - \left( \frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \frac{|v|^2}{\epsilon} \right) \frac{a-b}{a} = \left( \frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 |v|^2 \ln \frac{\gamma_e |v|}{2}$$

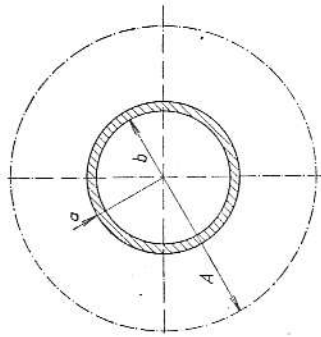
Protože  $|v|$  je veličina málo odlišná od nuly a  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$  veličina větší než jedna, lze v závorce na levé straně předchozího výrazu zanedbat člen  $\left( \frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \frac{|v|^2}{\epsilon}$  proti  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$ , a proto

$$-\frac{a-b}{a} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \left( \frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 |v|^2 \ln \frac{\gamma_e |v|}{2} \quad (\text{II-232})$$



Obr. 39 znázorňuje závislost  $\left(\frac{|v|}{2\pi}\right)^2 \ln \frac{z_0|v|}{2} = A$  na  $|v|$ . Chceme-li určit poměrnou dielektrickou tloušťku při dané dielektrické konstantě a daném poměru  $\frac{\lambda}{a}$ , musíme v obr. 39 násobit pořadnicí výrazem  $\frac{\lambda}{z-1} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2$ , kde  $z$  je poměrná dielektrická konstanta, a poloměr drátu a  $\lambda$  délka vlny.

Známe-li konstantu  $|v|$ , umíme určit konstantu  $I_1$  a konstantu přenosu  $\gamma$ .



Obr. 40. Příčný řez vodivým válcem obaleným dielektrickou vrstvou.

Obr. 39. Grafické znázornění závislosti veličiny  $A$  na veličině  $v$ .

V poslední době se k přenášení energie používá kovového drátu s dielektrickou vrstvou. Energie se šíří volným prostorem kolem drátu a je drátem vedena. Při tomto přenosu energie je důležité zjistit průběh pole a průběh výkonu v radiálním směru.

Energie se přenáší ve směru drátu. Umov-Poyntingův vektor má směr osy  $z$ , a proto dostaneme přenesený výkon integrací Umov-Poyntingova vektoru přes plochu kolmou na osu  $z$  a v mezích pro  $r = 0$  a  $r = \infty$ . V tomto rozmezí poloměru se přenesl celý výkon. Zvolíme-li druhou mezní hodnotu, při níž  $r = A$ , kde  $A$  je velikost obecného poloměru, přísluší tomuto oboru jen část přeneseného výkonu. Naším úkolem je určit výkon, který je přenesen touto částí, t. j. kruhem kolmým k ose drátu, s poloměrem  $A$  (obr. 40).

Mezi jednotlivými složkami pole a Hertzovým vektorem platí vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= k^2 \mathbf{\Pi}_z^e + \text{grad div } \mathbf{\Pi}_z^e \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{\Pi}_z^e \end{aligned} \quad \begin{aligned} (II-233) \\ (II-234) \end{aligned}$$

kde pro vnější prostředí

$$\mathbf{H}_z^e = C_0 \mathbf{H}_0^{(1)}(I_2 r) e^{-\gamma z}$$

$$\mathbf{H}_z^e = [C_1^{(1)} J_0(I_2 r) + C_2^{(1)} N_0(I_2 r)] e^{-\gamma z}$$

a pro vnitřní prostředí

$$C_1^{(1)} J_0(I_2 b) + C_2^{(1)} N_0(I_2 b) = 0$$

Při tom, jak jsme dokázali, platí mezi  $C_1^{(1)}$  a  $C_2^{(1)}$  vztah

$$C_1^{(1)} J_0(I_2 b) + C_2^{(1)} N_0(I_2 b) = 0$$

Proto Hertzův vektor pro vnitřní prostředí

$$\mathbf{H}_z^e = C_1 [J_0(I_2 r) N_0(I_2 b) - N_0(I_2 r) J_0(I_2 b)] e^{-\gamma z}$$

Složku pole  $H_\varphi$  určíme pro vnitřní a vnější pole z výrazu (II-234). Pro tyto složky pole platí

$$\begin{aligned} H_\varphi^{(e)} &= -j\omega \epsilon_0 C_1 I_1 [J_1^{(1)}(I_2 r) e^{-\gamma z} - H_2^{(1)}(I_2 r) e^{-\gamma z}] \quad (\text{pro vnější prostředí}) \\ H_\varphi^{(i)} &= -j\omega \epsilon_0 C_1 I_1 [J_1^{(1)}(I_2 r) N_0(I_2 b) - N_1^{(1)}(I_2 r) J_0(I_2 b)] e^{-\gamma z} \quad (\text{pro vnitřní prostředí}) \end{aligned}$$

kde  $C_0$  a  $C_1$  je upravená konstanta  $C_1^{(1)}$ . Hranice mezi vnějším a vnitřním prostředím je vytvořena válcem poloměru  $a$ . Na této hranici musí být tečné složky poli v obou prostředích stejné. Proto

$$j\omega \epsilon_0 C_0 I_2 H_1^{(1)}(I_2 a) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon_0 C_1 I_1 [J_1^{(1)}(I_2 a) N_0(I_2 b) - N_1^{(1)}(I_2 a) J_0(I_2 b)] e^{-\gamma z}$$

Z toho určíme poměr konstanty  $C_0$  a  $C_1$ :

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{\epsilon I_1 J_1(I_2 a) N_0(I_2 b) - N_1(I_2 a) J_0(I_2 b)}{\epsilon_0 I_2 H_1^{(1)}(I_2 a)} \quad (II-235)$$

Je-li  $a - b$  malé proti  $a$ , platí podobně jako v předešlém případě

$$\begin{aligned} J_0(I_2 b) &= J_0(I_2 a) + I_1 J_1(I_2 a)(a - b) \\ N_0(I_2 b) &= N_0(I_2 a) + I_2 N_1(I_2 a)(a - b) \end{aligned} \quad (II-236)$$

Protože uvažujeme v tomto rozboru jen takovou elektromagnetickou vlnu, u níž se fázová rychlost šíření příliš neliší od rychlosti světla, je výraz  $|I_2 a| \ll 1$ . Pro malý argument

$$H_1^{(1)}(I_2 a) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \frac{2}{|I_2 a|}$$

a proto se zjednoduší vztah (II-235) použitím vztahu (II-236) takto

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{C_1} &= \frac{\epsilon I_1 J_1(I_2 a) N_0(I_2 a) + I_1 J_1(I_2 a) N_1(I_2 a)(a - b) - N_1(I_2 a) J_0(I_2 a) - I_1 N_1(I_2 a) J_1(I_2 a)(a - b)}{\epsilon_0 I_2} \\ &= \frac{\epsilon I_1 J_1(I_2 a) N_0(I_2 a) - N_1(I_2 a) J_0(I_2 a)}{\epsilon_0 I_2} - \frac{1}{\pi} \frac{2}{|I_2 a|} \\ &= \frac{\epsilon I_1 J_1(I_2 a) N_0(I_2 a) - N_1(I_2 a) J_0(I_2 a)}{\epsilon_0 I_2} = j \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (II-237)$$

neboť

$$J_1(I_2 a) N_0(I_2 a) - N_1(I_2 a) J_0(I_2 a) = \frac{2}{\pi I_2 a}$$

a

$$I_2 = j|I_2|$$

Tim jsme určili vztah mezi konstantou vnějšího prostředí a konstantou vnitřního prostředí.

Nyní určíme celkový výkon přenesený vnějším i vnitřním prostředím. Pro Umov-Poyntingův vektor platí

$$P = \frac{1}{2} Z H_\varphi H_\varphi^*$$

kde  $Z$  je charakteristická impedance prostředí.

Výkon přenesený vnějším prostředím dostaneme integrací Umov-Poyntingova vektoru v mezích od  $r = a$  do  $r = \infty$ . Platí tedy

$$P_0 = \frac{1}{2} Z \int_{r=a}^{\infty} H_\varphi H_\varphi^* dS = \frac{1}{2} Z \int_a^{\infty} H_\varphi H_\varphi^* 2\pi r dr = \frac{1}{2} Z 2\pi \omega^2 \epsilon_0^2 I_2^2 \int_a^{\infty} H_1^{(1)2}(I_2 r) r dr$$

Poslední integrál upravíme tak, že

$$\int_a^{\infty} H_1^{(1)2}(I_2 r) r dr = \int_0^{\infty} H_1^{(1)2}(I_2 r) r dr - \int_0^a H_1^{(1)2}(I_2 r) r dr$$

Použijeme-li při číselném vyjádření uvedených integrálů Lommelova integrálu, dostaneme

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} Z 2\pi \omega^2 \epsilon_0^2 C_0^2 I_2^2 \left[ \frac{1}{2} \pi^2 [H_1^{(1)2}(I_2 a) - H_2^{(1)}(I_2 a) H^{(1)}(I_2 a)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \pi^2 [H_1^{(1)2}(I_2 a) - H_2^{(1)}(I_2 a) H_1^{(1)}(I_2 a)] \right] \end{aligned} \quad (II-237.1)$$

Dosadíme-li do výrazu

$$\frac{1}{2} \pi^2 [H_1^{(1)}(j_0 a) J_0(j_0 r) - H_2^{(1)}(j_0 r) H_1^{(1)}(j_0 b)]$$

za  $r = \infty$ , zjistíme, použijeme-li asymptotických výrazů pro Hankelovy funkce, že se uvedený výraz rovná nule.

Protože, jak jsme již uvedli, je  $|J_0(j_0 a)| \ll 1$ , nahradíme Hankelovy funkce jejich aproximativními hodnotami pro malé argumenty. Potom dostaneme pro výkon přenesený vnějším prostředím vztah

$$P_0 = \gamma C_e \omega \epsilon_0 \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{\gamma_0 a^2}{2} \right) \quad (\text{II-238})$$

kde  $\gamma_0$  je Eulerova konstanta.

Při tom jsme nahradili charakteristickou impedanci  $Z$  známým výrazem

$$Z = \frac{\gamma}{\omega \epsilon}$$

Nyní určíme výkon přenesený vnitřním dielektrickým vodičem:

$$P_1 = \frac{1}{2} Z \int_S H_\varphi H_\varphi^* dS$$

při čemž

$$H_\varphi = -j\omega \epsilon_0 C_1 \Gamma_1(\Gamma_1 r) N_0(\Gamma_1 b) - N_1(\Gamma_1 r) J_0(\Gamma_1 b) e^{-\Gamma_1 z}$$

Protože je obecně pro dielektrickou vstříčku ( $r = b$ ) velmi malé proti  $b$ , platí i zde vztahy

$$J_0(\Gamma_1 b) = J_0(\Gamma_1 r) + \Gamma_1 J_1(\Gamma_1 r)(r - b)$$

$$N_0(\Gamma_1 b) = N_0(\Gamma_1 r) + \Gamma_1 N_1(\Gamma_1 r)(r - b)$$

Potom

$$H_\varphi = -j\omega \epsilon_0 C_1 \frac{2}{\pi r} e^{-\Gamma_1 z}$$

Dosadíme-li tento výraz do vztahu pro přenesený výkon, je

$$P_1 = \frac{1}{2} Z \int_a^b H_\varphi H_\varphi^* dS = \frac{1}{2} Z \int_a^b \omega^2 \epsilon^2 C_1^2 \frac{4}{\pi^2 r^2} 2\pi r dr = C_1^2 \gamma_0 \omega \epsilon \frac{4}{\pi} \ln \frac{a}{b} \quad (\text{II-239})$$

Pro kvantitativní posouzení výkonu přeneseného vnějším prostředím nás zajímá poměr výkonu přeneseného vnějším prostředím k výkonu přenesenému vnitřním prostředím. Použijeme-li vztahů (II-238) a (II-239) se zřetelem na vztah (II-237), je poměr výkonů

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{0,5 + \ln \frac{\gamma_0 a^2}{2}}{\ln \frac{a}{b}} \quad (\text{II-240})$$

Protože  $\frac{a}{b}$  je číslo poměrně málo se lišící od jedné, potom  $\ln \frac{a}{b} \rightarrow 0$  a z rovnice (II-240) vyplývá, že téměř celý výkon je přenesen vnějším prostředím.

Chceme-li určit přenesený výkon, který přísluší poloměru  $A$ , musíme ve výrazu (II-237.1) nahradit mez  $r = \infty$  mezi  $r = A$ . Potom platí

$$P_0' = \gamma_0 \omega \epsilon \pi C_1^2 J_0^2 \left( \frac{1}{2} a^2 [H_1^{(1)}(j_0 a) J_0(j_0 A) - H_2^{(1)}(j_0 A) H_1^{(1)}(j_0 a)] - \frac{1}{2} A^2 [H_1^{(1)}(j_0 A) J_0(j_0 A) - H_2^{(1)}(j_0 A) H_1^{(1)}(j_0 A)] \right)$$

Poměr tohoto výkonu k celkovému výkonu, určenému výrazem (II-238), při čemž jsme zanedbali výkon přenesený dielektrickou vstřovou, označíme  $p$ . Potom

$$p = \frac{\pi^2 J_0^2 \left( \frac{1}{2} a^2 [H_1^{(1)}(j_0 a) J_0(j_0 A) - H_2^{(1)}(j_0 A) H_1^{(1)}(j_0 a)] - \frac{1}{2} A^2 [H_1^{(1)}(j_0 A) J_0(j_0 A) - H_2^{(1)}(j_0 A) H_1^{(1)}(j_0 A)] \right)}{4 \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{\gamma_0 a^2}{2} \right)} \quad (\text{II-241})$$

Z výrazu (II-241) lze určit pro určitý poměr přeneseného výkonu  $p$  příslušný poloměr  $A$  v závislosti na  $|J_0(j_0 a)|$ . Tyto křivky jsou znázorněny na obr. 41.

Při praktickém navrhování drátu s dielektrickou vstřovou postupujeme takto: Chceme, aby se při dané tloušťce drátu přenesla požadovaná část výkonu (udaná poměrem  $p$ ) kruhovým průřezem poloměru  $A$ . Tomuto požadavku odpovídá určitá hodnota  $v$  (určíme ji podle křivek). Této hodnotě přísluší určitá dielektrická konstanta poměrně tloušťka dielektrické vstřovky (určí se pomocí křivek na obr. 41).

Důležitou veličinou při posuzování přenosu energie podle drátu je měrný útlum. Určíme jej podle známého vzorce

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P}$$

kde  $P_z$  je celkový ztrátový výkon na jednotku délky drátu  $P$  celkový přenesený výkon.

Ztrátový výkon je dán ztrátami v dielektriku a ztrátami v kovové části drátu. Ztrátový výkon v dielektriku určíme z výrazu

$$P_{ze} = \frac{1}{2} \int_{z=0}^z \int_{\sigma=0}^{\sigma=b} \sigma_e (EE^*) dV$$

kde  $\sigma_e$  je náhradní vodivost dielektrika (známe-li  $\text{tg } \delta$  dielektrika, určíme  $\sigma_e$  ze vztahu  $\sigma_e = \text{tg } \delta \cdot \omega \epsilon$ )

$E$  intenzita elektrického pole

$P_{ze}$  ztrátový výkon v dielektriku.

Ztrátový výkon v kovové části drátu určíme z proudu na povrchu, kde  $r = b$ , stejně jako u vlnovodu. Provedeme-li tento postup, dostaneme pro měrný útlum vzorec

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{e - \epsilon_0} \frac{|J_0|^2}{k_0} \left( 1 - \ln 0,89 |J_0 a| + 0,5 \right) \text{tg } \delta - \frac{1}{2a} \frac{\left( \frac{\omega \epsilon_0 a}{2\pi f \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}}{\ln 0,89 |J_0 a| + 0,5} \quad (\text{II-242})$$

kde  $\epsilon$  je dielektrická konstanta dielektrické vstřivy

$\mu$  permeabilita kovové části drátu

$\sigma$  vodivost kovové části drátu

$\delta$  ztrátový úhel dielektrika.

Vyjádříme-li všechny geometrické veličiny v centimetrech, bude rozměr měrného útlumu dán v neperech na centimetry.

## 28. Šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu s periodickou strukturou

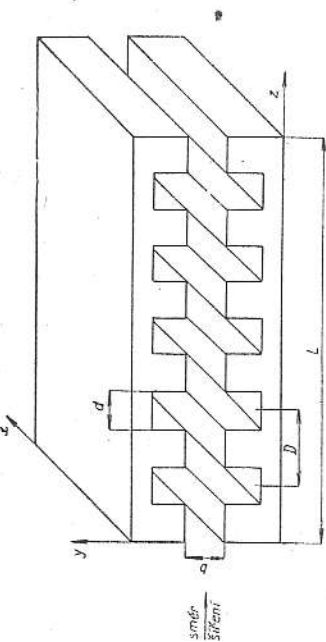
V čl. 18 jsme sledovali šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma rovinnými deskami. Nyní si všimneme šíření elektromagnetické vlny mezi dvěma deskami, v nichž jsou provedeny zářezy (obr. 42). Tyto zářezy se periodicky opakují. Proto takový druh vlnovodu nazýváme vedením s periodickou strukturou. Dokažeme, že fáze rychlost šíření elektromagnetické vlny v tomto vedení je menší než rychlost světla a že přímo vlna má jinou fázovou rychlost než vlna zpětná.

Nechť je  $N$  celkový počet zářezů připadajících na periodu. Perioda geometrického uspořádání je dána délkou  $L$  (odpovídá úhlu  $2\pi$ ). Protože zářezy jsou vytvořeny rovnoběžnými rovinami a vzdálenost mezi těmito rovinami je vzhledem k délce vlny malá, bude v těchto zářezích převládat příčná vlna elektricko-magnetická; vyšší vidy se v nich nemohou šířit. Intenzita elektrického pole je v zářezech kolmá k rovinám vyrábějícím zářez. Geometrické uspořádání pole ve všech zářezích je stejné, jen fáze pole se bude v jednotlivých zářezích lišit. Podíl celé periody může vzniknout obecně  $n$  vln, kde  $n$  je celé kladné číslo. Potom bude dán fázový posun mezi dvěma sousedními zářezí výrazem  $\frac{2\pi}{N} n$ , kde  $N$  je celkový počet zářezů,  $n$  celé číslo ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2}$ ).

Elektromagnetické pole uvnitř desek se zářezy dostaneme řešením vlnové rovnice s podmínkou

spojitosti poli na hranici. Budeme uvažovat příčné magnetické pole, které není závislé na souřadnici  $x$ . Omezuji plochy desek jsou dány rovnicemi (Obr. 42)

$$y = \frac{b}{2} \text{ a } y = -\frac{b}{2}$$



Obr. 42. Vedení s periodickou strukturou.

Protože intenzita elektrického pole mezi zátezy na hraničních plochách je konstantní a liší se jen fází, lze ji vyjádřit vztahem

$$E_z = Mc e^{-j\frac{2\pi}{N}np}$$

kde číslo  $p$  určuje pořadí zátezu,  $p = 0, 1, 2, \dots, N$ . Tento výraz platí pro zátezy, tedy pro

$$pD - \frac{d}{2} \leq z \leq pD + \frac{d}{2}$$

kde  $d$  je rozeč zátezu.

Pro ostatní místa je intenzita elektrického pole  $E_z$  nulová. Rozložíme výraz pro  $E_z$  ve Fourierovu komplexní řadu. Potom

$$E_z = \sum_{-\infty}^{\infty} C_q e^{j\frac{2\pi}{N}qz}$$

kde  $q$  je pořadí harmonické

$L$  perioda

$C_q$  amplituda harmonické, jejíž pořadí je  $q$ .

O této amplitudě platí

$$C_q = \frac{1}{L} \int_0^L E_z e^{-j\frac{2\pi}{N}qz} dz$$

V našem případě dostaneme, dosadíme-li za  $E_z$  příslušnou hodnotu,

$$C_q = \frac{1}{L} \int_0^L Mc e^{-j\frac{2\pi}{N}np} e^{-j\frac{2\pi}{N}qz} dz$$

Integraci provádíme v oboru periody  $L$ . V tomto intervalu má však výraz pod integrálem konečnou hodnotu jen pro souřadnice  $z$ , které přísluší zátezům, t. j. pro takové  $z$ , pro které platí

$$pD - \frac{d}{2} \leq z \leq pD + \frac{d}{2}$$

Potom je

$$C_q = \frac{1}{L} \sum_{p=0}^N \int_{pD - \frac{d}{2}}^{pD + \frac{d}{2}} Mc e^{-j\frac{2\pi}{N}np} e^{-j\frac{2\pi}{N}qz} dz = \frac{1}{\pi q} \sin \frac{\pi}{N} qd M \sum_{p=0}^N e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)p}$$

Součet v předcházejícím výrazu představuje geometrickou řadu. Proto dostaneme pro součet výraz

$$\sum_{p=0}^N e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)p} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} - 1}$$

a

$$C_q = \frac{1}{\pi q} \sin \frac{\pi qd}{N} M \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} - 1}$$

kde  $q$  je celé číslo, které určuje pořadí harmonické

$n$  počet vln na periodu (tedy také celé číslo).

Protože  $q$  i  $n$  jsou celá čísla, je  $i(n+q)$  celým číslem a potom  $e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} = 1$ . Součet geometrické řady by byl v tomto případě nulový mimo případ, kdy  $\frac{n+q}{N}$  je celé číslo. Potom  $e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} = 1$

a součet geometrické řady přejde v neurčitý výraz. Označíme-li výraz  $\frac{n+q}{N}$  celým číslem  $m$ , bude  $q = Nm - n$ , je-li  $m$  kladné, nebo  $q = -(Nm + n)$ , je-li  $m$  záporné. Vyjádříme-li číselné součet geometrické řady podle Hospitalova pravidla, dostaneme

$$\frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+q)} - 1} = N$$

Potom

$$C_q = \frac{MN}{\pi q} \sin \frac{\pi qd}{N}$$

Intenzitu elektrického pole  $E_z$  určíme z Fourierovy řady

$$E_z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{MN}{\pi q} \sin \frac{\pi qd}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N}qz} \quad (\text{II-243})$$

kde  $q = -(Nm + n)$  pro  $m = 0, 1, 2, \dots$

$q = Nm - n$  pro  $m = 1, 2, 3, \dots$ , při čemž  $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

Intenzita elektrického pole v závislosti na Hertzově vektoru je určena výrazem (I-33)

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi}_z + \text{grad div } \mathbf{\Pi}_z \quad (\text{II-244})$$

a intenzita magnetického pole výrazem (I-35)

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \mathbf{\Pi}_z \quad (\text{II-245})$$

Při tom Hertzův vektor vyhovuje vlnové rovnici s okrajovou podmínkou, že na rovinách se souřadnicemi  $y = \frac{b}{2}$  a  $y = -\frac{b}{2}$  musí být tečná složka intenzity elektrického pole spojitá. Tečná složka intenzity elektrického pole je dána složkou  $E_z$ . V prostředí se zátezy je určena výrazem (II-243) a v prostředí mezi deskami na základě rovnice (II-244) výrazem

$$E_z = \Gamma^2 \mathbf{\Pi}_z$$

Při tom  $H_z^0$  vyhovuje vlnové rovnici, a proto i  $E_z$  bude splňovat podmínku vlnové rovnice  $\Delta E_z + k^2 E_z = 0$ . Tuto vlnovou rovnici budeme řešit methodou separace proměnných v pravouhlých souřadnicích. V tomto případě

$$H_z^0 = T_1 T_2$$

$$T_1 = C_{1q} \sinh \Gamma_q' y + C_{2q} \cosh \Gamma_q' y$$

$$T_2 = C_{3q} e^{i\Gamma_q' z} + C_{4q} e^{-i\Gamma_q' z}$$

Při tom platí, že  $\Gamma_q'^2 = \gamma_q'^2 - k^2$ . Složka intenzity elektrického pole ve směru  $z$  bude potom dána superposicí výrazů  $\Gamma_q' T_1 T_2$ , pro všechna  $q$  a na deskách se záteží se musí rovnat intenzitě elektrického pole  $E_z$ , dané vztahem (II-243)

$$E_z = \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \left( C_{1q'} \sinh \Gamma_{q'}' \frac{b}{2} + C_{2q'} \cosh \Gamma_{q'}' \frac{b}{2} \right) \left( C_{3q'} e^{i\Gamma_{q'}' z} + C_{4q'} e^{-i\Gamma_{q'}' z} \right) =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{MN}{\pi q} \sin \frac{\pi q d}{L} e^{-i\frac{2\pi}{L} q z}$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( -C_{1q} \sinh \Gamma_q' \frac{b}{2} + C_{2q} \cosh \Gamma_q' \frac{b}{2} \right) \left( C_{3q} e^{i\Gamma_q' z} + C_{4q} e^{-i\Gamma_q' z} \right) =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{MN}{\pi q} \sin \frac{\pi q d}{L} e^{\frac{2\pi}{L} q z}$$

Aby platily tyto identity, musí  $q' = q$  a

$$C_{1q} = 0; \quad C_{4q} = 0; \quad \gamma_q' = \frac{2\pi}{L} q z$$

$$C_{2q} C_{3q} \cosh \Gamma_q' \frac{b}{2} = \frac{MN}{\pi q} \sin \frac{\pi q d}{L}$$

Sdružíme-li konstanty  $C_{2q} C_{3q}$  v jednu, kterou označíme  $C_q$ , bude

$$C_q = \frac{MN}{\pi q} \frac{1}{\cosh \Gamma_q' \frac{b}{2}} \sin \frac{\pi q d}{L}$$

Potom bude intenzita elektrického pole dána vztahem

$$E_z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{MN}{\pi q} \sin \frac{\pi q d}{L} \frac{\cosh \Gamma_q' y}{\cosh \Gamma_q' \frac{b}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{L} q z} \quad (II-246)$$

Velikost  $M$  je určena velikostí intenzity elektrického pole v místě záteží. Je-li šířka záteží  $d \ll \lambda$ , bude v něm převládát, jak jsme již uvedli, vid TEM. Při tom bude intenzita elektrického pole v místě záteží dána stejnou hodnotou jako intenzita elektrického pole mezi dvěma rovinnými deskami zakončenými nakrátko

$$E = M = C \sin kl$$

kde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$l$  je délka záteží.

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (II-246), dostaneme

$$E_z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{NC \sin kl}{\pi q} \sin \left( \frac{2qd}{L} \right) \frac{\cosh \Gamma_q' y}{\cosh \Gamma_q' \frac{b}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{L} q z} \quad (II-247)$$

kde  $q = -(Nm + n)$  pro  $m = 0, 1, 2, \dots$   
 $q = Nm - n$  pro  $m = 1, 2, 3, \dots$   
 $n = 0, 1, 2, \dots, 2$

Na základě vztahu (II-247) bychom určili Hertzův vektor a z něho ostatní veličiny pole. Ze vztahu (II-247) vyplývá, že se elektromagnetická vlna skládá ze součtu dílčích vln, postupujících oběma směry vzhledem k ose  $z$ . Konstanta přenosu obecně dílčí vlny je dána výrazem

$$\gamma_q = \frac{2\pi}{L} q = \frac{2\pi}{ND} q$$

Dosadíme-li za  $q$  příslušnou hodnotu, dostaneme pro konstantu přenosu postupné vlny v kladném směru

$$\gamma_m = \frac{2\pi}{ND} (Nm - n)$$

kde  $m$  je číslo, které určuje pořadí harmonické

$n$  fázový vztah mezi dvěma záteží

$D$  vzdálenost středů sousedních záteží.<sup>\*)</sup>

Fázová rychlost šíření  $v_m$  je dána vztahem

$$v_m = \frac{\omega}{\gamma_q} = \frac{\omega ND}{2\pi q} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{N}{2\pi(Nm - n)}$$

Obdobně platí pro fázovou rychlost vlny, která se šíří v záporném směru,

$$v_m = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{ND}{2\pi(Nm + n)}$$

kde  $c$  je rychlost světla.

Je-li  $m = 0$ , je fázová rychlost šíření

$$v_{m=0} = \frac{c}{\lambda} \frac{D}{n} = \frac{ND}{\lambda n} c$$

Fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny  $v_m$  bude menší než rychlost světla  $c$  tehdy, bude-li  $\lambda n > ND$

Pro speciální případ, kdy  $n = \frac{N}{2}$  (je-li fázový posun mezi sousedními záteží roven  $\pi$ ), je

$$v_{m=0} = \frac{2D}{\lambda} c$$

Aby fázová rychlost byla menší než rychlost světla, musí v tomto případě být

$$\lambda > 2D$$

Je-li  $m \neq 0$ , potom

$$v = c \frac{D}{\lambda \left( m + \frac{n}{N} \right)}$$

Pro  $n = \frac{N}{2}$  je

$$v = c \frac{D}{\lambda \left( m + \frac{1}{2} \right)}$$

Z toho vyplývá, že při  $m > 0$  je fázová rychlost šíření menší než při  $m = 0$ .

Tim jsme dokázali, že ve vlnovodu se záteží (s periodickou strukturou) je fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny za určitých podmínek menší než fázová rychlost šíření ve volném prostoru a že vlna, která se šíří v kladném směru, má jinou fázovou rychlost než vlna šířící se v záporném směru. Vedení s periodickou strukturou má velký význam pro elektronové urychlovače a pro elektronku s postupnou vlnou.

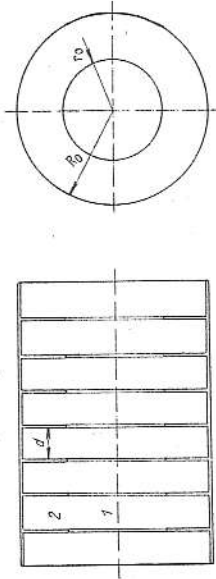
V této části se nebudeme zabývat prostorovým uspořádáním elektromagnetické vlny.

\*) Známe-li konstantu přenosu  $\gamma_m$ , určíme příčnou konstantu ze vztahu  $\Gamma_m = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2}$ .

## 29. Kruhový vlnovod s „hřebínkovou“ strukturou

Jak jsme poznali, vznikne u vodiče s obecnými okrajovými podmínkami taková elektromagnetická vlna, která je dána superposicí příčné vlny magnetické a příčné vlny elektrické. Tyto dílčí elektromagnetické vlny mohou existovat nezávisle na sobě jen tehdy, jde-li o pole osově souměrné nebo o takové okrajové podmínky, že na pláštích je tečná složka intenzity elektrického pole nulová.

Omezíme se v tomto případě na osově souměrné pole. Proto může existovat samostatně příčná magnetická vlna. Touto vlnou se budeme zabývat.



Obr. 43. Vedení s „hřebínkovou“ strukturou.

Uvnitř hřebínkové soustavy na obr. 43 (prostor 1) bude dáno pole tímž výrazem jako u kruhového vlnovodu. Bude tedy mít Hertzův elektrický vektor určitého vidu tvar

$$H_z^o = C J_0'(I_m r) e^{-\gamma_m z} \quad (II-248)$$

Výsledné elektromagnetické pole bude dáno superposicí všech vyšších vidů, tedy

$$H_z^o = \sum_{m=1}^{\infty} C J_0'(I_m r) e^{-\gamma_m z} \quad (II-248)$$

kde  $m$  je pořadí kořene transcendentní rovnice pro konstantu  $I$ .

Část prostoru 2, omezeného dvěma tenkými dokonalými vodivými příčkami, lze uvažovat jako radiální vedení. Na hranici prostoru 1 a 2 musí být spojité přechodí složky intenzity elektrického pole  $E_z$  a magnetického pole  $H_\phi$ . Protože vzdálenost přítěč  $d$  je poměrně malá vzhledem k délce vlny, lze oprávněně předpokládat, že v příčkách bude převládat takové pole, jako je v radiálním vedení, tedy pole TEM. Vyšší vidy vzniknou jen na začátku prostoru mezi příčkami a rychle se utlumí.

Hertzův elektrický vektor v radiálním vedení je dán výrazem (II-143):

$$H_z^o = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)$$

Známe-li Hertzovy vektory v obou prostředích, určíme z nich intenzitu elektrického pole  $E_z$  a intenzitu magnetického pole  $H_\phi$ . V prostředí 1 je (viz rovnice (II-66) a (II-68)):

$$E_z = k^2 \sum_{m=1}^{\infty} C \Gamma_m J_0'(I_m r) e^{-\gamma_m z} \quad (II-249)$$

$$H_\phi = \sum_{m=1}^{\infty} C (\sigma + j\omega\epsilon) \Gamma_m J_0'(I_m r) e^{-\gamma_m z} \quad (II-250)$$

V radiálním vedení (v prostoru 2) je

$$E_z = k^2 [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (II-251)$$

$$H_\phi = (\sigma + j\omega\epsilon) k [C_1 J_0'(kr) + C_2 N_0'(kr)] \quad (II-252)$$

Vztah mezi konstantami  $C_1$  a  $C_2$  v rovnicích (II-251) a (II-252) určíme z podmínky, že pro  $r = R_0$  je intenzita elektrického pole  $E_z$  nulová. Platí tedy

$$C_1 J_0(kR_0) + C_2 N_0(kR_0) = 0$$

Z toho

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(kR_0)}{N_0(kR_0)}$$

Dosadíme-li tento výraz do (II-251) a (II-252), dostaneme

$$E_z = C k^2 [J_0(kr) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_0(kr)]$$

kde jsme výraz  $\frac{C_1}{N_0(kR_0)}$  nahradili konstantou  $C'$ . Intenzita magnetického pole je potom dána výrazem

$$H_\phi = (\sigma + j\omega\epsilon) k C [J_0'(kr) N_0(kR_0) - N_0'(kr) J_0(kR_0)]$$

Těmito dvěma výrazy je určeno pole v prostoru mezi dvěma sousedními mezikruhovými přepážkami. Pole v jednotlivých takových prostrech se budou fázově lišit. Fázová zmlna bude sledovat fázovou změnu pole v prostoru 1. Bude proto intenzita elektrického a magnetického pole v prostoru 1 dána superposicí dílčích vln, jež mají konstantu přenosu  $\gamma_m$  jako vlny v prostoru 2. Proto je

$$E_z = \sum_{m=1}^{\infty} C' k^2 [J_0(kr) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_0(kr)] e^{-\gamma_m z} \quad (II-253)$$

$$H_\phi = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma + j\omega\epsilon) k C [J_0'(kr) N_0(kR_0) - N_0'(kr) J_0(kR_0)] e^{-\gamma_m z} \quad (II-254)$$

Na hranici prostoru 1 a 2, t. j. na válci s poloměrem  $r = r_0$ , musí platit, že intenzita elektrického pole  $E_z$  a intenzita magnetického pole  $H_\phi$  v prostoru 1 a v prostoru 2 se sobě musí rovnat. Proto je

$$\sum_{m=1}^{\infty} C \Gamma_m J_0'(I_m r_0) e^{-\gamma_m z} = \sum_{m=1}^{\infty} C' k^2 [J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_0(kr_0)] e^{-\gamma_m z}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C (\sigma + j\omega\epsilon) \Gamma_m J_0'(I_m r_0) e^{-\gamma_m z} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma + j\omega\epsilon) k C [J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - N_0'(kr_0) J_0(kR_0)] e^{-\gamma_m z}$$

Abyste tyto vztahy platily identicky pro jakékoliv  $z$ , musí být splněny podmínky

$$C \Gamma_m J_0'(I_m r_0) = C' k^2 [J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_0(kr_0)]$$

$$C \Gamma_m J_0'(I_m r_0) = k C [J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - N_0'(kr_0) J_0(kR_0)]$$

To jsou dvě homogenní rovnice vzhledem k  $C$  a  $C'$ . Jejich netriviální řešení dostaneme, bude-li se jejich determinant rovnat nule. Proto

$$\frac{\Gamma_m J_0'(I_m r_0)}{J_0(I_m r_0)} = \frac{k [J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_0(kr_0)]}{J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - N_0'(kr_0) J_0(kR_0)}$$

Nahradíme derivace Besselových funkcí. Potom je

$$\frac{\Gamma_m J_0'(I_m r_0)}{J_0(I_m r_0)} = k \frac{J_0'(kr_0) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_0(kr_0)}{J_1'(kr_0) N_0(kR_0) - J_0(kR_0) N_1'(kr_0)}$$

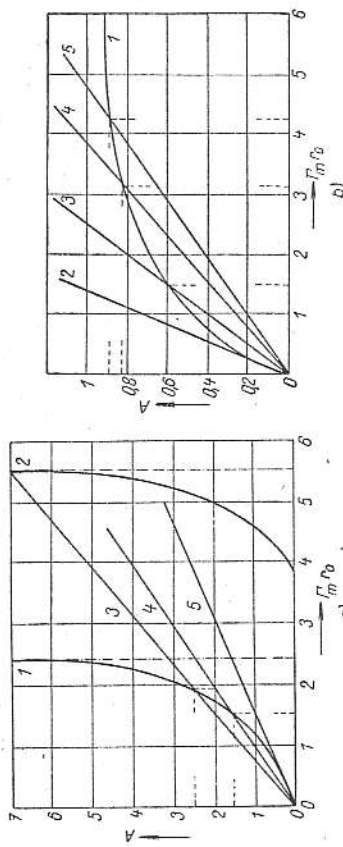
Výraz na pravé straně lze vyjádřit pomocí malé radiální tangenty. Potom bude

$$\frac{\Gamma_m J_0'(I_m r_0)}{J_1(I_m r_0)} = k \tan(kr_0, kR_0) \quad (II-255)$$

Z této transcendentní rovnice určíme pro danou délku vlny  $\lambda$ , dané rozměry  $r_0$  a  $R_0$  konstantu  $\Gamma_m$ . Známe-li konstantu  $\Gamma_m$ , určíme fázovou konstantu přenosu  $\gamma_m$  z výrazu

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \Gamma_m^2}$$

Na obr. 44 je provedeno grafické řešení rovnice (II-255). Při grafickém znázornění jsme upravili rovnici (II-255) takto:



Obr. 44. Grafické řešení rovnice (II-255).

$$\frac{J_1(J_m r_0)}{J_0(J_m r_0)} = r_0 J_m \frac{1}{r_0 k} \text{ct}(k r_0, k R_0)$$

kde pro jednoduchost označíme

$$A = \frac{J_1(J_m r_0)}{J_0(J_m r_0)} = \frac{r_0 J_m}{r_0 k} \text{ct}(k r_0, k R_0) \quad (\text{II-255.1})$$

Křivky 1 a 2 na obr. 44a představují grafické znázornění výrazu  $\frac{J_1(J_m r_0)}{J_0(J_m r_0)}$ . V obrázku jsou vyznačeny jen části, které přísluší kladným pořadnicím. Přímkami 3, 4, 5 představují závislost  $A = r_0 J_m \text{ct}(k r_0, k R_0)$  . ct( $k r_0, k R_0$ ). Jsou-li dány rozměry vedení a délka vlny (obsažená v  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ), určíme ct( $k r_0, k R_0$ ) pro dané  $r_0$  a  $R_0$  z křivek na obr. 26a. Z grafického znázornění je vidět, že pro  $r_0 = R_0$  přechází přímkami příslušící hodnoty  $J_m r_0$  větší než 2,4, a protože jsou imaginární, bude v těchto případech fázová rychlost šíření menší než rychlost světla (což plyne z výrazu  $\gamma$ ). Za těchto okolností lze použít hřebinkového vedení jako součásti lineárních urychlovačů nebo elektronky s postupným polem. Podrobný rozbor uspořádání elektromagnetického pole nebude provádět.

### 30. Souosé spirálové vedení

Oba druhy vedení, o nichž jsme pojednali v čl. 28 a 29, mají tu vlastnost, že se jimi může šířit elektromagnetická vlna s menší fázovou rychlostí, než je rychlost světla. K takovým vedením patří také souosé spirálové vedení.

Vnější vodič tohoto vedení je vytvořen dokonale vodivým válcem a vnitřní vodič spirálou (obr. 45). Proud procházející spirálovým vodičem může vybudit příčnou vlnu magnetickou a příčnou vlnu elektrickou (důkaz provedeme v části o buzení vlnovodů). Obě tyto vlny jsou osově souměrné. Elektromagnetické pole uvnitř válce určíme tak, že místo spirálového vedení budeme uvažovat válec, vodivý jen ve směru spirály.

Ve vnitřní části spirálového vedení (prostor 1) je Hertzův elektrický a magnetický vektor určen stejnými výrazy jako u kruhovém vlnovodu

$$H_z^o = A_1 J_0(J_r) e^{i\gamma z}$$

$$H_z^m = B_1 J_0(J_r) e^{i\gamma z}$$

Elektromagnetické pole souosého spirálového vedení je vytvořeno superposicí příčných vln elektrických a magnetických. Příčná vlna magnetická, osově souměrná, má vedle složky  $E_z$  složku intenzity magnetického a elektrického pole  $E_r$  a  $H_\phi$ , příčná vlna elektrická, osově souměrná, má mimo složku  $H_z$  ještě složky  $E_\phi$  a  $H_r$ . Uvnitř spirály proto platí

$$E_{1r} = A_1 J_1 \gamma J_1(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-256})$$

$$H_{1\phi} = -A_1 (\sigma + j\omega\epsilon) J_1(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-257})$$

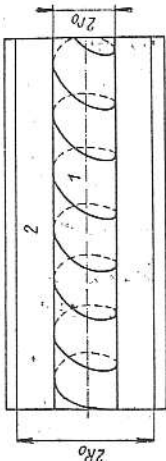
$$E_{1\phi} = B_1 j\omega\mu J_1(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-258})$$

$$H_{1r} = B_1 J_1 \gamma J_1(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-259})$$

$$E_z = A_1 J_0^m J_0(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-260})$$

$$H_z = B_1 J_0^m J_0(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-261})$$

Obr. 45. Souosé spirálové vedení.



V prostoru mezi spirálovým vedením a vnějším vodivým pláštěm budou určeny Hertzovy vektory stejnými výrazy jako u souosého vlnovodu

$$H_z^o = [A_2 J_0(J_r) + B_2 N_0(J_r)] e^{i\gamma z}$$

$$H_z^m = [C_2 J_0(J_r) + D_2 N_0(J_r)] e^{i\gamma z}$$

Z těchto Hertzových vektorů určíme všechny ostatní složky intenzity elektrického a magnetického pole. Platí pro ně

$$E_{2r} = i\gamma [A_2 J_1(J_r) + B_2 N_1(J_r)] e^{i\gamma z} \quad (\text{II-262})$$

$$H_{2\phi} = -(\sigma + j\omega\epsilon) J_1(J_r) + D_2 N_1(J_r) e^{i\gamma z} \quad (\text{II-263})$$

$$E_{2\phi} = j\omega\mu [C_2 J_1(J_r) + D_2 N_1(J_r)] e^{i\gamma z} \quad (\text{II-264})$$

$$H_{2r} = i\gamma [C_2 J_0(J_r) + D_2 N_0(J_r)] e^{i\gamma z} \quad (\text{II-265})$$

$$E_{2z} = J_0^m [A_2 J_0(J_r) + B_2 N_0(J_r)] e^{i\gamma z} \quad (\text{II-266})$$

$$H_{2z} = J_0^m [C_2 J_0(J_r) + D_2 N_0(J_r)] e^{i\gamma z} \quad (\text{II-267})$$

Konstanty  $A_1, B_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  a  $\gamma$  určíme z okrajových podmínek. Tyto okrajové podmínky jsou dány spojitostí jednotlivých složek intenzity elektrického a magnetického pole.

Tečná složka intenzity elektrického pole ve směru tečny spirály v místě dokonale vodivé spirály je nulová. Složka intenzity elektrického pole, ležící v tečné rovině k válcové ploše s poloměrem  $r = r_0$  (válec, na němž je spirála), musí být spojitá. Totéž platí o normální složce intenzity magnetického pole. Musí tedy platit

$$E_{1\phi} \sin \phi + E_{1z} \cos \phi = 0 \quad (\text{II-268})$$

$$E_{2\phi} \sin \phi + E_{2z} \cos \phi = 0 \quad (\text{II-269})$$

$$E_{1\phi} = E_{2\phi}; \quad E_{1z} = E_{2z}; \quad H_{1r} = H_{2r}$$

$$r = r_0; \quad r = r_0; \quad r = r_0$$

$$E_{1\phi} = E_{2\phi}; \quad E_{1z} = E_{2z}; \quad H_{1r} = H_{2r}$$

$$r = r_0; \quad r = r_0; \quad r = r_0$$

$$E_{1\phi} = E_{2\phi}; \quad E_{1z} = E_{2z}; \quad H_{1r} = H_{2r}$$

$$r = r_0; \quad r = r_0; \quad r = r_0$$

kde  $\phi$  je úhel mezi směrem tečny spirály a osou vedení.

Kdoby byl válec, na kterém leží spirála, celý dokonale vodivý, byla by tečná složka intenzity magnetického pole na uvažovaném válci nespojitá. Platí totiž o tečné složce intenzity magnetického pole na rozhraní dielektrického prostředí a vodivého prostředí vztah

$$[n(H_1 - H_2)] = K$$

unkcemi. Vztahy mezi Besselovými a Hankelovými funkcemi a modifikovanými Besselovými funkcemi jsou vyjádřeny rovnicemi

$$I_p(x) = e^{-1/2 p \pi i} J_p(jx)$$

$$K_p(x) = \frac{1}{2} i^{-p} \Gamma(1/2 p) H_p^{(1)}(jx)$$

kde  $I_p(x)$  jsou modifikované Besselovy funkce prvního druhu  
 $K_p(x)$  modifikované Besselovy funkce druhého druhu.  
 Pro modifikované Besselovy funkce nitřního a prvního řádu platí

$$I_0(jx) = I_0(x) \quad J_1(jx) = j I_1(x)$$

$$H_0^{(1)}(jx) = \frac{2}{\pi} j K_0(x) \quad H_1^{(1)}(jx) = -\frac{2}{\pi} K_1(x)$$

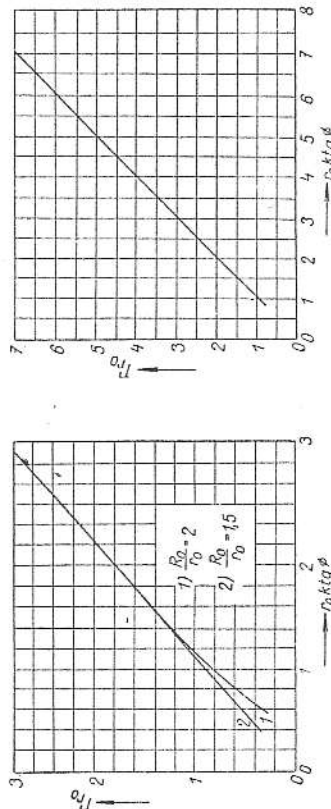
Protože  $I = |I|$ , dostaneme po dosazení do rovnice (II-282)

$$k^2 \operatorname{tg}^2 \phi = |I|^2 \frac{I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0) K_0(\Gamma R_0) - K_0(\Gamma R_0) I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0)}{I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0) K_1(\Gamma R_0) - K_1(\Gamma R_0) I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0)}$$

$$r_0^2 k^2 \operatorname{tg}^2 \phi = r_0^2 \Gamma^2 \frac{I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0) K_0(\Gamma R_0) - K_0(\Gamma R_0) I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0)}{I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0) K_1(\Gamma R_0) - K_1(\Gamma R_0) I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0)}$$

Výrazy na obou stranách této rovnice mají rozměr  $\left[ \frac{1}{m^2} \right]$ . Násobíme pravou i levou stranu čtvrcem poloměru  $r_0$ , abychom dostali bezrozměrné výrazy. Potom

$$r_0^2 k^2 \operatorname{tg}^2 \phi = r_0^2 \Gamma^2 \frac{I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0) K_0(\Gamma R_0) - K_0(\Gamma R_0) I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0)}{I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0) K_1(\Gamma R_0) - K_1(\Gamma R_0) I_0(\Gamma R_0) I_1(\Gamma R_0)}$$



Obr. 46. Závislost veličiny  $\gamma r_0$  na veličině  $r_0 k \operatorname{tg} \phi$ .

Na obr. 46 je znázorněna závislost  $|I| r_0$  na veličině  $r_0 k \operatorname{tg} \phi$  při parametru  $\frac{R_0}{r_0}$ .

Z grafického znázornění je vidět, že při velké hodnotě  $r_0 k \operatorname{tg} \phi$  je argument  $|I| r_0 > 1$ . Vyššími-li modifikované Besselovy funkce s argumentem podstatně větším než jedna, jejich asymptotickými odhady, bude mít rovnice (II-283) tvar

$$r_0^2 k^2 \operatorname{tg}^2 \phi = r_0^2 \Gamma^2$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 + |I|^2} = \frac{k}{\cos \phi}$$

Z toho konstanta přenosu

Ze vztahu (II-284) je zřejmé, že konstanta přenosu  $\gamma$  je větší než konstanta přenosu  $k$  volného prostoru. Z toho plyne, že fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny je menší než rychlost světla (II-285)

$$v_f = c \cos \phi$$

Spirálového vedení se často používá jako zpozdovacího vedení u elektronky s posturpnou vlnou.

kde  $n$  je jednotkový vektor ve směru normály

- $H_1$  intenzita magnetického pole v dielektriku v místě rozhraní
- $H_2$  intenzita magnetického pole ve vodivém prostředí
- $K$  hustota povrchového proudu.

Z výrazu vyplývá, že povrchový proud je kolmý k tečné složce intenzity magnetického pole. V našem případě teče povrchový proud jen ve směru spirály. Intenzita magnetického pole, ležící ve směru tečné spirály, nezpůsobí tedy žádný povrchový proud, neboť ve směru kolmém k tečné spirále žádný proud neteče. Pro tuto složku magnetického pole bude platit spojitý přechod z prostředí 1 do prostředí 2. Proto je

$$H_{1\phi} \sin \phi + H_{1z} \cos \phi = H_{2\phi} \sin \phi + H_{2z} \cos \phi \quad (\text{II-271})$$

Vnější válec (pro  $r = R_0$ ) je dokonale vodivý, a proto musí být tečná složka intenzity elektrického pole na tomto válci nulová. Musí tedy platit

$$E_{2z} = 0 \quad \text{a} \quad E_{2\phi} = 0 \quad (\text{II-272})$$

Dosadíme-li do okrajových podmínek (II-268) až (II-272) odvozené vztahy (II-256) až (II-267), dostaneme

$$j\omega \mu [C_2 J_1(\Gamma r_0) + D_2 N_1(\Gamma r_0)] \sin \phi + I^2 [A_2 J_0(\Gamma r_0) + B_2 N_0(\Gamma r_0)] \cos \phi = 0 \quad (\text{II-273})$$

$$B_1 J_1(\Gamma r_0) = [C_2 J_1(\Gamma r_0) + D_2 N_1(\Gamma r_0)] \quad (\text{II-274})$$

$$A_1 J_0(\Gamma r_0) = A_3 J_0(\Gamma r_0) + B_3 N_0(\Gamma r_0) \quad (\text{II-275})$$

$$B_1 J_1(\Gamma r_0) = C_2 J_1(\Gamma r_0) + D_2 N_1(\Gamma r_0) \quad (\text{II-276})$$

$$- (\sigma + j\omega \epsilon) \Gamma A_1 J_1(\Gamma r_0) \sin \phi + B_1 \Gamma^2 J_0(\Gamma r_0) \cos \phi = - (\sigma + j\omega \epsilon) \Gamma [A_2 J_1(\Gamma r_0) + B_2 N_1(\Gamma r_0)] \sin \phi + I^2 [C_2 J_0(\Gamma r_0) + D_2 N_0(\Gamma r_0)] \cos \phi \quad (\text{II-277})$$

$$A_2 J_0(\Gamma r_0) + B_2 N_0(\Gamma r_0) = 0 \quad (\text{II-278})$$

$$C_2 J_1(\Gamma r_0) + D_2 N_1(\Gamma r_0) = 0 \quad (\text{II-279})$$

$$C_2 J_1(\Gamma r_0) + D_2 N_1(\Gamma r_0) = 0 \quad (\text{II-280})$$

Rovnice (II-275) a (II-277) jsou totožné. Také rovnice (II-273) a (II-274) jsou se zřetelem na rovnice (II-276) a (II-277) totožné. Tak dostaneme celkem šest na sobě nezávislých homogenních rovnic s neznámými  $A_1, B_1, A_3, B_3, C_2$  a  $D_2$ .

Abychom šest rovnic mělo netriviální řešení, musí se determinant soustavy rovnic rovnat nule. Z této podmínky vyplývá

$$k^2 \operatorname{tg}^2 \phi = \Gamma^2 \frac{J_0(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) N_0(\Gamma r_0) J_0(\Gamma r_0) - J_0(\Gamma r_0) N_0(\Gamma r_0) J_0(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) N_1(\Gamma r_0) - N_1(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) N_1(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0)}{J_0(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) N_1(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) - N_1(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) N_1(\Gamma r_0)} \quad (\text{II-281})$$

Budeme-li tuto rovnici řešit, zjistíme, že pro reálné  $I$  nemá reálné řešení. Pro imaginární  $I$  je předcházející rovnice nevhodná, neboť Neumannova funkce: imaginárního argumentu je komplexní číslo. Místo Neumannovy funkce bude vhodnější zavést Hankelovu funkci prvního druhu. Použijeme-li vztahů

$$H_0^{(1)}(\Gamma r_0) = J_0(\Gamma r_0) + j N_0(\Gamma r_0)$$

$$H_1^{(1)}(\Gamma r_0) = J_1(\Gamma r_0) + j N_1(\Gamma r_0)$$

$$N_0(\Gamma r_0) = \frac{1}{j} [H_0^{(1)}(\Gamma r_0) - J_0(\Gamma r_0)]$$

$$N_1(\Gamma r_0) = \frac{1}{j} [H_1^{(1)}(\Gamma r_0) - J_1(\Gamma r_0)]$$

dostaneme pro Neumannovu funkci

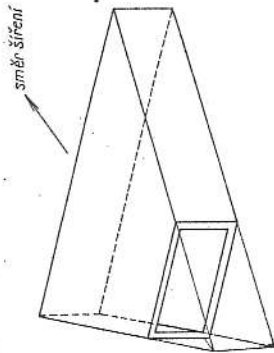
Dosadíme-li tyto výrazy do (II-281), dostaneme

$$k^2 \operatorname{tg}^2 \phi = \Gamma^2 \frac{J_0(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) H_0^{(1)}(\Gamma r_0) J_0(\Gamma r_0) - H_0^{(1)}(\Gamma r_0) J_0(\Gamma r_0) J_0(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) H_1^{(1)}(\Gamma r_0) - H_1^{(1)}(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) H_1^{(1)}(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0)}{J_0(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) H_1^{(1)}(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) - H_1^{(1)}(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) J_1(\Gamma r_0) H_1^{(1)}(\Gamma r_0)} \quad (\text{II-282})$$

Tato rovnice má řešení pro reálné i imaginární  $I$ . Bude nás zajímat jen řešení rovnice (II-282) pro imaginární hodnoty  $I$ , neboť konstanta přenosu spirálového vedení bude v tomto případě větší než konstanta přenosu volného prostoru a fázová rychlost šíření bude tedy menší než rychlost světla. V tom případě nahradíme Besselovy funkce imaginárního argumentu modifikovanými Besselovými

### 31. Šíření elektromagnetické vlny v trychtřovém vedení

Odvodíme vlastnosti výšcového trychtřového vedení. Toto vedení je vytvořeno dvěma rovnoběžnými rovinami a dvěma rovinami, které se protínají pod určitým úhlem (obr. 47). Průběh intenzity elektrického a magnetického pole v trychtřovém vedení určíme řešením vlnové rovnice Hertzova vektoru ve válcových souřadnicích, neboť zavedením těchto souřadnic snadno splníme okrajové podmínky. Výsledné pole určíme jako superpozici vlny, dané Hertzovým elektrickým vektorem (TM) a Hertzovým magnetickým vektorem (TE). Protože je souřadnice  $z$  souřadnicí pravotočnou, určíme elektromagnetické pole ze složky Hertzových vektorů ve směru této souřadnice. V této části budeme sledovat podrobně dva případy vlnění; vlnění, které má jen složku intenzity elektrického pole ve směru  $z$ , a vlnění, jež má jen složku intenzity elektrického pole ve směru oblouku vrcholového úhlu  $\varphi$  (složku  $E_\varphi$ ), viz obr. 48.



Obr. 47. Trychtřové vedení.

#### 31.1 Trychtřové vedení s intenzitou elektrického pole ve směru osy $z$

Trychtřové vedení budeme pokládat za výšec z radiálního vlnovodu. Všechny složky elektromagnetického pole určíme z elektrického Hertzova vektoru. Abychom určili geometrické uspořádání, musíme vyřešit vlnovou rovnici Hertzova vektoru s okrajovými podmínkami, že na povrchu vedení je tečná složka intenzity elektrického pole nulová.

$$\text{Vlnovou rovnici} \quad \Delta \Pi_z^e - k^2 \Pi_z^e = 0$$

budeme řešit ve válcových souřadnicích. Obecné řešení Hertzova vektoru  $\Pi_z^e$  ve válcových souřadnicích je

$$\Pi_z^e = [C_1 J_n(Jr) + C_2 N_n(Jr)] [C_3 \sin n\varphi + C_4 \cos n\varphi] (C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-286})$$

Toto řešení použijeme tehdy, bude-li trychtřové vedení zakončeno nějakou impedancí. Bude-li trychtřové vedení naprázdno ve směru souřadnice  $r$ , použijeme místo Besselovy a Neumannovy funkce raději funkce Hankelovy. Pak bude

$$\Pi_z^e = [C_1 H_n^{(1)}(Jr) + C_2 H_n^{(2)}(Jr)] [C_3 \sin n\varphi + C_4 \cos n\varphi] (C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-286.1})$$

Intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  vyjádříme pomocí Hertzova vektoru na základě vztahu (I-33)

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e$$

Konstanty  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ , stejně jako  $I$ , určíme z okrajových podmínek, že tečná složka intenzity elektrického pole musí být na stěnách vedení nulová. To znamená, že intenzita elektrického pole  $E_z$  musí být nulová na stěnách daných souřadnicemi  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  a  $\varphi = -\frac{\alpha}{2}$  a intenzita elektrického pole  $E_\varphi$  musí být nulová na rovnoběžných stěnách vedení se souřadnicemi  $z = 0$  a  $z = l$ . Protože

$$E_z = I^2 \Pi_z^e \quad \text{a} \quad E_\varphi = \text{grad}_\varphi \text{ div } \Pi_z^e$$

dostaneme pro tyto složky

$$E_z = I^2 [C_1 H_n^{(1)}(Jr) + C_2 H_n^{(2)}(Jr)] [C_3 \sin n\varphi + C_4 \cos n\varphi] (C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-287})$$

$$E_\varphi = i\gamma n \frac{1}{r} [C_1 H_n^{(1)}(Jr) + C_2 H_n^{(2)}(Jr)] [-C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi] (C_5 e^{i\gamma z} - C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-288})$$

Z první okrajové podmínky vyplývá, že pro  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  a  $\varphi = -\frac{\alpha}{2}$  je  $E_z = 0$ . To znamená, dosadíme-li do rovnice (II-287), že dostaneme

$$C_3 \sin n \frac{\alpha}{2} + C_4 \cos n \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$-C_3 \sin n \frac{\alpha}{2} + C_4 \cos n \frac{\alpha}{2} = 0$$

Tyto dvě podmínky mohou být splněny tehdy, je-li  $C_3 = 0$ . Potom je

$$\cos n \frac{\alpha}{2} = 0$$

To bude tehdy, bude-li

$$n \frac{\alpha}{2} = m \frac{\pi}{2}$$

z čehož

$$n = m \frac{\pi}{\alpha}$$

kde  $m$  je celé liché číslo.

Z druhé okrajové podmínky vyplývá, že pro  $z = 0$  a  $z = l$  je  $E_\varphi = 0$ . Z toho plyne

$$C_5 - C_6 = 0 \\ C_5 e^{i\gamma l} - C_6 e^{-i\gamma l} = 0$$

Řešením obou rovnic dostaneme podmínku

$$\sin \gamma l = 0$$

a z toho

$$\gamma = p \frac{\pi}{l}$$

kde  $p$  je celé číslo.

Dosadíme-li odvozené výrazy do vztahu pro Hertzův vektor, bude

$$\Pi_z^e = [C_1 H_{m \frac{\pi}{\alpha}}^{(1)}(Jr) + C_2 H_{m \frac{\pi}{\alpha}}^{(2)}(Jr)] \cos m \frac{\pi}{\alpha} \varphi \cos p \frac{\pi}{l} z \quad (\text{II-289})$$

Z tohoto Hertzova vektoru bychom určili všechny složky intenzity elektromagnetického pole.

Všimneme si podrobněji toho případu, kdy má intenzita elektrického pole jen složku ve směru  $z$  a pole nezávisí na souřadnici  $z$ . Aby elektromagnetické pole nezáviselo na souřadnici  $z$ , musí být konstanta  $\gamma$  nulová. Z rovnice (II-11) potom vyplývá

$$I = k$$



Budeme-li uvažovat trychtřívové vedení nekonečně dlouhé (ve směru  $r$ ), musí být konstanta  $C_1$  nulová, neboť jinak by měla Hankelova funkce  $H_n^{(2)}(kr)$  při komplexní konstantě přenosu  $k$  při  $r \rightarrow \infty$  nekonečnou hodnotu.

Po všech těchto úvahách se výraz pro Hertzův vektor zjednoduší takto:

$$\Pi_z^0 = C H_{m, \alpha}^{(2)}(kr) \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi$$

a pro  $m = 1$

$$\Pi_z^0 = C H_{1, \alpha}^{(2)}(kr) \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi$$

Protože je  $\gamma = 0$ , bude také  $E_r = 0$  a  $E_\varphi = 0$ , neboť na základě (I-33)

$$E_\varphi = j\gamma T_2 \operatorname{grad}_\varphi T_1 \quad \text{a} \quad E_r = j\gamma T_2 \operatorname{grad}_r T_1$$

Intensita elektrického pole bude tedy mít jen složku  $E_z$  a ta bude vyjádřena rovnicí

$$E_z = \Gamma^2 \Pi_z^0 = k^2 \Pi_z^0 = C k^2 H_{1, \alpha}^{(2)}(kr) \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi \quad (\text{II-290})$$

Intensitu magnetického pole určíme z rovnice (I-35)

$$\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \operatorname{rot} \Pi_z^0$$

Pro jednotlivé složky odvodíme vztahy

$$H_\varphi = (\sigma + j\omega\epsilon) \operatorname{rot}_\varphi \Pi_z^0 = C(\sigma + j\omega\epsilon) k H_{1, \alpha}^{(2)'}(kr) \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi \quad (\text{II-291})$$

$$H_r = -C(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{1}{r} H_{1, \alpha}^{(2)}(\Gamma r) \sin \frac{\pi}{\alpha} \varphi \quad (\text{II-292})$$

Charakteristická impedance šíření je dána poměrem příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole (příčné na směr šíření); v našem případě poměrem  $E_z$  k  $H_\varphi$ . Proto je

$$Z = \frac{E_z}{H_\varphi} = \frac{k H_{1, \alpha}^{(2)}(kr)}{\sigma + j\omega\epsilon H_{1, \alpha}^{(2)'}(kr)}$$

Při dokonalém dielektriku, kdy  $\sigma = 0$ , je charakteristická impedance

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{H_{1, \alpha}^{(2)}(kr)}{H_{1, \alpha}^{(2)'}(kr)}$$

Pro  $kr \gg 1$  lze Hankelovy funkce nahradit jejich asymptotickými hodnotami a pro charakteristickou impedanci dostaneme stejný výraz jako pro volný prostor

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Elektromagnetické pole, které jsme právě uvažovali, vznikne v trychtřívové anténě napájené obdélníkovým vlnovodem.

### 31.2 Trychtřívový vlnovod s elektromagnetickou vlnou, u níž má intenzita elektrického pole směr $\varphi$

Zde budeme opět uvažovat trychtřívové vedení jako část kruhového vlnovodu. Geometrické uspořádání pole určíme řešením vlnové rovnice Hertzova magnetického vektoru s příslušnými okrajovými podmínkami. Vlnovou rovnici vyjádříme ve válcových souřadnicích a jejím řešením dostaneme pro Hertzův vektor vztah

$$\Pi_z^m = [C_1 J_n(\Gamma r) + C_2 N_n(\Gamma r)] [C_3 \sin n\varphi + C_4 \cos n\varphi] (C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-293})$$

Konstanty  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  a  $n$  určíme opět z okrajových podmínek, t. j. z podmínky, že tečná složka intenzity elektrického pole je na vodivém povrchu vlnovodu nulová. To znamená, že na vodivém povrchu musí být složka  $E_r$  a  $E_\varphi$  nulová (obr. 48).

Veličiny elektromagnetického pole nebudou záviset na souřadnici  $\varphi$  tehdy, bude-li konstanta  $n$  nulová. V tom případě vyjádříme vztah (II-293) takto:

$$\Pi_z^m = [C_1 J_0(\Gamma r) + C_2 N_0(\Gamma r)] (C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-293.1})$$

Složka intenzity elektrického pole  $E_r$  bude v tomto případě rovna nule. Složka intenzity elektrického pole  $E_\varphi$  bude určena vztahem

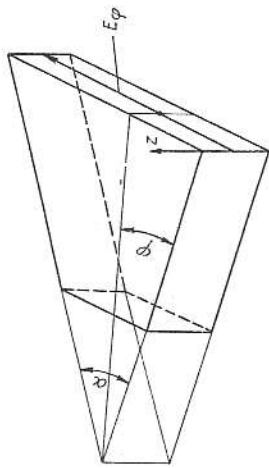
$$E_\varphi = -j\omega\mu \Gamma [C_1 J_0'(\Gamma r) + C_2 N_0'(\Gamma r)] (C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}) \quad (\text{II-294})$$

Se zřetelím na okrajové podmínky musí být intenzita elektrického pole  $E_\varphi$  nulová na ploše dané souřadnicí  $z = 0$  a souřadnicí  $z = l$ . Z toho plyne

$$C_5 + C_6 = 0 \\ C_3 e^{i\gamma l} + C_6 e^{-i\gamma l} = 0$$

a tedy funkce souřadnice  $z$ , podobně jako v předešlém případě, bude dána sinusovým průběhem  $\sin p \frac{\pi}{l} z$ . Potom

Obr. 48. Orientace trychtřívového vedení.



$$\Pi_z^m = [C_1 J_0(\Gamma r) + C_2 N_0(\Gamma r)] \sin p \frac{\pi}{l} z$$

$$E_\varphi = -j\omega\mu \Gamma [C_1 J_0'(\Gamma r) + C_2 N_0'(\Gamma r)] \sin p \frac{\pi}{l} z$$

$$E_r = 0$$

$$H_z = \Gamma^2 \Pi_z^m$$

$$H_r = p \frac{\pi}{l} \Gamma [C_1 J_0'(\Gamma r) + C_2 N_0'(\Gamma r)] \cos p \frac{\pi}{l} z$$

Přitom je

$$\Gamma^2 = k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}$$

Bude-li trychtřívový vlnovod na bocích neomezen, přejde ve dvě různoběžné roviny o vrcholovém úhlu  $\alpha$  (obr. 49). Uvažujme případ, kdy složka intenzity elektrického a

magnetického pole nebude záviset na souřadnici  $s$ . To nastane tehdy, bude-li konstanta přenosu  $\gamma$  nulová. Dosadíme-li v rovnici (II-293) za  $\gamma$  nulu, bude

$$H_z = [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)]$$

a potom

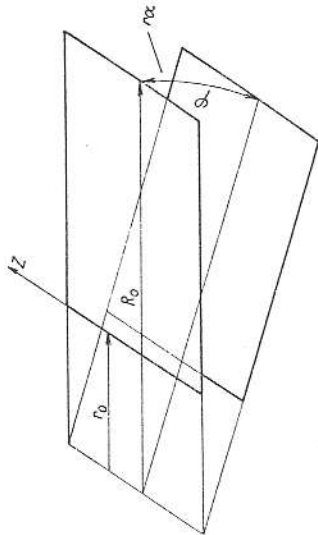
$$E_r = -j\omega\mu k [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (\text{II-295})$$

$$E_r = 0; \quad H_z = 0$$

$$H_z = k^2 [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (\text{II-296})$$

neboť v tomto případě je  $\Gamma = k$  (protože  $\gamma = 0$ ).

Vidíme, že elektromagnetické pole má jen složky  $E_r$  a  $H_z$ . Toto pole přísluší příčnému



Obr. 49. Vedení sestavené ze dvou různoběžných pásků.

elektricko-magnetickému vidu (vzhledem ke směru šíření, t. j. směrem vzrůstajícího poloměru  $r$ ).

Intensitou elektrického pole  $E_r$  je dáno napětí mezi oběma rovnoběžnými rovinami a intensitou magnetického pole  $H_z$  je způsoben proud tekoucí ve směru poloměru  $r$ . Naším úkolem je určit závislost proudu a napětí na souřadnici  $r$ . Napětí mezi oběma rovnoběžnými deskami je dáno křivkovým integrálem skalárního součinu  $(E ds)$ , kde  $ds$  je element oblouku křivky. V našem případě bude výhodné provést integraci podél oblouku  $r\alpha$  (obr. 49), neboť na této dráze je hodnota  $E_r$  konstantní. Proto napětí v místě se souřadnicí  $r$  je určeno vztahem

$$U_r = \int (E_r ds) = E_r r\alpha \quad (\text{II-297})$$

Dosadíme-li za  $E_r$  vztah (II-295), je

$$U_r = j\omega\mu k r \alpha [C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr)] \quad (\text{II-298})$$

Při tom jsme nahradili derivaci Besselovy funkce příslušnou hodnotou.

Celkový proud procházející deskou určíme z cirkulace intenzity magnetického pole po křivce omezuující průřez desky (obr. 50).

$$I_{c,r} = \oint (H_z ds)$$

$$I_{c,r} = H_z l$$

Intensita magnetického pole nezávisí na souřadnici  $s$ , a proto

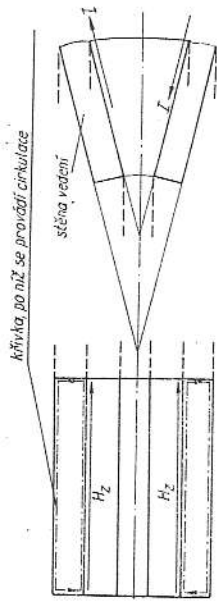
kde  $l$  je šířka desek. Dosadíme-li za  $H_z$  výraz (II-296), je

$$I_{c,r} = k^2 l [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (\text{II-299})$$

Uvažujeme trychtýřové vedení, jehož konec je určen souřadnicí  $r = R_0$  a počátek  $r = r_0$ . Napětí a proud na konci označíme  $U_k$  a  $I_k$ . Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  vyjádříme pomocí hodnot  $U_k$  a  $I_k$ . Na základě rovnic (II-298) a (II-299) platí

$$U_k = j\omega\mu k R_0^\alpha [C_1 J_1(kR_0) + C_2 N_1(kR_0)]$$

$$I_k = k^2 l [C_1 J_0(kR_0) + C_2 N_0(kR_0)]$$



Obr. 50. Orientace intenzity magnetického pole a proudu v páskovém trychtýřovém vedení.

Vyjádříme-li z těchto dvou rovnic konstanty  $C_1$  a  $C_2$ , dostaneme

$$C_1 = \frac{U_k}{j\omega\mu k R_0^\alpha} \frac{N_0(kR_0)}{N_0(kr_0)} - \frac{I_k}{k^2 l} \frac{N_0(kR_0)}{N_0(kr_0)}$$

$$C_2 = \frac{J_1(kR_0)}{J_1(kr_0)} \frac{I_k}{k^2 l} - \frac{U_k}{j\omega\mu k R_0^\alpha} \frac{J_0(kR_0)}{J_0(kr_0)}$$

Napětí a proud v obecném místě, daném souřadnicí  $r$ , jsou dány vztahy (II-298) a (II-299)

$$U = j\omega\mu k r \alpha [C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr)]$$

$$I = k^2 l [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)]$$

Dosadíme-li za  $C_1$  a  $C_2$  odvozené výrazy, bude po úpravě

$$U = U_k \frac{r}{R_0} \text{cs}(kr, kR_0) + j \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{r\alpha}{l} I_k \text{Sn}(kr, kR_0) \quad (\text{II-300})$$

$$I = U_k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{l}{R_0^\alpha} \text{sn}(kr, kR_0) + I_k \text{Cs}(kr, kR_0) \quad (\text{II-301})$$

kde  $U_k$  je napětí na konci trychtýřového vedení

$I_k$  proud na konci vedení

$U$  napětí na počátku vedení

$I$  proud na počátku vedení

$R_0$  poloměr, který přísluší konci vedení

$r$  poloměr, kde určujeme napětí a proud na počátku vedení

- cs ( $kR$ ,  $kR_0$ ) malý radiální kosinus
- Sn ( $kR$ ,  $kR_0$ ) velký radiální sinus
- sn ( $kR$ ,  $kR_0$ ) malý radiální sinus
- Cs ( $kR$ ,  $kR_0$ ) velký radiální kosinus.

Tyto vztahy jsou analogické se vztahy, které platí pro homogenní vedení. Z obou vztahů vyplývá, že výraz analogický s vlnovým odporem má tvar

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{rx}{l}}$$

Vidíme, že tento výraz závisí na poloměru  $r$ . Vedení je tedy nehomogenní. Vedení tohoto druhu použijeme při výpočtu dutinového rezonátoru magnetronu.

#### PŘÍKLADY

**Příklad 1.** Porovnejte vysokofrekvenční odpor páskového vodiče se stejnosměrným odporem téhož vodiče pro daný kmitočet  $f$ , je-li šířka páskového vodiče  $l_1$ , vzdálenost vodičů  $d$ .

**Příklad 2.** Určete maximální hodnotu intenzity magnetického pole kruhového vlnovodu s videm  $TE_{11}$ , je-li dán poloměr vlnovodu, délka vlny a přenesený výkon.

**Příklad 3.** Určete mezní délku vlny vlnovodu, jehož průřez má tvar a) polokruhu ( $\ominus$ ); b) kruhové výšeče s vrcholovým úhlem  $\alpha$ .

**Příklad 4.** Určete maximální přenesený výkon páskového vedení, jsou-li dány rozměry vedení a délka vlny.

**Příklad 5.** Určete ztrátový výkon obdélníkového vlnovodu s videm  $TE_{10}$ , je-li znám přenesený výkon, délka vlnovodu a rozměry průřezu vlnovodu a je-li vlnovod zhotoven z hliníku (vodivost =  $3,7 \cdot 10^7$  S).

**Příklad 6.** Kruhový vlnovod je souměrně vybuzen vlnou  $TM_{01}$ . Má takové rozměry, že se jím tento vid nešíří a vlna se utlumí. Určete délku vlnovodu, je-li jeho poloměr  $a$  a žádá-li se takové utlumení intenzity elektrického pole, aby výstupní intenzita elektrického pole vidu  $TM_{01}$  byla o 20 dB menší než vstupní.

**Příklad 7.** Proveďte totéž u kruhového vlnovodu s videm  $TE_{11}$ .

**Příklad 8.** Určete útlum páskového vedení, jsou-li dány jeho rozměry, vodivost vedení a délka vlny.

**Příklad 9.** Určete délku radiálního vedení nakrátko, známe-li vzdálenost desek, počáteční poloměr a délku vlny, při které má vedení rezonovat.

**Příklad 10.** Určete výkon přenesený dielektrickým válcem vlny  $TE_{11}$ , známe-li délku vlny a rozměry. Určete poměr výkonu přeneseného volným prostorem a vlastním dielektrickým válcem.

**Příklad 11.** Určete procentní vliv ztrátového úhlu dielektrika na útlum vodiče obaleného dielektrickou vrstvou.

**Příklad 12.** Určete uspořádání elektromagnetického pole ve vedení s periodickou strukturou (viz obr. 42).

**Příklad 13.** Určete uspořádání elektromagnetického pole ve vedení s „hřebínkovou“ strukturou (obr. 43).

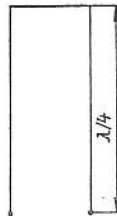
**Příklad 14.** Určete uspořádání pole uvnitř spirálového vedení (obr. 45).

**Příklad 15.** Určete vstupní impedanci trychtýřového vedení nakrátko.

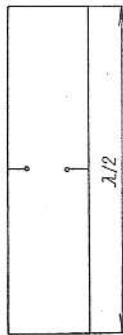
### III. DUTINOVÉ REZONÁTORY

#### 32. Dutinové rezonátory vlnovodového typu

Na dlouhých, středních a krátkých vlnách se používá jako laděných obvodů takových obvodů, které jsou vytvořeny soustředěnými elektrickými prvky, kondensátory a indukčními cívkami. Těchto prvků lze použít v uvedených vlnových rozsazích proto, že jejich rozměry jsou podstatně menší než vlastní délka vlny. Proto nevyzařují. Jinak je tomu v rozsahu decimetrových a centimetrových vln. Zde již není tak snadné uskutečnit obvod se soustředěnými veličinami při dobrém činiteli jakosti. Rozměry takového obvodu by již byly stejného řádu jako délka vlny, takže velká část energie by se vyzářila.



Obr. 51. Schematické znázornění vedení nakrátko.



Obr. 52. Schematické znázornění vedení, uzavřeného na obou koncích nakrátko s délkou rovnou poloviční délce vlny.

V rozsahu decimetrových vln lze použít obvodů s plynule rozloženými veličinami. Příkladem takového obvodu je homogenní vedení s jedním koncem nakrátko. Je známo, že vstupní impedance homogenního vedení nakrátko je dána výrazem

$$Z_p = Z \operatorname{tgh} \gamma l$$

kde  $Z$  je vlnový odpor vedení

$l$  délka vedení

$\gamma$  konstanta přenosu, která je obecně komplexním číslem.

Jde-li o bezztrátové vedení, je konstanta přenosu imaginární veličina, označme ji  $\alpha$ . Potom vstupní impedance je

$$Z_p = jZ \operatorname{tg} \alpha l$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že při určité délce  $l$  bude vstupní impedance vedení nekonečně velká. Při této délce vedení rezonuje. Tohoto poznatku využijeme při provedení laděných obvodů pro decimetrové vlny (obr. 51).

Konstanta přenosu je  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ , kde  $\lambda$  je délka vlny. Potom je

$$Z_p = jZ \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l$$

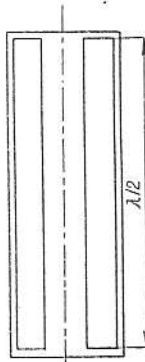
Z výrazu vyplývá, že vedení bude rezonovat tehdy, bude-li se délka vedení rovnat čtvrtině

délky vlny. Protože je při tom vstupní impedance nekonečná, bude nekonečná i vstupní impedance dvou takových vedení spojených paralelně (obr. 52).

Z toho plyne, že vedení, jehož délka se rovná polovině délky vlny a která je na obou koncích nakrátko, rezonuje. Vytvoříme-li takové vedení ze sousedního vodiče, dostaneme dutinu znázorněnou na obr. 53. Tento obvod je již příkladem dutinového resonátoru.

Dokážeme v další části, že vlnovod, který je omezen na obou koncích dokonale vodivými stěnami, rezonuje na určité délce vlny závislé na rozměrech vlnovodu a vzájemně vzdálenosti základů. Mimo to poznáme, že jakýkoli prostorový obor dielektrika, uzavřený dokonale vodivým pláštěm, rezonuje na kmitočtu určeném rozměrem a tvarem dutiny.

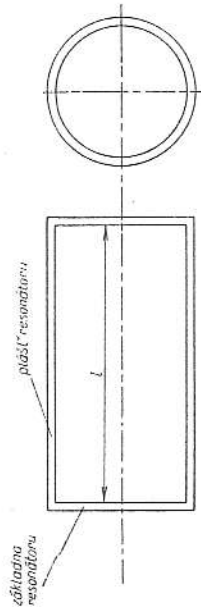
Elektromagnetické pole uvnitř resonátoru dostaneme řešením Maxwellových rovnic se zřetelem na okrajovou podmínku, že na dokonale vodivém plášti je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. Je-li dutinový resonátor vytvořen částí vlnovodu, omezenou dvěma dokonale vodivými základnami, je příčné uspořádání pole stejné jako u vlnovodu a speciální tvar dostane jen podélná funkce  $T_z$ . Funkci  $T_z$  určíme z okrajové podmínky, že na základnách resonátoru je tečná složka elektrického pole nulová.



Obr. 53. Sousedý dutinový resonátor.

### 32.1 Vlnovodový resonátor s příčnou vlnou magnetickou

Protože pro válcovou plochu resonátoru platí stejná okrajová podmínka jako u vlnovodu, je funkce příčných souřadnic stejná jako u vlnovodu. Má-li být tečná složka intenzity elektrického pole nulová i na příčných stěnách (základnách) ohraničujících konec



Obr. 54. Dutinový resonátor.

a začátek resonátoru (obr. 54), je třeba, aby na základnách, t. j. na plochách se souřadnicemi  $z = 0$  a  $z = l$ , platilo

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-1})$$

kde  $l$  je délka dutiny.

To platí proto, že příčná složka intenzity elektrického pole (označíme ji  $E_t$ ) je dána výrazem

$$E_t = \text{grad}_t \text{div} \Pi_z = \text{grad}_t \text{div} (T_z) = \frac{\partial T_z}{\partial z} \text{grad}_t T_z$$

Tento výraz se musí pro souřadnice  $z = 0$  a  $z = l$  rovnat identicky pro jakoukoli příčnou souřadnici nule. Odtud vyplývá okrajová podmínka pro základny

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{pro } z = 0 \text{ a } z = l)$$

Podélná funkce  $T_z$  je jen funkcí souřadnice  $z$ . Tuto funkci jsme určili řešením dílčí vlnové rovnice  $\frac{d^2 T_z}{dz^2} = -\gamma^2 T_z$ . Výsledek je dán rovnicí (II-8). Je tedy

$$T_z = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}$$

Z toho

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} = \gamma(C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z})$$

Tato funkce musí být nulová pro  $z = 0$  a  $z = l$ . Z toho vyplývá

$$C_1 - C_2 = 0$$

$$C_1 e^{\gamma l} - C_2 e^{-\gamma l} = 0$$

Vyjádříme-li konstantu  $C_2$  pomocí konstanty  $C_1$  a dosadíme-li do druhé z předcházejících rovnic, dostaneme

$$\sin \gamma l = 0$$

Tento výraz se bude rovnat nule, bude-li

$$\gamma l = p\pi$$

kde  $p$  je celé číslo.

Potom konstanta přenosu je  $\gamma = \frac{p\pi}{l}$ . Odvodili jsme, že konstanta přenosu musí vyhovovat podmínce (II-7)

$$k^2 = \gamma^2 + I^2$$

Vlnové číslo  $k$  lze vyjádřit pomocí vlnové délky. Platí totiž, že  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Použijeme-li tohoto výrazu, můžeme v předcházející rovnici určit délku vlny podle vzorce

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 + I^2}} \quad (\text{III-2})$$

Konstanta přenosu  $\gamma$  je určena výrazem  $\frac{p\pi}{l}$ , závislým na délce resonátoru a číslu  $p$ , a veličina  $I$ , jak jsme poznali, závisí jen na geometrickém uspořádání pláště resonátoru. Je tedy délka vlny  $\lambda$ , na kterou je naladěný resonátor, dána vztahem (III-2). Zjistili jsme, že pro kruhový vlnovod je  $I = \frac{\Delta_{nm}}{a}$ , kde  $\Delta_{nm}$  je  $m$ tý kořen Besselovy funkce  $n$ tého řádu.

Dosadíme-li do (III-2) odvozený výraz za  $\gamma$  a  $I$ , bude vlastní délka vlny kruhového dutinového resonátoru s příčnou magnetickou vlnou určena výrazem

$$\lambda_{mnp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\Delta_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \quad (\text{III-3})$$

kde  $a$  je poloměr resonátoru  
 $l$  délka resonátoru.

Ze vztahu je zřejmé, že dutinový rezonátor lze naladit na řadu kmitočtů, z nichž každý přísluší určitému uspořádání elektromagnetické vlny. Toto uspořádání je charakterizováno indexy  $m$ ,  $n$  a  $p$ . Při tom indexy  $m$ ,  $n$  určují vid elektromagnetické vlny vlnovodu, z něhož je dutinový rezonátor utvořen, a index  $p$  značí počet vlnových délek  $\lambda_z$  v podélném směru dutiny. U dutinového rezonátoru s obdélníkovým průřezem určíme vlastní délku vlny podle vzorce

$$\lambda_{mnp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \quad (\text{III-4})$$

Při tom jsou rozměry dutinového rezonátoru dány výrazy  $a$ ,  $b$ ,  $l$ .

Ve vztoci (III-2) je nutno uvážit vlastnosti konstanty přenosu  $\gamma$ . Vzorec v uvedeném tvaru platí jen tehdy, je-li  $\gamma$  imaginární. To znamená, že platí, šíří-li se v podélném směru vlnovodu rezonátoru elektromagnetická vlna. Není-li tento předpoklad splněn, nemůže vzniknout stojatý vlnění rezonátoru. Proto musí být průřez vlnovodu rezonátoru takový, aby příslušná mezní délka vlny byla větší než délka vlny, na kterou se má rezonátor naladit.

### 32.2 Vlnovodový rezonátor s příčnou vlnou elektrickou

Intenzita elektrického pole je v tomto případě dána vztahem (I-34)

$$E_z = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m$$

kde  $\Pi_z^m$  je Hertzův vektor:

$$\Pi_z^m = T_1 T_2 = T_1 (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

Na bočních stěnách rezonátoru musí být intenzita elektrického pole nulová. Proto musí platit pro  $z = 0$  a  $z = l$ , že  $E_z = 0$ . Dosadíme-li do vztahu pro intenzitu elektrického pole Hertzův vektor, vyplývá z této podmínky

$$C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{i\gamma l} + C_2 e^{-i\gamma l} = 0$$

neboli  $\sin \gamma l = 0$ . To bude splněno tehdy, bude-li  $\gamma = \frac{p\pi}{l}$ , kde  $p$  je celé číslo. Z těchto okrajových podmínek tedy vyplývá

$$T_2 = \sin \frac{p\pi}{l} z \quad (\text{III-5})$$

U příčných elektrických vln platí mezi konstantou přenosu  $\gamma$ , vlnovým číslem  $k$  a konstantou  $T$  stejný vztah jako u příčné vlny magnetické. Proto bude platit pro oba případy stejný výraz i pro vlastní délku vlny. Potom bude i u příčných vln elektrických dána vlastní délka vlny vztahem (III-2), tedy

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{T^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \quad (\text{III-6})$$

Konstantu  $T$  ovšem určíme z okrajových podmínek na pláštích pro vlnu TE. Pro vlastní délku vlny platí pro kruhový i obdélníkový rezonátor rovněž vztahy (III-3) a (III-4). Při tom bude u kruhového rezonátoru  $T = \frac{\alpha_{mn}}{a}$ , kde  $\alpha_{mn}$  je  $m$ tý kořen derivace Besselovy rovnice  $n$ tého řádu.

### 33. Dutinové rezonátory obecného tvaru

Dosud jsme uvažovali dutinové rezonátory vlnovodového typu. Odvodíme nyní některé základní vlastnosti dutinového rezonátoru obecného tvaru.

Protože budeme uvažovat obecný tvar, nemůžeme zavádět Hertzovy vektory. Ty jsme mohli zavést jen za určitých předpokladů, kladených na druh souřadnic. Dokázali jsme, že to byly obecné křivocaráre souřadnice, jejichž Laméovy koeficienty měly speciální vlastnosti (viz kap. I).

Určíme tedy uspořádání elektromagnetického pole přímo řešením Maxwellových rovnic

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

Aplikujeme operátor rot na druhou Maxwellovu rovnici a dosadíme do ní potom za  $\mathbf{H}$  příslušný výraz z první Maxwellovy rovnice. Dostaneme

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = k^2\mathbf{E} \quad (\text{III-7})$$

při čemž  $k^2 = \omega^2\mu\epsilon\epsilon_0$ .

Řešením rovnice (III-7) s příslušnou okrajovou podmínkou bychom určili rozložení intenzity elektrického pole a použítím druhé Maxwellovy rovnice bychom určili z intenzity elektrického pole uspořádání intenzity magnetického pole.

Podle Gaussovy věty platí pro libovolný vektor  $\mathbf{v}$

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \int_S (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S})$$

Dosadíme do tohoto vztahu za vektor  $\mathbf{v}$  Urmov-Poyntingův vektor  $[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]$ . Potom je

$$\int_V \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] dV = \int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS$$

kde  $V$  je v našem případě objem dutinového rezonátoru

$S$  plocha omezuující tento obor  
 $\mathbf{n}$  normála k této ploše.

Za intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}^*$  dosadíme z druhé Maxwellovy rovnice výraz

$$+ \frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } \mathbf{E}^* \text{. Potom bude} \\ + \frac{1}{j\omega\mu} \int_V \text{div } [\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^*] dV = \int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS$$

Divergenci pod objemovým integrálem upravíme takto:

$$\text{div } [\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^*] = -(\mathbf{E} \text{rot rot } \mathbf{E}^*) + (\text{rot } \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^*)$$

Potom bude

$$- \frac{1}{j\omega\mu} \int_V (\mathbf{E} \text{rot rot } \mathbf{E}^*) dV + \frac{1}{j\omega\mu} \int_V (\text{rot } \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^*) dV = \int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS$$

Za  $\text{rot } \mathbf{E}^*$  dosadíme na základě rovnice (III-7) výraz  $k^2 \mathbf{E}^*$ , z čehož po úpravě dostaneme

$$k^2 = \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{E}^*) dV}{\int_V (\mathbf{E}^* \mathbf{E}^*) dV} = \frac{j\omega \mu \int_V (\mathbf{E}^* \mathbf{H}^*) dV}{\int_V (\mathbf{E}^* \mathbf{E}^*) dV} \quad (\text{III-8})$$

Plošný integrál ve výrazu (III-8) je úměrný výkonu vyzářenému plochou  $S$ , v našem případě stěnou rezonátoru. Jde-li o dokonale vodivou stěnu, je na ní tečná složka intenzity elektrického pole nulová, a tedy Umov-Poyntingův vektor ve směru normály  $[\mathbf{E}^* \mathbf{n}]$  je také nulový. Potom je

$$k^2 = k_0^2 = \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{E}^* \text{rot } \mathbf{E}^*) dV}{\int_V (\mathbf{E}^* \mathbf{E}^*) dV} \quad (\text{III-9})$$

Vlnové číslo  $k_0$  lze vyjádřit pomocí vlnové délky

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Je proto výrazem (III-9) určena délka vlny dutiny, jejíž objem je  $V$ . Z rovnice (III-9) dostaneme po zjednodušení úpravě použitím druhé Maxwellovy rovnice výraz

$$\int_V \varepsilon (\mathbf{E}^* \mathbf{E}^*) dV = \int_V \mu (\mathbf{H}^* \mathbf{H}^*) dV \quad (\text{III-10})$$

Z této identity vyplývá, že střední hodnota elektrické a magnetické energie v dutinovém rezonátoru je stejné velká. Celková energie (elektrická a magnetická) uvnitř rezonátoru je tedy dána vztahem

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V (\mathbf{E}^* \mathbf{E}^*) dV \quad (\text{III-11})$$

neboť střední hodnota energie elektrického pole je  $W = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V (\mathbf{E}^* \mathbf{E}^*) dV$  a střední hodnota energie magnetického pole  $W = \frac{1}{2} \mu \int_V (\mathbf{H}^* \mathbf{H}^*) dV$ .

Vztahu (III-9) vyhovuje, přihlídneme-li k okrajovým podmínkám, řada diskretních vlastních vlnových čísel  $k_0$ , které přísluší vlastní funkcím dutinového rezonátoru (jednotlivým vidům).<sup>1)</sup>

Uvažujme nyní případ, kdy stěny rezonátoru mají konečnou vodivost. Potom nelze zanedbat výkon vyzářený do stěn. Tento výkon dostaneme integrací Umov-Poyntingova vektoru přes plochu  $S$ . Označme jej  $P_z$ . Potom platí

$$P_z = \frac{1}{2} \int_S ([\mathbf{E}^* \mathbf{H}^*] \mathbf{n}) dS$$

<sup>1)</sup> Ve vztahu (III-9) je číselce vlastního vlnového čísla funkcionálem intenzity elektrického pole. Funkcionál  $k_0^2$  bude minimální, bude-li intenzita elektrického pole vyhovovat Helmholtzově diferenciální rovnici

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E}$$

Tato diferenciální rovnice je vlastně Eulerova rovnice variačního problému minima funkcionálu  $k_0^2$ . Lze dokázat, že minimální hodnotě funkcionálu vyhovuje diskretní řada vlastních vlnových čísel, jímž přísluší vlastní hodnoty intenzity elektrického pole (jednotlivé vidy).

Uvážíme-li, že celková energie elektromagnetického pole je dána vztahem (III-11), upravíme vztah (III-8) se zřetelem na vztah (III-9) takto:

$$k^2 = k_0^2 - j\omega \mu \varepsilon \frac{P_z}{W} \quad (\text{III-12})$$

Vlnové číslo  $k^2$  je dáno výrazem  $\omega^2 \mu \varepsilon$  a vlnové číslo  $k_0^2$  výrazem  $\omega_0^2 \mu \varepsilon$ . Při tom je  $\omega$  úhlový kmitočet dutinového rezonátoru se ztrátami ve stěnách a  $\omega_0$  úhlový kmitočet dutinového rezonátoru s ideálními stěnami. Protože se dutinové rezonátory dělají z kovu dobré vodivosti (obvyčejně z posříbřené mosazi), budou ztráty ve stěnách malé a uvedené kmitočty se budou nepatrně lišit.

Vztah (III-12) upravíme takto:

$$k_0^2 - k^2 = j\omega \mu \varepsilon \frac{P_z}{W}$$

Za  $k^2$  dosadíme výraz  $\omega^2 \mu \varepsilon$  a za  $k_0^2$  výraz  $\omega_0^2 \mu \varepsilon$ . Potom bude

$$\omega_0^2 - \omega^2 = j\omega \frac{P_z}{W} \quad (\text{III-13})$$

Rozložíme rozdíl čtverců na levé straně

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$$

Uvedli jsme, že se kmitočty  $\omega$  a  $\omega_0$  vzájemně téměř neliší. Proto lze přibližně předpokládat, že  $\omega \approx \omega_0$ . Potom je

$$\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$$

a dosazením do rovnice (III-13) dostaneme

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - j \frac{P_z}{2\omega_0 W} \right) \quad (\text{III-14})$$

Výraz  $\frac{\omega W}{P_z}$  označme  $Q$  a nazvěme ho činitelem jakosti dutinového rezonátoru.

Z rovnice (III-14) vidíme, že úhlový kmitočet je vyjádřen komplexním číslem. Je tedy

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - j \frac{1}{2Q} \right) \quad (\text{III-15})$$

kde  $\omega$  je t. zv. komplexní úhlový kmitočet.

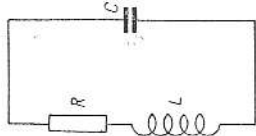
Pro názornost uvedeme jako obdobu příklad obvyčejného laděného obvodu, složeného z kapacity  $C$ , indukčnosti  $L$  a odporu  $R$  spojených v serii.

Okamžitý proud je dán diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0$$

Charakteristická rovnice této diferenciální rovnice je

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$



Obr. 55. Náhradní schéma laděného okruhu.

Z toho

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Potom je

$$i = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\frac{R}{2L} t} e^{j \sqrt{\frac{1}{LC}} t} + C_2 e^{-\frac{R}{2L} t} e^{-j \sqrt{\frac{1}{LC}} t}$$

Je-li  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  (vlastní kmitočet obvodu), je

$$i = C_1 e^{j\omega_0 t} \left(1 + j \frac{R}{2\omega_0 L}\right) e^{-j \frac{R}{2\omega_0 L} t} + C_2 e^{-j\omega_0 t} \left(1 - j \frac{R}{2\omega_0 L}\right) e^{-j \frac{R}{2\omega_0 L} t}$$

Výraz  $\omega_0 \left(1 + j \frac{R}{2\omega_0 L}\right)$  v exponentu tohoto výrazu vyjadřuje komplexní úhlový kmitočet a je to obdoba výrazu (III-15), neboť

$$\frac{R}{\omega_0 L} = Q$$

a potom

$$\omega = \omega_0 \left(1 + j \frac{1}{2Q}\right)$$

kde  $Q$  je činitel jakosti obvodu.

Výraz

$$e^{-j\omega_0 t} \left(1 - j \frac{R}{2\omega_0 L}\right) e^{-j \frac{R}{2\omega_0 L} t}$$

lze také vyjádřit pomocí komplexního úhlového kmitočtu

$$e^{-j\omega_0 t} \left(1 - j \frac{R}{2\omega_0 L}\right) e^{-j \frac{R}{2\omega_0 L} t} = e^{-j\omega t}$$

kde  $\omega = \omega_0 \left(1 - j \frac{R}{2\omega_0 L}\right)$ .

Komplexní úhlový kmitočet  $\omega$ , vyjádřený tímto způsobem, přísluší časové funkci  $e^{-j\omega t}$  se záporným znaménkem v mocnitéli.

V této části jsme poznali tyto vlastnosti obecného dutinového rezonátoru: Elektrické pole v dutinovém rezonátoru existuje jen při určitých diskrétních kmitočtech, na které je rezonátor nalážen; střední hodnota elektrické energie se rovná střední hodnotě magnetické energie; činitel jakosti dutinového rezonátoru je při dokonalém dielektrickém prostředí dán ztrátami v kovovém plášti rezonátoru a je určen vzorcem

$$Q = \frac{\omega W}{P_z} \quad (\text{III-16})$$

kde  $W$  je celková energie dutiny

$P_z$  ztrátový výkon v plášti.

### 34. Určení činitele jakosti dutinového rezonátoru vlnovodového typu

#### 34.1 Resonátor s příčnou vlnou magnetickou

Činitel jakosti určíme podle vzorce (III-16). Ztrátový výkon  $P_z$ , vyzářený do stěn rezonátoru, je dán plošným integrálem Umov-Poyntingova vektoru přes stěny rezonátoru

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S ([EH^*] \cdot n) dS$$

V našem případě budeme integrovat jednak přes plášť válcové plochy, kterou označíme  $S_1$ , jednak přes příčné stěny (základny) rezonátoru  $S_2$ .

Dosadíme-li za  $E$  a  $H$  příslušné složky, dostaneme pro ztrátový výkon v plášti (u vln TM)

$$P_z = \operatorname{Re} \int_{S_1} E_z H_z^* dS_1 + \operatorname{Re} \int_{S_2} E_t H_t^* dS_2 \quad (\text{III-17})$$

kde  $E_z, H_z$  jsou příčné složky (kolmé k ose rezonátoru)

složka intenzity elektrického pole ve směru osy rezonátoru

$E_z$  tečná složka intenzity magnetického pole k průřezové křivce pláště dutiny. Kdyžby byly stěny rezonátoru dokonale vodivé, byly by složky  $E_z$  a  $E_t$  na stěnách reálné a nulové. Při tom by však měly složka  $H_z$  i  $H_t$  konečnou velikost. Vodivost skutečných stěn není nekonečná, nýbrž má konečnou velikost, avšak takovou, že na rozhraní dielektrika a vodivé stěny lze použít Leontovičových okrajových podmínek.

Fyzikální podstata Leontovičových o-

krajových podmínek je tato: Na rozhraní

dvou prostředí dopadá elektromagnetická

rovinná vlna. Předpokládáme, že roz-

hraní je vytvořeno rovinou a odčlňuje dvě

dielektrika, z nichž jedno má absolutní

hodnotu poměrně dielektrické konstanty

nesrovnatelně větší než druhé. V tom

případě se směr rovinné vlny, šířící se

v prostředí s velkou dielektrickou kon-

stantou, nebude příliš odchylovat od smě-

ru normály k hraniční rovině. Známeli

na hranici tečnou složku intenzity mag-

netického pole, která je spojitá, můžeme

určit tečnou složku intenzity elektrického

pole v prostředí s velkou dielektrickou kon-

stantou ze vztahu

$$\frac{E_t}{H_t} = Z_p \quad (\text{III-18})$$

kde  $Z_p$  je charakteristická impedance prostředí s velkou absolutní dielektrickou konstantou

$E_t$  tečná složka intenzity elektrického pole

$H_t$  tečná složka intenzity magnetického pole k hraniční ploše (obr. 56).

Při tom je  $E_t$  kolmé k  $H_t$ .<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> Šířili-li se rovinná vlna v prostředí I (viz obr. 56) s absolutní hodnotou dielektrické konstanty podstatně menší než v prostředí II, nastane lom elektromagnetické vlny v prosředí II s normálou. Z uvedeného vztahu vyplývá, že pro  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$  bude

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

kde  $\alpha$  je úhel dopadu rovinné vlny v prostředí I

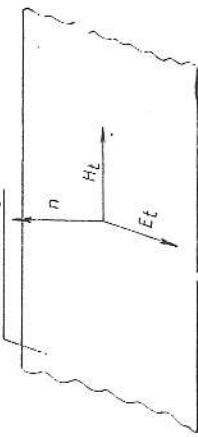
$\alpha'$  úhel, který svírá elektromagnetická vlna v prosředí II s normálou.

Z uvedeného vztahu vyplývá, že pro  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$  bude

$$\sin \alpha' \ll 1$$

To znamená, že při  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$  bude odchylka směru šíření od normály nepatrná. K obdobaému vý-

Část vodivé plochy



Obr. 56. Uspořádání tečných složek intenzity elektrického a magnetického pole na plášti rezonátoru.

V našem případě známe tečnou složku intenzity magnetického pole na plášti rezonátoru. Čím větší bude vodivost stěn rezonátoru, tím méně se bude lišit tato tečná složka od tečné složky intenzity magnetického pole, která by vznikla, kdyby byly stěny rezonátoru dokonale vodivé. U dutinových rezonátorů jsou stěny natolik vodivé, že lze s dostatečnou přesností předpokládat, že bude uspořádání intenzity magnetického pole stejné jako v ideálním případě. Potom určíme velikost tečné intenzity elektrického pole ze vztahu (III-18)

$$E_t = Z_p H_t$$

kde  $Z_p$  je charakteristická impedace vodivého prostředí.

Charakteristickou impedanci rovinné vlny ve volném prostoru s dielektrickou konstantou  $\epsilon$ , permeabilitou  $\mu$  a vodivostí  $\sigma$  určíme ze vztahu

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

V prostředí s velkou vodivostí je  $\omega\epsilon$  nesrovnatelně menší než  $\sigma$ , a proto je

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{2\sigma}}(1 + i) \quad (III-19)$$

Vyjádříme-li složky  $E_z$  a  $E_t$  pomocí charakteristické impedance (III-19) a intenzity magnetického pole  $H_s$  a  $H_t$ , dostaneme

$$E_z = H_s \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2\sigma}}(1 + i)$$

$$E_t = H_t \sqrt{\frac{j\omega\mu}{2\sigma}}(1 + i)$$

Dosadíme tyto výrazy do rovnice (III-17). Potom bude ztrátový výkon v plášti vyjádřen výrazem

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} \frac{j\omega\mu}{2\sigma} H_s H_s^* dS_1 + \int_{S_2} H_t H_t^* \operatorname{Re} \frac{j\omega\mu}{2\sigma} dS_2 \quad (III-20)$$

Složka intenzity magnetického pole ve směru tečny průřezové křivky pláště rezonátoru (obr. 57) je vyjádřena stejně jako složka intenzity magnetického pole ve směru tečny průřezové křivky pláště vlnovodu. U elektromagnetické vlny vidu TM je dána vzorcem (II-49.1). Je tedy

$$H_s = j\omega\epsilon_0 T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} \quad (III-21)$$

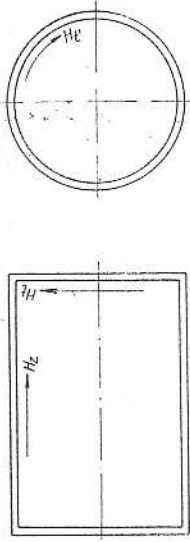
sledku bychom dospěli, kdyby prostředí II mělo komplexní dielektrickou konstantu velké absolutní hodnoty.

Protože se směr šíření elektromagnetické vlny v prostředí II málo liší od směru normály, můžeme hraniční plochu považovat za ekvifázovou. V tom případě bude tečná složka intenzity elektrického pole v prostředí II kolmá na směr šíření (její vektor bude ležet na hraniční ploše) a kolmá k vektoru intenzity magnetického pole. Mezi uvedenými složkami elektromagnetického pole platí na rozhraní obou prostředí vztah (III-18), který ctvodil a přesně matematicky odůvodnil sovětský vědec M. A. Leontovič.

Vztahem (III-18) jsou definovány Leontovičovy okrajové podmínky.

Složku intenzity magnetického pole v příčném směru (kolmém k ose vlnovodu) u vlny TM určíme z rovnice (I-35), kde  $H_z^2 = T_1 T_2^*$

$$H_t = j\omega\epsilon_0 T_2 [\operatorname{grad} T_1 z] \quad (III-22)$$



Obr. 57. Orientace intenzity magnetického pole na plášti rezonátoru.

Dosadíme vztahy (III-21) a (III-22) do rovnice (III-20). Dostaneme

$$P_r = \frac{1}{2} (\omega\epsilon_0)^2 \sqrt{\frac{j\omega\mu}{2\sigma}} \int_{S_1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 T_2 T_2^* dS_1 + (\omega\epsilon_0)^2 \sqrt{\frac{j\omega\mu}{2\sigma}} \int_{S_2} |\operatorname{grad} T_1|^2 T_2 T_2^* dS_2$$

Na základě rovnice (II-46.1) platí

$$\int_{S_1} |\operatorname{grad} T_1|^2 dS = \Gamma^2 \int_{S_1} T_1^2 dS$$

Proto je

$$P_r = \frac{1}{2} (\omega\epsilon_0)^2 \sqrt{\frac{j\omega\mu}{2\sigma}} \int_{S_1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 T_2 T_2^* dS_1 + (\omega\epsilon_0)^2 \sqrt{\frac{j\omega\mu}{2\sigma}} \Gamma^2 \int_{S_2} T_1^2 T_2 T_2^* dS_2 \quad (III-23)$$

Při tom  $T_2$  u dutinového rezonátoru vlnovodového typu, jak jsme odvodili v čl. 32, je

$$T_2 = \cos \frac{p\pi}{l} z$$

Protože plocha  $S_2$  je plocha základů válcového rezonátoru, bude mít funkce  $T_2$  v místě základů hodnotu, která přísluší souřadnicím  $z = 0$  a  $z = l$ . Dosadíme-li tyto souřadnice do  $T_2$ , bude

$$T_2 = 1$$

Tuto hodnotu bude mít funkce  $T_2$  ve výrazu (III-23) za integrálem  $\int_{S_2}$ . Celkovou energii rezonátoru určíme z energie magnetického pole. Proto bude pro celkovou energii rezonátoru platit

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V H_t H_t^* dV$$

kde  $V$  je objem rezonátoru.

Vzhledem k tomu, že  $H_t = j\omega\epsilon_0 T_2 [\operatorname{grad} T_1 z]$ , je

$$W = (\omega\epsilon)^2 \frac{\mu_0}{2} \int_{S_1} \int_0^l |\operatorname{grad} T_1|^2 T_2 T_2^* dS dz + \frac{1}{2} (\omega\epsilon_0)^2 \mu_0 \Gamma^2 \int_{S_2} T_1^2 dS \quad \text{pro } p = 1, 2, 3, \dots$$

$$W = \frac{1}{2} (\omega\epsilon_0)^2 \mu_0 \Gamma^2 \int_{S_1} T_1^2 dS \quad \text{pro } p = 0 \quad (III-24)$$



neboť

$$\int_S |\text{grad } T_1|^2 dS = \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS$$

$$\int_0^l T_2 T_2^* dz = \int_0^l T_1^2 dz = \int_0^l \cos^2 \frac{p\pi}{l} z dz = \frac{l}{2} \quad \text{pro } p = 1, 2, 3, \dots$$

a

$$\int_0^l T_2^2 dz = \int_0^l \cos^2 \frac{p\pi}{l} z dz = l \quad \text{pro } p = 0$$

kde  $l$  je délka rezonátoru.

Známe-li ztrátový výkon v plášti rezonátoru, určený vztahem (III-23) a celkovou energií rezonátoru, určenou vztahem (III-24), určíme číselní jakosti dutinového rezonátoru podle rovnice (III-16). Je tedy

$$Q = \frac{\omega \mu_0}{P_z} = \frac{\frac{1}{2} \omega \mu_0 \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS}{\frac{1}{2} \left[ \frac{\omega \mu}{2\sigma} l \int_S \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds + \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS \right]} \quad \text{pro } p = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III-25})$$

$$Q = \frac{\omega \mu_0 \int_S T_1^2 dS}{\frac{\omega \mu}{2\sigma} \left[ \Gamma^{-2} \int_S \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds + 4l^{-1} \int_S T_1^2 dS \right]} \quad \text{pro } p = 0 \quad (\text{III-26})$$

kde  $s$  je křivka omezujiící průřez válcové plochy rezonátoru

$S$  plocha průřezu rezonátoru

$l$  délka rezonátoru

$T_1$  příčná funkce rezonátoru.

Vzorce (III-25) a (III-26) je určen číselní jakosti dutinového rezonátoru vlnovodového typu s vlnou TM, známe-li uspořádání elektromagnetického pole ve vlnovodu (funkci  $T_1$ , konstantu  $\Gamma$ ).

### 34.2 Rezonátor s příčnou vlnou elektrickou

U příčné elektrické vlny má intenzita magnetického pole příčnou složku kolmou k ose a podélnou složku ve směru osy. Tečná složka intenzity magnetického pole (ve směru tečny průřezové křivky) způsobí vodivý proud v plášti v podélném směru. Tento proud je podmíněn existencí intenzity elektrického pole v podélném směru. Podobně intenzita magnetického pole způsobí proud v tečném směru, který je při konečné vodivosti pláště

rezonátoru podmíněn existencí intenzity elektrického pole v tečném směru. Proto bude dán Umov-Poyntingův vektor, vyzážený do stěn rezonátoru, výrazem:

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S ([EH] \cdot n) dS = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{s_1} E_z H_z^* dS_1 + \frac{1}{2} \text{Re} \int_{s_2} E_z H_z^* dS_2 + \text{Re} \int_{s_3} E_t H_t^* dS_3 \quad (\text{III-27})$$

kde  $E_z$  je intenzita elektrického pole ve směru osy  $z$

$H_z$  složka intenzity magnetického pole ve směru tečny obvodové křivky pláště

$E_t$  složka intenzity elektrického pole ve směru tečny obvodové křivky

$H_t$  intenzita magnetického pole ve směru osy rezonátoru

$E_t$  a  $H_t$  složky intenzity elektrického a magnetického pole v rovině kolmé k  $z$ .

Vyjádříme-li intenzitu elektrického pole  $E_z$ ,  $E_t$  a  $E_t$  na základě Leontovičových okrajových podmínek pomocí příslušných složek intenzity magnetického pole, dostaneme

$$E_z = Z_p H_z; \quad E_t = Z_p H_t; \quad E_t = Z_p H_t; \quad Z_p = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + i)$$

kde  $Z_p$  je charakteristická impedance vodivých stěn rezonátoru.

Se zřetelem na tyto vztahy upravíme výraz (III-27) takto:

$$P = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \left( \frac{1}{2} \int_{s_1} H_z H_z^* dS_1 + \frac{1}{2} \int_{s_2} H_z H_z^* dS_2 + \int_{s_3} H_t H_t^* dS_3 \right) \quad (\text{III-28})$$

Nyní provedeme výpočet jednotlivých integrálů na pravé straně rovnice (III-28):

Intenzita magnetického pole u příčných elektrických vln je určena vzorcem (I-34); proto je

$$H_t = \text{grad}_t \text{div } \Pi_z^m = \frac{\partial T_2}{\partial z} \text{grad}_t T_1$$

Složku intenzity magnetického pole ve směru tečny průřezové křivky určíme jako skalární součin  $(H_t, s)$ , kde  $s$  je jednotkový vektor ve směru tečny

$$H_s = (H_t, s) = \frac{\partial T_2}{\partial z} (\text{grad}_t T_1, s) = \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial s}$$

kde  $\frac{\partial T_1}{\partial s}$  je derivace funkce  $T_1$  ve směru oblouku průřezové křivky. Protože  $T_2 = \sin \frac{p\pi}{l} z$

[viz rovnici (III-6)] a  $\frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{p\pi}{l} \cos \frac{p\pi}{l} z$ , je

$$H_s = \frac{p\pi}{l} \cos \frac{p\pi}{l} z \frac{\partial T_1}{\partial s}$$

Proto je

$$\begin{aligned} \int_{s_1} H_s H_s^* dS_1 &= \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \int_0^l \cos^2 \frac{p\pi}{l} z \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds dz = \\ &= \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 \frac{l}{2} \int_S \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds \end{aligned} \quad (\text{III-29})$$

Číslo  $p$  musí být u vlny TE vždy větší než 0. Příklad, kdy  $p = 0$ , není možný, neboť by nemohly být splněny okrajové podmínky na základnách rezonátoru. Kdyby bylo  $p = 0$ , musila by být intenzita elektrického pole  $E_t$  nezávislá na souřadnici  $z$  a byla by také konstantní na základnách, což není při dokonale vodivých stěnách možné.

Druhý integrál na pravé straně rovnice (III-28) má tvar  $\int_{s_1} H_z H_z^* dS_1$ .

Složka intenzity magnetického pole  $H_z$  je dána vztahem (I-36)

$$H_z = I^2 \Pi_z^m = I^2 T_1 T_2$$

kde u dutinového resonátoru  $T_2 = \sin \frac{p\pi}{l} z$ . Potom je

$$\int_{s_1} H_z H_z^* dS_1 = I^4 \int_0^l \int_{s_1} T_1^2 \sin^2 \frac{p\pi}{l} z dz ds = I^4 \frac{l}{2} \int_{s_1} T_1^2 ds \quad (\text{III-30})$$

kde  $s$  je křivka, omezuující průřez válce dutiny.

Třetí integrál

$$\int_{s_2} H_t H_t^* dS_2 = \int_{s_2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial z} \right)^2 |\text{grad } T_1|^2 dS_2$$

neboť

$$H_t = \text{grad, div } \Pi_z^m = \frac{\partial T_2}{\partial z} \text{grad}_t T_1.$$

Podélná funkce je  $T_2 = \sin \frac{p\pi}{l} z$ , a tedy  $\frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{p\pi}{l} \cos \frac{p\pi}{l} z$ . V místě plochy  $S_2$  (na základnách) je  $z = 0$  a  $z = l$ . Potom v místě plochy  $S_2$  je

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{p\pi}{l}$$

Proto

$$\int_{s_2} H_t H_t^* dS_2 = \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 \int_{s_2} |\text{grad } T_1|^2 dS_2 = \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 I^2 \int_{s_2} T_1^2 dS_2 \quad (\text{III-31})$$

neboť

$$\int_{s_2} |\text{grad } T_1|^2 dS_2 = I^2 \int_{s_2} T_1^2 dS_2$$

Celkovou energii dutinového resonátoru s vlnou typu TE vyjádříme pomocí energie elektrického pole

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E_t E_t^* dV$$

Intenzita elektrického pole u vlny TE je dána vztahem (I-34)

$$E_t = -j\omega\mu_0 \text{rot}_t \Pi_z^m = -j\omega\mu_0 [\text{grad } \Pi_z] = -j\omega\mu_0 T_2 [\text{grad}_t T_1]$$

Potom

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E_t E_t^* dV = \frac{\epsilon_0}{2} \omega^2 \mu_0^2 \int_0^l \int_{s_2} T_2^2 |\text{grad } T_1|^2 dz ds$$

Dosadíme-li za  $T_2$  výraz  $\sin \frac{p\pi}{l} z$ , dostaneme po úpravě

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \omega^2 \mu_0^2 \frac{l}{2} I^2 \int_{s_2} T_1^2 dS_2 \quad (\text{III-32})$$

Dosadíme vztahy (III-29), (III-30) a (III-31) do rovnice (III-28). Potom bude ztrátový výkon ve stěnách resonátoru vyjádřen výrazem

$$P_z = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2\sigma}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 I^2 \int_{s_2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{1}{2} I^4 \int_{s_2} T_1^2 ds + \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 I^2 \int_{s_2} T_1^2 dS_2 \right]$$

Činitel jakosti je  $Q = \frac{\omega W}{P_z}$ . Dosadíme-li do tohoto výrazu za  $P_z$  předešlý výraz a za  $W$

výraz (III-32), dostaneme

$$Q = \frac{\omega\mu_0 I^2 k^2 \int_{s_2} T_1^2 dS_2}{\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2\sigma}} \left[ \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 \int_{s_2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds + I^4 \int_{s_2} T_1^2 ds + \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 I^2 \int_{s_2} T_1^2 dS_2 \right]} \quad (\text{III-33})$$

kde  $S$  je plocha průřezu pláště resonátoru

$s$  obrysová křivka průřezu pláště resonátoru

$l$  délka dutinového resonátoru

$p$  index, určující vlastnosti elektromagnetické vlny v podélném směru

$\mu$  permeabilita vodivého prostředí

$T_1$  příčná funkce resonátoru

$\sigma$  vodivost pláště.

Tímto vzorcem je určen činitel jakosti dutinového vlnovodového resonátoru s vlnou TE. Při tom  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$  je vlnové číslo.

### 35. Některé speciální dutinové resonátory vlnovodového typu

#### 35.1 Válcové resonátory s kruhovým průřezem

Uspořádání elektromagnetického pole válcového resonátoru (obr. 58) je stejné jako ve vlnovodu. Místo funkce  $T_2 = e^{j\pi z}$  je třeba v tomto případě dosadit funkci

$$T_2 = \cos \frac{p\pi}{l} z \quad (\text{pro vlny TM})$$

nebo

$$T_2 = \sin \frac{p\pi}{l} z \quad (\text{pro vlny TE})$$

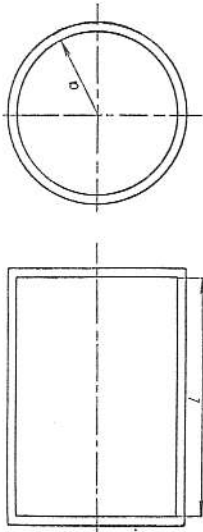
Činitele jakosti kruhového resonátoru určíme u vln TM podle vzorců (III-25) nebo (III-26). Pro funkci  $T_1$  jsme odvodili u kruhového vlnovodu výraz

$$T_1 = J_n(I_r) \cos n\varphi$$

Proto dostaneme, dosadíme-li do (III-25), výraz

$$Q = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \omega \mu_0 \int_0^a J_n^2(Jr) \cos^2 np r dr dp + 4l^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^a J_n^2(Jr) \cos^2 np r dr dp}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \Gamma^{-2} \int_0^a J_n^2(Jr) \cos^2 np r dp + 4l^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^a J_n^2(Jr) \cos^2 np r dr dp}$$

kde  $a$  je poloměr resonátoru  
 $l$  délka resonátoru.



Obr. 58. Příčný a podélný řez válcovým dutinovým resonátorem.

Celý výraz lze krátit integrálem  $\int_0^{2\pi} \cos^2 np dp$ . Potom je

$$Q = \frac{\omega \mu_0 \int_0^a J_n^2(Jr) r dr}{\int_0^a \left[ J_n^2(Ja) a + 4l^{-1} \int_0^a J_n^2(Jr) r dr \right]}$$

Podle Lommelova integrálu platí

$$\int_0^a J_n^2(Jr) r dr = \frac{a^2}{2} [J_n^2(Ja) - J_{n+1}(Ja) J_{n-1}(Ja)]$$

U kruhového vlnovodu platí pro vlnu TM okrajová podmínka  $J_n(Ja) = 0$

Proto, dosadíme-li za  $J_{n+1}(Ja)$  a  $J_{n-1}(Ja)$  derivace Besselových funkcí, dostaneme

$$\int_0^a J_n^2(Jr) r dr = \frac{a^2}{2} J_n^2(Ja)$$

Potom je

$$Q = \frac{\frac{a^2}{2} \omega \mu_0 J_n^2(Ja)}{\int_0^a \left[ J_n^2(Ja) a + 4l^{-1} \frac{a^2}{2} J_n^2(Ja) \right]} = \frac{\omega \mu_0 a}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma} \left( 1 + 2 \frac{a}{l} \right)}} \quad \text{pro } p \neq 0 \quad \text{(III-34)}$$

Bude-li  $p = 0$ , provedeme výpočet podle rovnice (III-26). Postup výpočtu bude obdobný. Dostaneme

$$Q = \frac{\omega \mu_0 a}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma} \left( 1 + \frac{a}{l} \right)}} \quad \text{pro } p = 0 \quad \text{(III-35)}$$

V rovnicích (III-34) a (III-35) je  $\omega$  vlastní úhlový kmitočet dutiny. Tento kmitočet určíme u kruhového dutinového resonátoru z vlastní délky vlny dutinového resonátoru [výraz (III-3)]. V tomto výrazu jsou implicitně zahrnuty indexy  $m, n, p$ , určující vid kmitání.

Činitele jakosti válcového dutinového resonátoru, pracujícího s vlnou TE, určíme podle vzorce (III-33). Dosadíme-li v tomto vzorci za  $T_1$  příslušnou funkci  $J_n(Jr)$  cos  $np$ , dostaneme pro  $Q$  vztah

$$Q = \frac{\omega \mu_0 a (\Gamma^2 a^2)^2 + p^2 \pi^2 a^2 (\Gamma^2 a^2 - n^2)}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma} [p^2 \pi^2 a^2 + (\Gamma a)^4 l^2 + 2p^2 \pi^2 a^2 l^{-1} (\Gamma^2 a^2 - n^2)]}} \quad \text{(III-36)}$$

Při návrhu dutinových resonátorů musíme dbát toho, aby při daných rozměrech ne-rezonoval dutinový resonátor současně při několika vlnách. Abychom mohli po této stránce posoudit vlastnosti resonátorů, sestrojíme závislost výrazu  $(fD)^2$  na  $\left(\frac{D}{l}\right)^2$ . Při tom je  $f$  kmitočet,  $D$  průměr válce a  $l$  délka resonátoru. Pro vlastní kmitočet válcové dutiny jsme odvodili

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\alpha_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

Umocníme-li tento výraz a současně ho násobíme výrazem  $4a^2$ , dostaneme

$$(f2a)^2 = \frac{1}{4\pi^2 \mu_0 \epsilon_0} \left( 4\alpha_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi 2a}{l}\right)^2 \right)$$

Protože  $2a = D$ , kde  $D$  je průměr,  $a \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$ , kde  $c$  je rychlost šíření, lze předěšší vztah upravit takto:

$$(fD)^2 = \left(\frac{\alpha_{nm} c}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{cp}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \quad \text{(III-37)}$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že závislost  $(fD)^2$  na  $\left(\frac{D}{l}\right)^2$  je lineární (obr. 59). Vyjádříme tuto závislost graficky pro vlny TE a TM [při tom je  $\alpha_{nm}$  pro TM mý kořen rovnice  $J_n(Ja) = 0$  a pro TE mý kořen rovnice  $J_n'(Ja) = 0$ ].

Z křivek je vidět, pro které délky  $l$  při daném průměru  $D$  a kmitočtu  $f$  může nastat resonance při dvou vlnách současně. Prakticky se to projeví tím, že se podstatně zmenší činitel jakosti resonátoru a při přeladování se objeví t. zv. „díry“.

Z kruhových resonátorů používáme nejčastěji resonátoru, který pracuje s vlnou TE<sub>01r</sub>. Abychom mohli posoudit přednosti tohoto vidu, odvodíme nejdříve uspořádání intenzity

elektrického a magnetického pole. Odvodili jsme, že Hertzův vektor  $\Pi_z^m$  je určen vlivu  $TE_{011}$  vztahem

$$\Pi_z^m = C J_0(Ir) \sin \frac{p\pi}{l} z$$

Intenzitu magnetického pole určíme ze vzorce (I-36)

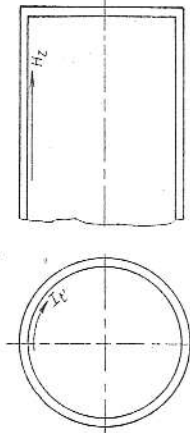
$$H = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m$$

Dosadíme-li za  $\Pi_z^m$  příslušný výraz, je

$$H_z = I^2 C \Pi_z^m = I^2 C J_0(Ir) \sin \frac{p\pi}{l} z$$

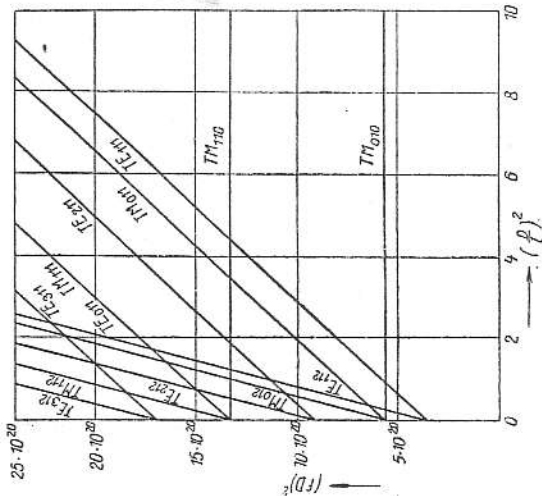
$$H_r = C \frac{\pi}{l} J_0'(Ir) \cos \frac{p\pi}{l} z$$

$$H_\varphi = 0$$



Obr. 60. Orientace proudu a intenzity magnetického pole válcového dutinového rezonátoru vlivu  $TE_{011}$ .

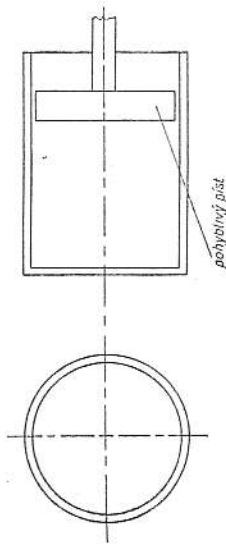
Obr. 59. Závislost veličiny  $(fD)^2$  na poměru  $(\frac{D}{l})^2$  pro různé vlny válcového rezonátoru.



Podélná složka intenzity magnetického pole vyvolá proud tekoucí ve směru tečny ke křivce, omezující průřez pláště (obr. 60). Intenzita magnetického pole  $H_\varphi$  způsobuje povrchový proud, tekoucí v podélném směru. Protože je  $H_\varphi = 0$ , bude i povrchový proud, tekoucí v podélném směru, nulový.

Aby se resonátor mohl plynule ladit, provádí se zadní stěna resonátoru pohyblivá. Protože mechanický styk mezi pohyblivou stěnou a pláštěm resonátoru nemůže být ideálně vodivý, nemůže být číselní jakosti takových resonátorů příliš velké.

U vlny  $TE_{011}$  neteče však v podélném směru proud a pohyblivá stěna nemusí být mechanicky spojena s pláštěm. Pak lze provést pohyblivou stěnu podle obr. 61.



Obr. 61. Příčný a podélný řez dutinovým rezonátorem s pístem.

Takových resonátorů se skutečně používá jako absorpčních vlnoměrů. Jejich číselní jakosti je velmi velké.

Číselní jakosti resonátoru s indexem  $TE_{011}$  určíme ze vzorce (III-36) tak, že dosadíme za  $n = 0$  a za  $p = 1$ . Potom dostaneme

$$Q_{011} = \frac{\omega \mu_0}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}} \frac{\alpha_{01}^2 \left( \frac{l}{a} \right)^2 + \pi^2}{\alpha_{01}^2 \left( \frac{l}{a} \right)^3 + 2\pi^2} l \quad (\text{III-38})$$

kde je  $\alpha_{01} = 3,8$

$\omega$  je vlastní úhlový kmitočet dutiny

$\mu$  permeabilita pláště

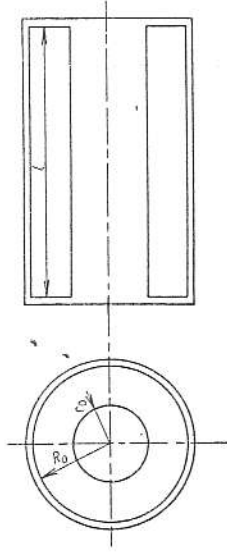
$\sigma$  vodivost pláště

$a$  poloměr resonátoru

$l$  délka resonátoru

### 35.2 Souosý resonátor

U souosého resonátoru (obr. 62) budou způsobeny ztráty na vnějším plášti, na vnitřním



Obr. 62. Řez souosým dutinovým rezonátorem.

vodíci a na bočních stěnách. Ztrátový výkon určíme opět jako výkon vyzářený do stěn resonátoru. Bude tedy s použitím Leontovičových okrajových podmínek

$$P_z = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} H_\varphi H_\varphi^* ds$$

Intenzita magnetického pole v souosém vodiči je určena vztahem (II-102). V tomto vztahu je však třeba nahradit funkci  $e^{-\gamma z}$  funkcí  $\cos \frac{p\pi}{l} z$  (obdobně jako u vlny TM).

Je tedy

$$H_\varphi = -j\omega \epsilon C \frac{1}{r} \cos \frac{p\pi}{l} z$$

a ztrátový výkon

$$P_z = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left( \frac{\omega \mu}{2\sigma} \right)^2 C^2 \frac{1}{r^2} \cos^2 \frac{p\pi}{l} z ds$$

Plochu  $S$ , po níž integrujeme, rozdělíme na povrch vnějšího pláště, vnitřního vodiče a na dvě základny. Proto, je-li  $P_{z1}$  ztrátový výkon vnějšího pláště,

$$P_{z1} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\omega\mu}{2\sigma} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \cos^2 \frac{p\pi}{l} z r dr dz = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\omega\mu}{2\sigma} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \frac{1}{R_0} l \pi$$

kde  $R_0$  je poloměr vnějšího pláště  
l délka resonátoru.

Obdobně platí pro vnitřní vodič, označíme-li jeho ztráty  $P_{z2}$ ,

$$P_{z2} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\omega\mu}{2\sigma} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \frac{1}{r_0} l \pi$$

kde  $r_0$  je poloměr vnitřního vodiče.

Ztrátový výkon na bočních stěnách určíme jako výkon vyzářený mezikružím vnitřního poloměru  $r_0$  a vnějšího poloměru  $R_0$ . Označíme-li tento ztrátový výkon  $P_{z3}$ , je tedy

$$P_{z3} = \int_{z=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\omega\mu}{2\sigma} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \frac{1}{r^2} r dr d\varphi = \int_0^l \frac{\omega\mu}{2\sigma} 2\pi \ln \frac{R_0}{r_0} (\omega\varepsilon)^2$$

Celkovou energii určíme z energie magnetického pole

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V H_\varphi H_\varphi^* dV = \frac{\mu_0}{2} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \int_{r_0}^{R_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{p\pi}{l} z r d\varphi dr dz = \\ = \frac{\mu_0}{2} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \pi l \ln \frac{R_0}{r_0}$$

Činitele jakosti určíme ze vzorce (III-16). Bude tedy

$$Q = \frac{\omega W}{P_z}$$

kde  $P_z = P_{z1} + P_{z2} + P_{z3}$ . Po dosazení za  $W$ ,  $P_{z1}$ ,  $P_{z2}$  a  $P_{z3}$  právě odvozených vztahů dostaneme

$$Q = \frac{\omega W}{P_z} = \frac{\frac{\mu_0}{2} (\omega\varepsilon)^2 C^2 \pi l \ln \frac{R_0}{r_0}}{C^2 \int_0^l \frac{\omega\mu}{2\sigma} (\omega\varepsilon)^2 \left[ \pi l \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + 2\pi \ln \frac{R_0}{r_0} \right]} = \\ = \frac{\omega \mu_0 R_0 \ln \frac{R_0}{r_0}}{2\sigma \left( 1 + \frac{R_0}{r_0} + 4 \frac{R_0}{l} \ln \frac{R_0}{r_0} \right)} \quad (\text{III-39})$$

### 35.3 Obdélníkový resonátor

Činitele jakosti určíme podle (III-25) nebo (III-33). Příčná funkce  $T_1$  je dána stejným výrazem jako u vlnovodu

$$T_1 = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

Určíme jednotlivé integrály ve výrazu (III-25). Integrál  $\int_S \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds$  budeme integrovat po obvodu průřezového obdélníku, tedy po stranách daných rovnicemi  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $x = 0$ . Při tom musíme uvážit směr normály

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad \text{pro } x = a, \quad \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\frac{\partial T_1}{\partial x} \quad \text{pro } x = b$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial y} \quad \text{pro } y = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\frac{\partial T_1}{\partial y} \quad \text{pro } y = b$$

a dostaneme tedy

$$\int_S \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds = \int_0^a \int_0^b \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} \cdot 0 \right) dx + \int_0^a \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y dy + \\ + \int_0^a \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \cos^2 \frac{n\pi}{b} b dx + \int_0^b \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \left( \frac{m\pi}{a} \cdot 0 \right) \sin^2 \frac{n\pi}{b} y dy = \\ = a \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + b \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2$$

Výraz  $\frac{\partial T_1}{\partial n}$  je derivace funkce  $T_1$  podle normály, a je tedy třeba v tomto případě odlišit normálu od indexu  $n$  určujícího vid.

Integrál  $\int_S T_1^2 dS$  budeme integrovat přes průřez obdélníku

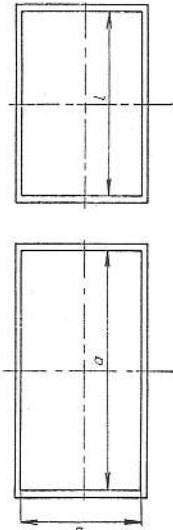
$$\int_S T_1^2 dS = \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y dx dy = \frac{1}{4} ab$$

Dosadíme-li odvozené integrály do výrazu (III-25) a uvážíme-li, že u obdélníkového vlnovodu je  $I^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2$ , bude číselník jakosti dutinového resonátoru s obdélníkovým průřezem určen takto:

$$Q_{mnp} = \frac{\omega \mu_0}{4 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \left( \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) \left( \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} \right) \quad (\text{III-40})$$

- kde  $a$  je jedna strana obdélníku
- $b$  druhá strana obdélníku
- $l$  délka resonátoru
- $m, n$  čísla určující vid.

Činitele jakosti dutinového resonátoru s příčnou elektrickou vlnou bychom určili z rovnice (III-33). Nebudeme jej odvozovat, neboť u jednoduchých vidů, kterých se v praxi nejčastěji používá, určíme činitele jakosti ze vzorce pro TM, tedy ze vzorce (III-40).



Obr. 63. Příčný a podélný řez obdélníkovým dutinovým resonátorem.

Tyto vidy se musí charakterisovat takovou skupinou indexů  $m, n, p$ , z nichž jeden se rovná nule. V tomto případě lze totiž považovat dutinový resonátor pracující s příčnou elektrickou vlnou za dutinový resonátor pracující s příčnou vlnou magnetickou. Avšak indexy, charakterizující vid, příslušejí v tomto případě jiným rozměrům, než jak tomu bylo při určování vlny TE. Záměnu vlny TE za vlnu TM lze provést proto, že všechny složky jsou vyjádřeny trigonometrickými funkcemi a ve všech třech hlavních směrech vzniká stojaté vlnění. Tak na př. dutinový resonátor s vlnou  $TE_{10p}$ , kde se první index vztahuje k rozměru  $a$  (viz obr. 63), druhý k rozměru  $b$  a třetí k rozměru  $l$ , můžeme uvažovat také tak, jako by pracoval s vlnou  $TM_{10p}$ , avšak první index se vztahuje k rozměru  $a$ , druhý k rozměru  $l$  a třetí k rozměru  $b$ . Zde je činitele jakosti dán vzorcem (III-40), dosa-díme-li do tohoto vzorce za  $b = l$  a za  $l = b$ . Potom je

$$Q_{TM_{110}} \equiv Q_{TM_{110}} = \omega_l \mu_0 \sqrt{\frac{\omega_l \mu}{4} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l} \right) + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{l} \right)} \quad (III-41)$$

Je-li  $a = l$ , je

$$Q_{TM_{110}} = \frac{\omega_l \mu_0}{4} \frac{ab}{\omega_l \mu} \frac{ab}{a+b} \quad (III-42)$$

kde  $a, b$  jsou rozměry obdélníku (průřezu) resonátoru

- $l$  délka resonátoru
- $\mu$  permeabilita stěny resonátoru
- $\sigma$  vodivost stěny resonátoru.

Důkaz, že vlna  $TE_{101}$  má stejné uspořádání složek jako vlna  $TM_{110}$ , provedl by se porovnáním složek intenzity elektrického a magnetického pole vlny TM a TE, při čemž bychom museli uvážit rozdílnost označení souřadnic.

### 36. Přibližné metody výpočtu vlastní délky vlny a činitele jakosti dutinových resonátorů

V předcházejícím článku jsme určovali vlastní délku vlny a činitele jakosti dutinových resonátorů jednoduchých geometrických tvarů. Tyto tvary byly takové, že jsme mohli zavést takové ortogonální souřadnice, aby plocha omezuující dutinu mohla být vyjádřena jednoduchými vztahy, takže jsme mohli jednoduše splnit okrajovou podmínku nutnou pro jednoznačné vyřešení vlnové rovnice Hertzova vektoru.

V praxi se však častěji setkáváme s takovými tvary dutinových resonátorů, jejichž elektromagnetické pole nelze jednoduše určit. Při výpočtu takových resonátorů musíme použít přibližných metod. Uvedeme tři takové metody: metodu kvasistacionárního pole, metodu „sešívání dutin“ a metodu poruchovou.

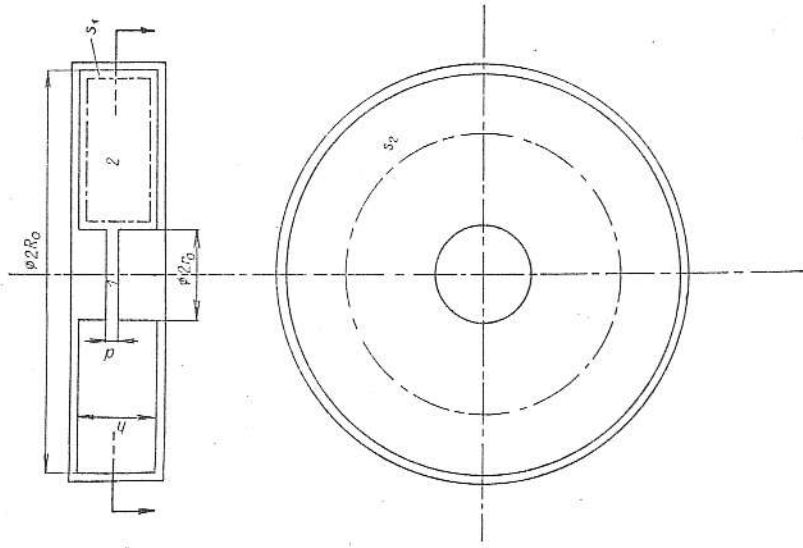
#### 36.1 Kvasistacionární metoda

Tato metoda je ze všech uvedených metod nejméně přesná. Je založena na principu, že pole v dutinách, jejichž rozměry jsou podstatně menší než délka vlny, lze pokládat za soustředěné, to znamená, že jeho průběh v oboru dutiny je přibližně konstantní. Za těchto okolností lze převést problém vlastní délky, dutiny na problém se soustředěnými veličinami (kapacitou a indukčností). Předvedeme tuto metodu na dvou jednoduchých příkladech. Určíme vlastní délku vlny a činitele jakosti toroidního resonátoru a vlastní délku vlny a činitele jakosti jedné dutiny anodového bloku magnetronu.

Toroidního resonátoru používáme jako dutinového resonátoru klystronu. Jeho jednoduchý tvar znázorňuje obr. 64.

Kdybychom určili průběh elektromagnetického pole některou přesnější metodou (na př. metodou „sešívání dutin“), zjistili bychom, že téměř celá energie elektromagnetického pole bude soustředěna v prostoru 1 a převládající část energie magnetického pole v prostoru 2. Tato vlastnost je podstatou kvasistacionární metody. Čím budou rozměry  $R_0$  a  $h$  menší než délka vlny dutiny, tím bude metoda přesnější.

Při řešení vlastní délky vlny kvasistacionární metodou použijeme Maxwellových rovnic v integrálním tvaru. Rovnice vyjádříme takto:



Obr. 64. Toroidní dutinový resonátor.

$$\int_{s_1} (\mathbf{E} \, ds) = -j\omega\Phi = -j\omega\mu_0 \int_{s_1} (\mathbf{H} \, ds) \quad (\text{III-43})$$

$$\int_{s_2} (\mathbf{H} \, ds) = I_0 \quad (\text{III-44})$$

Zde  $\Phi$  je celkový magnetický tok, protékající plochou  $S_1$  omezenou uzavřenou křivkou  $s_1$ .  $I_0$  celkový proud, vodivý i posuvný, protékající plochou omezenou uzavřenou křivkou  $s_2$ .

V našem případě budou silové čáry magnetického pole souosé kružnice se středem na ose dutinového resonátoru. Tyto křivky budou protínat kolmo průřez dutiny, znázorněný na obr. 64 (kolmo k náčrtu). Magnetický tok bude protékat tímto průřezem. Zvolíme proto křivku  $s_1$  tak, jak znázorňuje obr. 64. Za křivku  $s_2$  zvolíme kružnice, tvořící magnetické silové čáry.

Příspěvek k cirkulaci  $\int (\mathbf{E} \, ds)$  na části křivky, která leží v kovovém plášti dutiny, je nulový, neboť na kovovém plášti je intenzita elektrického pole nulová. Intenzita elektrického pole má určitou velikost jen na části křivky  $s_1$ , která leží v prostoru  $I$ . Proto je

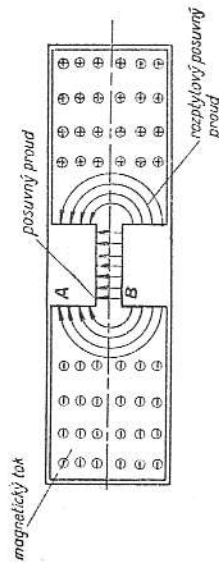
$$\int_{s_1} (\mathbf{E} \, ds) = E_1 d \quad (\text{III-43.1})$$

kde  $E_1$  je intenzita elektrického pole v prostoru  $I$  (v místě kondensátoru).

Celkový proud  $I_0$  ve výrazu (III-44) je způsoben posuvným proudem, tekoucím v místě kondensátoru. Tento celkový posuvný proud se skládá ze dvou složek. Jedna složka, kterou označíme  $I_{e1}$ , přísluší posuvnému proudu protékajícímu kruhovými deskami kondensátoru, druhá složka  $I_{e2}$  přísluší rozptylovému posuvnému proudu (obr. 65). Je-li poloměr kruhových desek, tvořících kondensátor,  $r_0$ , je posuvný proud  $I_{e1}$  dán vztahem

$$I_{e1} = j\omega\epsilon_0 E S = j\omega\epsilon_0 E \pi r_0^2 \quad (\text{III-45})$$

Rozptylový posuvný proud je vytvořen elektrickým rozptylovým polem. Intenzita elektrického rozptylového pole musí být kolmá k vodivé části resonátoru; v našem případě k válci s poloměrem  $r_0$ . Průběh silových čar tohoto pole neznáme. Avšak v prvním přiblížení lze předpokládat, že silové čáry jsou tvořeny kružnicemi, jejichž střed je ve středu vzdálenosti mezi kondensátorovými deskami (viz obr. 65).



Obr. 65. Uspořádání intenzity elektrického a magnetického pole v dutinovém resonátoru.

Rozdíl potenciálů mezi obecnými body A, B, ležícími na silové čáře, bude pro všechny silové čáry konstantní a bude stejný jako rozdíl potenciálů mezi kondensátorovými deskami. To však platí u popisovaného resonátoru jen tehdy, je-li vzdálenost mezi body A a B řádově menší než obvod osového průřezu resonátoru. Označíme tento rozdíl potenciálů  $U$ .

Protože v našem případě je intenzita elektrického pole na silové čáře konstantní, lze psát

$$\int_A^B (\mathbf{E} \, ds) = \pi r_0 E = U$$

neboť délka silové čáry se rovná půlkružnici s poloměrem  $r_0$ . Při tom  $U$  je napětí v místě kondensátoru. Je tedy

$$U = E_1 d$$

Potom intenzita elektrického pole, která přísluší silové čáře s poloměrem  $r_0$ , je dána vztahem

$$E = \frac{E_1 d}{\pi r_0}$$

Celkový posuvný rozptylový proud vtěká do válcové plochy poloměru  $r_0$  a výšky  $\frac{h}{2}$ . Intenzita elektrického pole  $E$  je funkcí poloměru  $\rho$ , t. j. funkcí polohy na válcové ploše. Dostaneme tedy celkový posuvný proud integrací elementárních posuvných proudů po válcové ploše. Je tedy

$$I_{e2} = j\omega\epsilon_0 \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{h}{2}} E 2\pi r_0 \, d\rho = j\omega\epsilon_0 \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E_1 d}{\pi \rho} 2\pi r_0 \, d\rho$$

Po integraci dostaneme

$$I_{e2} = j\omega\epsilon_0 E_1 d 2r_0 \ln \frac{h}{d} \quad (\text{III-46})$$

Celkový posuvný proud je dán součtem proudů  $I_{e1}$  a  $I_{e2}$  podle rovnice (III-45) a (III-46)

$$I_0 = I_{e1} + I_{e2} = j\omega\epsilon_0 E_1 \pi r_0^2 \left( 1 + \frac{2}{\pi} \frac{d}{r_0} \ln \frac{h}{d} \right) \quad (\text{III-47})$$

Tím jsme určili celkový posuvný proud, uvedený v rovnici (III-44).

Cirkulaci ve výrazu (III-44) provedeme po silové čáře magnetického pole. Tato silová čára je soustředná kružnice s obecným poloměrem  $r$ .

Je tedy

$$2\pi r H_\varphi = j\omega\epsilon_0 E_1 \pi r_0^2 \left( 1 + \frac{2}{\pi} \frac{d}{r_0} \ln \frac{h}{d} \right) \quad (\text{III-48})$$

Označíme pro jednoduchost efektivní plochu, již protéká posuvný proud, znakem  $S$ . Potom bude

$$S = \pi r^2 \left( 1 + \frac{2}{\pi} \frac{d}{r_0} \ln \frac{h}{d} \right) \quad (\text{III-49})$$

a

$$H_\varphi = j\omega\epsilon_0 E_1 \frac{S}{2\pi r} \quad (\text{III-50})$$

Takto je určena intenzita magnetického pole v obecném místě, určeném poloměrem  $r$ . Známe-li intenzitu magnetického pole, lze určit celkový magnetický tok, protékající

toroidním rezonátorem, integraci intenzity  $H_\varphi$  přes průřez  $S$ . Dosadíme odvozený výraz pro  $H_\varphi$  do rovnice (III-43). Potom se zřeteltem na rovnici (III-43.1) dostaneme

$$E_1 d = k^2 E_1 \frac{S}{2\pi} \int_{r=R_0}^{R_1} \frac{1}{r} h dr = k^2 E_1 \frac{S}{2\pi} k \ln \frac{R_1}{R_0} \quad (III-51)$$

kde  $k$  je vlnové číslo ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ).

Z uvedeného vztahu určíme délku vlny  $\lambda$ . Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\lambda = \pi r_0 \sqrt{\frac{2k}{d} \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{d}{r_0} \ln \frac{R_1}{R_0}\right)} \quad (III-51)$$

Tímto vzorcem je dána vlastní délka vlny dutinového rezonátoru a je nejdělnější z možných délek vln. Ostatní délky vln, při nichž může dutina rezonovat, nelze touto metodou určit. Určíme je jinou přesnější metodou, při níž přihlížíme k vyšším vidům elektromagnetického pole v dutině.

Činitele jakosti tohoto dutinového rezonátoru určíme podle známého vzorce

$$Q = \frac{\omega W}{P_z}$$

kde  $W$  je celková energie dutiny

$P_z$  ztrátový výkon, vyzářený do stěn rezonátoru.

Celkovou energii elektromagnetického pole určíme z energie magnetického pole (elektrická energie dutiny se rovná magnetické energii dutiny) podle vzorce

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V (\mathbf{H}\mathbf{H}^*) dV$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za  $\mathbf{H}$  výraz (III-50), dostaneme pro celkovou energii

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0}{2} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 \int_{r_0}^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h 2\pi r h dr = \\ &= \frac{\mu_0}{2} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2\pi h \ln \frac{R_0}{r_0} \end{aligned} \quad (III-52)$$

Celkový výkon vyzářený do stěn rezonátoru určíme integrací Umov-Poyntingova vektoru přes stěny rezonátoru. Je tedy

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS$$

Vztah mezi intenzitou elektrického a magnetického pole na stěnách rezonátoru je určen Leontovičovými okrajovými podmínkami

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \mathbf{H}$$

Ztrátový výkon pak určíme ze vztahu

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \frac{\omega\mu}{2\sigma} \mathbf{H}\mathbf{H}^* dS$$

Při tom plocha  $S$  je plocha, která omezuje dutinu. Tato plocha se skládá z válcové plochy s poloměrem  $r_0$  a výškou  $h$  (vzdálenost mezi kondenzátorovými deskami  $d$  zanedbáme proti  $h$ ), z válcové plochy poloměru  $R_0$  a výšky  $h$  a ze dvou mezikruhových ploch s poloměry  $r_0$  a  $R_0$ . Ztráty ve válcové ploše poloměru  $r_0$  označíme  $P_{z1}$  a ztráty ve válcové ploše poloměru  $R_0$  označíme  $P_{z2}$ . Potom bude

$$P_{z1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r_0}^{R_0} 2\pi r_0 h d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2\pi r_0 h$$

Obdobně určíme ztráty  $P_{z2}$ :

$$P_{z2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2\pi \frac{R_0}{R_0} h$$

Ztráty v mezikruhových deskách určíme integrací Umov-Poyntingova vektoru přes mezikruhovou plochu s poloměry  $r_0$  a  $R_0$ :

$$P_{z3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2 \int_{r=r_0}^{R_0} \int_0^{2\pi} 2\pi r dr =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2\pi \ln \frac{R_0}{r_0}$$

Dosadíme-li odvozené výrazy do vztahu pro činitele jakosti, dostaneme

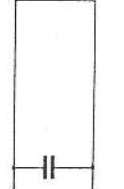
$$\begin{aligned} Q = \frac{\omega W}{P_z} &= \frac{\frac{\mu_0}{2} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2\pi h \ln \frac{R_0}{r_0}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\omega\epsilon)^2 E_1^2 \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2 2\pi \left(\frac{h}{r_0} + \frac{h}{R_0} + 2 \ln \frac{R_0}{r_0}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{\omega\mu_0 \ln \frac{R_0}{r_0}}{\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_0} + \frac{2}{h} \ln \frac{R_0}{r_0}\right)} \end{aligned} \quad (III-53)$$

V tomto vzorci určíme úhlový kmitočet  $\omega$  z výrazu pro vlastní délku vlny (III-51):

Jak jsme již uvedli, jsou výsledky v předcházející části tím přesnější, čím menší jsou rozměry dutiny v porovnání s délkou vlny.

Je-li však rozměr  $R_0$  stejného řádu s délkou vlny, nelze předešlých výsledků použít. V tomto případě nebude intenzita magnetického pole určena vzorcem (III-50) a intenzita elektrického pole nebude soustředěna jen v kondenzátorové části, nýbrž po celé dutině.

Výsledky budou přesnější, budeme-li uvažovat dutinu jako radiální vedení, zakončené kapacitou. Náhradní schema takového dutinového rezonátoru je na obr. 66.



náhradní schema radiálního vedení

Obr. 66. Náhradní zapojení toroidního rezonátoru.



Pro celkový posuvný proud, tekoucí kapacitou, jsme odvodili vztah (III-47). Je-li mezi deskami kondensátoru napětí  $U$ , je intenzita pole v místě kondensátoru dána výrazem

$$E_1 = \frac{U}{d}$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (III-47), dostaneme

$$I_e = j\omega\varepsilon_0 \frac{U}{d} \pi r_0^2 \left( 1 + \frac{2d}{\pi r_0} \ln \frac{h}{d} \right)$$

Výraz  $\pi r_0^2 \left( 1 + \frac{2d}{\pi r_0} \ln \frac{h}{d} \right)$  jsme nazvali efektivní plochou, již protéká posuvný proud,

a označili jsme jej  $S$ . Potom je

$$I_e = j\omega\varepsilon_0 \frac{U}{d} S$$

a z toho

$$\frac{U}{I_e} = \frac{d}{j\omega\varepsilon_0 S}$$

Poměr napětí a posuvného proudu určuje impedanci kondensátoru. Je-li kapacita kondensátoru  $C$ , musí se tato impedance rovnat výrazu

$$\frac{U}{I_e} = \frac{1}{j\omega C}$$

Z porovnání obou předcházejících výrazů vyplývá, že kapacita

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Pro vstupní impedanci radiálního vedení nakrátko jsme odvodili vzorec (II-156). V našem případě je

$$Z_p = j \frac{h}{2\pi r_0} \int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \ln (kr_0, kR_0)$$

kde  $Z_p$  je vstupní impedance radiálního vedení v místě s poloměrem  $r_0$ , je-li vzdálenost mezikruhových desek  $h$ . K této impedanci je připojena paralelně impedance kondensátoru. Označíme-li celkovou impedanci  $Z_e$ , je potom

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_e} &= j\omega C - j \frac{2\pi r_0}{h} \int \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \ln (kr_0, kR_0) = \\ &= j \frac{\int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} h\omega C \ln (kr_0, kR_0) - 2\pi r_0}{\varepsilon_0} \int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} h \ln (kr_0, kR_0) \end{aligned}$$

Uvažovaný obvod bude v rezonanci, bude-li čítec předcházejícího výrazu nulový, neboť impedance  $Z$  bude při tom nekonečná. Bude tedy

$$\int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} h\omega C \ln (kr_0, kR_0) - 2\pi r_0 = 0$$

Při tom je  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$  ( $c$  je rychlost šíření elektromagnetické vlny ve volném prostoru) a  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Je tedy

$$\int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} h \frac{2\pi c}{\lambda} C \ln (kr_0, kR_0) - 2\pi r_0 = 0$$

Z toho je

$$\ln \left( \frac{2\pi}{\lambda} r_0, \frac{2\pi}{\lambda} R_0 \right) = \frac{r_0 \lambda}{cC} \int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} h$$

Kapacita kondensátoru  $C$  je dána výrazem

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

kde  $S$  je efektivní plocha kondensátoru.

Potom je

$$\ln \left( \frac{2\pi}{\lambda} r_0, \frac{2\pi}{\lambda} R_0 \right) = \frac{\lambda r_0 d}{c\varepsilon_0 S} \int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} h$$

Protože  $\int \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$ , je

$$\ln \left( \frac{2\pi}{\lambda} r_0, \frac{2\pi}{\lambda} R_0 \right) = \frac{\lambda r_0 d}{Sh}$$

Předcházející vztah upravíme ještě takto:

$$\frac{\operatorname{ct} (kr_0, kR_0)}{k} = \frac{Sh}{2\pi r_0 d} \quad (\text{III-54})$$

kde  $\operatorname{ct} (kr_0, kR_0)$  je malá radiální kotangenta. Předcházející vztah představuje transcendentní rovnici vzhledem ke  $k$  a budeme ji řešit graficky. Při grafickém řešení použijeme křivku na str. 81. Jsou-li dány rozměry resonátoru  $R_0, r_0$ , výška  $h$  a vzdálenost mezi kondensátorovými deskami  $d$ , postupujeme při grafickém řešení takto: Určíme hodnotu poměru  $\frac{R_0}{r_0}$  a velikost  $\frac{Sh}{2\pi r_0 d (R_0 - r_0)}$ . Tento výraz, jak je vidět ze vztahu (III-54), musí se rovnat výrazu

$$\frac{\operatorname{ct} (kr_0, kR_0)}{k(R_0 - r_0)}$$

K poměru  $\frac{R_0}{r_0}$  určíme příslušnou křivku na obr. 26a, b.

K známé pořadnici  $\frac{\operatorname{ct} (kr_0, kR_0)}{k(R_0 - r_0)}$  určíme hodnotu výrazu  $k(R_0 - r_0)$ . Z této hodnoty určíme vlnové číslo  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , a tedy i  $\lambda$ , neboť známe velikost  $(R_0 - r_0)$ .

Jako příklad uvedeme výpočet vlastní délky vlny toroidního resonátoru s rozměry

$$R_0 = 1 \text{ cm}, \quad r_0 = 0,25 \text{ cm}, \quad k = 0,2 \text{ cm}, \quad d = 0,02 \text{ cm}.$$

Poměr  $\frac{R_0}{r_0} = 4$ . Potom je

$$\frac{Sh}{2\pi r_0 d(R_0 - r_0)} = 2,5.$$

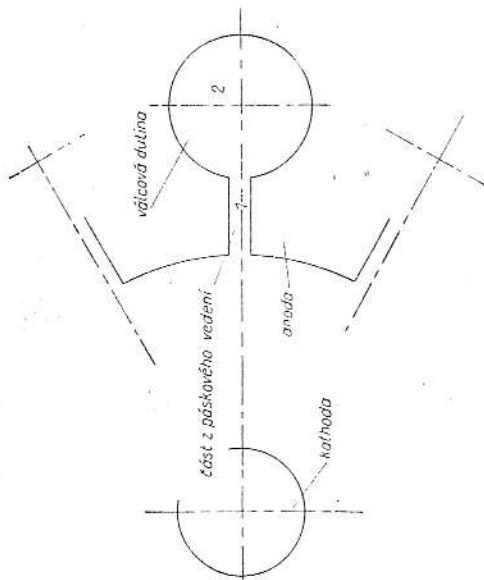
Těto hodnotě odpovídá podle křivky na obr. 26a, b velikost pro pořadnici

$$k(R_0 - r_0) = 0,9$$

Z toho

$$\lambda = \frac{2\pi(R_0 - r_0)}{0,9} = 5,25 \text{ cm}$$

Jako druhý příklad kvasistacionární metody provedeme výpočet jedné dutiny anodového bloku magnetronu (obr. 67).



Obr. 67. Část dutiny magnetronu.

Budeme uvažovat magnetron na bočních stěnách neomezený. V tom případě se bude dutina skládat z páskového vedení (část 1) a z válcové dutiny (část 2). Při tom budou všechny rozměry podstatně menší než délka vlny. Tento předpoklad opravňuje použít s dostatečnou přesností kvasistacionární metody.

Elektrické pole ve šterbině budeme pokládat za homogenní a magnetické pole ve válcové dutině za konstantní. Na základě Maxwellových rovnic, vyjádřených v integrálním tvaru, platí,

$$\int_{s_1} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s}) = -j\omega\mu_0 \int_{s_1} (\mathbf{H} \, d\mathbf{s}) \quad (\text{III-55})$$

$$\int_{s_2} (\mathbf{H} \, d\mathbf{s}) = j\omega\epsilon_0 \int_{s_2} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s}) + \int_{s_2} (\mathbf{J} \, d\mathbf{s}) \quad (\text{III-56})$$

kde  $\int_{s_1} (\mathbf{H} \, d\mathbf{s})$  je magnetomotorická síla

$\int_{s_2} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s})$  elektromotorická síla

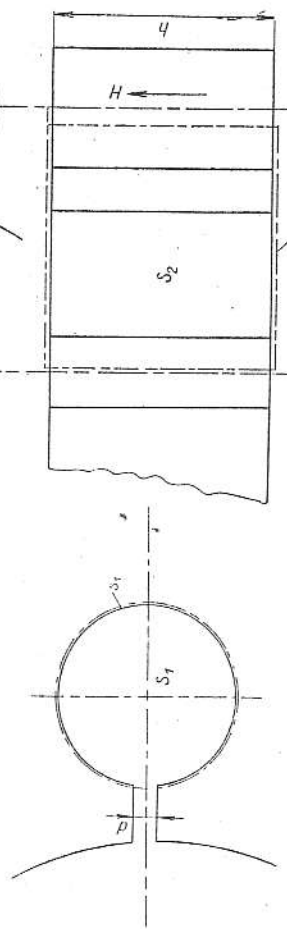
$j\omega\epsilon_0 \int_{s_2} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s})$  celkový posuvný proud tekoucí plochou  $S$

$\int_{s_2} (\mathbf{J} \, d\mathbf{s})$  celkový vodivý proud

$j\omega\mu_0 \int_{s_1} (\mathbf{H} \, d\mathbf{s})$  časová změna magnetického toku.

Aplikujeme tyto vztahy na pole v naší dutině. Označme plochu průřezu válcové dutiny  $S_1$  a obdélníkovou plochu, jejíž jeden rozměr prochází středem šterbiny od katody k válcové ploše a druhý rozměr je dán hloubkou magnetronu  $h$ , označme  $S_2$ .

Provedme integraci, uvedenou v rovnici (III-55), přes plochu  $S_1$ . V tomto případě bude obrysová křivka této plochy kružnice  $s_1$  (obr. 68).



Obr. 68. Postranní válcová dutina magnetronu.

Obr. 69. Postranní válcová dutina magnetronu se šterbinou.

Protože na všech částech povrchu válcové dutiny je tečná složka intenzity elektrického pole nulová, přejde integrál po uzavřené křivce  $\int_{s_1} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s})$  v křivkový integrál, který se provede po rovné dráze, odpovídající šířce šterbiny. Je tedy

$$\int_{s_1} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s}) = \int_0^d (\mathbf{E} \, ds)$$

Protože šterbina je příliš úzká vzhledem k délce vlny, budeme pokládat elektrické pole ve šterbině za homogenní. V tomto případě bude

$$\int_0^d (\mathbf{E} \, ds) = E_1 d$$

kde  $E_1$  je intenzita elektrického pole ve šterbině,  $d$  šířka šterbiny.

Potom je

$$E_1 d = -j\omega\mu_0 H S_1 \quad (\text{III-57})$$

neboť předpokládáme, že intenzita magnetického pole je vzhledem k malým rozměrům válcové dutiny konstantní. Intenzita magnetického pole má směr kolmý k průřezu  $S_1$ .

Integraci v rovnici (III-56) provádíme přes plochu  $S_2$  (obr. 69).

Silové čáry magnetického pole jsou kolmé na rovinu  $S_1$ , procházejí dutinou a uzavírají se při základním pracovním bodu magnetronu přes sousední dutiny magnetronu. Křivka  $S_2$ , po níž se provádí cirkulace v rovnici (III-56), omezuje plochu  $S_2$ . Část křivky  $S_2$  prochází osou katody. V této části je intenzita magnetického pole nulová. Tato část nedává žádný příspěvek k cirkulaci. Části křivky, které jsou kolmé k ose magnetronu, také nepřispívají k cirkulaci, neboť procházejí místem, kde můžeme vysokofrekvenční složky intenzity magnetického pole zanedbat. Část, která přispívá k cirkulaci, je ta, která prochází vřáčkou dutinou. Proto bude výsledek cirkulace

$$\int_{S_2} (H ds) = Hh \quad (III-58)$$

Potom lze rovnici (III-56) upravit takto:

$$Hh = j\omega\epsilon_0 \int_{S_2} (E ds_2)$$

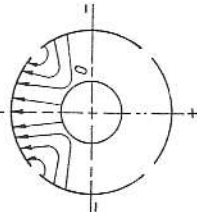
neboť žádný vodivý proud neprotéká plochou  $S_2$ . Výraz na pravé straně této rovnice značí celkový posuvný proud protékající plochou  $S_2$ . Tento posuvný proud lze rozdělit na dvě části: posuvný proud protékající plochou šterbiny a rozptylový posuvný proud (obr. 70), který protéká v prostoru mezi katodou a anodou a v prostoru postranní vřáčky dutiny. Rozptylový posuvný proud v prostoru postranní vřáčky dutiny v dalším výpočtu zanedbáme. Uvedli jsme již, že elektrické pole v místě šterbiny budeme pokládat za homogenní. Proto bude posuvný proud protékající šterbinou dán výrazem

$$I_{p1} = j\omega\epsilon_0 E_1 a h \quad (III-59)$$

kde  $I_{p1}$  je posuvný proud.

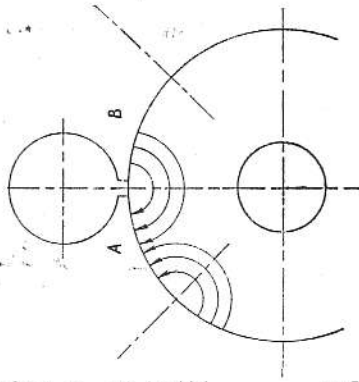
Abychom určili velikost rozptylového posuvného proudu, určíme nejdříve tvar elektrických silových čar rozptylového elektrického pole. Protože je povrch anodové části mezi šterbinami dokonale vodivý, musí být elektrické silové čáry kolmé k tomuto povrchu. Kdybychom chtěli určit přesně pole mezi anodou a katodou při kvasistacionárním stavu, byli bychom potaženi před úlohou určit elektrické pole mezi kruhy, je-li vnitřní kruh na nulovém potenciálu a vnější kruh rozdělen na  $N$  pevných částí, z nichž každá má stejné velké napětí, avšak sousední vždy s opačným znaménkem. Při tom je  $N$  celkový počet anodových postranních dutin magnetronu (obr. 71).

Tato úloha je obtížná a její přesné řešení nepřinese do naší celkové úlohy podstatně větší přesnost. Budeme proto předpokládat, že rozptylové silové čáry jsou kružnice, jejichž středy leží ve středu šterbiny na povrchu anody (obr. 72).



Obr. 71. Uspořádání intenzity elektrického pole v mezikřídlním prostoru magnetronu.

Poloměry těchto kružnic budou ležet v mezích od  $\frac{d}{2}$  do  $\frac{2\pi r_a}{2N}$ , kde  $r_a$  je poloměr anody a  $N$  celkový počet postranních dutin. Potom je  $\frac{2\pi r_a}{2N}$  poloviční rozteč mezi dvěma sousedními šterbinami. Je-li obvod anody vzhledem k rozteči velký, lze při tom pokládat oblouk rozteče za přibližně rovný tětivě. Jde-li o vid  $\pi$ , u něhož je polarita sousedních šterbín rozdílná, bude dáno napětí mezi místem A a B (viz obr. 72) křivkovým integrálem  $\int (E ds)$ , kde  $c$  je půlkružnice



příslušná místům A, B. Tato půlkružnice odpovídá přibližně elektrické rozptylové silové čáře. Uvedené napětí musí být stejné velké jako napětí mezi středy šterbiny. To znamená, že se toto napětí musí rovnat výrazu  $E_1 d$ . Platí tedy

$$\int_c (E ds) = E_1 d$$

Jak jsme již uvedli, je  $c$  přibližně půlkružnice. Z toho vyplývá, že velikost intenzity elektrického pole, jejíž silová čára je kružnice s poloměrem  $\varrho$ , je dána výrazem

$$E = \frac{E_1 d}{\pi \varrho} \quad (III-60)$$

Silové čáry intenzity elektrického pole, jejíž velikost je obecně dána výrazem (III-60), protínají kolmo plochu  $S_2$ . Celkový posuvný proud, protékající příslušnou částí plochy  $S_2$ , je potom dán integrálem

$$I_{p2} = j\omega\epsilon_0 \int_S (E ds) = j\omega\epsilon_0 h \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{2\pi r_a}{2N}} \frac{E_1 d}{\pi} \frac{d\varrho}{\varrho}$$

Po integraci dostaneme

$$I_{p2} = j\omega\epsilon_0 h \frac{E_1 d}{\pi} \ln \frac{2\pi r_a}{Nd} \quad (III-61)$$

Součtem proudů, určených vzorci (III-59) a (III-61), je dán celkový posuvný proud

$$I_p = j\omega\epsilon_0 E_1 h \left( a + \frac{d}{\pi} \ln \frac{2\pi r_a}{Nd} \right)$$

Tento výraz dosadíme do pravé strany rovnice (III-56). Se zřetelem k rovnici (III-58) a k tomu, že vodivý proud protékající plochou je nulový, dostaneme

$$H = j\omega\epsilon_0 E_1 \left( a + \frac{d}{\pi} \ln \frac{2\pi r_a}{Nd} \right)$$

Dosadíme v této rovnici za  $E_1$  příslušný výraz z rovnice (III-57). Potom dostaneme identitu

$$H = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H S_1 \frac{1}{d} \left( a + \frac{d}{\pi} \ln \frac{2\pi r_a}{Nd} \right)$$

Obr. 72. Uspořádání intenzity elektrického pole pod dvěma sousedními šterbinami dutiny magnetronu.

Po zkrácení  $H$  a po menší úpravě dostaneme výraz pro vlastní délku dutiny

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{S_1}{d} \left( a + \frac{d}{\pi} \ln \frac{2\pi r_0}{Nd} \right)}$$

Protože  $S_1$  je plocha kružnice s poloměrem  $r_0$ , je potom

$$\lambda = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{\pi a}{d} + \ln \frac{2\pi r_0}{Nd}} \quad (\text{III-62})$$

Rovnice (III-62) je přibližným vzorcem pro vlastní délku dutiny magnetronu typu štrébina-válec. Tento vzorec platí jen pro dutiny bez spojek.

Činitelé jakosti této dutiny určíme z obecného vzorce

$$Q = \frac{\omega W}{P_z}$$

Celkovou energii dutiny určíme z energie magnetického pole. Tato energie je soustředěna ve válcové dutině. Bude tedy celková energie dána vztahem

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V (HH^*) dV$$

V našem případě určíme intenzitu magnetického pole ze vzorce (III-57)

$$H_1 = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \frac{E_1 d}{S_1} \quad (\text{III-63})$$

Potom bude

$$W = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{1}{\omega\mu_0} \right)^2 \left( \frac{E_1 d}{S_1} \right)^2 h S_1$$

Výkon vyzářený do stěn určíme, obdobně jako u klystronové dutiny, ze vztahu

$$P_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \int_S (HH^*) dS$$

Plocha  $S$  je v tomto případě vytvořena válcovou plochou dutiny. Zanedbáme-li tloušťku  $d$  proti obvodu kružnice  $s_1$  a uvážíme-li, že  $H$  je konstantní, je

$$P_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left( \frac{1}{\omega\mu_0} \right)^2 \left( \frac{E_1 d}{S_1} \right)^2 2\pi r_0 h \quad (\text{III-64})$$

Dosadíme rovnice (III-63) a (III-64) do výrazu pro činitel jakosti dutiny  $Q$ . Potom bude

$$Q = \frac{\omega W}{P_z} = \frac{\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{1}{\omega\mu_0} \right)^2 \left( \frac{E_1 d}{S_1} \right)^2 h S_1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left( \frac{1}{\omega\mu_0} \right)^2 \left( \frac{E_1 d}{S_1} \right)^2 2\pi r_0 h} = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}} \frac{S_1}{2\pi r_0}$$

Protože je plocha  $S_1 = \pi r_0^2$ , je

$$Q = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}} \frac{r_0}{2} \quad (\text{III-65})$$

Vzorcem (III-65) je určen činitel jakosti postranní dutiny v anodě magnetronu typu štrébina-válec. Tento vzorec je velmi přibližný. Jeho přesnost se udává asi 20%.

### 36.2 Metoda „sešívání“ dutin

V této části uvedeme Kisuňkovu metodu „sešívání“ dutin. Této metody použijeme tehdy, skládá-li se dutinový resonátor z jednotlivých částí pravidelného tvaru, jejichž pole lze určit jednoduše řešením Maxwellových rovnic. Jako příklad takového složitějšího resonátoru je na obr. 73 dutinový resonátor magnetronu a klystronu.

Tyto složené resonátory se skládají z jednotlivých dílčích dutin. Magnetronové resonátory jsou složeny z válcových dutin a klystronové resonátory z radiálních vedení. Uvažujeme-li dílčí dutiny jako samostatné dutiny, můžeme v nich určit průběh elektromagnetického pole.

Pro vlastní vlnové číslo celého dutinového resonátoru jsme odvodili vztah (III-8)

$$k^2 = \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^*) dV}{\int_V (\mathbf{E}\mathbf{E}^*) dV} - j\omega\mu \frac{\int_V ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS}{\int_V (\mathbf{E}\mathbf{E}^*) dV} \quad (\text{III-66})$$

kde  $V$  je objem celého dutinového resonátoru  
 $S$  plocha pláště resonátoru.

Týž vztah platí pro dílčí dutiny

$$k_i^2 = \frac{\int_{V_i} (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^*) dV}{\int_{V_i} (\mathbf{E}\mathbf{E}^*) dV} - j\omega\mu \frac{\int_{S_i} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS}{\int_{V_i} (\mathbf{E}\mathbf{E}^*) dV} \quad (\text{III-67})$$

kde  $V_i$  je objem dílčího resonátoru

$S_i$  povrch dílčího resonátoru

$i$  v indexu označuje pořadí dutiny.

Na ploše vytvořené dokonale vodivou stěnou je

$$\int_{S_i} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) dS = 0$$

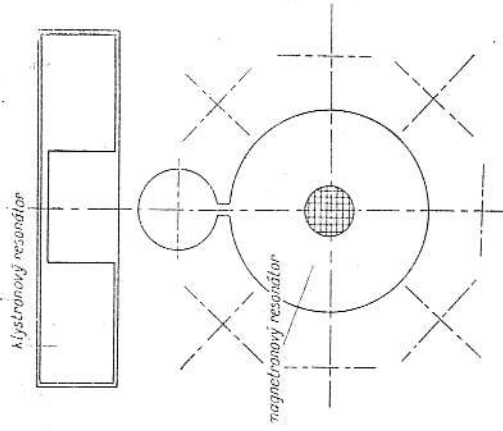
neboť  $([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{H}^* \cdot [\mathbf{n}\mathbf{E}])$  a na dokonale vodivé ploše musí být

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}] = 0$$

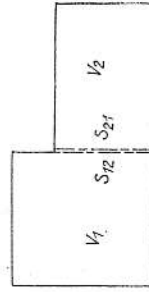
Jen na ploše, kde se stýkají dílčí dutiny (viz obr. 74), má plošný integrál určitou hodnotu. Platí tedy pro celý objem dutinového resonátoru

$$k^2 = \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^*) dV}{\int_V (\mathbf{E}\mathbf{E}^*) dV} \quad (\text{III-68})$$

Znásobme v rovnici (III-67) obě strany rovnice integrálem  $\int_V (\mathbf{E}\mathbf{E}^*) dV$  a sečteme přes všechny dílčí dutiny. Potom dostaneme



Obr. 73. Klystronový a magnetronový resonátor.



Obr. 74. Resonátor, složený ze dvou jednoduších dutin.

$$k^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^*) dV}{\sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) dV} - j\omega\mu \frac{\sum_{i=1}^k \int_{S_i} \{(\mathbf{E} \mathbf{H}^*) \mathbf{n}\} dS}{\sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) dV} \quad (\text{III-69})$$

Součet dílčích objemových integrálů se rovná objemovému integrálu přes celý objem dutiny. Tedy

$$\sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^*) dV = \int_V (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^*) dV \quad (\text{III-70})$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) dV = \int_V (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) dV \quad (\text{III-71})$$

kde  $V$  je objem celé dutiny.

Součet dílčích plošných integrálů se musí rovnat plošnému integrálu přes celý povrch dutiny a součtu plošných integrálů přes sousední hraniční plochy. Tyto plochy jsou vždy pro sousední dílčí dutiny totožné, avšak směry normál těchto sousedních ploch jsou opačné. Je tedy

$$\sum_{i=1}^k \int_{S_i} \{(\mathbf{E} \mathbf{H}^*) \mathbf{n}\} dS = \int_S \{(\mathbf{E} \mathbf{H}^*) \mathbf{n}\} dS + \sum_{i=1}^k \int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E} \mathbf{H}^*) \mathbf{n}\} dS$$

Při tom je  $\int_S \{(\mathbf{E} \mathbf{H}^*) \mathbf{n}\} dS = 0$ , neboť na plášti dutiny  $S$  je

$$[\mathbf{E} \mathbf{n}] = 0$$

Součet integrálů  $\sum_{i=1}^k \int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E} \mathbf{H}^*) \mathbf{n}\} dS$  se vztahuje na společné plochy sousedních dílčích dutin, obecně na dutiny  $V_i$  a  $V_j$ . Protože plochy  $S_{ij}$  a  $S_{ji}$  jsou totožné (viz obr. 74), s opačnými směry normál, lze psát

$$\int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i^*) \mathbf{n}\} dS + \int_{S_{ji}} \{(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j^*) \mathbf{n}\} dS = \int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i^*) \mathbf{n}\} - \{(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j^*) \mathbf{n}\} dS$$

Kdybychom znali přesné rozdělení pole v dutině rezonátoru, rovnal by se integrál  $\int_{S_{ij}}$  nule, neboť na celé ploše by platilo identicky, že  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_j$  a  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_j$ .

Dosadíme-li vztahy (III-70), (III-71) do rovnice (III-69) a uvážíme-li (III-68), dostaneme

$$\sum_{i=1}^k \int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i^*) \mathbf{n}\} - \{(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j^*) \mathbf{n}\} dS = 0 \quad (\text{III-72})$$

Tento vztah bude tím spíše splněn, budou-li jednotlivé členy předcházejícího součtu nulové. Bude-li tedy platit, že na každé ploše  $S_{ij}$  je

$$\int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i^*) \mathbf{n}\} - \{(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j^*) \mathbf{n}\} dS = 0 \quad (\text{III-73})$$

Při tom intenzita elektrického a magnetického pole  $\mathbf{E}_i$  a  $\mathbf{H}_i$  přísluší dutině označené indexem  $i$ . Intenzity pole  $\mathbf{E}_j$  a  $\mathbf{H}_j$  určuje řešením Maxwellových rovnic pro dílčí dutinu, neboť tato dutina má jednoduchý geometrický tvar. Totéž platí o složkách  $E_i$  a  $H_i$ .

Podají-li se vyjádřit na rozhraní dílčích dutin  $E_i$  a  $E_j$  tak, aby platilo identicky pro celý průřez  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_j$ , bude podmínka (III-73) vyjádřena takto:

$$\int_{S_{ij}} \{(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i^* - \mathbf{H}_j^*) \mathbf{n}\} dS = 0 \quad (\text{III-74})$$

Obdobně, lze-li pokládat  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_j$ , je

$$\int_{S_{ij}} \{(\mathbf{H}_i^* (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j)) \mathbf{n}\} dS = 0 \quad (\text{III-75})$$

Výsledky rovnic (III-74) a (III-75) jsou prvním přiblížením přesného řešení, které provede na základě variačního počtu Kintovského. Identity (III-74) nebo (III-75) jsou vlastně doplňujícími okrajovými podmínkami dutinového rezonátoru.

Jako příklad řešení dutin podle této metody provedeme výpočet vstupní impedance postranní dutiny magnetronu. Příčný řez postranní dutinou je znázorněn na obr. 75.

Uvažujeme magnetron na bočních stranách neorevřených stěn, vzniknou jen takové vlny, u nichž je intenzita elektrického pole kolmá k ose magnetronu a intenzita magnetického pole ve směru osy magnetronu. Tyto vlny patří k příčné elektrické vlně (vzhledem k ose magnetronu). Je-li magnetron na bočních stěnách neomezen, nebude intenzita elektrického ani magnetického pole záviset na souřadnici  $z$ .

Určíme nejdříve rozložení elektromagnetického pole ve šterbině. Jednotlivé složky intenzity elektrického a magnetického pole určíme řešením vlnové rovnice Hertzova vektoru  $\Pi_z^m$ :

$$\Delta \Pi_z^m + k^2 \Pi_z^m = 0$$

s okrajovou podmínkou, že na vodivém plášti dutiny je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. Hertzův vektor  $\Pi_z^m$ , jak jsme již uvedli, nezávisí při tom na souřadnici  $z$ . Závisí na souřadnici  $x$  a  $y$ . Protože je šifka šterbiny podstatně menší než ostatní rozměry šterbiny, vzbudily by se vyšší vlny, závisící také na souřadnici  $y$ , až při vysokých kmitočtech, nesrovnatelně vyšších, než je vlastní kmitočet dominantního vlnu. Proto budeme uvažovat pole, které závisí jen na souřadnici  $x$ .

Přitom přejde vlnová rovnice pro  $\Pi_z^m$  v jednodušou diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial x^2} + k^2 \Pi_z^m = 0$$

Tato diferenciální rovnice má řešení

$$\Pi_z^m = A \sin kx + B \cos kx \quad (\text{III-76})$$

kde  $A, B$  jsou integrační konstanty.

Z tohoto výrazu pro Hertzův vektor odvodíme jednotlivé složky intenzity elektrického a magnetického pole podle známých vztahů

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m$$

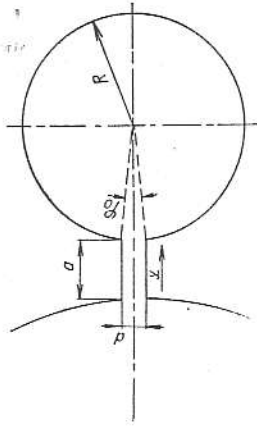
Dosazením za  $\Pi_z^m$  dostaneme

$$E_y = j\omega\mu k(A \cos kx - B \sin kx)$$

$$H_x = 0; \quad E_x = 0$$

$$H_z = k^2(A \sin kx + B \cos kx) \quad (\text{III-78})$$

Dále určíme rozložení elektromagnetického pole ve válcové dutině. V tomto případě vyjádříme vlnovou rovnici ve válcových souřadnicích, při čemž uvážíme, že  $\Pi_z^m$  nezávisí na souřadnici  $z$ . Řešení



Obr. 75. Postranní dutina magnetronu.

vlnové rovnice ve válcových souřadnicích bude dáno tímž výrazem jako u kruhového vlnovodu. Rozdíl je v tom, že v našem případě je  $Z_2 = 1$ , což vyplývá z toho, že konstanta přenosu je ve směru  $z$  nulová. Potom je  $\Gamma = k a$

$$H_z^{(m)} = \sum_m C_m J_m(kr) e^{im\varphi} \quad (\text{III-79})$$

kde  $m$  může být kladné i záporné celé číslo.

Pro jednotlivé složky intenzity elektrického a magnetického pole odvodíme pak vztahy

$$E_\varphi = - \sum_m j\omega\mu_0 k C_m J_m'(kr) e^{im\varphi} \quad (\text{III-80})$$

$$E_r = - \sum_m j\omega\mu_0 j m C_m J_m(kr) e^{im\varphi}$$

$$H_\varphi = H_r = 0 \\ H_z = \sum_m k^2 C_m J_m(kr) e^{im\varphi} \quad (\text{III-81})$$

Ve vztazích (III-77), (III-78), (III-80) a (III-81) neznáme konstanty  $A$ ,  $B$ ,  $C_m$ , ani vlastní vlnové číslo  $k$ . Tyto neznámé veličiny určíme buď pomocí vztahu (III-74) nebo (III-75). Zvolíme vztah (III-74), který vyplývá z rovnosti intenzity elektrického pole na rozhraní obou prostředí. Rozhraní obou prostředí je v našem případě vytvořeno obdélníkem, umístěným v místě se souřadnicí  $x = a$  a s rozměry  $d$  a  $h$  (viz obr. 75). Ve výrazu (III-74) se za značkou integrálu vyskytují při dosazení do složeného skalárního součinu jen ty složky  $E$  a  $H$ , které jsou kolmé ke směru normál  $n$ . V našem případě jsou to ve středním složky  $E_y$  a  $H_z$ , ve válcové dutině složky  $E_\varphi$  a  $H_z$ . Proto lze vztah (III-47) upravit takto:

$$\int_{S_{ij}} E_y (H_z^* - H_z) dS = 0 \quad (\text{III-82})$$

Při tom je

$$E_y = E_\varphi \quad (\text{III-82.1})$$

V místě daném souřadnicí  $x = a$  je ve středním intenzita elektrického pole konstantní a je vyjádřena vztahem (III-74) pro  $x = a$ :

$$E_y = j\omega\mu_0 k (A \cos ka - B \sin ka) \quad (\text{III-83})$$

Průběh intenzity elektrického pole  $E_y$  je tedy v místě styku znázorněn na obr. 76.

Abychom mohli vztah (III-83) porovnávat se vztahem (III-80) pro  $r = R$  a pro běžnou souřadnicí  $\varphi$ , rozložíme jej ve Fourierovu komplexní řadu podle souřadnice  $\varphi$ . Při této perioda je  $2\pi$  a hodnota  $E_y$  má konstantní hodnotu v mezích od  $\frac{\varphi_0}{2}$  do  $-\frac{\varphi_0}{2}$  (viz obr. 76). Potom je

$$E_y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_q e^{im\varphi} \\ C_q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\varphi_0}{2}}^{\frac{\varphi_0}{2}} E_y e^{-im\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\varphi_0}{2}}^{\frac{\varphi_0}{2}} j\omega\mu_0 k (A \cos ka - B \sin ka) e^{-im\varphi} d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} j\omega\mu_0 k (A \cos ka - B \sin ka) \frac{1}{q} \sin \frac{q\varphi_0}{2}$$

Po dosazení této amplitudy do vztahu pro  $E_y$  dostaneme

$$E_y = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} j\omega\mu_0 k (A \cos ka - B \sin ka) \frac{1}{q} \sin \frac{q\varphi_0}{2} e^{iq\varphi} \quad (\text{III-84})$$

Tento vztah se musí v soulase s rovnicí (III-82.1) identicky rovnat vztahu (III-80) pro  $r = R$ . Musí tedy platit identita

$$\frac{1}{\pi} j\omega\mu_0 k (A \cos ka - B \sin ka) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \sin \frac{q\varphi_0}{2} e^{-iq\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j\omega\mu_0 k C_m J_m'(kR) e^{im\varphi}$$

Tato identita může platit jen tehdy, bude-li  $m = q$ . Potom dostaneme porovnáním jednotlivých členů řady

$$C_m = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{m} \sin \frac{m\varphi_0}{2} \frac{A \cos ka - B \sin ka}{J_m'(kR)} \\ a \text{ po malé úpravě bude} \\ C_m = - \frac{\varphi_0}{2\pi} \frac{1}{m} \frac{A \cos ka - B \sin ka}{J_m'(kR)} \quad (\text{III-85})$$

Tím jsme dostali první vztah mezi konstantou  $C_m$  a konstantami  $A$  a  $B$ . Druhý vztah dostaneme z výrazu (III-82). Protože je  $E_\varphi$  konstantní výraz, zjednoduší se v oboru  $S_{ij}$  výraz (III-82) takto:

$$\int_{S_{ij}} H_z dS - \int_{S_{ij}} H_z dS = 0$$

při čemž plocha  $S_{ij}$  je obdélník s rozměry  $d$  a  $h$ . Protože  $H_z$  a  $H_z$  nezávisí na souřadnici  $z$ , můžeme předešlý vztah zjednodušit

$$d \int_{x=a}^a H_z dy = \int_{r=R}^a H_z R dy$$

Zde jsme nahradili rozměr  $d$  přibližně obloukem  $R \frac{\varphi_0}{2}$ . Protože je  $d \ll R$ , lze tuto záměnu provést. Dosadíme-li do předešlého integrálu za  $H_z$  výraz (III-78) pro  $x = a$  a za  $H_z$  výraz (III-81) pro  $r = R$ , dostaneme se zřetelem na rovnici (III-85)

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} (A \sin ka + B \cos ka) dy = \\ = \frac{\varphi_0}{2\pi} (A \cos ka - B \sin ka) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m'(kR)}{J_m'(kR)} \frac{\varphi_0}{2} \int_{-\frac{\varphi_0}{2}}^{\frac{\varphi_0}{2}} e^{im\varphi} R d\varphi$$

Provedeme-li integraci, dostaneme po malé úpravě

$$A \sin ka + B \cos ka = - \frac{\varphi_0 R}{2\pi d} (A \cos ka - B \sin ka) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J_m'(kR)} \left( \frac{\sin \frac{m\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} \right)^2 \quad (\text{III-86})$$

Tato rovnice udává vzájemný vztah mezi konstantami  $A$  a  $B$ . Provedeme dále toto zjednodušení v označení:

$$D = - \frac{\varphi_0 R}{2\pi d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J_m'(kR)} \left( \frac{\sin \frac{m\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} \right)^2 \quad (\text{III-87})$$

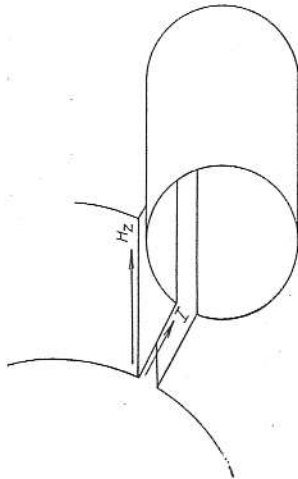
Potom upravíme výraz (III-86) takto:

$$A \sin ka + B \cos ka = D (A \cos ka - B \sin ka)$$

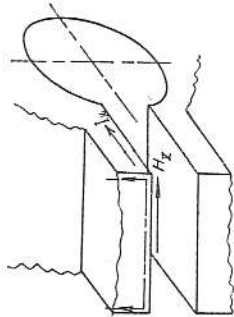
Z toho vyjádříme poměr

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + D \operatorname{tg} ka}{D - \operatorname{tg} ka} \quad (\text{III-88})$$

Nášim úkolem bylo určit vstupní impedanci postranní dutiny magnetronu. Vstupní impedance je dána poměrem napětí a proudu na vstupu dutiny (pro  $x=0$ ). Proud poteče ve směru souřadnice  $x$  (obr. 77) a je způsoben intenzitou magnetického pole  $H_z$ . Celkový proud protékající jednou stěnou šterbiny je dán cirkulací intenzity magnetického pole  $H_z$  přes průřez stěny (obr. 78).



Obr. 77. Orientace proudu a intenzity elektrického pole v postranní dutině magnetronu.



Obr. 78. Uspořádání intenzity magnetického pole a proudu ve šterbině postranní dutiny magnetronu.

Je tedy

$$I_e = \oint (H \, ds) = H_z h$$

neboť jen strana  $h$  přispívá k cirkulaci.

Dosadíme-li za  $H_z$  výraz (III-78), dostaneme

$$I_e = k^2 h (A \sin kx + B \cos kx)$$

Napětí mezi oběma stěnami šterbiny je dáno křivkovým integrálem intenzity elektrického pole mezi body  $A$  a  $B$ . Protože je  $E_y$  nezávislé na souřadnici  $y$ , platí pro napětí  $U$  rovnice

$$U = \int_{x=0}^{x=h} \epsilon_0 k d (A \cos kx + B \sin kx)$$

Vstupní impedance  $Z_p$  je pak určena z poměru  $\frac{U}{I_e}$  pro  $x=0$

$$Z_p = \frac{U}{I_e} = i \sqrt{\frac{\epsilon_0 d}{h}} \frac{A}{B}$$

Dosadíme-li za  $\frac{A}{B}$  příslušný výraz z rovnice (III-88), platí

$$Z_p = i \sqrt{\frac{\epsilon_0 d}{h}} \frac{1 + D \operatorname{tg} ka}{D - \operatorname{tg} ka} \quad (\text{III-89})$$

Resonance nastane tehdy, bude-li vstupní impedance nekonečná. K tomu dojde v našem případě tehdy, bude-li

$$D = \operatorname{tg} ka$$

a po dosazení za  $D$  dostaneme tuto podmínku pro resonanci:

$$\operatorname{tg} ka = - \frac{\epsilon_0^2 R}{2\pi d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J'_m(kR)} \left( \frac{\frac{m\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 \quad (\text{III-90})$$

Upravíme ještě pomocný výraz  $D$ . V něm [viz rovnici (III-87)] je součet

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J'_m(kR)} \left( \frac{\sin \frac{\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2$$

Omezíme se na případ, kdy je  $kR \ll 1$ , což je u magnetronů obvyklé. Předcházející součet upravíme tak, že oddělíme člen  $s = 0$  od součtu a nahradíme potom součet  $\sum_{m=-\infty}^{\infty}$  členem  $s = 0$  a součtem  $2 \sum_{m=1}^{\infty}$ , neboť výraz  $\frac{J_m(kR)}{J'_m(kR)}$  je sudá funkce vzhledem k  $m$ . Na základě těchto úvah bude

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J'_m(kR)} \left( \frac{\sin \frac{\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 = \\ & = \frac{J_0(kR)}{J'_0(kR)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J'_m(kR)} \left( \frac{\sin \frac{m\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Protože  $kR \ll 1$ , nahradíme Besselovy funkce s malými argumenty jejich příbližnými hodnotami. Potom je

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(kR)}{J'_m(kR)} \left( \frac{\sin \frac{\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 = \\ & = - \frac{2}{kR} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{kR}{m} \left( \frac{\sin \frac{\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Dosadíme-li tento výraz do výrazu pro  $D$ , dostaneme

$$D = - \frac{\epsilon_0^2 R}{2\pi d} \left[ - \frac{2}{kR} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{kR}{m} \left( \frac{\sin \frac{\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 \right]$$

Po úpravě

$$D = - \frac{\epsilon_0 R}{2\pi d} \left[ - \frac{2}{kR} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{kR \epsilon_0}{m^2} \left( \frac{\sin \frac{\epsilon_0}{2}}{\frac{\epsilon_0}{2}} \right)^2 \right]$$

Protože  $R\epsilon_0 \doteq d$  (viz obr. 78), je

$$D = - \frac{d}{2\pi R} \left[ - \frac{2}{kR} + kd \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{\epsilon_0}{2} \right)^2}{\left( \frac{\epsilon_0}{2} \right)^3} \right]$$

Součet  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{\epsilon_0}{2} \right)^2}{\left( \frac{\epsilon_0}{2} \right)^3}$  označíme pro jednodušost  $W(\epsilon_0)$ ; potom bude

$$D = - \frac{\epsilon_0^2 R}{2\pi d} \left[ - \frac{2}{kR} + kd W(\epsilon_0) \right] = - \frac{d}{2\pi R} \left[ - \frac{2}{kR} + kd W(\epsilon_0) \right]$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (III-10), dostaneme

$$\text{tg } ka = \frac{d}{k\pi R^2} - \frac{kd^2}{2\pi R} W(\varphi_0) \quad (\text{III-91})$$

To je transcendentní rovnice vzhledem k vlnovému číslu  $k$ . Výsledek bychom určili graficky. Avšak výraz lze zjednodušit, je-li  $ka \ll 1$ . Potom můžeme nahradit tangens tangens argumentem. V tomto případě bude

$$ka = \frac{d}{k\pi R^2} - \frac{kd^2}{2\pi R} W(\varphi_0)$$

Po úpravě bude

$$k^2 \left[ 1 + \frac{d^2}{2\pi R a} W(\varphi_0) \right] = \frac{d}{\pi R^2 a} \quad (\text{III-92})$$

Z této rovnice určíme délku vlny

$$\lambda = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi a}{d} \left[ 1 + \frac{d^2}{2\pi R a} W(\varphi_0) \right]}$$

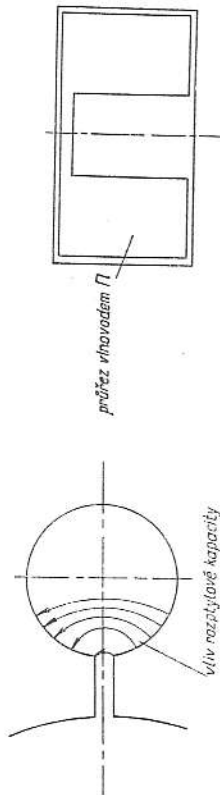
Výraz  $\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^2 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)^3$  rychle konverguje se vzrůstajícím  $m$ . Je-li  $\varphi_0 \ll \pi$ , což bývá prakticky vždy, lze u prvních členů nahradit sinus argumentem. Potom bude

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^2 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)^3 = \frac{2}{\varphi_0} + \frac{1}{\varphi_0^3} + \dots = \frac{2R}{d} + \frac{R}{d} + \dots$$

Z toho vyplývá, že se řád součtu nebude lišit od řádu výrazu  $\frac{R}{d}$ , a proto ve vzorci (III-92) lze v prvním přiblížení zanedbat hodnotu  $\frac{d^2}{2\pi R a} W(\varphi_0)$  proti 1, neboť  $\frac{d}{R} \ll 1, \frac{d}{a} < 1$ . V tom případě bude

$$\lambda = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi a}{d}}$$

To je vzorec pro rezonanční délku vlny dutiny „štěrbinová-válec“ bez uvažování rozptylové vstupní kapacity. Porovnáme-li tento vzorec se vzorcem (III-62), vidíme, že se úplně shodují. Ve vzorci (III-62) přísluší výraz  $\frac{2\pi a}{Nd}$  rozptylové kapacitě, kterou jsme v této části neuvažovali. Vidíme, že největší zjednodušení vzorce (III-92) odpovídá výsledku, který jsme dostali kvasistacionární me-



Obr. 79. Vliv rozptylové kapacity v postranní dutině magnetronu.

thodou. Vzorec (III-92) je již přesnější a přibliží k rozptylové kapacitě ve vlnové dutině (obr. 79) a indukčnosti štěrbin.

Vlnovod typu II

Jako druhý příklad provedeme výpočet konstanty přenosu vlnovodu typu II (obr. 80) pro domnínantrní vid.

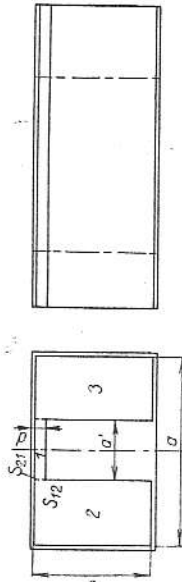
Třebaže zde nejde o problém dutinového rezonátoru, uvedeme tento výpočet, neboť použijeme metody „sešívání dutin“. Jako prostorový obor uvažíme část nekonečné dlouhého vlnovodu omezeného dvěma rovinami kolnými k ose vlnovodu (viz obr. 81).

Vlnovod rozdělíme na tři části obdélníkového průřezu 1, 2, 3. Části 2 a 3 jsou stejného tvaru. Vztah (III-74) budeme aplikovat na souměrné plochy  $S_{12}$  a  $S_{23}$ . Protože výsledné pole bude osově souměrné, budou vztahy na plochách  $S_{12}$  a  $S_{23}$  totožné. Uvažíme tedy jen souměrné plochy  $S_{12}$  a  $S_{21}$ . Konstanta přenosu  $\gamma$  musí být stejná ve všech třech dílech oborech. Musí tedy ve všech částech platit [viz vzorec (II-7)]

$$\gamma^2 = k^2 - \Gamma^2$$

Protože vlnové číslo  $k$  (určující použitou délku vlny) je při určité délce vlny konstantní, bude i konstanta  $\Gamma$  pro všechny tři části stejná.

Rozměr  $d$  budíž podstatně menší než rozměr  $a'$ . V tom případě bude převládát v oboru I domi-



Obr. 81. Příčný a podélný řez vlnovodem II.

nantní vid  $TE_{10}$ . V oborech 2 a 3 budou také převládát vidy  $TE$ . V oboru I nebudeme vyšší vidy uvažovat. Vzhledem k malému rozměru  $d$  by příslušely nespočetkrát vyšším mezním kmitočtům, než je mezí kmitočet dominantního vidu vlnovodu typu II.

Bude tedy Hertzův vektor  $H_z$  záviset v oboru I jen na souřadnici  $x$  a  $z$ . Protože jde o část vlnovodu obdélníkového průřezu, bude určen takto:

$$H_z^m = (A \sin \Gamma x + B \cos \Gamma x) e^{i\gamma z}$$

Pro jednotlivé složky intenzity elektrického a magnetického pole odvodíme potom tyto vztahy:

$$E_y = -j\omega\mu_0 \text{rot}_y H_z^m = j\omega\mu_0 \Gamma (A \cos \Gamma x - B \sin \Gamma x) e^{i\gamma z}$$

$$H_x = \Gamma^2 (A \sin \Gamma x + B \cos \Gamma x) e^{i\gamma z}$$

$$E_z = 0; \quad H_y = 0$$

$$H_x = j\gamma \Gamma (A \cos \Gamma x - B \sin \Gamma x) e^{i\gamma z}$$

Intenzita elektrického pole  $E_y$  musí být souměrná vzhledem k ose průřezu vlnovodu. Je-li počátek odcetání souřadnic na ose vlnovodu, musí být konstanta  $B$  nulová. Z toho je

$$E_y = j\omega\mu_0 \Gamma A \cos \Gamma x e^{i\gamma z} \quad (\text{III-93})$$

$$H_x = \Gamma^2 A \sin \Gamma x e^{i\gamma z} \quad (\text{III-94})$$

$$H_z = j\gamma \Gamma A \cos \Gamma x$$

V prostoru 2 bude Hertzův vektor vyjádřen, obdobně jako u obdélníkového vlnovodu, takto (viz část o obdélníkových vlnovodech):

$$H_z^m = (C \sin \alpha x + D \cos \alpha x)(E \sin \beta y + D \cos \beta y) e^{-i\gamma z}$$

kde  $\alpha^2 + \beta^2 = \Gamma^2$ .

Je-li plášť vlnovodu dokonale vodivý, musí platit okrajová podmínka, že na plášti vlnovodu je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. To je splněno tehdy (jak bylo dokázáno), platí-li na plášti vlnovodu  $\frac{\partial H_z^m}{\partial n} = 0$ . Tuto podmínku lze přímo vyjádřit pro strany vlnovodu se souřadnicemi

$x = \frac{a}{2}, y = 0$  a  $y = b$ , neboť tyto strany přísluší zcela kovové části pláště.

Provedeme-li derivaci Hertzova vektoru podle normály a splníme-li podmínku, že na uvedených



stranách je derivace Hertzova vektoru nulová, zjednoduší se vztah pro Hertzův vektor takto (postup je stejný jako u obdélníkového vinovodu):

$$H_z^m = (C \sin \alpha_n x + D \cos \alpha_n x) \cos \beta y e^{i\gamma z}$$

kde je  $\beta = \frac{n\pi}{b}$  ( $n$  je celé číslo).

Mezi konstantou  $C$  a  $D$  platí při tom vztah

$$C \cos \frac{\alpha_n a}{2} - D \sin \frac{\alpha_n a}{2} = 0$$

(vyplyvá z okrajové podmínky, že  $\frac{\partial H_z^m}{\partial n}$  na straně  $x = \frac{a}{2}$  je nulové). Potom je

$$D = \frac{C \cos \frac{\alpha_n a}{2}}{\sin \frac{\alpha_n a}{2}}$$

Po dosazení do Hertzova vektoru dostaneme

$$H_z^m = C \left( \sin \alpha_n x + \frac{\cos \frac{\alpha_n a}{2}}{\sin \frac{\alpha_n a}{2}} \cos \alpha_n x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\gamma z}$$

a po úpravě

$$H_z^m = C_n \left( \sin \alpha_n x \sin \frac{\alpha_n a}{2} + \cos \alpha_n x \cos \frac{\alpha_n a}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\gamma z}$$

kde  $C_n$  je nová konstanta ( $C \sin \frac{\alpha_n a}{2}$  jsme sdružili v novou konstantu  $C_n$ ).

Konstanta  $\alpha_n = \sqrt{\Gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ . Výraz v závorce nahradíme kosinem rozdílu, a proto je

$$H_z^m = C_n \cos \alpha_n \left( \frac{a}{2} - x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\gamma z}$$

Z toho odvodíme vztahy pro složku intenzity elektrického pole  $E_y$  a magnetického pole  $H_z$ . Intenzita elektrického a magnetického pole je dána superposicí intenzit elektrického a magnetického pole všech vyšších módů. Proto je

$$E_y = \sum_{n=0}^{\infty} j\omega\mu_0 \alpha_n C_n \sin \alpha_n \left( \frac{a}{2} - x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\gamma z} \quad (\text{III-95})$$

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^2 C_n \cos \alpha_n \left( \frac{a}{2} - x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\gamma z} \quad (\text{III-96})$$

Dále použijeme vztah (III-74), v němž jsou platné jen složky  $E$  a  $H$  kolmé k  $n$ . Na ploše, která je v našem případě vytvořena rozměry  $d$  a  $h$  (viz obr. 81), musí být vztahy (III-93) a (III-95) identické. Na této ploše je

$$E_y = j\omega\mu_0 \Gamma A \cos \Gamma \frac{a'}{2} e^{i\gamma z} = M e^{i\gamma z} \quad (\text{III-97})$$

kde  $M$  jsme označili konstantní veličinu  $j\omega\mu_0 \Gamma A \cos \Gamma \frac{a'}{2}$ .

Intenzita elektrického pole je v rovnici (III-97) konstantní veličina. Je tedy průběh intenzity elektrického pole  $E_y$  na stěně o souřadnici  $x = \frac{a'}{2}$  takový, jak znázorňuje obr. 82.

Tento průběh rozložíme v kosinovou Fourierovu řadu s periodou  $b$ . Bude tedy platit

$$E_y = C_0 + C_1 \cos \frac{\pi}{b} y + C_2 \cos 2 \frac{\pi}{b} y + \dots$$

Při tom je

$$C_0 = \frac{1}{b} \int_0^b M \, dy$$

$$C_q = M \frac{1}{\pi} \sin \frac{q\pi}{b} d$$

kde  $M$  je dáno vztahem (III-97).  
Je tedy

$$E_y = \left( \frac{1}{b} \int_0^b M \, dy + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} M \sin \frac{q\pi}{b} d \cos \frac{q\pi}{b} y \right) e^{i\gamma z} \quad (\text{III-98})$$

Tento vztah musí být identický se vztahem (III-95) pro  $x = \frac{a'}{2}$ .

Porovnáme-li (III-98) a (III-95), platí po dosazení za  $M$  příslušného výrazu z rovnice (III-97), že  $q = n$  a potom

$$C_0 = \frac{d}{b} A \frac{\Gamma \cos \Gamma \frac{a'}{2}}{\alpha_0 \sin \alpha_0 \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)}$$

$$C_n = \frac{1}{\pi} A \frac{\Gamma \cos \Gamma \frac{a'}{2}}{\alpha_n \sin \alpha_n \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)} \sin \frac{n\pi}{b} d$$

Dosadíme-li tyto konstanty do vztahu (III-96) pro  $H_z$ , dostaneme pro  $x = \frac{a'}{2}$ :

$$H_z = \Gamma^2 \left[ \frac{d}{b} A \frac{\Gamma \cos \Gamma \frac{a'}{2}}{\alpha_0 \sin \alpha_0 \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} A \frac{\Gamma \cos \Gamma \frac{a'}{2}}{\alpha_n \sin \alpha_n \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)} \sin \frac{n\pi}{b} d \cos \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i\gamma z} \quad (\text{III-99})$$

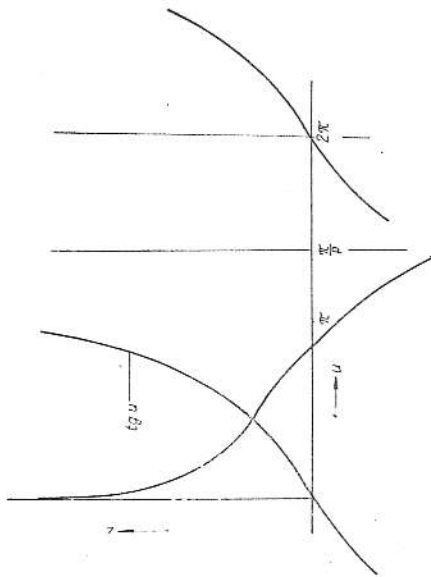
Protože je  $E_y$  v oboru souměrné plochy  $S_{12}$  konstantní, platí podle vzorce (III-74)

$$\int_{S_{12}} H_z \, dS = \int_{S_{12}} H_z \, dS \quad (\text{III-100})$$

Plocha  $S_{12}$  necht' přísluší v našem případě prostoru 1 pro  $x = \frac{a'}{2}$  a plocha  $S_{12}$  prostoru 2. V prostoru 1 je intenzita magnetického pole dána vztahem (III-94) a v prostoru 2 vztahem (III-99). Oběma plochám přísluší souřadnice  $x = \frac{a'}{2}$ . Integrujeme-li přes obdélník se souřadnicemi  $d$  a  $h$  podle

proměnné  $y$  a  $z$ , dostaneme po integraci

$$\Gamma^2 A d \sin \Gamma \frac{a'}{2} = \Gamma^2 \left[ \frac{d}{b} A \frac{\Gamma \cos \Gamma \frac{a'}{2} \cos \alpha_0 \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)}{\alpha_0 \sin \alpha_0 \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)} d + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} A \Gamma \cos \Gamma \frac{a'}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)}{\alpha_n \sin \alpha_n \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)} \frac{b}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{b} d \right)^2 \right]$$



Obr. 83. Grafické znázornění transcendentní rovnice  $\text{tg } u = \frac{q}{\text{tg } pu}$ .

Při tom je  $\alpha_n = \sqrt{\Gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ , z čehož  $\alpha_0 = \Gamma$ . Se zřetelem k tomu upravíme předcházející vztah takto:

$$\text{tg } \Gamma \frac{a'}{2} = \frac{d}{b} \cotg \Gamma \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cotg \alpha_n \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) \frac{1}{\alpha_n} \frac{\Gamma}{n\pi} \frac{\sin^2 n\pi \frac{d}{b}}{b}$$

kde je  $\alpha_n = \sqrt{\Gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

To je transcendentní rovnice pro konstantu  $\Gamma$ . Bude-li  $d \ll b$ , zůstaneme při podrobném rozboru této rovnice, že

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cotg \alpha_n \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) \frac{1}{\alpha_n} \frac{\Gamma}{n\pi} \frac{\sin^2 n\pi \frac{d}{b}}{d} \ll \frac{d}{b} \cotg \Gamma \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right)$$

Můžeme proto dostat konstantu  $\Gamma$  v prvním přiblížení řešením rovnice

$$\text{tg } \Gamma \frac{a'}{2} = \frac{d}{b} \cotg \Gamma \left( \frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) \quad (\text{III-101})$$

Vztah (III-101) upravíme takto:

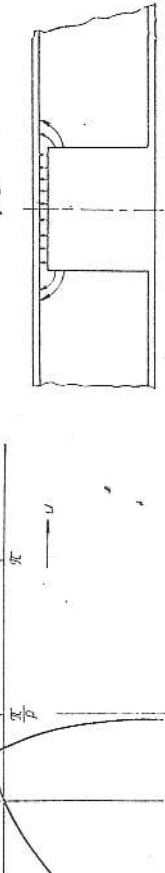
$$\text{tg } u = \frac{q}{\text{tg } pu} \quad (\text{III-102})$$

kde jsme označili výraz  $\Gamma \frac{a'}{2}$  výrazem  $u$ , poměr  $\frac{d}{b}$  výrazem  $q$  a poměr  $\frac{a-a'}{a}$  výrazem  $p$ . Grafické znázornění této rovnice je na obr. 83.

Všimneme si případu, kdy bude poměr  $p$  velký. Může to nastat při konstantní šířce střední části  $a'$  tehdy, bude-li se rozměr  $a$  zvětšovat. V tomto případě se bude vzdálenost asymptot kotangenty (obr. 84) zmenšovat a v krajním případě, kdy bude rozměr  $a$  nekonečný, přejde kotangentu v osu  $y$ . Tehdy bude  $\Gamma = 0$  a vlnovod typu II přejde ve dvě rovinné desky (obr. 85), mezi nimiž se šíří vlna TEM.

Je-li  $u \ll 1$ , což může nastat při malých hodnotách  $d$ , lze nahradit  $\text{tg } u$  a  $\text{tg } pu$  jejich argumenty. Potom dostaneme z rovnice (III-102) pro  $u$  vztah

$$u = \sqrt{\frac{q}{p}}$$



Obr. 84. Grafické znázornění transcendentní rovnice  $\text{tg } u = \frac{q}{\text{tg } pu}$  pro velký poměr  $p$ .

Dosadíme-li za  $q$  výraz  $\frac{d}{b} \frac{a-a'}{a}$  a uvážíme-li, že  $u = \Gamma \frac{a'}{2}$ , je

$$\Gamma = \frac{2}{a'} \sqrt{\frac{d}{b} \frac{a-a'}{a}} = 2 \sqrt{\frac{d}{ba'(a-a')}}$$

Protože mezní délka vlny vlnovodu je určena tak, že  $\lambda_m = \frac{2\pi}{\Gamma}$ , je mezní délka vlny vlnovodu typu II určena vztahem

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{ba'(a-a')}{4d}} \quad (\text{III-103})$$

K tomuto zjednodušenému vzorci bychom dospěli také kvazistacionární metodou.

Známe-li u vlnovodu typu II konstantu  $\Gamma$ , můžeme určit všechny ostatní důležité veličiny (mezní délku vlny, konstantu přenosu, charakteristickou impedanci a vlnový odpor).

Vlnovodu typu II používáme při konstrukci širokopásmových vlnovodových přechodů, neboť má tu výhodnou vlastnost, že jeho mezní kmitočet je podstatně nižší než mezní kmitočet obdélníkového vlnovodu stejných vnějších rozměrů  $a, b$ .

### 36.3 Poruchová metoda výpočtu dutinových rezonátorů (podle G. V. Kisuňka)<sup>3)</sup>

V této části provedeme výpočet vlastní délky vlny dutinového rezonátoru, jehož podstatná část má tvar pravidelný a jen poměrně malá část vzhledem k celkovému objemu porušuje původní pravidelnost dutiny.

<sup>3)</sup> Pro studium této části se doporučuje prostudovat nejdříve čl. 43.

Předpokládáme, že dutina má tvar podle obr. 86. Při tom objem, označený  $V'$ , představuje poruchový prvek. Tento objem je součástí dokonale vodivého pláště.

Elektrické pole dutiny, v níž není poruchový prvek, označíme  $E_{m0}$ , kde index  $n$  označuje druh pole v dutině (obecně je  $n$  vyjádřeno třemi indexy, v předcházející části jsme je označovali  $mnp$ ). Při tom nesmíme zaměnit index  $n$  s jednotkovým vektorem normální  $n$ .

Intenzita elektrického pole dutiny s poruchovým prvkem bude mít poněkud odchylnou velikost od  $E_{m0}$  a označíme ji  $E$ . Pro obě intenzity pole platí na základě Maxwellových rovnic vztahy

$$\begin{aligned} \text{rot rot } E_{m0} &= k_{m0}^2 E_{m0} & \text{(III-104)} \\ \text{rot rot } E &= k^2 E & \text{(III-105)} \end{aligned}$$

Při dalším postupu použijeme Greenovy věty ve vektorovém vyjádření (viz kap. IX).

Dosadíme do rovnice (IX-23) za  $P = E$  a za  $Q = E_{m0}$ . Potom bude

$$\int_{V_0} (E_{m0} \text{ rot rot } E) dV - \int_{S_0} ((E \text{ rot } E_{m0}) \cdot n) dS = - \int_{S_0} ((E_{m0} \text{ rot } E) \cdot n) dS$$

kde  $V_0$  je objem dutiny resonátoru, neuvažujeme-li poruchový prvek  $S_0$  povrch tohoto objemu.

Se zřetelem na vztahy (III-104) a (III-105) upravíme předcházející rovnici takto:

$$(k^2 - k_{m0}^2) \int_{V_0} (EE_{m0}) dV = \int_{S_0} \{ ((E \text{ rot } E_{m0}) \cdot n) - ((E_{m0} \text{ rot } E) \cdot n) \} dS \quad \text{(III-106)}$$

Těčná složka intenzity elektrického pole  $E_{m0}$  je na povrchu  $S_0$  nulová. Těčná složka intenzity elektrického pole  $E$  je nulová na ploše  $S'$  a na ploše  $S_0$  mimo plošku  $S_0'$ . Proto lze rovnici (III-106) upravit takto:

$$(k^2 - k_{m0}^2) \int_{V_0} (EE_{m0}) dV = - \int_{S_0'} ((E \text{ rot } E_{m0}) \cdot n) dS \quad \text{(III-106.1)}$$

Na plošce  $S'$  (omezující poruchový prvek) je tečná složka intenzity elektrického pole  $E$  nulová. Protože na  $S'$  je

$$[En] = 0$$

$$\int_{S'} ((\text{rot } E_{m0}) \cdot E) n dS = 0$$

je také

$$(k^2 - k_{m0}^2) \int_{V_0} (EE_{m0}) dV = - \int_{S_0' + S'} ((\text{rot } E_{m0}) \cdot E) n dS$$

Provedeme úpravu povrchového integrálu předcházející rovnice podle rovnice (IX-22). Potom

$$\int_{S_0' + S'} ((\text{rot } E_{m0}) \cdot E) n dS = \int_{V'} ((E \text{ rot rot } E_{m0}) - (\text{rot } E_{m0} \text{ rot } E)) dV'$$

kde  $V'$  je objem poruchového prvku. Na základě toho

$$(k^2 - k_{m0}^2) \int_{V_0} (EE_{m0}) dV = \int_{V'} ((\text{rot } E_{m0} \text{ rot } E) - (E \text{ rot rot } E_{m0})) dV' \quad \text{(III-107)}$$

Výslednou intenzitu elektrického pole  $E$  určíme jako součet všech vidů, které mohou v dutině vzniknout. Tyto vidy jsou obecně charakterisovány třemi indexy  $m, n, p$  [viz rovnici (III-3)].

Označíme obecný vid intenzity elektrického pole indexem  $m$ , který v sobě zahrnuje libovolnou kombinaci indexů  $m, n, p$ . Potom bude

$$E = \sum_m E_m E_{m0} \quad \text{(III-108)}$$

kde  $E_m$  je konstanta, určující poměrnou velikost intenzity elektrického pole daného vidu v dutině, označeného indexem  $m$

$E_{m0}$  vektor intenzity elektrického pole vidu  $m$ .

Indexem  $m$  označujeme proto, že jde o vid intenzity elektrického pole dutiny bez poruchového elementu. Vektorová funkce  $E_{m0}$  má v oboru dutiny ortogonální vlastnosti [viz rovnici (IV-6)].

Dosadíme-li řadu (III-108) do vzorce (III-107), dostaneme

$$E_m (k^2 - k_{m0}^2) \int_{V_0} E_{m0}^2 dV = \sum_m E_m \int_{V'} ((\text{rot } E_{m0} \text{ rot } E_{m0}) - (E_{m0} \text{ rot rot } E_{m0})) dV'$$

neboť na základě ortogonálních vlastností funkce platí

$$\int_{V_0} (E_{m0} E_{mp}) dV = 0 \quad \text{pro } n \neq m$$

Integraci členů po členu lze provést jen tehdy, konverguje-li stejnoměrně funkční řada  $\sum_m E_m E_{m0}$ . U dutinových resonátorů vlnovodového typu je uvážená funkční řada ve všech praktických případech takového tvaru, že je stejnoměrná konvergence vždy splněna.

Označíme-li integrály

$$\int_{V_0} E_{m0}^2 dV = A_m$$

a

$$\int_{V'} ((\text{rot } E_{m0} \text{ rot } E_{m0}) - (E_{m0} \text{ rot rot } E_{m0})) dV = A_{m0}$$

dostaneme

$$E_m (k^2 - k_{m0}^2) A_m = \sum_{m=1}^{M_0} E_m A_{m0} \quad \text{(III-109)}$$

Při tom je  $m$  pořadí vlastní funkce. Součet bychom měli provést pro všechny vlastní funkce. Prakticky uvažujeme jen ty, které mají největší vliv na výsledek. Meze  $M_1$  a  $M_2$  zahrnují uvažované vlastní funkce.

Vztahy (III-109) představují pro různé  $n$  soustavu homogenních rovnic s neznámými  $E_m$ , které mají netriviální řešení tehdy, rovná-li se jejich determinant nule. Tato podmínka dává rovnici  $n$ tho stupně pro vlnové číslo  $k$ .

Je-li objem poruchového prvku řádově menší než objem resonátoru, můžeme použít prvního přiblížení při výpočtu. Lze dokázat, že charakteristický determinant uvedeného soustavy homogenních rovnic má při  $V' \ll V$  všechny nediagonální členy řádově menší než diagonální. V tomto případě je hodnota determinantu, zanedbáme-li při číselném vyjádření malé členy vyšších řádů, počínaje druhým, dána jen součinem diagonálních prvků, a proto platí

$$H_n \left( k^2 - k_{m0}^2 + \frac{A_{m0}}{A_m} \right) = 0$$

Z toho vyplývá, že pro každý vid platí

$$k^2 - k_{m0}^2 + \frac{A_{m0}}{A_m} = 0$$

Výrazy pro  $A_m$  a  $A_{m0}$  upravíme. Na základě Maxwellových rovnic lze upravit  $A_{m0}$  takto:

$$A_{m0} = \omega^2 \mu^2 \int_{V'} H_{m0}^2 dV - k_{m0}^2 \int_{V'} E_{m0}^2 dV$$

$$k^2 = k_{e0}^2 + \frac{\omega^2 \mu_0^2 \int H_{e0}^2 dV - k_{e0}^2 \int E_{e0}^2 dV}{\int E_{e0}^2 dV}$$

$$k^2 = k_{e0}^2 \left( 1 + \frac{\mu_0 \int H_{e0}^2 dV - \epsilon_0 \int E_{e0}^2 dV}{\epsilon_0 \int E_{e0}^2 dV} \right)$$

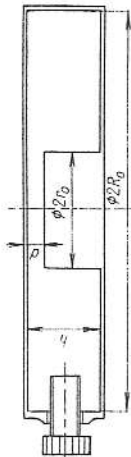
Po úpravě, je-li  $k_{e0}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$

Protože je  $\frac{1}{2} \mu_0 \int H_{e0}^2 dV$  střední hodnota energie magnetického pole v objemu poruchového prvku (kdyby byl zaplněn vzduchovým dielektrikem),  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \int E_{e0}^2 dV$  střední hodnota energie elektrického pole v objemu  $V'$  a  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \int E_{e0}^2 dV$  celková energie elektromagnetického pole v celé dutině, lze psát

$$k^2 = k_{e0}^2 \left( 1 + 2 \frac{(W_h' - W_e')}{W_e'} \right) \quad (III-110)$$

kde  $W_e'$  je střední hodnota energie elektrického pole v místě poruchového prvku (kdyby byl zaplněn vzduchovým dielektrikem),  $W_h'$  střední hodnota energie magnetického pole v místě poruchového prvku,  $W_e'$  střední hodnota celkové elektromagnetické energie celé dutiny. Ze vzorce (III-110) určíme změnu vlastní délky vlny

$$\lambda = \lambda_{e0} \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{W_h' - W_e'}{W_e'}}} \quad (III-111)$$



Obr. 87. Toroidní dutina, laděná šroubem.

Jako příklad této metody provedeme výpočet toroidního dutinového rezonátoru laděného postranním šroubem (obr. 87). Vlastní délku toroidního dutinového rezonátoru bez poruchového prvku určíme podle rovnice (III-54). Rozládání dutiny šroubem, jehož objem označíme  $V$ , určíme podle vzorce (III-110). K tomu je třeba určit celkovou elektrickou energii dutiny a magnetickou a elektrickou energii v místě šroubu, kde je umístěn šroub. Intenzita elektrického pole dutiny je soustředěna jednak v radiálním vedení, jednak v kondensátoru dutiny.

Intenzita elektrického pole v radiálním vedení je dána vztahem (II-144)

$$E_r = k^2 (C_1 J_0(k_0 r) + C_2 N_0(k_0 r))$$

Protože je u toroidního rezonátoru radiální vedení zakončeno nakrátko, musí platit, že pro  $r = R_0$  je  $E_r = 0$ . Z této podmínky vyplývá vztah mezi konstantou  $C_1$  a  $C_2$ :

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(k_0 R_0)}{N_0(k_0 R_0)} \quad (III-111.1)$$

Dosadíme-li ve vztahu pro  $E_r$  za  $C_2$  uvedený výraz, dostaneme pro  $E_z$

$$E_z = k^2 C_1 [J_0(k_0 r) N_0(k_0 R_0) - J_0(k_0 R_0) N_0(k_0 r)]$$

při čemž jsme nahradili konstantní výraz  $C_1 N_0(k_0 R_0)$  novou konstantou  $C$ . V místě kondensátoru, kde je  $r = r_0$ , je

$$E_z = k^2 C [J_0(k_0 r_0) N_0(k_0 R_0) - J_0(k_0 R_0) N_0(k_0 r_0)] \frac{h}{d}$$

Intenzita elektrického pole je v místě kondensátoru větší v poměru  $\frac{h}{d}$  než na začátku radiálního vedení. Vyplyvá to ze spojitosti napětí na kondensátoru a vstupu radiálního vedení.

V místě radiální části dutiny je dvojnásobná energie elektrického pole (rovna celkové energii dutiny)

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E_z^2 dV$$

Dosadíme-li pod integrál příslušný výraz, bude

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{r_0}^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h k^4 C^2 Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0) r dr d\phi dz$$

kde jsme položili pro jednoduchoost

$$Z_0(k_0 r_0, k_0 R_0) = J_0(k_0 r_0) N_0(k_0 R_0) - J_0(k_0 R_0) N_0(k_0 r_0)$$

Integrujeme-li, platí se zřeteltem na okrajové podmínky pro  $r = R_0$ :

$$W_{e1} = k_0^4 C^2 \frac{1}{2} \epsilon_0 2\pi h \left\{ Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0) \frac{R_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} [Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0) + Z_1^2(k_0 r_0, k_0 R_0)] \right\} \quad (III-112)$$

kde

$$Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0) = J_1(k_0 R_0) N_0(k_0 R_0) - J_0(k_0 R_0) N_1(k_0 R_0)$$

a

$$Z_1(k_0 r_0, k_0 R_0) = J_1(k_0 r_0) N_0(k_0 R_0) - J_0(k_0 r_0) N_1(k_0 r_0)$$

Protože v místě kondensátoru je intenzita elektrického pole konstantní, bude energie elektrického pole kondensátoru

$$W_{e2} = \pi r_0^2 C^2 k_0^4 Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0) \frac{r_0^2}{2} \quad (III-113)$$

Můžeme předpokládat, že v místě šroubu je intenzita elektrického pole nulová, neboť šroub je v malé blízkosti souřadnice  $r = R_0$ , kde je intenzita elektrického pole nulová. Intenzita magnetického pole v radiálním vedení je dána vzorcem (II-145). Nahradíme-li v tomto vzorci konstantu  $C_2$  výrazem (III-111.1) a derivaci Besselovy funkce  $J_0'(kr)$  funkcí  $J_0(kr)$  a  $J_1(kr)$ , dostaneme, zanedbáme-li vodivost  $\sigma$ ,

$$H_\phi = j\omega \epsilon C [N_1(kr) J_0(kR_0) - J_1(kr) N_0(kR_0)]$$

V místě šroubu pro  $r = R_0$  je amplituda magnetického pole

$$H_\phi = k_0 j\omega \epsilon C [N_1(k_0 R_0) J_0(k_0 R_0) - J_1(k_0 R_0) N_0(k_0 R_0)] = -k_0 j\omega \epsilon C Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0)$$

a proto platí pro střední hodnotu energie magnetického pole v místě šroubu

$$W_{h1} = \frac{\mu_0}{4} V k_0^2 \omega^2 \epsilon^2 C^2 Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0) \quad (III-114)$$

kde  $V$  je objem šroubu.

Dosadíme-li rovnice (III-112), (III-113) a (III-114) do výrazu (III-110), dostaneme

$$k^2 = k_0^2 \left( 1 + \frac{2W_{h1}}{W_{e1}} \right) = k_0^2 \left( 1 + \frac{2W_{h1}}{W_{e2}} \right) =$$

$$= k_0^2 \left( 1 + \frac{\frac{\mu_0}{2} V k_0^2 \omega^2 \epsilon^2 C^2 Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)}{\frac{\epsilon_0 C^2 k_0^4 2\pi h}{2} \left[ Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0) \frac{R_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} [Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0) + Z_1^2(k_0 r_0, k_0 R_0)] + \frac{r_0^2}{2} Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0) \right]} \right) =$$

$$= k_0^2 \left\{ 1 + \frac{V Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)}{2\pi h \left[ Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0) \frac{R_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} Z_1^2(k_0 r_0, k_0 R_0) - \frac{r_0^2}{2} \left( 1 - \frac{h}{d} \right) Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0) \right]} \right\}$$

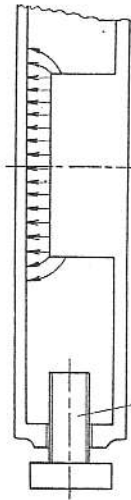
Po úpravě je

$$k^2 = k_0^2 \left\{ 1 + \frac{V}{\pi R_0^2 h \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{R_0} \right)^2 \frac{Z_1^2(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)} - \left( \frac{r_0}{R_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{h}{d} \right) \frac{Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)} \right]} \right\} \quad (III-115)$$

V tomto vztahu je  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ;  $k_0$  je vlastní vlnové číslo, které určíme z transcendentní vlnové rovnice (III-54).

Ze vztahu (III-115) určíme vlastní délku dutiny se šroubem

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\pi R_0^2 h \left[ 1 - \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 \frac{Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)}{Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)} - \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 \frac{Z_0^2(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)} \right]}} \quad (\text{III-116})$$



Obr. 88. Toroidální dutina, laděná šroubem s uspořádáním intenzity elektrického pole.

Z tohoto výrazu plyne, že se délka vlny, uvážíme-li vliv šroubu, zkracuje. Vzorec (III-116) platí tehdy, můžeme-li s dostatečnou přesností pokládat intenzitu elektrického pole v místě šroubu za nulovou (viz obr. 88).

Bude-li rozměr kondensátoru  $d \ll R_0$ , bude převládát energie elektrického pole v kondensátoru a energii elektrického pole v radiálním vedení lze zanedbat. V tomto případě je  $W_{r1} = 0$  a výraz (III-116) se zjednoduší takto:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\pi r_0^2 d \frac{Z_0^2(k_0 R_0, k_0 R_0)}{Z_1^2(k_0 R_0, k_0 R_0)} \left(\frac{h}{d}\right)^2}} \quad (\text{III-117})$$

Vzorec (III-116) a (III-117) můžeme ještě upravit tak, že nahradíme výraz

$$\frac{Z_1(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0)}$$

malým radiálním kosinem a výraz

$$\frac{Z_0(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0)}$$

malým radiálním sinusem, neboť

$$Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0) = J_1(k_0 R_0) N_0(k_0 R_0) - J_0(k_0 R_0) N_1(k_0 R_0) = \frac{2}{\pi k R_0}$$

a výrazem

$$\frac{Z_1(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0)} = \frac{J_1(k_0 r_0) N_1(k_0 r_0) + J_1(k_0 r_0) N_1(k_0 R_0)}{\frac{2}{\pi k R_0}}$$

jsme definovali malý radiální kosinus (viz čl. 21). Obdobně výrazem

$$\frac{Z_0(k_0 r_0, k_0 R_0)}{Z_1(k_0 R_0, k_0 R_0)} = \frac{J_0(k_0 r_0) N_0(k_0 r_0) - N_0(k_0 R_0) J_0(k_0 r_0)}{\frac{2}{\pi k R_0}}$$

jsme definovali malý radiální sinus. Proto je

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\pi R_0^2 h \left[ 1 - \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 \text{cs}^2(k_0 r_0, k_0 R_0) - \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 \left(1 - \frac{h}{d}\right) \text{sr}^2(k_0 r_0, k_0 R_0) \right]}} \quad (\text{III-118})$$

Vzorec (III-117) upravíme takto:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\pi r_0^2 d \text{sr}^2(k_0 r_0, k_0 R_0) \left(\frac{h}{d}\right)^2}} \quad (\text{III-119})$$

kde  $\lambda_0$  je délka vlny dutiny bez šroubu  
 $r_0$  vnitřní poloměr dutiny  
 $R_0$  vnější poloměr dutiny

$V$  objem šroubu

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Vzorec (III-119) dává informativní hodnoty pro změnu vlastní délky vlny toroidální dutiny dolaďované šroubem, jehož objem je  $V$ . Tohoto způsobu dolaďování používáme ke změně kmitočtu klystronů s vnější dutinou.

### 37. Činitel jakosti dutinového rezonátoru se zřetelem na vodivost dielektrika

Při odvozování ztrát v dutinovém rezonátoru jsme odvodili pro vlnové číslo vztah

$$k^2 = k_0^2 - j\omega\mu\epsilon \frac{P_z}{W}$$

viz rovnici (III-12) a další.

Při tom je  $\omega$  komplexní úhlový kmitočet. Uvažujeme-li ještě ztráty v dielektriku, platí pro vlnové číslo  $k$  vzorec<sup>4)</sup>

$$k^2 = + j\omega\mu(\sigma - j\omega\epsilon) = \omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma$$

Pro bezztrátové dielektrikum

$$k_0^2 = \omega_0^2\mu\epsilon$$

Potom je

$$\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma = \omega_0^2\mu\epsilon - j\omega\mu\epsilon \frac{P_z}{W}$$

Po úpravě bude

$$\omega^2 - \omega_0^2 = -j\omega \left( \frac{\sigma}{\epsilon} + \frac{P_z}{W} \right)$$

Rozdíl čtvrců na levé straně opět rozložíme, při čemž uvážíme, že se  $\omega$  podstatně neliší od  $\omega_0$ . Proto je

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 - \frac{j}{2} \left( \frac{\sigma}{\omega_0\epsilon} + \frac{P_z}{\omega_0 W} \right) \right]$$

kde  $P_z$  je ztrátový výkon v plášti dutiny  
 $W$  celková energie dutiny.

<sup>4)</sup> Při tom předpokládáme, že časová funkce v Maxwellových rovnicích je dána časovou funkcí  $e^{-j\omega t}$ .

Označíme-li  $\left(\frac{\sigma}{\omega_0 \epsilon} + \frac{P_z}{\omega_0 W}\right)$  výrazem  $\frac{1}{Q}$ , bude platit

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}$$

kde je

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{\sigma}{\omega_0 \epsilon} \quad \text{a} \quad \frac{1}{Q_2} = \frac{P_z}{\omega_0 W}$$

Výraz  $Q$  je celkový činitel jakosti dutiny, v němž je zahrnut vliv vodivosti dielektrika dutiny. Činitel jakosti  $Q_1$  je převrácená hodnota tangenty ztrátového úhlu

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

#### PŘÍKLADY

**Příklad 1.** Navrhněte vlnoměr pro pásmo od 9 do 11 cm, pracující s videm  $TE_{011}$ . Určete jeho činitele jakosti pro poloměr  $a = 10$  cm!

**Příklad 2.** Proveďte totéž pro pásmo od 3 do 3,6 cm!

**Příklad 3.** Obdélníkový vlnovod pracující s videm  $TE_{10}$  je na obou stranách omezen indukčními clonami (viz obr. 125). Určete podle metody „sešívání“ dutin vlastní délku vlny takto vzniklého rezonátoru. Určete činitele jakosti takové dutiny!

**Příklad 4.** Určete vlnový odpor vlnovodu typu II (definovaný ve středě prostoru I podle obr. 81)!

## IV. BUZENÍ VLNOVODŮ A DUTINOVÝCH REZONÁTORŮ

V kap. II jsme poznali, že ve vlnovodu může existovat řada elektromagnetických vln, které jsme zásadně rozdělili na dva druhy: příčné vlny magnetické a příčné vlny elektrické. Každému druhu přísluší obecně nekonečná řada vidů, z nichž každý má diskretní vlastnosti.

Nášim úkolem bude dokázat ortogonálnost funkcí, kterými jsou určeny Hertzovy vektory jednotlivých vidů, a odvodit velikost jednotlivých vidů. Tuto velikost určíme u nekonečně dlouhého vlnovodu a u vlnovodu na jedné straně omezeného dokonale vodivou stěnou. Všimneme si buzení vlnovodů proudovými a nábojovými prvky a buzení vlnovodů štěrbinou.

### 38. Orthogonálnost vlastností funkcí plynoucích z řešení vlnové rovnice

V kapitole I jsme poznali, že Hertzův vektor je dán součinem dvou funkcí

$$H_z = T_1 T_2$$

kde  $T_1$  je funkcí příčných souřadnic a vyhovuje diferenciální rovnici

$$\Delta T_{nm} + T_{nm}^2 T_{nm} = 0 \quad (\text{IV-1})$$

kde  $n, m$  jsou indexy charakterizující vid elektromagnetické vlny ve vlnovodu. Aby byla tato vlnová rovnice jednoznačná, patří k ní okrajové podmínky (u příčné magnetické vlny musí být na okraji funkce  $T_1$  nulová a u příčné vlny elektrické musí být na okraji derivace podle normály  $\frac{\partial T_1}{\partial n}$  nulová).

Řešením uvedené vlnové rovnice jsou vlastní funkce  $T_{nm}$ . U kruhového vlnovodu je

$$T_{nm} = J_n \left( \frac{\alpha_{nm}}{a} r \right) \cos n\varphi$$

nebo u obdélníkového vlnovodu (vlna TE)

$$T_{nm} = \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

Na základě Greenovy věty platí pro dvě libovolné potenciální funkce  $\varphi$  a  $\psi$  výraz

$$\int_S [\varphi \Delta \psi + (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi)] dS = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

kde  $S$  je plocha uzavřená křivkou  $s$ .

Dosaďme za  $\varphi$  jedno řešení vlnové rovnice  $T_k$  a za  $\psi$  jiné řešení  $T_l$ . Při tom index  $l$  představuje jednu kombinaci indexů  $n$  a  $m$  a index  $k$  jinou kombinaci  $n$  a  $m$ . Potom

$$\int_S T_l \frac{\partial T_k}{\partial n} dS = \int [T_l \Delta T_k + (\text{grad } T_l, \text{grad } T_k)] dS \quad (\text{IV-2})$$

Zaměníme-li index  $l$  za index  $k$ , dostaneme

$$\int_S T_k \frac{\partial T_l}{\partial n} dS = \int [T_k \Delta T_l + (\text{grad } T_l, \text{grad } T_k)] dS \quad (\text{IV-3})$$

Jestliže odečteme rovnici (IV-3) od rovnice (IV-2), při čemž přehlédneme k okrajovým podmínkám ( $T_k, T_l$  nebo  $\frac{\partial T_k}{\partial n}, \frac{\partial T_l}{\partial n}$  jsou na  $s$  nulová) a  $k$  vlnové rovnici (IV-1), platí

$$-I_k^2 \int_S T_l T_k dS + I_l^2 \int_S T_l T_k dS = (I_l^2 - I_k^2) \int_S T_l T_k dS = 0$$

Z toho je vidět, že pro  $l \neq k$  je  $\int_S T_l T_k dS = 0$ . Pro  $l = k$  je  $(I_l^2 - I_k^2) = 0$  a výraz

$$\int_S T_l T_k dS = \int_S T_l^2 dS \quad \text{je úměrný, jak jsme již poznali, přenesenému výkonu. Je tedy pro } l \neq k$$

$$\int_S T_l T_k dS = 0 \quad (\text{IV-4})$$

a pro  $l = k$

$$\int_S T_l^2 dS = M_l \quad (\text{IV-5})$$

kde  $M_l$  nazýváme normou funkce  $T_l$ . Vztah (IV-4) charakterizuje ortogonální vlastnost funkcí  $T_l, T_k$ .

### 39. Buzení elektromagnetické vlny vidu TE v neomezeném vlnovodu

Umístíme-li ve vlnovodu jakýkoli proudový nebo nábojový prvek, vybudí se ve vlnovodu elektromagnetická vlna. Nejjednodušší způsob buzení vlnovodu znázorňuje obr. 89a. Sondou ve tvaru přímého drátu zasahuje do prostoru vlnovodu.

Vysokofrekvenčním proudem v sondě se vybudí elektromagnetické vlny ve vlnovodu. Obdobně bychom dostali jednoduché vybuzení vlnovodu smyčkou, znázorněnou na obr. 89b.

Budíme-li vlnovod obecně uspořádanými proudovými nebo nábojovými zdroji (viz obr. 90), vzniknou ve vlnovodu theoreticky všechny vidy. Naším úkolem bude určit velikosti těchto jednotlivých vidů v závislosti na způsobu uspořádání proudových nebo nábojových zdrojů. Theoreticky jde o vyřešení nehomogenní vlnové rovnice se zřetelem na okrajové podmínky (tečná složka intenzity elektrického pole je na dokonale vodivém plášti nulová). V této části určíme velikosti jednotlivých vidů příčné elektrické vlny.

V dielektrickém prostředí se zdroji platí na základě Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} & \text{div } \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

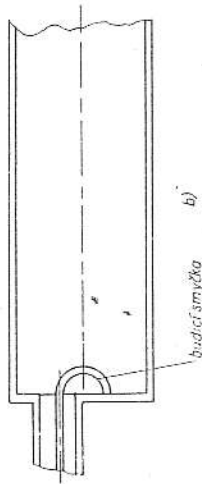
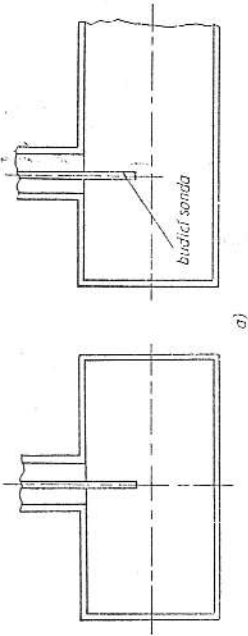
kde  $J$  je hustota buďícího proudu  
 $\rho$  hustota objemového náboje.

Řešíme-li obě první Maxwellovy rovnice podle  $\mathbf{H}$ , dostaneme vztah

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$$

Rozvedeme rot rot  $\mathbf{H}$  podle vztahu

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$$



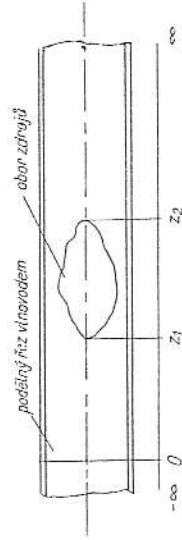
Obr. 89. Buzení vlnovodu; a — sondou; b — smyčkou.

Protože o magnetickém poli platí, že  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , je

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$$

a potom

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{J}$$



Obr. 90. Buzení vlnovodu obecným ladicím prvkem.

Této nehomogenní vlnové rovnici vyhovují všechny složky intenzity magnetického pole. Pro složku  $H_z$  tedy platí

$$\Delta H_z + k^2 H_z = -\text{rot}_z J \quad (\text{IV-6})$$

Intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}_z$  v rovnici (IV-6) vyjádříme superposicí všech vidů elektromagnetické vlny ve vlnovodu. V předěšlých částech jsme vyjádřili všechny složky

intensity elektrického pole a magnetického pole pomocí Hertzových vektorů. Dokázali jsme, že složka intensity magnetického pole daného vektoru  $H_z$  je úměrná Hertzově vektoru  $I_z^m$ . Platí

$$H_z = \Gamma_1^m I_z^m$$

kde  $\Gamma_1$  je příčná konstanta, která přísluší vidu, definovanému obecně indexem 1 (tentto index sdružuje dva indexy, které jsme v čl. 32.1 označili  $m, n$ ). Celková intenzita magnetického pole  $H_z$  je dána superposicí intenzit magnetického pole  $H_{z1}$ , příslušných všem vidům. Proto

$$H_z = \sum_1 \Gamma_1^m I_{z1}^m \quad (IV-7)$$

Hertzův vektor  $I^m$  jsme vyjádřili součinem dvou funkcí  $T_1$  a  $T_2$ . Hertzův vektor daného vidu 1, označili jsme jej  $I_{z1}^m$ , bude tedy dán součinem funkcí  $T_{11}$  a  $T_{21}$ . Při tom je třeba zdůraznit, že  $T_{11}$  je vlastní funkce vlnovodu a závisí jen na příčných souřadnicích a že  $T_{21}$  je jen funkcí souřadnice  $z$ . Tato funkce bude obecně tvaru (pro jeden směr šíření)

$$T_{21} = C_1 e^{j\gamma z}$$

Při tom je  $\gamma$  konstanta přenosu vidu s indexem 1 a  $C_1$  neznámá konstanta, určující velikost intenzity pole. Tuto konstantu máme určit u každého vidu jako funkci budících prvků. Můžeme proto intenzitu magnetického pole vyjádřit takto:

$$H_z = \sum_1 \Gamma_1^m T_{11} T_{21} \quad (IV-8)$$

Dosadíme rovnici (IV-8) do rovnice (IV-6). Potom bude

$$\sum_1 (\Delta^2 T_{11} T_{21}) + k^2 \sum_1 \Gamma_1^m T_{11} T_{21} = -\text{rot}_z J \quad (IV-9)$$

Upravme rovnici (IV-9)

$$\sum_1 \Gamma_1^m \Delta T_{11} + \sum_1 \Gamma_1^m \Delta T_{21} + 2 \sum_1 \Gamma_1^m (\text{grad } T_{11} \text{ grad } T_{21}) + k^2 \sum_1 \Gamma_1^m T_{11} T_{21} = -\text{rot}_z J$$

Protože je  $T_{11}$  funkcí jen příčných souřadnic a  $T_{21}$  funkcí jen souřadnice  $z$ , je grad  $T_{11}$  kolmý ke grad  $T_{21}$ , a proto  $(\text{grad } T_{11} \text{ grad } T_{21}) = 0$ . Potom bude mít rovnice (IV-9) po úpravě tvar

$$\sum_1 \Gamma_1^m \Delta T_{11} + \sum_1 \Gamma_1^m \Delta T_{21} + k^2 \sum_1 \Gamma_1^m T_{11} T_{21} = -\text{rot}_z J$$

Funkce  $\Delta T_{11}$  vyhovuje vlnové rovnici, proto platí na základě vztahu (IV-1)

$$\Delta T_{11} = -\Gamma_1^m T_{11}$$

Proto upravíme předcházející vztah takto:

$$-\sum_1 \Gamma_1^m \Gamma_1^m T_{11} T_{21} + \sum_1 \Gamma_1^m \Delta T_{21} + k^2 \sum_1 \Gamma_1^m T_{11} T_{21} = -\text{rot}_z J \quad (IV-10)$$

Násobme (IV-10) funkcí  $T_{1m}$ , která je též řešením vlnové rovnice (IV-1), avšak přísluší jinému vidu, a integrujme v oboru průřezu vlnovodu  $S$ . Integrovat můžeme člen po členu jen tehdy, je-li funkční řada  $\sum_1 \Gamma_1^m T_{11} T_{21}$  stejnoměrně konvergentní. Odvození stejnoměrné konvergence této řady nebudeme provádět a čtenář najde podrobné vysvětlení v knize Толстов: Ряды Фурье. Integrujeme-li člen po členu, dostaneme

$$-\sum_1 \int_S \Gamma_1^m \Gamma_1^m T_{11} T_{1m} dS + \sum_1 \int_S \Gamma_1^m \Gamma_1^m \Delta T_{21} dS + k^2 \sum_1 \int_S \Gamma_1^m T_{11} T_{1m} T_{21} dS = -\int_S \text{rot}_z J T_{1m} dS$$

Funkce  $T_{11}$  a  $T_{1m}$  jsou orthogonální. Proto dostaneme se zřetelem na (IV-4) a (IV-5)

$$-\int_S \Gamma_1^m \Gamma_1^m T_{11} dS + \Gamma_1^m \Delta T_{21} \int_S T_{11}^2 dS + k^2 \int_S \Gamma_1^m \Gamma_1^m T_{21} \int_S T_{11}^2 dS = -\int_S \text{rot}_z J T_{11} dS$$

Dosadíme-li za  $\int_S T_{11}^2 dS = M_1$ , kde  $M_1$  je norma, zjednodušíme předěšlý vztah takto:

$$\Delta T_{21} + (k^2 - \Gamma_1^m) T_{21} = \frac{1}{\Gamma_1^m} \int_S \text{rot}_z J \frac{T_{11}}{M_1} dS$$

Funkce  $T_{21}$  je jen funkcí souřadnice  $z$ . Proto přejde Laplaceův operátor v jednoduchou derivaci podle  $z$ :

$$\frac{d^2 T_{21}}{dz^2} + (k^2 - \Gamma_1^m) T_{21} = \frac{1}{\Gamma_1^m} \int_S \text{rot}_z J \frac{T_{11}}{M_1} dS$$

Integrál na pravé straně předěšlé rovnice je funkcí souřadnice  $z$  (proudová hustota  $J$  kromě toho, že je funkcí příčných souřadnic, je též souřadnicí  $z$  a pro příčné souřadnice je předcházející integrál omezeným integrálem). Dosadíme pro jednoduchost za

$$-\frac{1}{\Gamma_1^m} \int_S \text{rot}_z J \frac{T_{11}}{M_1} dS$$

výraz  $\varphi(z)$ . Potom

$$\frac{d^2 T_{21}}{dz^2} + (k^2 - \Gamma_1^m) T_{21} = \varphi(z)$$

Protože je  $k^2 - \Gamma_1^m = \gamma_1^2$ , kde  $\gamma_1$  je konstanta přenosu vidu 1, upravíme předěšlou rovnici takto:

$$\frac{d^2 T_{21}}{dz^2} + \gamma_1^2 T_{21} = \varphi(z) \quad (IV-11)$$

To je nehomogenní diferenciální rovnice. Budeme ji řešit Lagrangeovou metodou variací konstant. Na základě této metody dostaneme pro  $T_{21}$  tento výsledek:

$$T_{21} = C_1 e^{j\gamma_1 z} + C_2 e^{-j\gamma_1 z} \quad (IV-12)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou funkce  $z$ .

Pro tyto funkce platí vztahy

$$\frac{dC_1}{dz} e^{j\gamma_1 z} + \frac{dC_2}{dz} e^{-j\gamma_1 z} = 0$$

$$j\gamma_1 \frac{dC_1}{dz} e^{j\gamma_1 z} - j\gamma_1 \frac{dC_2}{dz} e^{-j\gamma_1 z} = \varphi(z)$$

Řešíme-li tyto rovnice podle  $C_1$  nebo  $C_2$ , bude

$$\frac{dC_1}{dz} = e^{-j\gamma_1 z} \frac{\varphi(z)}{2j\gamma_1} \quad \text{a} \quad C_1 = \frac{1}{2j\gamma_1} \int e^{-j\gamma_1 z} \varphi(z) dz + A$$

kde  $A$  je integrační konstanta.

Konstanta přenosu  $\gamma_1$  je vždy komplexní veličina, neboť ve skutečnosti není ideálně bezztrátové prostředí. Je tedy

$$j\gamma_1 = \beta + j\lambda$$



$$e^{j\gamma z} = e^{j\alpha z} e^{j\beta z}$$

Tento výraz nabývá pro  $z = +\infty$  nekonečné hodnoty, což je v rozporu s fyzikálně možným řešením. Proto musí být v rovnici (IV-12) funkce  $C_1$  pro  $z = +\infty$  nulová. Z této podmínky vyplývá

$$A = -\frac{1}{2j\gamma_1} \int_{-\infty}^z e^{-j\gamma_1 z} \varphi(z) dz \quad \text{pro } z = +\infty$$

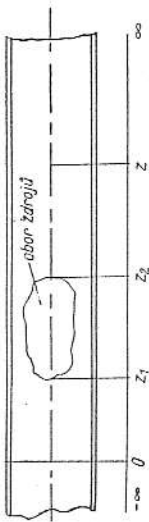
Potom je

$$C_1 = \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{-\infty}^z \varphi(z) e^{-j\gamma_1 z} dz$$

Podobně platí pro konstantu  $C_2$

$$C_2 = \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{-\infty}^z \varphi(z) e^{+j\gamma_1 z} dz$$

Obr. 91. Buzení vlnovodu obecným ladicím prvkem s označením souřadnic.



Je-li souřadnice  $z$  na pravé straně od zdrojů (viz obr. 91), je  $C_1 = 0$ , neboť v prostoru mezi  $z$  a  $\infty$  nejsou zdroje, a proto  $\varphi(z) = 0$ . V tomto případě platí

$$C_2 = \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{z_1}^z \varphi(z) e^{-j\gamma_1 z} dz + \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) e^{+j\gamma_1 z} dz \quad (\text{IV-13})$$

Ve vztahu (IV-13) první a třetí integrál na pravé straně se rovná nule, neboť v oboru mezi těchto integrálů nejsou zdroje. Potom

$$C_2 = \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) e^{+j\gamma_1 z} dz \quad (\text{IV-14})$$

Tento vztah platí pro  $z > z_2$ . Pro  $z < z_1$  platí obdobně

$$C_1 = \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) e^{-j\gamma_1 z} dz \quad (\text{IV-15})$$

Dosadíme-li rovnice (IV-14) a (IV-15) do rovnice (IV-13), dostaneme

$$T_{21} = e^{-j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) e^{-j\gamma_1 z} dz \quad \text{pro } z > z_2 \quad (\text{IV-16})$$

$$T_{21} = e^{+j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) e^{-j\gamma_1 z} dz \quad \text{pro } z < z_1 \quad (\text{IV-17})$$

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_1} \left[ e^{j\gamma_1 z} \int_z^{z_2} \varphi(z) e^{-j\gamma_1 z} dz + e^{-j\gamma_1 z} \int_{z_1}^z \varphi(z) e^{j\gamma_1 z} dz \right] \quad \text{pro } z_1 < z < z_2 \quad (\text{IV-18})$$

V předešlých vztazích je

$$\varphi(z) = -\frac{1}{T_1^2} \int_s \frac{T_{11}}{M_1} \text{rot}_z J dS$$

Průběh proudu je na povrchu prostoru budících proudů a nábojů nespojitý. Bylo by nepohodlné určit  $\text{rot}_z J$  na povrchu budícího prostoru, kde je  $J$  nespojitě, a proto upravíme výraz pod integrálem tak, aby hustota budícího proudu  $J$  vystupovala v upraveném výrazu jako prostý součinitel skalárního součinu.

$$\frac{T_{11}}{M_1} \text{rot}_z J = \left( \frac{T_{11}}{M_1} z \text{rot} J \right) = \left( J \text{rot} \frac{T_{11}}{M_1} z \right) - \text{div} \left[ \frac{T_{11}}{M_1} z J \right]$$

Protože  $\left( J \text{rot} \frac{T_{11}}{M_1} z \right) = \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right)$ , dostaneme pro  $\varphi(z)$  výraz

$$\varphi(z) = -\frac{1}{T_1^2} \int_s \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right) dS - \frac{1}{T_1^2} \int_s \text{div} \left[ \frac{T_{11}}{M_1} z J \right] dS$$

Dosadíme dále za  $\varphi(z)$  předešlý vztah do rovnice (IV-16) a (IV-17). Potom bude

$$\begin{aligned} T_{21} &= e^{-j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} \int_s e^{j\gamma_1 z} \int_s \left\{ \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right) + \text{div} \left[ \frac{T_{11}}{M_1} z J \right] \right\} dS dz = \\ &= e^{-j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} \int_s \left\{ \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right) + \text{div} \left[ \frac{T_{11}}{M_1} z J \right] \right\} e^{j\gamma_1 z} dV \end{aligned}$$

kde  $V$  je objem části vlnovodu omezeného souřadnicemi  $z_2$  a  $z_1$ .

Druhý člen v předešlejším výrazu upravíme podle Gaussovy věty. Potom bude

$$\begin{aligned} T_{21} &= e^{-j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} \int_s \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right) e^{j\gamma_1 z} dV + \\ &+ \int_s \left( \left[ \frac{T_{11}}{M_1} z J \right] \cdot n \right) e^{j\gamma_1 z} dS \end{aligned}$$

kde  $S$  je plocha, omezující část vlnovodu s objemem  $V$  (obsahuje část pláště a omezující boční plochy).

Na této ploše je budící proudová hustota nulová. Proto je

$$T_{21} = e^{-j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} \int_s \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right) e^{j\gamma_1 z} dV \quad \text{pro } z > z_2 \quad (\text{IV-19})$$

Stejně bychom dostali pro  $z < z_1$  výraz

$$T_{21} = e^{j\gamma_1 z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} \int_s \left( J \left[ \text{grad} \frac{T_{11}}{M_1} z \right] \right) dV \quad (\text{IV-20})$$

Vztahy (IV-19) a (IV-20) určují velikost Hertzova vektoru vidu, určeného indexem  $l$ . Známe-li velikost jednotlivých vidů, určíme Hertzův vektor z výrazu

$$H_z^m = \sum_1 T_{11} T_{21}$$

Z tohoto Hertzova vektoru určíme všechny složky intenzity elektrického a magnetického pole.

Obvyčejně bývají proudové prvky, jimiž se vybudí vlnovod, vytvořeny sondou nebo smyčkou. Proud protéká drátem a objem  $V$  je v tomto případě objemem drátu. Protože bývá tloušťka drátu nesrovnatelně menší než délka sondy nebo smyčky a rozměry vlnovodu, budeme pokládat funkce  $T_{11}$  a  $e^{\pm j\gamma_1 z}$  v oboru průřezu drátu za konstantní. Tyto funkce se budou měnit jen podél drátu.

Je-li celkový proud, protékající drátem,  $I_c$  a průřez drátu  $q$ , je proudová hustota

$$|J| = \frac{I_c}{q}$$

a směr proudu bude mít směr budicího prvku. Označíme jednotkový vektor směru budicího prvku  $l$  (směr tečny ke křivce, po které teče proud). Potom bude

$$J = \frac{I_c}{q} l \quad (IV-21)$$

Element objemu bude potom dán součinem průřezu drátu  $q$  a elementem oblouku křivky budicího prvku  $dl$ . Proto bude

$$dV = q dl$$

Dosadíme-li uvedené veličiny do rovnic (IV-19) a (IV-20), dostaneme

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} e^{-j\gamma_1 z} \int \left( l \cdot z \operatorname{grad} \frac{T_{11}}{M_1} \right) e^{j\gamma_1 z} I_c dl \quad \text{pro } z > z_2 \quad (IV-22)$$

$$T_{31} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} e^{j\gamma_1 z} \int \left( l \cdot z \operatorname{grad} \frac{T_{11}}{M_1} \right) e^{-j\gamma_1 z} I_c dl \quad \text{pro } z < z_1 \quad (IV-23)$$

kde  $\gamma_1$  je konstanta přenosu vlnovodu s vlnou vidu  $l$

$T_1$  příčná konstanta

$T_{11}$  vlastní funkce (příčných souřadnic) vlnovodu vidu  $l$

$M_1$  norma vlastní funkce

$I_c$  celkový proud protékající sondou.

Známe-li velikost  $T_{21}$ , určíme Hertzův vektor podle rovnice (IV-21) a z Hertzova vektoru všechny ostatní složky elektromagnetického pole.

#### 40. Buzení elektromagnetické vlny vidu TM v neomezeném vlnovodu

Na základě Maxwellových rovnic platí

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J}$$

Rozvedeme-li  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}$  pro složku intenzity elektrického pole ve směru  $z$  a uvážíme-li, že

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \text{dostaneme}$$

$$\Delta E_z + k^2 E_z = -\operatorname{grad}_z \frac{\rho}{\epsilon} + j\omega \mu J_z$$

Na základě rovnice kontinuity platí

$$\rho = -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \mathbf{J}$$

Proto

$$\Delta E_z + k^2 E_z = j\omega \mu J_z - \frac{1}{j\omega \epsilon} \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (IV-24)$$

Intenzita elektrického pole  $E_z$  je dána superposicí intenzit  $E_{z1}$  všech vyšších vidů. Protože platí pro každý vid, že  $E_z = I_1^2 H_z^e$ , lze vyjádřit intenzitu elektrického pole takto:

$$E_z = \sum_1 I_1^2 H_z^e = \sum_1 I_1^2 T_{11} T_{21} \quad (IV-25)$$

kde  $T_{11}$  je opět vlastní funkce průřezu vlnovodu

$T_{21}$  funkce souřadnice  $z$ , zahrnující poměrnou velikost vidu charakterisovaného obecným indexem  $l$ .

Dosadíme-li rovnici (IV-25) do rovnice (IV-24), dostaneme, obdobně jako u příčných elektrických vln,

$$\begin{aligned} -\sum_1 I_1^2 T_{11}^2 T_{31} \Delta T_{11} + \sum_1 I_1^2 T_{11} \Delta T_{21} + k^2 \sum_1 I_1^2 T_{11} T_{31} = \\ = j\omega \mu J_z - \frac{1}{j\omega \epsilon} \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \mathbf{J} \end{aligned}$$

Násobme tuto rovnici vlastní funkcí  $T_{11}$ , která vyhovuje vlnové rovnici a je vzhledem k funkci  $T_{11}$  ortogonální v oboru průřezu vlnovodu, a integrujme v oboru průřezu vlnovodu  $S$ . Integrovat člen po členu můžeme tehdy, bude-li funkční řada stejnoměrně konvergovat. V tom případě dostaneme se zřetelem na ortogonální vlastnosti funkce  $T_{11}$

$$\begin{aligned} -I_1^2 T_{11}^2 T_{31} \int S T_{11}^2 dS + I_1^2 \Delta T_{21} \int S T_{11}^2 dS + k^2 T_{11}^2 T_{31} \int S T_{21}^2 dS = \\ = \int S \left( j\omega \mu J_z - \frac{1}{j\omega \epsilon} \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \mathbf{J} \right) T_{11}^2 dS \end{aligned}$$

Po úpravě bude

$$\Delta T_{21} + (k^2 - I_1^2) T_{21} = \frac{1}{I_1^2} \int S \left( j\omega \mu J_z - \frac{1}{j\omega \epsilon} \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \mathbf{J} \right) T_{11}^2 dS \quad (IV-26)$$

Uvážíme-li, že

$$\Delta T_{21} = \frac{d^2 T_{21}}{dz^2}$$

a

$$(k^2 - I_1^2) = \gamma_l^2$$

a nahradíme-li opět pravou stranu výrazem  $\varphi(z)$ , dostaneme tuto nehomogenní diferenciální rovnici:

$$\frac{d^2 T_{21}}{dz^2} + \gamma_l^2 T_{21} = \varphi(z)$$

Tuto rovnici budeme opět řešit Lagrangeovou metodou variací konstant. Postup při řešení je stejný jako v předcházejícím případě u vln TE. Výsledek je tento:

$$T_{z1} = e^{-j\gamma z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} \int \left( j\omega \mu J_z - \frac{1}{j\omega \epsilon} \text{grad}_z \text{div} J \right) T_{11} e^{j\gamma_1 z} dV \quad \text{pro } z > z_2 \quad (\text{IV-27})$$

$$T_{z1} = e^{j\gamma z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} \int \left( j\omega \mu J_z - \frac{1}{j\omega \epsilon} \text{grad}_z \text{div} J \right) T_{11} e^{-j\gamma_1 z} dV \quad \text{pro } z < z_1 \quad (\text{IV-28})$$

Upravíme ještě integrál pravé strany rovnic (IV-27) a (IV-28). Potom bude

$$\int_V \text{grad}_z \text{div} J T_{11} e^{j\gamma_1 z} dV = \int_V (T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{grad} \text{div} J) dV$$

Protože  $(\text{grad} \mu \mathbf{v}) = \text{div} (\mu \mathbf{v}) - \mu \text{div} \mathbf{v}$ , kde  $\mu$  je libovolná skalární funkce a  $\mathbf{v}$  libovolný vektor, je v našem případě, dosadíme-li za  $\mu = \text{div} J$  a  $\mathbf{v} = T_{11} e^{j\gamma_1 z}$ :

$$\begin{aligned} \int_V (T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{grad} \text{div} J) dV &= \int_V \text{div} (\text{div} J T_{11} e^{j\gamma_1 z}) dV - \int_V \text{div} (T_{11} e^{j\gamma_1 z} \mathbf{z}) \text{div} J dV = \\ &= \int_S (\mathbf{z} n) \text{div} J T_{11} e^{j\gamma_1 z} dS - j\gamma_1 \int_V T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{div} J dV \end{aligned}$$

kde  $S$  je plocha, omezující úsek vlnovodu mezi  $z = z_1$  a  $z = z_2$ .

Na ploše  $S$  je budící proud nulový, a proto je

$$\int_V (T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{grad} \text{div} J) dV = -j\gamma_1 \int_V T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{div} J dV$$

Upravíme ještě pravou stranu předešlé rovnice

$$T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{div} J = \text{div} (J T_{11} e^{j\gamma_1 z}) - (\text{grad} T_{11} e^{j\gamma_1 z}) J$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_V (T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{grad} \text{div} J) dV &= -j\gamma_1 \int_V \text{div} (J T_{11} e^{j\gamma_1 z}) dV + \\ &+ j\gamma_1 \int_V (\text{grad} T_{11} e^{j\gamma_1 z}) J dV = -j\gamma_1 \int_S (J n) T_{11} e^{j\gamma_1 z} dS + \\ &+ j\gamma_1 \int_V (\text{grad} T_{11} e^{j\gamma_1 z}) J dV \end{aligned}$$

Protože je na povrchu budícího prostoru složka proudové hustoty ve směru normály nulová  $[(n, J) = 0]$ , dostaneme

$$\int_V (T_{11} e^{j\gamma_1 z} \text{grad} \text{div} J) dV = j\gamma_1 \int_V (\text{grad} T_{11} e^{j\gamma_1 z}) J dV$$

Se zřetelím na tyto úpravy lze vztah (IV-27) vyjádřit takto:

$$T_{z1} = e^{-j\gamma z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} \int_V \left[ j\omega \mu J_z T_{11} e^{j\gamma_1 z} - \frac{\gamma_1}{\omega \epsilon} (\text{grad} T_{11} e^{j\gamma_1 z}) J \right] dV \quad (\text{IV-29})$$

Tento vzorec platí pro  $z > z_2$ . Pro souřadnici  $z < z_1$  platí obdobný vzorec

$$T_{z1} = e^{j\gamma z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} \int_V \left[ j\omega \mu J_z T_{11} e^{-j\gamma_1 z} - \frac{\gamma_1}{\omega \epsilon} (\text{grad} T_{11} e^{-j\gamma_1 z}) J \right] dV \quad (\text{IV-30})$$

kde  $\gamma_1$  je hustota přenosu vidu s indexem 1

$\Gamma_1^2$  příčná konstanta

$M_1$  norma vidu 1 vlny TM

$V$  objem prostoru budících zdrojů

$J$  hustota budícího proudu.

Při buzení vlnovodu lineárními proudy upravíme předešlé vzorce, obdobně jako u vln TE, takto:

$$T_{z1} = e^{-j\gamma z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} \int_V I_e [j\omega \mu T_{11} e^{j\gamma_1 z} (\mathbf{z}) - \frac{\gamma_1}{\omega \epsilon} (\text{grad} T_{11} e^{j\gamma_1 z}) J] dl \quad \text{pro } z > z_2 \quad (\text{IV-31})$$

$$T_{z1} = e^{j\gamma z} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} \int_V I_e [j\omega \mu T_{11} e^{-j\gamma_1 z} (\mathbf{z}) - \frac{\gamma_1}{\omega \epsilon} (\text{grad} T_{11} e^{-j\gamma_1 z}) J] dl \quad \text{pro } z < z_1 \quad (\text{IV-32})$$

kde  $I_e$  je celkový proud

$l$  jednotkový vektor ve směru tečny křivky, po které protéká proud.

Vzorce (IV-29), (IV-30), (IV-31) a (IV-32) určují relativní velikost Hertzova vektoru vlny TM vidu označeného indexem 1. Známe-li tuto velikost, určíme Hertzův vektor z rovnice (IV-8) a na jeho základě pak všechny složky intenzity elektrického a magnetického pole.

#### 41. Buzení omezeného vlnovodu

Velmi často bývá vlnovod omezen na jedné straně dokonale vodivou stěnou (obr. 92). Elektromagnetická vlna se může potom šířit jen jedním směrem. Provedeme výpočet buzení takového vlnovodu, uvažujeme-li nejdříve vlnu TE.

Při řešení elektromagnetického pole jsme vyšli z vlnové rovnice (IV-6), kde jsme intenzitu magnetického pole vyjádřili výrazem (IV-7). Proto platí

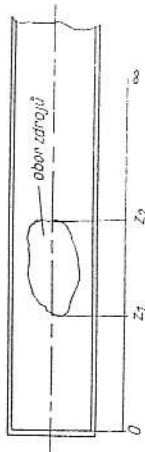
$$\Delta \sum_{\Gamma} \Gamma^2 H_z^2 + k^2 \sum_{\Gamma} \Gamma^2 H_z^2 = -\text{rot}_z J \quad (\text{IV-33})$$

To je nehomogenní vlnová rovnice. Její obecné řešení je dáno partikulárními integrály a řešením homogenní vlnové rovnice, t. j. rovnice (IV-33) bez pravé strany. V předchozím článku jsme neuvažovali řešení homogenní vlnové rovnice, neboť vlnovod byl na

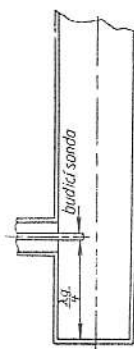
obou stranách neomezen a integrály příslušející homogenní vlnové rovnici s ohledem na okrajové podmínky nemají fyzikální opodstatnění. Partikulární integrály jsme určili v předcházejícím článku. Jsou určeny vztahy (IV-19) a (IV-20). Řešení homogenní vlnové rovnice je dáno součtem vlastních funkcí. Je tedy celkové řešení rovnice (IV-33) dáno vztahem

$$H_z = \sum I_1^2 \Pi_z^m + \sum I_2^2 C_{z1} T_{z1} e^{-\gamma_1 z} + \sum I_3^2 C_{z2} T_{z2} e^{\gamma_2 z} \quad (IV-34)$$

Při tom jsou dva poslední součty na pravé straně výsledky řešení homogenní vlnové rovnice



Obr. 92. Buzení vlnovodu, na jednom konci omezeném.



Obr. 93. Buzení vlnovodu, na jednom konci omezeném, sondou.

nice a první člen je partikulární integrál. Z identity (IV-34) vyplývá pro jednotlivé vlny

$$H_{z1}^m = T_{z1} T_{z1} e^{-\gamma_1 z} + C_{z1} T_{z1} e^{\gamma_1 z} \quad (IV-35)$$

Budícími prvky se vybudí elektromagnetická vlna, která se šíří napravo i nalevo od budících zdrojů. Vlna, která se šíří napravo, šíří se postupuje bez odrazu. Vlna, která se šíří nalevo, odráží se od stěny, omezuje vlnovod. Hertzův vektor je určen vztahem (IV-35). V tomto vztahu musí být konstanta  $C_{z1}$  nulová, neboť výraz  $T_{z1} e^{\gamma_1 z}$  by jinak se vzrůstajícím  $z$  divergoval k nekonečnu ( $\gamma_1$  je ve skutečnosti komplexní číslo s kladnou reálnou částí). Nechtějí omezuje stěna v místě  $z = 0$ . Na této stěně musí být splněna okrajová podmínka, že je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. Tečnou složkou je v našem případě příčná složka intenzity elektrického pole (kolmá k ose  $z$ ). Příčná složka intenzity elektrického pole je dána vztahem (I-34).

Proto je

$$E_t = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z$$

Hertzův vektor daného vidu (index 1) určíme z rovnice (IV-35), kde  $C_{z1} = 0$ . Potom je

$$E_t = -j\omega\mu(T_{z1} + C_{z1} e^{\gamma_1 z}) \text{rot } T_{z1} z$$

Na omezující základně musí být složka intenzity elektrického pole nulová. Musí tedy pro  $z = 0$  platit

$$E_t = 0$$

V místě o souřadnici  $z = 0$  určíme velikost  $T_{z1}$  ze vztahu (IV-20); omezující základna je nalevo od prostoru zdrojů, tedy pro  $z < z_1$ . Z okrajové podmínky vyplývá

$$T_{z1} + C_{z1} = 0$$

Z toho určíme konstantu  $C_{z1}$ :

$$C_{z1} = -T_{z1}$$

Se zřetelem na tento výsledek upravíme výraz (IV-35) takto:

$$H_{z1}^m = T_{z1} T_{z1} - T_{z1} T_{z1} e^{-\gamma_1 z} = T_{z1} (T_{z1} - T_{z1} e^{-\gamma_1 z})$$

Určíme-li elektromagnetické pole v místě napravo od zdroje, bude určena velikost  $T_{z1}$  ze vztahu (IV-19). Funkce  $T_{z1}$  je určena vztahem (IV-20) pro  $z = 0$ . Je tedy

$$T_{z1} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_1^2} \int_0^{z_1} \left( \int_0^z \text{grad } \frac{T_{z1}}{M_1} \right) e^{-\gamma_1 z} dz$$

Budíme-li na př. vlnovod lineárním proudem, protékajícím sondou kolmou k ose vlnovodu (obr. 93), umístěnou v místě  $z = z_1$ , je podle vztahu (IV-19)

$$T_{z1} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_1^2} e^{-\gamma_1 z_1} \int_0^{z_1} \left( \text{grad } \frac{T_{z1}}{M_1} \right) I_0 dz$$

a podle vztahu (IV-20)

$$T_{z1} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_1^2} e^{-\gamma_1 z_1} \int_0^{z_1} \left( \text{grad } \frac{T_{z1}}{M_1} \right) I_0 dz$$

Potom

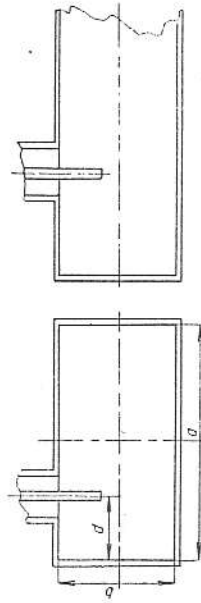
$$\begin{aligned} H_{z1}^m &= T_{z1} (T_{z1} - T_{z1} e^{-\gamma_1 z}) = \\ &= T_{z1} \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_1^2} e^{-\gamma_1 z_1} (e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_1 z_1}) \int_0^{z_1} \left( \text{grad } \frac{T_{z1}}{M_1} \right) I_0 dz = \\ &= + \frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{I_1^2} \sin \gamma_1 z_1 T_{z1} e^{-\gamma_1 z} \int_0^{z_1} \left( \text{grad } \frac{T_{z1}}{M_1} \right) I_0 dz \end{aligned} \quad (IV-36)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že optimální vybudění (největší  $H_{z1}^m$ ) bude tehdy, bude-li  $z_1 = \frac{\lambda_g}{4}$  nebo liché násobek  $\frac{\lambda_g}{4}$ , neboť potom bude

$$\sin \gamma_1 z_1 = \gamma_1 \frac{\lambda_g}{4}$$

a protože je  $\gamma_1 = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ , je  $\sin \gamma_1 z_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , což je maximální hodnota sinu.

Jako příklad výpočtu vybudění provedeme výpočet vybudění elektromagnetické vlny vidu  $TE_{10}$  v obdélníkovém vlnovodu. Vlnovod je vybuděn sondou umístěnou kolmo



Obr. 94. Příčný a podélný řez vlnovodem s budící sondou.

k širší stěně vlnovodu (obr. 94). Naším úkolem je určit optimální polohu budící sondy. Vlastní funkce vidu  $TE_{10}$  v obdélníkovém vlnovodu má tvar

$$T_{10} = \cos \frac{\pi}{a} x$$

Norma této vlastní funkce je dána vztahem

$$M = \int_S T_1^2 dS = \iint_0^a \iint_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} x dx dy = \frac{1}{2} ab$$

kde  $a, b$  jsou rozměry obdélníku.

Podle rovnice (IV-22) potom platí

$$T_{2(10)} = \frac{1}{2j\gamma_{10}} \frac{1}{I_{10}} e^{-j\gamma_{10}z} \frac{1}{M_{10}} \int (I \text{grad } T_{1(10)} \mathbf{z}) e^{j\gamma_{10}z} I_c d\mathbf{l}$$

Směr sondy má směr jednotkového vektoru  $\mathbf{y}$ , element  $d\mathbf{l} = dy$ . Protože

$$\text{grad } T_{1(10)} = -\frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \mathbf{x}$$

kde  $\mathbf{x}$  je jednotkový vektor ve směru osy  $x$ , je pak

$$\begin{aligned} T_{2(10)} &= \frac{1}{2j\gamma_{10}} \frac{1}{I_{10}} \frac{1}{M_{10}} e^{-j\gamma_{10}z} \int_{y=0}^b \int_0^a \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x I_c dy \\ &= \frac{1}{2j\gamma_{10}} \frac{1}{I_{10}} \frac{1}{M_{10}} \int_0^b I_c h_0 \sin \frac{\pi}{a} d dy \end{aligned} \quad (\text{IV-37})$$

kde  $I_c$  je celkový proud protékající sondou

$h_0$  efektivní délka sondy

$d$  určuje polohu sondy (viz obr. 94).

Známe-li amplitudu  $T_{2(10)}$ , určíme Hertzův vektor

$$\mathbf{H}_z = T_{1(10)} T_{2(10)} \mathbf{z} = -\frac{1}{2j\gamma_{10}} \frac{1}{I_{10}} \frac{1}{M_{10}} I_c h_0 \sin \frac{\pi}{a} d \sin \frac{\pi}{a} x$$

Z Hertzova vektoru určíme intenzitu elektrického pole podle vztahu

$$E_y = -j\omega\mu \text{rot } \mathbf{H}_z = -j\omega\mu T_{2(10)} \text{rot}_y T_{1(10)} \mathbf{z} = -j\omega\mu T_{2(10)} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x$$

Dosadíme-li zde podle rovnice (IV-37) za  $T_{2(10)}$  příslušný výraz, bude

$$E_y = j\omega\mu \frac{1}{2j\gamma_{10}} \frac{1}{I_{10}} \frac{1}{M_{10}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 I_c h_0 \sin \frac{\pi}{a} d \sin \frac{\pi}{a} x e^{j\gamma_{10}z}$$

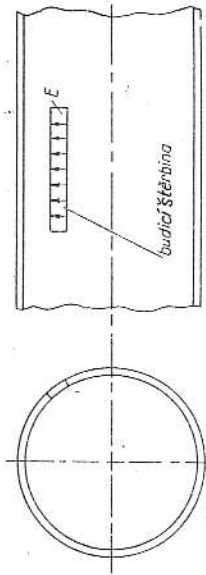
Se zřetelem k tomu, že u vidu  $T_{1(10)}$  je  $I_{10} = \frac{\pi}{a}$  a že  $M = \frac{1}{2} ab$ , zjednodušíme vztah pro  $E_y$  takto:

$$\begin{aligned} E_y &= \omega\mu \frac{1}{2\gamma_{10}} \frac{2}{ab} I_c h_0 \sin \frac{\pi}{a} d \sin \frac{\pi}{a} x e^{j\gamma_{10}z} = \\ &= \frac{\omega\mu}{\gamma_{10}} \frac{1}{ab} I_c h_0 \sin \frac{\pi}{a} d \sin \frac{\pi}{a} x e^{j\gamma_{10}z} \end{aligned}$$

Z tohoto vztahu je vidět, že se maximální intenzita elektrického pole vybudí tehdy, bude-li sonda v místě o souřadnici  $d = \frac{a}{2}$ , kdy výraz  $\sin \frac{\pi}{a} d$  nabývá maximální hodnoty.

#### 42. Buzení vlnovodu štěrbínou

Vlnovod lze také budít štěrbínou (viz obr. 95). Tvary štěrbiny mohou být různé. Nejčastěji se používá úzkých dlouhých štěrbín. Dopadne-li elektromagnetická vlna, šířící se volným prostorem, na takovou štěrbínu, vybudí se ve štěrbíně intenzita elektrického pole. Fejld dokázal, že pokládáme-li stěnu vlnovodu za nekonečně tenkou a je-li šířka štěrbiny velmi úzká vzhledem k délce štěrbiny, vybudí se ve štěrbíně elektrické pole, které má v podélném směru sinusový průběh, a tečná složka intenzity magnetického pole v rovině štěrbiny je nulová (obr. 95). Intenzita elektrického pole ve štěrbíně vybudí elektromagnetické pole ve vlnovodu.



Obr. 95. Buzení vlnovodu štěrbínou.

Buzení vlnovodu štěrbínou lze řešit buď přímo z Maxwellových rovnic použitím Greenovy věty ve vektorovém vyjádření, nebo zavedením pomocných magnetických proudů a nábojů, které přecházejí na štěrbíně v plošné magnetické náboje a proudy.

Provedeme výpočet buzení vlnovodu podle první metody. Určíme amplitudy jednotlivých vidů Hertzova vektoru a z nich můžeme určit všechny veličiny elektromagnetického pole. Této metody bychom mohli použít i při výpočtu buzení vlnovodu proudu a nábojovými zdroji.

Na základě Greenovy věty ve vektorovém vyjádření platí [viz rovnice (IX-23)]

$$\begin{aligned} \int_S ([\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}_1^*] \mathbf{n}) dS &= \int_S ([\mathbf{E}_1^* \text{rot } \mathbf{E}] \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_V (\mathbf{E} \text{rot rot } \mathbf{E}_1^*) dV - \int_V (\mathbf{E}_1^* \text{rot rot } \mathbf{E}) dV \end{aligned} \quad (\text{IV-38})$$

kde  $\mathbf{E}$  je intenzita elektrického pole vybuděná štěrbínou (je to intenzita výsledného elektrického pole ve vlnovodu)

$\mathbf{E}_1^*$  komplexně sdružená hodnota k intenzitě elektrického pole  $\mathbf{E}_1$  vidu s indexem 1.

Obě tyto intenzity elektrického pole vyhovují na základě Maxwellových rovnic rovnici

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= k^2 \mathbf{E} \\ \text{rot rot } \mathbf{E}_1^* &= k^2 \mathbf{E}_1^* \end{aligned}$$

Se zřetelem k těmto vztahům odpadnou objemové integrály na pravé straně identity (IV-38). Proto je

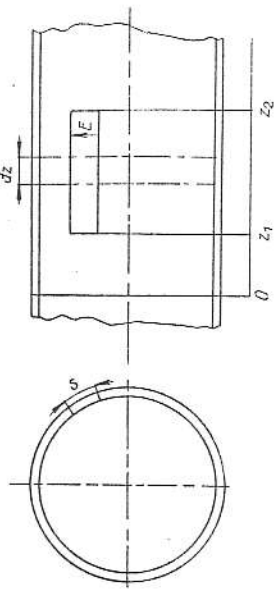
$$\int_S ([\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}_1^*] \mathbf{n}) dS = \int_S ([\mathbf{E}_1^* \text{rot } \mathbf{E}] \mathbf{n}) dS = 0$$

kde  $S$  je plocha omezuující uvažovaný objem. Zvolme v našem případě takový objem, jaký

je znázorněn na obr. 96. Je omezen dvěma průřezy vlnovodu, vzdálenými o  $dz$ , a částí pláště vlnovodu, obsahující šterbinu (obr. 96).

Označme plochy průřezů  $S_1$  a  $S_2$  a plochu příslušné části pláště  $S_p$ . Potom bude

$$\int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS + \int_{S_2} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS + \int_{S_p} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS - \int_{S_1} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS - \int_{S_2} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS - \int_{S_p} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS = 0 \quad (\text{IV-39})$$



Obr. 96. Buzení vlnovodu šterbinou (označení souřadnic).

Plochy  $S_1$  a  $S_2$  jsou vzdáleny jen o  $dz$ , a proto se budou hodnoty integrálů lišit jen o diferenciály. Bude tedy platit

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS + \int_{S_2} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS = \\ & = \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS \right\} dz - \\ & - \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS \right\} dz \quad (\text{IV-40}) \end{aligned}$$

Záporné znaménko u integrálu  $\int_{S_2} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS$ , příslušného původně označené ploše  $S_2$ , je proto, že normála k této ploše má opačný směr než normála plochy  $S_1$ .

Stejně bychom odvodili, že platí

$$\int_{S_1} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS + \int_{S_2} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{S_1} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS \right\} dz \quad (\text{IV-41})$$

Tečná složka intenzity elektrického pole vidu 1 je nulová na plášti vlnovodu i se šterbinou,<sup>1)</sup> proto je

$$\int_{S_p} ([E_1^* \text{ rot } E] n) dS = 0 \quad (\text{IV-42})$$

<sup>1)</sup> Intenzita elektrického pole  $E_1$  je zde, jak uvidíme dále, pomocná veličina. Je to intenzita elektrického pole obecného vidu 1, který vznikne ve vlnovodu, není-li v něm šterbina.

Tečná složka intenzity elektrického pole  $E$  výsledné elektromagnetické vlny je nulová na kovové části pláště, mimo šterbinu. Proto je

$$\int_{S_p} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS = \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS \quad (\text{IV-42.1})$$

kde  $S_1'$  je plocha šterbiny, příslušující délce vlnovodu  $dz$ . Upravíme-li ještě tento vztah, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{S_1'} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS &= \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dS dz = \\ &= \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] n) dz \quad (\text{IV-43}) \end{aligned}$$

neboť pro obecnou funkci  $f(z)$  platí

$$\int_{z+dz} f(z) dz = \int_z f(z) dz + f(z) dz - f(z) dz = f(z) dz$$

kde je  $s$  část obrysových křivek průřezu vlnovodu, příslušující šterbině (obr. 97).

Uvážíme-li výsledky (IV-40), (IV-41), (IV-42) a (IV-42.1) a dosadíme-li je do rovnice (IV-39), dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{S_1} ([E \text{ rot } E_1^*] z) dS \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{S_1} ([E_1^* \text{ rot } E] z) dS \right\} = - \int_s ([E \text{ rot } E_1^*] n) dz \quad (\text{IV-44})$$

kde  $z$  je jednotkový vektor ve směru normály na  $S_1$ , tedy ve směru osy vlnovodu

$n$  jednotkový vektor normály pláště

$E$  intenzita elektrického pole v místě šterbiny.

Z tohoto vztahu vyjdeme při výpočtu buzení příčné vlny elektrické i příčné vlny magnetické.

#### 42.1 Buzení příčné elektrické vlny šterbinou

V tomto případě vyjádříme intenzitu elektrického pole  $E$  a  $E_1^*$  pomocí Hertzova elektrického vektoru  $\Pi_z^m$  [viz rovnice (I-33) až (I-36)]:

$$E = -j\omega\mu \text{ rot } \Pi_z^m$$

$$\text{rot } E = -j\omega\mu H = -j\omega\mu(k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m)$$

$$E_1^* = j\omega\mu \text{ rot } \Pi_{z1}^{m*}$$

$$\text{rot } E_1^* = j\omega\mu H_1^* = j\omega\mu(k^2 \Pi_{z1}^{m*} + \text{grad div } \Pi_{z1}^{m*})$$

Hertzův vektor  $\Pi_z^m$  hledáme. Vyjádříme jej jako superpozici Hertzových vektorů všech vidů:

$$\Pi_z^m = \sum_n \Pi_{zn}^m = \sum_n T_{zn} T_{1z}$$

kde  $T_{zn}$  je funkce souřadnice  $z$ , která určuje poměrnou velikost Hertzova vektoru určitého vidu

$T_{1z}$  známá vlastní funkce vidu  $n$  průřezu vlnovodu a je funkcí jen příčných souřadnic.

Výraz pro Hertzův vektor  $\Pi_{z1}^m$  je znám:

$$\Pi_{z1}^m = e^{-\gamma_1 z} T_{z1}$$

kde  $\gamma_1$  je konstanta přenosu vřdu 1

$T_{z1}$  vlastní funkce průřezu vlnovodu vřdu 1.

Protože v našem případě je intenzita elektrického pole  $E_1^*$  vyjádřena svou komplexně sdruženou hodnotou, bude

$$\Pi_{z1}^{m*} = e^{+\gamma_1 z} T_{z1}$$

a potom

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \sum_n T_{zn} \operatorname{rot}_t (T_{zn} \mathbf{z}) = -j\omega\mu \sum_n T_{zn} [\operatorname{grad}_t T_{zn} \mathbf{z}]$$

$$\operatorname{rot}_t \mathbf{E} = -j\omega\mu \sum_n \operatorname{grad}_t \operatorname{div} \Pi_{zn}^m = -j\omega\mu \sum_n \frac{\partial T_{zn}}{\partial z} \operatorname{grad}_t T_{zn}$$

$$E_1^* = j\omega\mu \operatorname{rot}_t \Pi_{z1}^{m*} = j\omega\mu e^{+\gamma_1 z} [\operatorname{grad} T_{z1} \mathbf{z}]$$

$$\operatorname{rot}_t E_1^* = j\omega\mu (+j\gamma_1) e^{+\gamma_1 z} \operatorname{grad}_t T_{z1}$$

Rotaci lze aplikovat na funkční řadu  $\sum_n T_{zn} \mathbf{z}$  jen tehdy, konverguje-li tato řada rovnoměrně. Upravíme ještě vztah (IV-44). Provedeme-li skalární součin pod integrálem, zjednodušíme vztah (IV-44) takto:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{S_1} E_t \operatorname{rot}_t E_1^* dS - \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_1} E_1^* \operatorname{rot}_t E dS = - \int_{S_1} ([E \operatorname{rot} E_1^*] \mathbf{n}) ds$$

Dosaíme za intenzity elektrického pole odvozené výrazy. Potom bude.

$$\begin{aligned} & -j\omega\mu (+j\gamma_1) \sum_n \left[ \frac{\partial}{\partial z} (T_{zn} e^{+\gamma_1 z}) \int_{S_1} (\operatorname{grad}_t T_{zn} \operatorname{grad}_t T_{zn}) dS \right] + \\ & + j\omega\mu \sum_n \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_{zn}}{\partial z} e^{+\gamma_1 z} \right) \int_{S_1} (\operatorname{grad}_t T_{zn} \operatorname{grad}_t T_{zn}) dS \right] = \int_{S_1} ([E H_1^*] \mathbf{n}) ds \end{aligned} \quad (IV-45)$$

kde je  $+j\omega\mu H_1^* = \operatorname{rot} E_1^*$ .

Plošný integrál  $\sum_n \int_{S_1} (\operatorname{grad}_t T_{zn} \operatorname{grad}_t T_{zn}) dS$  upravíme podle Greenovy věty

$$\sum_n \left\{ \int_{S_1} (\operatorname{grad}_t T_{zn} \operatorname{grad}_t T_{zn}) dS \right\} = I_{zn}^2 \int_{S_1} T_{zn} T_{zn} dS = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq 1 \\ I_{1z}^2 M_1, & \text{pro } n = 1 \end{cases}$$

kde  $M_1$  je norma vlastních funkcí  $T_{1n}$  a  $T_{11}$  (viz ortogonální vlastnosti funkcí  $T_{1n}$ ). Provedeme-li ještě derivaci podélných funkcí  $T_{zn}$  a  $e^{+\gamma_1 z}$  podle souřadnice  $z$ , zjednodušíme vztah (IV-45) takto:

$$\frac{d^2 T_{z1}}{dz^2} + \gamma_1^2 T_{z1} = \frac{1}{j\omega\mu M_1 I_{1z}^2} \int_{S_1} \frac{1}{e^{-\gamma_1 z}} ([H_1^* E] \mathbf{n}) ds \quad (IV-45.1)$$

Pravá strana této diferenciální rovnice je funkcí souřadnice  $z$ . Proto si pro zjednodušení označíme pravou stranu funkcí  $\varphi(z)$ . Potom musíme vyřešit nehomogenní diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 T_{z1}}{dz^2} + \gamma_1^2 T_{z1} = \varphi(z)$$

Kvadraturu této diferenciální rovnice budeme hledat pomocí Lagrangeovy metody variací konstant. Budeme postupovat stejně jako při buzení vlnovodu proudovými a nábojovými zdroji (viz čl. 45). Výsledek je

$$T_{z1} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_{1z}^2} e^{-\gamma_1 z} \frac{1}{M_1} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{j\omega\mu} \int_{S_1} \frac{1}{e^{-\gamma_1 z}} ([H_1^* E] \mathbf{n}) e^{+\gamma_1 z} ds dz \quad \text{pro } z > z_2$$

Při tom jsou  $z_1$  a  $z_2$  souřadnice omezuující štěrbinu v podélném směru a

$$H_1^* = k^2 \Pi_{z1}^{m*} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_{z1}^{m*} = k^2 T_{z1} e^{+\gamma_1 z} \mathbf{z} + j\gamma_1 \operatorname{grad} (T_{z1} e^{+\gamma_1 z} \mathbf{z})$$

Dvojitý integrál s uvedenými mezemi je vlastně plošný integrál přes plochu štěrbiny. Proto

$$\begin{aligned} T_{z1} &= \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_{1z}^2} \frac{1}{M_1} e^{-\gamma_1 z} \int_{S_1} \left\{ j\omega\epsilon (\mathbf{E} \mathbf{t}) T_{z1} e^{+\gamma_1 z} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{j\omega\mu} ((\mathbf{n} \operatorname{grad} \operatorname{div} (T_{z1} e^{+\gamma_1 z} \mathbf{z})) [\mathbf{E}]) \right\} dS \quad \text{pro } z > z_2 \end{aligned} \quad (IV-46)$$

Obdobně bychom dostali

$$\begin{aligned} T_{z1} &= \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{I_{1z}^2} \frac{1}{M_1} e^{+\gamma_1 z} \int_{S_2} \left\{ j\omega\epsilon (\mathbf{E} \mathbf{t}) T_{z1} e^{-\gamma_1 z} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{j\omega\mu} ((\mathbf{n} \operatorname{grad} \operatorname{div} (T_{z1} e^{-\gamma_1 z} \mathbf{z})) [\mathbf{E}]) \right\} dS \quad \text{pro } z < z_1 \end{aligned} \quad (IV-47)$$

kde  $\mathbf{t}$  je jednotkový vektor kolmý na vektor normály  $\mathbf{n}$  a na směr šíření  $\mathbf{z}$  ( $\mathbf{t} = [\mathbf{n} \mathbf{z}]$ )

$E$  intenzita elektrického pole v místě štěrbiny

$T_{z1}$  vlastní funkce vřny TE vřdu 1

$M_1$  norma této vlastní funkce.

Známe-li amplitudu Hertzova vektoru jednotlivých vřdů, určíme Hertzův vektor buzeného pole ve vlnovodu jako superpozici všech vřdů:

$$\Pi_{zn}^m = \sum_n T_{zn} T_{1n}$$

Z tohoto Hertzova vektoru určíme složky intenzity elektrického pole a magnetického pole podle (I-34) a (I-36).

#### 42.2 Buzení příčné magnetické vřny štěrbinou

V tomto případě vyjdeme opět z rovnice (IV-44). Intenzity elektrického pole  $E$  a  $E_1^*$  budou příslušet magnetickým vřnám. Postup při výpočtu bude zcela stejný jako u příčných vřn elektrických. Dospějeme opět k diferenciální rovnici pro amplitudu určitého vřdu  $T_{z1}$ . Tato rovnice se bude lišit od rovnice (IV-45.1) jen pravou stranou

$$\frac{d^2 T_{z1}}{dz^2} + \gamma_1^2 T_{z1} = \frac{1}{M_1} \frac{1}{I_{1z}^2} \int_{S_1} \frac{1}{j\gamma_1} \{ [\mathbf{E} \operatorname{rot}_t (T_{z1} e^{+\gamma_1 z} \mathbf{z})] \mathbf{n} \} ds \quad \text{pro } z > z_2$$

Tuto diferenciální rovnici budeme opět řešit Lagrangeovou metodou variací konstant.

Dostaneme tento výsledek:

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} M_1 e^{-j\gamma_1 z} \int_{s_2} \{[\mathbf{E} \operatorname{rot}_t (T_1 e^{j\gamma_1 z})] \mathbf{n}\} dS \quad \text{pro } z > z_2$$

Upravíme ještě výraz pod integrálem

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}[\operatorname{rot}_t (T_1 e^{j\gamma_1 z}) \mathbf{n}]) &= (\mathbf{E}[\operatorname{grad}_t (T_1 e^{j\gamma_1 z}) \mathbf{z}] \mathbf{n}) = \\ &= -(\mathbf{E}[\operatorname{grad}_t (T_1 e^{j\gamma_1 z})(\mathbf{n}\mathbf{z}) - \mathbf{z} \operatorname{grad}_t (T_1 e^{j\gamma_1 z}) \mathbf{n}]) = \\ &= z \frac{\partial}{\partial n} (T_1 e^{j\gamma_1 z}) \end{aligned}$$

neboť  $(\mathbf{n}\mathbf{z}) = 0$  ( $\mathbf{n} \perp \mathbf{z}$ ) a  $(\operatorname{grad}_t (T_1 e^{j\gamma_1 z}) \mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial n} (T_1 e^{j\gamma_1 z})$ . Proto je

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{1}{M_1} e^{-j\gamma_1 z} \int_{s_2} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial n} (T_1 e^{j\gamma_1 z}) dS \quad \text{pro } z > z_2 \quad (\text{IV-48})$$

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_1} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{M_1} e^{j\gamma_1 z} \int_{s_2} \mathbf{E}_z \frac{\partial}{\partial n} (T_1 e^{-j\gamma_1 z}) dS \quad \text{pro } z < z_1 \quad (\text{IV-49})$$

kde jsou  $z_1, z_2$  souřadnice omezuující v podélném směru šterbinu

$\mathbf{E}$  intenzita elektrického pole v místě šterbinu

$T_{11}$  vlastní funkce vlny TM vlny I

$M_1$  norma vlastní funkce  $T_{11}$

Známe-li amplitudu Hertzova vektoru jednotlivých vidů elektromagnetické vlny, určíme Hertzův vektor vybuzevané vlny jako superpozici všech vidů

$$\Pi_z = \sum_{1} T_{21} T_{11}$$

Z tohoto výrazu určíme potom složky intenzity elektrického a magnetického pole podle rovnic (I-33) a (I-34):

Podle vzorců (IV-41), (IV-47), (IV-48) a (IV-49) určíme velikost vybuzevané vlny ve vlnovodu a optimální polohu budících prvků. Podle těchto vzorců budeme určovat v kap. V vlastnosti clon a šterbin ve vlnovodu.

#### 43. Buzení dutinových resonátorů

Dutinové resonátory budíme stejně jako vlnovody. Obvykle se provádí buzení sondou, smýčkou nebo šterbinou. Při obecném časovém průběhu vysokofrekvenčních prvků vzniknou v dutině theoreticky všechny vidy. Naším úkolem bude určit velikosti intenzity elektrického a magnetického pole jednotlivých vidů při buzení proudovým elementem a šterbinou.

##### 43.1 Orthogonální vlastnosti vlastních funkcí dutinových resonátorů

Řešením Maxwellových rovnic pro elektromagnetické pole v dutinovém resonátoru bez zdrojů dostaneme pro intenzitu elektrického pole známou rovnici

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = k_m^2 \mathbf{E}$$

s okrajovou podmínkou, že na povrchu dutiny je tečná složka intenzity elektrického pole nulová, tedy  $[\mathbf{E}\mathbf{n}] = 0$ .

K důkazu orthogonálnosti použijeme Greenovy věty ve vektorovém vyjádření (IX-23). Při určování elektromagnetického pole v dutinovém resonátoru jsme zjistili, že v dutinovém resonátoru může existovat diskrétní řada vlastních elektromagnetických polí, kterým odpovídají určité vlastní funkce. Těmito vlastním funkcím jsmé přiřadili tři indexy  $m, n, p$ , charakterizující druh elektromagnetické vlny. Označme intenzitu elektrického pole jednoho vlastního řešení elektromagnetického pole v dutině  $\mathbf{E}_m$ , kde index  $n$  představuje jednu kombinaci indexů  $m, n, p$ ; intenzitu elektrického pole druhého takového řešení označme  $\mathbf{E}_m$ . Oba vektory,  $\mathbf{E}_n$  i  $\mathbf{E}_m$ , vyhovují diferenciálním vztahům

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = k_m^2 \mathbf{E}_m \quad (\text{IV-50})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n = k_n^2 \mathbf{E}_n \quad (\text{IV-51})$$

kde  $k_m$  a  $k_n$  jsou vlastní vlnová čísla, udávající vlastní délky vlny dutiny. Při tom pokládáme intenzity elektrického a magnetického pole za časově harmonicky proměnné veličiny. Proto vektorové funkce  $\mathbf{E}_n$  a  $\mathbf{E}_m$  představují amplitudy intenzity elektrického pole a jsou to obecně komplexní čísla.

Dosadíme ve vztahu (I-23) za  $\mathbf{Q}$  vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}_m$  a za  $\mathbf{P}$  komplexně sdruženou hodnotu vektoru intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}_n^*$ . Potom dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{E}_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n^*) dV - \int_V ([\mathbf{E}_n^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_m]) dV = \\ = \int_V ([\mathbf{E}_n^* \operatorname{rot} \mathbf{E}_m]) dS - \int_S ([\mathbf{E}_m \operatorname{rot} \mathbf{E}_n^*]) n dS \end{aligned}$$

Protože o  $\mathbf{E}_n$  i o  $\mathbf{E}_m$  platí, že jejich tečné složky na ploše  $S$ , omezující dutinu, jsou nulové, tedy že  $[\mathbf{n}\mathbf{E}_n]$  i  $[\mathbf{n}\mathbf{E}_m]$  jsou na ploše  $S$  nulové, bude levá strana předcházející identity nulová. Potom, použijeme-li vztahů (IV-50) a (IV-51), dostaneme

$$(k_m^2 - k_n^2) \int_V (\mathbf{E}_n^* \mathbf{E}_m) dV = 0$$

Z toho plyne, že pro  $n \neq m$  platí<sup>2)</sup>

$$\int_V (\mathbf{E}_n^* \mathbf{E}_m) dV = 0 \quad (\text{IV-52})$$

Vztahem (IV-52) jsou charakterisovány orthogonální vlastnosti vektorů  $\mathbf{E}_n$  a  $\mathbf{E}_m$ . Pro  $n = m$  platí

$$\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^*) dV = M_m$$

kde  $M_m$  je norma vlastní funkce  $\mathbf{E}_n$ .

Stejně bychom odvodili orthogonální vlastnosti pro funkce určující intenzitu magnetického pole:

$$\int_V (\mathbf{H}_n^* \mathbf{H}_m) dV = 0$$

a

$$\int_V (\mathbf{H}_n \mathbf{H}_n^*) dV = M_m$$

kde  $M_m$  je norma vlastní funkce  $\mathbf{H}_n$ .

<sup>2)</sup> Tento vztah neplatí pro degenerované vidy. V dalších úvahách degenerované vidy vylučujeme.

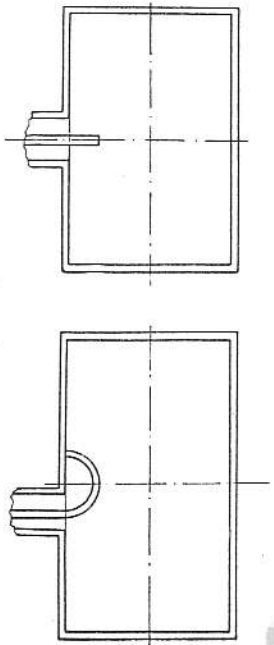


Norma vlastní funkce  $E_n$ , jak vyplývá z příslušného výrazu, je úměrná střední hodnotě energie elektromagnetického pole vidu  $n$  v dutině:

$$M_n = \frac{2}{\varepsilon} W_n$$

kde  $W_n$  je energie elektrického pole vidu  $n$  v dutině, neboť

$$W_n = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V (\mathbf{E}_n^*)^2 dV$$



Obr. 98. Buzení vlnovodu smyčkou.

Stejně platí o normě vlastní funkce magnetického pole

$$M_n = \frac{2}{\mu} W_n$$

neboť v dutině platí, že energie elektrického a magnetického pole je stejná. Tedy také

$$W_n = \frac{1}{2} \mu \int_V (\mathbf{H}_n^*)^2 dV$$

#### 43.2 Buzení dutinového rezonátoru proudovým prvkem

Budeme uvažovat buzení takovým proudovým a nábojovým prvkem, jehož proudy a náboje jsou obecně časově proměnné (obr. 98). Při obecném časovém průběhu veličin elektromagnetického pole mají Maxwellovy rovnice tento tvar:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho$$

Vyloučíme-li intenzitu elektrického pole z uvedených rovnic, dostaneme pro ni tento vztah:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (IV-53)$$

Dosadíme v rovnici (IX-22) za vektor  $\mathbf{P}$  vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a za vektor  $\mathbf{Q}$  vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}_n$  vidu  $n$

$$\int_V (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}_n^*) dV - \int_V (\mathbf{E}_n^* \text{ rot rot } \mathbf{E}) dV = \int_S ([\mathbf{E}_n^* \text{ rot } \mathbf{E}] \mathbf{n}) dS$$

kde  $V$  je objem dutiny

$S$  plocha uzavírající dutinu

$\mathbf{n}$  jednotkový vektor normální na plochu  $S$ .

Dosadíme za  $\text{rot rot } \mathbf{E}$  příslušný výraz z rovnice (IV-53) a za  $\text{rot } \mathbf{E}$  příslušný výraz z Maxwellovy rovnice; potom bude

$$\begin{aligned} & \int_V (\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}_n) dV + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V (\mathbf{E} \mathbf{E}_n) dV + \\ & + \mu \int_V \left( \mathbf{E}_n \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) dV = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_S ([\mathbf{E}_n \mathbf{H}] \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (IV-54)$$

Při tom je třeba uvážit, že vlastní vektorová funkce  $\mathbf{E}_n$  je časově nezávislá.

Uvedli jsme již v části pojednávající o dutinových rezonátorech, že v dutinovém rezonátoru vznikají stojaté vlny elektrického a magnetického pole. Časové a prostorové uspořádání intenzity elektrického a magnetického pole, vzniknou-li stojaté vlny těchto veličin, je dáno, jak víme na př. z teorie kmitání struny, součinem dvou funkcí: funkce prostorového uspořádání a funkce časového uspořádání. Vyjádříme tedy uspořádání intenzity elektrického pole obecného vidu  $m$  takto:

$$\mathbf{E}_m(P, t) = \mathbf{E}_m(P) q_m(t)$$

kde  $P$  je obecný bod v dutině  
 $t$  čas

$\mathbf{E}_m(P)$  vlastní vektorová funkce intenzity elektrického pole vidu  $m$  v bodě  $P$   
 $q_m(t)$  časová funkce intenzity elektrického pole.

Hledanou funkci intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetického pole  $\mathbf{H}$  vyjádříme jako superpozici všech vidů

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_m \mathbf{E}_m q_m(t) \\ \mathbf{H} &= \sum_m \mathbf{H}_m q_m(t) \end{aligned} \quad (IV-55)$$

Předpokládejme, že tyto funkční řady stejnoměrně konvergují. V tom případě lze integrovat i derivovat člen po členu. Dosadíme tuto řadu do rovnice (IV-54):

$$\begin{aligned} & \sum_m q_m \int_V (\text{rot } \mathbf{E}_m \text{ rot } \mathbf{E}_n) dV + \mu \varepsilon \sum_m \frac{\partial^2 q_m}{\partial t^2} \int_V (\mathbf{E}_m \mathbf{E}_n) dV + \\ & + \mu \int_V \left( \mathbf{E}_n \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) dV = -\mu \sum_m \frac{dq_m}{dt} \int_S ([\mathbf{E}_n \mathbf{H}_m] \mathbf{n}) dS \end{aligned}$$

Vlastní funkce  $\mathbf{E}_m$  jsou v oboru objemu dutiny ortogonální. Rovněž jsou ortogonální

vektorové funkce  $\text{rot } \mathbf{E}_m$ , neboť  $\text{rot } \mathbf{E}_m = -j\omega\mu\mathbf{H}_m$ , a vektorové funkce  $\mathbf{H}_m$  jsou také ortogonální. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^2q_n}{dt^2} + \sum_m \frac{dq_m}{dt} \frac{1}{\varepsilon} \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m) dV + \frac{1}{\mu\varepsilon} \int_V (\text{rot } \mathbf{E}_n, \text{rot } \mathbf{E}_m) dV &= \\ = -\frac{\int_V \left( \mathbf{E}_n, \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) dV}{\varepsilon \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV} & \quad (\text{IV-56}) \end{aligned}$$

V druhém členu této diferenciální rovnice zůstává součet, neboť ortogonální vlastnosti vektorových funkcí  $\mathbf{E}_m$  a  $\mathbf{H}_m$  jsou definovány objemovým integrálem, nikoli plošným. Pro různé hodnoty  $n$  dostaneme soustavu diferenciálních rovnic typu (IV-56) pro časové funkce  $q_n$ . Převládá-li však u budícího proudu harmonická, jejíž kmitočet je blízký vlastnímu kmitočtu rezonátoru s vinou určitého vidu, nastane resonance amplitudy tohoto vidu. Amplitudy ostatních vidů budou potom zanedbatelně malé. V tomto případě, zanedbáme-li u diferenciální rovnice (IV-56) v druhém členu na levé straně všechny vyšší vidy, zjednoduší se rovnice (IV-56) takto:

$$\begin{aligned} \frac{d^2q_n}{dt^2} + \frac{dq_n}{dt} \frac{1}{\varepsilon} \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV + \frac{1}{\mu\varepsilon} \int_V (\text{rot } \mathbf{E}_n, \text{rot } \mathbf{E}_n) dV &= \\ = -\frac{\int_V \left( \mathbf{E}_n, \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) dV}{\varepsilon \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV} & \end{aligned}$$

Označme dále pro jednoduchost

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{E}_n, \text{rot } \mathbf{E}_n) dV}{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV} \\ b &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n) \mathbf{n} dS}{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV} \end{aligned}$$

kde  $\omega_n$  je vlastní kmitočet vidu  $n$  [viz výraz (III-9)]  
 $b$  konstanta útlumu.

Potom bude

$$\frac{d^2q_n}{dt^2} + b \frac{dq_n}{dt} + \omega_n^2 q_n = -\frac{\int_V \left( \mathbf{E}_n, \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) dV}{\varepsilon \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV} \quad (\text{IV-57})$$

kde  $J$  je hustota budícího proudu

$\mathbf{E}_n$  vlastní vektorová funkce intenzity elektrického pole.

Bude-li však při jednom kmitočtu resonovat několik vidů současně, vzniknou t. zv. degenerované kmity (viz obr. 59). V tomto případě nelze z jedné diferenciální rovnice určit amplitudu požadovaného vidu. Musíme řešit tolik diferenciálních rovnic, kolik vidů resonuje současně na jednom kmitočtu. Těmito případy se nebudeme zabývat, neboť jsou v praxi nežádoucí a snažíme se jich vyvarovat. Úvedli jsme již v čl. 34.1, že u degenerovaných kmitů se velmi zmenší číselní jakosti. Je to vidět v rovnici (IV-54) u druhého členu, kde ekvivalentní výraz pro útlum je nesrovnatelně větší, než je u jednoho vidu, neboť v čitateli je součet.

Rovnice (IV-57) je nehomogenní diferenciální rovnice a řešíme ji methodou variací konstant. Má-li hustota budícího proudu harmonický průběh, je

$$J = J_0 e^{j\omega t}$$

kde  $\omega$  je úhlový kmitočet proudu.

Potom bude mít i  $q$  harmonický průběh se stejným kmitočtem

$$q_n(t) = q_n e^{j\omega t}$$

a diferenciální rovnici (IV-54) zjednodušíme takto:

$$(-\omega^2 q_n + j\omega b q_n + q_n \omega_n^2) = -\frac{j\omega}{\varepsilon} \frac{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{J}_m) dV}{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV}$$

Odtud plyne pro amplitudu  $q_n$  výraz

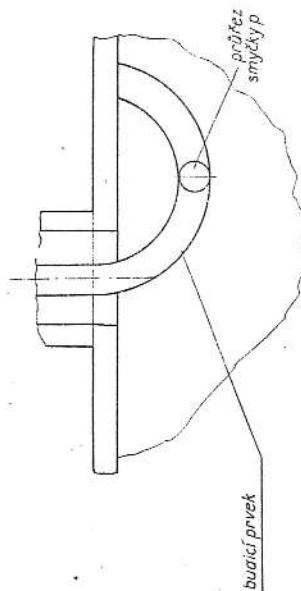
$$q_n = -\frac{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{J}_m) dV}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega b} \frac{1}{\varepsilon \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV}$$

Budíme-li rezonátor proudem stejného kmitočtu, jako je vlastní kmitočet dutiny  $\omega_n$ , dostaneme další zjednodušení

$$q_n = -\frac{1}{b} \frac{\int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{J}_m) dV}{\varepsilon \int_V (\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) dV} \quad (\text{IV-58})$$

Podle tohoto vztahu určíme velikost intenzity elektrického pole vidu  $E_n$ , budíme-li rezonátor proudem stejného kmitočtu, jako je vlastní kmitočet dutiny vidu, definovaného indexem  $n$ . Vzorec (IV-58) platí i u vlnodovových dutinových rezonátorů pro příčné vlny elektrické i pro příčné vlny magnetické.

Budí-li se rezonátor proudem obecného časového průběhu, určíme velikost  $q$  podle vzrahu (IV-56). Obvykle nás však zajímá i při takovém obecném časovém proudovém vybuzení jen ta harmonická, která přísluší vlastnímu kmitočtu dutiny. V tomto případě rozložíme časovou funkci, určující budící proud, v harmonické, z nichž použijeme jen té, která je shodná s vlastním kmitočtem dutiny. Její velikost určíme potom podle vzorce (IV-58), kde  $\mathcal{J}_m$  představuje požadovanou harmonickou hustotu budícího proudu.



Obr. 99. Uspořádání budící smyčky.

Ve vzorci (IV-58) jde o vybuzení dutinového rezonátoru obecným proudovým uspořádáním. Bude-li dutinový rezonátor vybuzen lineárními proudy, soustředěnými v sondě nebo ve smyčce, přejde objem  $V$  v objem drátěné sondy nebo smyčky, to znamená, že přejde ve válec konstantního průřezu  $p$ . Potom bude

$$dV = p \, dl$$

kde  $dl$  je element délky sondy nebo smyčky (viz obr. 99). Označíme celkový proud protékající budícím prvkem  $I_c$ . Potom bude

$$I_c = pJ$$

kde  $p$  je průřez drátu

$J$  proudová hustota.

Z toho

$$J = \frac{I_c}{p}$$

Dosadíme-li uvedené vztahy do rovnice (IV-58) a pokládáme-li proud  $I_c$  za konstantní v budícím prvku, dostaneme

$$q_n = -\frac{1}{b} \frac{\int_l (\mathbf{E}_n) \, dl}{\varepsilon \int_v (\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n) \, dV} I_c \quad (IV-59)$$

kde  $l$  je jednotkový vektor ve směru tečny budícího prvku.

Činitel útlumu je zde dán vztahem

$$b = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\int_v ((\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n) \, n) \, dS}{\int_v (\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n) \, dV} = -\frac{P_s}{W}$$

kde  $P_s$  je ztrátový výkon elektromagnetické vlny vidu  $n$  ve stěnách rezonátoru  $W$  celková energie elektromagnetické vlny vidu  $n$ .

Integrál  $\int_l (\mathbf{E}_n) \, dl$  je křivkový integrál přes křivku  $l$  danou geometrickým uspořádáním budícího prvku (sondy, smyčky) a  $I_c$  je střední proud v budícím prvku.

Známe-li velikost  $q_n$ , určíme intenzitu elektrického pole podle rovnice (IV-55). Na základě vzorce (IV-59) lze určit tyto závěry:

1. Je-li směr sondy, udaný jednotkovým vektorem  $l$ , libovolný, vybudí se všechny vidy.
2. Chceme-li vybudit jen zadaný vid  $s$  maximální možnou amplitudou, udaný indexem  $n$ , musíme umístit sondu do místa maximální hodnoty  $\mathbf{E}_s$ ; směr jednotkového vektoru musí být rovnoběžný se směrem intenzity  $\mathbf{E}_s$ , kterou chceme vybudit.

Je-li dutinový rezonátor buzen smyčkou, je amplituda příslušného vidu také dána vzorcem (IV-59). Je-li tvar smyčky takový, že ji lze pokládat téměř za uzavřenou (viz obr. 100), upravíme křivkový integrál vzorce (IV-59) podle Stokesovy věty takto:

$$\oint_l (\mathbf{E}_n) \, dl = \int_s (\text{rot } \mathbf{E}_n) \, dS$$

kde  $S$  je plocha smyčky.

Protože podle Maxwellovy rovnice je

$$\text{rot } \mathbf{E}_n = -j\omega\mu\mathbf{H}_n$$

je pak

$$\oint_l (\mathbf{E}_n) \, dl = -j\omega\mu \int_s (\mathbf{H}_n) \, dS$$

Potom

$$q_n = -\frac{j\omega\mu \int_s (\mathbf{H}_n) \, dS}{\varepsilon \int_v (\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n) \, dV} \frac{1}{b} I_c \quad (IV-60)$$

kde  $S$  je plocha budící smyčky

$\mathbf{H}_n$  vlastní vektorová funkce intenzity magnetického pole v místě smyčky

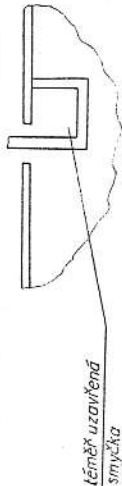
$I_c$  celkový proud, protékající budící smyčkou.

Z tohoto vzorce vyplývá, že se budí v dutinovém rezonátoru všechny vidy, pokud  $\int_s (\mathbf{H}_n^* \, dS) \neq 0$ .

Aby byla velikost  $q_n$  pro daný vid maximální, je třeba smyčku umístit v místě maximální hodnoty intenzity magnetického pole a rovina smyčky musí být kolmá ke směru intenzity magnetického pole vidu, který chceme vybudit.

#### 43.3 Buzení dutinového rezonátoru šterbinou

Velmi často bývá dutinový rezonátor buzen šterbinou (obr. 101). Intenzita elektrického pole v místě šterbiny vybudí elektromagnetické pole v dutině. Buzení dutinového rezonátoru šterbinou použijeme všude tam, kde chceme uskutečnit malou vazbu mezi dutinou a budícím zdrojem. Mimo to se nepoužívá na velmi krátkých vlnách, od 3 cm níže, jako napájecího vedení sousošých vodičů, nýbrž vlnovodů a vazbu mezi vlnovodem a dutinou uskutečňuje v tomto případě nejnásazně šterbinou.



Obr. 100. Uspořádání budící smyčky (téměř uzavřená).

Budeme předpokládat, že intenzita elektrického pole ve štěrbíně se mění s časem harmonicky. Potom, nebudou-li uvnitř dutiny žádné proudové a nábojové zdroje, vyplýne z Maxwellových rovnic pro intenzitu elektrického pole vztah

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} \quad (\text{IV-61})$$

Při odvození amplitud intenzity elektrického pole jednotlivých vidů použijeme opět vztahu (IX-22), kde za vektor  $\mathbf{Q}$  dosadíme vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a za vektor  $\mathbf{P}$  vektor  $\mathbf{E}_0$ , který přísluší indexu  $n$ . Potom dostaneme

$$\int_V (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n) dV = - \int_V (\mathbf{E}_n \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n) dV = \int_V ([(\mathbf{E}_n \operatorname{rot} \mathbf{E}_n) \mathbf{n}] dS) \quad (\text{IV-62})$$

Obr. 101. Štěrbínová vazba vlnovodu na rezonátor.

kde  $V$  je objem dutiny

$S$  — plocha omezuující dutinu.

Kdyby byly stěny dutinového rezonátoru dokonale vodivé, byla by tečná složka intenzity elektrického pole ve stěnách nulová. V našem případě budeme uvažovat konečnou vodivost stěn. Plocha  $S$  zahrnuje také štěrbínu, kterou budeme vlnovod. Označme plochu štěrbiny  $S_1$  a intenzitu elektrického pole na této ploše  $\mathbf{E}$ . Intenzitu elektrického pole vyjádříme jako superpozici intenzit elektrického pole všech vidů:

$$\mathbf{E} = \sum_m \mathbf{E}_{0m} q_m$$

kde  $q_m$  je amplituda vidu s indexem  $m$ .

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (IV-62), pak se zřetelem na ortogonální vlastnosti funkcí  $\mathbf{E}_n$  a na rovnici (IV-61), neuvažujeme-li degenerované kmity, dostaneme

$$q_n \int_V (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n) dV = k_n^2 q_n \int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV = j\omega \mu q_n \int_{S_1} ([(\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{n}] dS) + j\omega \mu \int_{S_2} ([(\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{n}] dS)$$

kde  $S_1$  je plocha štěrbiny

$\mathbf{E}$  — intenzita elektrického pole v místě štěrbiny (harmonického průběhu)

$S_2$  — plocha pláště rezonátoru bez plochy štěrbiny

$k_n$  — vlastní vlnové číslo vidu  $n$ .

Při tom jsme opět zanedbali v plošném integrálu vyšší vidy, neboť jsou zanedbatelné malé proti vidu, který má stejný kmitočt jako kmitočt intenzity elektrického pole ve štěrbíně.

Dělíme-li předcházející rovnici výrazem  $\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV$ , dostaneme

$$q_n \left( \frac{\int_V (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n) dV}{\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV} - k_n^2 + j\omega \mu \frac{\int_{S_1} ([(\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{n}] dS)}{\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV} \right) = -j\omega \mu \frac{\int_{S_2} ([(\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{n}] dS)}{\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV}$$

Protože můžeme podle rovnice (III-9) vyjádřit vlastní vlnové číslo vztahem

$$k_n^2 = \frac{\int_V (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n) dV}{\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV}$$

zjednodušíme vztah pro amplitudu  $q_n$  a dostaneme

$$q_n = \frac{1}{b} \frac{\int_{S_1} ([(\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{n}] dS)}{\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV} \quad (\text{IV-63})$$

kde

$$b = \frac{\int_{S_1} ([(\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{n}] dS)}{\int_V (\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n) dV}$$

kde  $S$  je plocha omezuující dutinu

$S_1$  — plocha štěrbiny.

Vzorcem (IV-63) je určena amplituda  $q_n$  vidu s indexem  $n$ , vybuzeného intenzitou elektrického pole  $\mathbf{E}$  ve štěrbíně. Ze vzorce vyplývá, že maximální vybuzení nastane tehdy, bude-li intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}$  ležet v rovině štěrbiny (kolmo ke směru normály  $\mathbf{n}$ ).

#### PŘÍKLADY

*Příklad 1.* Obdélníkový vlnovod je buzen smyčkou umístěnou v širší stěně vlnovodu. Určete optimální polohu smyčky, má-li se vybudit vid  $TE_{10}$ , a dokažte, že amplitudy vyšších vidů konvergují se vzrůstajícím videm.

*Příklad 2.* Kruhový vlnovod s videm  $TE_{11}$  je vybuzen sondou. Určete optimální polohu sondy.

## V. NESPOJITOSTI VE VLNOVODECH

V této kapitole se budeme zabývat nespojitostmi ve vlnovodech. Nespojitost vlnovodu může být způsobena porušením pravidelnosti vnitřního prostoru vlnovodu nebo porušením pravidelnosti stěn, omezujících vlnovod. Pravidelnost vnitřního prostoru porušíme na př. tím, že vložíme do vlnovodu budící nebo přízpůsobovací prvek, změníme průřez vlnovodu, anebo zahňeme či zkroutíme vlnovod. Pravidelnost stěn porušíme tím, že provedeme ve stěně vlnovodu štěrbinu, vazební otvory atd.

Provedeme podrobnější kvalitativní rozbor clon, skokové změny průřezu vlnovodu a vlivu štěrbin ve vlnovodu.

### 44. Orthogonální vlastnosti příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole

V kap. II jsme vyjádřili všechny složky intenzity elektrického a magnetického pole pomocí Hertzova vektoru a v kap. IV jsme dokázali ortogonálnost Hertzova vektoru v oboru průřezu vlnovodu. Dokážeme, že i příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole  $E_t$  a  $H_t$  jsou v oboru průřezu vlnovodu ortogonální.

Hertzův magnetický i elektrický vektor jsme vyjádřili jako součin příčné funkce  $T_{11}$  a podélné funkce  $T_{21}$ , kde  $l$  je index označující vid. Při tom jsme dokázali, že příčná funkce  $T_{11}$  vyhovuje vlnové rovnici

$$\Delta T_{11} + T_{11}^2 T_{11} = 0$$

a okrajovým podmínkám, že na obvodu průřezu vlnovodu je u příčných magnetických vln funkce  $T_{11}$  nulová a u příčných vln elektrických funkce  $\frac{\partial T_{11}}{\partial n}$  nulová. Za těchto podmínek jsou funkce  $T_{11}$  v oboru průřezu vlnovodu ortogonální, při čemž je norma dána výrazem

$$\int_S T_{11}^2 dS = M_l$$

U příčné magnetické vlny jsou příčná složka intenzity elektrického pole a příčná složka intenzity magnetického pole vidu  $l$  určeny vztahem

$$H_{11}^{TM} = j\omega\epsilon \operatorname{rot} \Pi_z^c = j\omega\epsilon [\operatorname{grad}_t \Pi_z^c] = j\omega\epsilon T_{21} [\operatorname{grad}_t T_{11} z]$$

$$E_{11}^{TM} = \operatorname{grad}_t \operatorname{div} \Pi_z^c = \frac{\partial T_{21}}{\partial z} \operatorname{grad}_t T_{11}$$

Pro danou souřadnici  $z$  jsou funkce  $T_{21}$  a  $\frac{\partial T_{21}}{\partial z}$  konstantní. Proto lze psát

$$H_{11}^{TM} = C_{21} [\operatorname{grad}_t T_{11} z] \quad (V-1)$$

$$E_{11}^{TM} = C_{21} \operatorname{grad}_t T_{11} \quad (V-2)$$

kde  $C_{21}$  a  $C_{21}$  jsou konstanty.

Stejně odvodíme výrazy pro vlastní funkce příčné složky intenzity magnetického a elektrického pole příčné elektrické vlny.

Dokázali jsme, že platí pro příčnou složku intenzity elektrického a magnetického pole vlny TE (viz příslušnou část o vlnovodech, čl. 17)

$$H_{11}^{TE} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_z^m = -\frac{\partial T_{21}}{\partial z} \operatorname{grad}_t T_{11}$$

$$E_{11}^{TE} = -j\omega\mu [\operatorname{grad} \Pi_z^m z] = -j\omega\mu T_{21} [\operatorname{grad} T_{11} z]$$

Pro určitou velikost souřadnice  $z$  je funkce  $\frac{\partial T_{21}}{\partial z}$  konstantní. Označíme tuto konstantu  $C_{21}^{TE}$ . Stejně je pro určitou velikost souřadnice  $z$  funkce  $-j\omega\mu T_{21}$  konstantní. Označíme tuto konstantu  $C_{21}^{TE}$ . Potom bude

$$E_{11}^{TE} = C_{21}^{TE} [\operatorname{grad} T_{11} z] \quad (V-3)$$

$$H_{11}^{TE} = C_{21}^{TE} \operatorname{grad}_t T_{11} \quad (V-4)$$

kde  $T_{11}$  je vlastní funkce Hertzova vektoru.

Výkon přenesený vlnovodem je dán integrací Umov-Poyntingova vektoru přes průřez vlnovodu

$$P = \frac{1}{2} \int_S (z [EH^*]) dS$$

kde  $z$  je jednotkový vektor ve směru osy vlnovodu (ve směru přenášení výkonu)  $E, H$  celková intenzita elektrického a magnetického pole ve vlnovodu.

Při číselném vyjádření tohoto integrálu budou přispívat jen příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole (kolmé k  $z$ ). Příčnou složku intenzity elektrického a magnetického pole lze obecně vyjádřit jako superpozici příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole jednotlivých vidů vlny TM a TE

$$E_t = \sum_l E_{1l}^{TM} + \sum_k E_{1k}^{TE}$$

$$H_t = \sum_m H_{1m}^{TM} + \sum_n H_{1n}^{TE}$$

kde  $l, k, m, n$  jsou indexy označující vid.

Potom bude

$$P = \frac{1}{2} \int_S (z [(\sum_l E_{1l}^{TM} + \sum_k E_{1k}^{TE})(\sum_m H_{1m}^{TM*} + \sum_n H_{1n}^{TE*})]) dS \quad (V-5)$$

Vynásobíme-li součty pod integrálem, bude přenesený výkon určen součtem integrálů typu

$$\left. \begin{aligned} \int_S (\mathbf{z}[E_{nl}^{TM} H_{lm}^{*TM}]) dS; & \int_S (\mathbf{z}[E_{lk}^{TE} H_{lm}^{*TE}]) dS \\ \int_S (\mathbf{z}[E_{nl}^{TE} H_{lm}^{*TE}]) dS; & \int_S (\mathbf{z}[E_{lk}^{TM} H_{lm}^{*TM}]) dS \end{aligned} \right\} \quad (V-6)$$

Provedeme podrobnější rozbor každého z těchto integrálů. Dosadíme pod integrály za příčné složky příslušné výrazy z rovnic (V-1), (V-2), (V-3) a (V-4):

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{z}[E_{nl}^{TM} H_{lm}^{*TM}]) dS &= C_{nl}^{TM} \int_S \{ \mathbf{z}[(\text{grad}_l T_{11}^{TM} | \text{grad}_l T_{1m}^{TM} \mathbf{z}]) \} dS = \\ &= -C_{nl}^{TM} C_{lm}^{TM} \int_S (\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1m}^{TM}) dS = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq 1 \\ -C_{nl}^{TM} C_{lm}^{TM} M_l & \text{pro } m = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (V-7)$$

neboť platí podle Greenovy věty (se zřetelem na okrajové podmínky vlny TM);  $T_{1m}^{TM} = 0$  (na plášti)

$$\int_S (\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1m}^{TM}) dS - \Gamma_l^2 \int_S T_{11}^{TM} T_{1m}^{TM} dS = \int_S T_{1m}^{TM} \frac{\partial T_{11}^{TM}}{\partial n} ds = 0$$

z čehož

$$\int_S (\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1m}^{TM}) dS = \Gamma_l^2 \int_S T_{11}^{TM} T_{1m}^{TM} dS$$

Dokázali jsme již, že vlastní funkce Hertzova vektoru  $T_{11}^{TM}$ ,  $T_{1m}^{TM}$  jsou orthogonální

$$\int_S T_{1l}^{TM} T_{1m}^{TM} dS = \begin{cases} 0 \\ M_l \end{cases}$$

kde  $M_l$  je norma vlastních funkcí  $T_{1l}$ . Proto je

$$\int_S (\text{grad}_l T_{1l}^{TM} \text{grad}_l T_{1m}^{TM}) dS = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq 1 \\ \Gamma_l^2 M_l & \text{pro } m = 1 \end{cases} \quad (V-7a)$$

Pří tom v rovnici (V-5)

$C_{nl}^{TM}$  je amplituda příčné složky intenzity elektrického pole vlny l vlny TM  
 $C_{lk}^{TE}$  amplituda příčné složky intenzity magnetického pole vlny l vlny TE.

Dokázali jsme v čl. 9, že poměrem absolutní hodnoty příčné složky intenzity magnetického pole a příčné složky intenzity elektrického pole je určena charakteristická admittance vlnovodu daného vidu. Platí tedy se zřetelem na rovnice (V-1) a (V-2)

$$Y_l^{TM} = - \frac{|H_l|}{|E_l|} = - \frac{C_{nl}^{TM} |\text{grad}_l T_{1l}^g|}{C_{nl}^{TM} |\text{grad}_l T_{1l}|} = - \frac{C_{nl}^{TM}}{C_{nl}^{TM}}$$

Potom, upravíme-li rovnici (V-7), bude

$$\int_S (\mathbf{z}[E_{nl}^{TM} H_{lm}^{*TM}]) dS = \begin{cases} 0 & \text{pro } l \neq m \\ (C_{nl}^{TM})^2 Y_l^{TM} \Gamma_l^2 M_l^{TM}, & \text{pro } l = m \end{cases} \quad (V-8)$$

Obdobně bychom upravili druhý integrál v rovnici (V-6)

$$\int_S (\mathbf{z}[E_{lk}^{TE} H_{lm}^{*TE}]) dS = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq n \\ (C_{nk}^{TE})^2 Y_k^{TE} \Gamma_k^2 M_k^{TE}, & \text{pro } k = n \end{cases} \quad (V-9)$$

kde v rovnicích (V-8) a (V-9) je

$C_{nl}^{TM}$  je amplituda příčné složky intenzity elektrického pole vlny l vlny TM  
 $Y_l^{TM}$  charakteristická admittance vlnovodu vidu l vlny TM  
 $M_l^{TM}$  norma vlastní funkce Hertzova elektrického vektoru vidu l  
 $C_{nk}^{TE}$  amplituda příčné složky intenzity elektrického pole vidu k vln TE  
 $Y_k^{TE}$  charakteristická admittance vlnovodu vidu k vln TE  
 $M_k^{TE}$  norma vlastní funkce Hertzova magnetického vektoru vidu k.

Dále upravíme třetí integrál v rovnici (V-6). V tomto integrálu dosadíme za  $E_{1l}^{TM}$  a  $H_{1n}^{TE}$  příslušné výrazy z rovnic (V-2) a (V-4)

$$\int_S (\mathbf{z}[E_{1l}^{TM} H_{1n}^{*TE}]) dS = C_{nl}^{TM} C_{ln}^{TE} \int_S (\mathbf{z}[\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}]) dS$$

Plošný integrál upravíme podle Gaussovy věty. Podle této věty platí

$$\int_V \text{div} [\mathbf{v}u] dV = \int_S (\mathbf{n}[\mathbf{v}u]) dS$$

kde  $\mathbf{v}$ ,  $u$  jsou libovolné vektory

$V$  objem uzavřený plochou  $S$ .

Dosadíme v našem případě za  $\mathbf{v} = \text{grad}_l T_{11}^{TM}$ , za  $u = \text{grad}_l T_{1n}^{TE}$ . Za objem  $V$  považujeme část vlnovodu omezenou průřezem vlnovodu  $S$  a pláštěm vlnovodu směřujícím na jedné straně k nekonečnu. Plochu pláště označíme  $S_p$ . Potom

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} [\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}] dV &= \int_S (\mathbf{z}[\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}]) dS + \\ &+ \int_{S_p} (\mathbf{n}[\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}]) dS \end{aligned}$$

Plocha  $S$  je v tomto případě průřez vlnovodu. Normála k této ploše má směr  $z$ . Dále

$$\begin{aligned} \text{div} [\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}] &= (\text{rot}_l \text{grad}_l T_{1n}^{TE} \text{grad}_l T_{11}^{TM}) - \\ &- (\text{rot}_l \text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}) = 0 \end{aligned}$$

neboť platí identicky, že  $\text{rot}_l \text{grad}_l T_{1n}^{TE}$  a  $\text{rot}_l \text{grad}_l T_{11}^{TM}$  jsou nulové. Potom bude

$$\int_S (\mathbf{z}[\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}]) dS + \int_{S_p} (\mathbf{n}[\text{grad}_l T_{11}^{TM} \text{grad}_l T_{1n}^{TE}]) dS = 0$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor ve směru normály k plášti  $S_p$ . Protože vektor  $[\text{grad}_l T_{11}^{TM}]$

• grad  $T_n^{TE}$  je rovnoběžný s osou vlnovodu  $z$  a  $n \perp z$ , je druhý integrál v předcházejícím vztahu nulový. Potom bude

$$\int_S \langle z | \text{grad } T_{1n}^{TM} \text{ grad } T_{1n}^{TE} \rangle = 0 \quad \text{pro každé } l \text{ a } n$$

a

$$\int_S \langle z | E_{1n}^{TM} H_{1n}^{TE} \rangle dS = 0 \quad \text{pro každé } l \text{ a } n \quad (V-10)$$

Stejně platí o čtvrtém integrálu (V-6) výraz (důkaz je stejný jako u třetího integrálu)

$$\int_S \langle z | E_{1k}^{TE} H_{1m}^{TM} \rangle dS = 0 \quad \text{pro každé } k \text{ a } m \quad (V-11)$$

Vynásobíme-li součty v rovnici (V-6), dostaneme se zřetelem na rovnice (V-8), (V-9), (V-10) a (V-11) pro výkon přenesený vlnovodem

$$P = + \frac{1}{2} \sum_k (C_{ok}^{TM})^2 Y_k^{TM} I_k^{TM} M_k^{TM} + \frac{1}{2} \sum_k (C_{ok}^{TE})^2 Y_k^{TE} I_k^{TE} M_k^{TE} \quad (V-12)$$

Ze vztahu (V-12) je vidět, že celkový výkon přenesený vlnovodem je dán superpozicí přenesených výkonů jednotlivých vidů vlny TM a TE (zákon superpozice).

#### 45. Dva vlnovody různého průřezu, spojené obecným prostorovým transformátorem

Porušení pravidelnosti vnitřního prostoru vlnovodu lze ve většině příkladů pokládat za zvláštní případ obecného prostorového transformátoru, znázorněného na obr. 102. Transformátor je vytvořen dutinou, omezenou dokonale vodivým povrchem. Do této dutiny ústí dva vlnovody, které mohou mít obecně různý průřez. Označme plochy vlnovodů, jimiž jsou vlnovody připojeny k dutině,  $S_1$  a  $S_2$  a dokonale vodivý povrch dutiny  $S_3$ . Určíme vztah mezi vstupní impedancí transformátoru a výstupní impedancí.

Na základě vztahu (IX-22) platí pro objem dutiny, dosadíme-li za vektor  $P$  vektor intenzity elektrického pole  $E$  a za vektor  $Q$  komplexně sdruženou hodnotu k vektoru intenzity elektrického pole  $E^*$ , výraz

$$\int_V (\text{rot } E \text{ rot } E^*) dV - \int_V (E^* \text{ rot rot } E) dV = \int_S ([E^* \text{ rot } E] n) dS$$

Z Maxwellových rovnic vyplývá, že  $\text{rot } E = -j\omega \mu H$ ,  $\text{rot } E^* = j\omega \mu H^*$  a  $\text{rot rot } E = \omega^2 \mu \epsilon E$ . Proto lze upravit předcházející vztah takto:

$$\frac{1}{2} \int_S ([E^* H] n) dS = j\omega \cdot \frac{1}{2} \int_V [\mu (H H^*) - \epsilon (E E^*)] dV$$

Pravá strana tohoto výrazu představuje časovou změnu rozdílu energie elektrického a magnetického pole v dutině transformátoru. Povrch  $S$  rozdělíme na povrchy  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$  (viz obr. 102). Potom bude

$$\frac{1}{2} \int_{S_1} ([E H^*] n) dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} ([E H^*] n) dS + \frac{1}{2} \int_{S_3} ([E H^*] n) dS = j\omega W$$

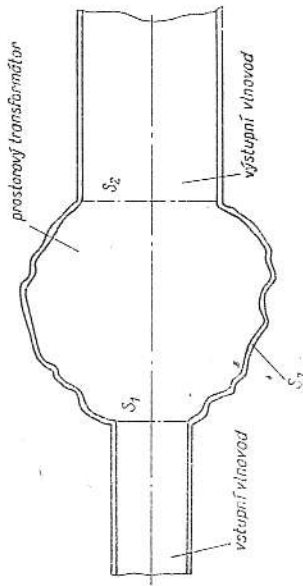
kde  $W$  je rozdíl energie elektrického a magnetického pole v transformátoru. Na dokonale vodivém povrchu transformátoru bude

$$\frac{1}{2} \int_{S_3} ([E H^*] n) dS = 0$$

neboť na vodivém povrchu platí okrajová podmínka  $[En] = 0$  na  $S_3$ . Potom bude

$$\frac{1}{2} \int_{S_1} ([E H^*] n) dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} ([E H^*] n) dS = j\omega W \quad (V-13)$$

kde  $S_1$  je průřez jednoho vlnovodu transformátoru  
 $S_2$  průřez druhého vlnovodu transformátoru.



- Obr. 102. Prostorový vlnovodový transformátor.

Normála  $n$  v tomto vztahu bude mít tedy směr osy vlnovodu. U prvního členu to bude směr osy prvního vlnovodu a u druhého členu směr osy druhého vlnovodu.

Přenesený výkon je dán superpozicí přeneseného výkonu jednotlivých vidů. Proto platí na základě výrazu (V-12)

$$+ \frac{1}{2} \sum_k (C_{ok}^{TM})^2 Y_k^{TM} I_k^{TM} M_k^{TM} + \frac{1}{2} \sum_k (C_{ok}^{TE})^2 Y_k^{TE} I_k^{TE} M_k^{TE} + \\ + \frac{1}{2} \sum_k (C_{ok}^{TM})^2 Y_k^{TM} I_k^{TM} M_k^{TM} + \frac{1}{2} \sum_k (C_{ok}^{TE})^2 Y_k^{TE} I_k^{TE} M_k^{TE} = j\omega W$$

kde  $\sum_{l,k}^{S_1}$  značí, že jde o součet na ploše  $S_1$

$\sum_{l,k}^{S_2}$  je součet na ploše  $S_2$ .

V dalším textu nebudeme zvlášť rozlišovat vidy TM a vidy TE. Potom bude

$$+ \frac{1}{2} \sum_k C_{ok}^2 Y_k I_k^2 M_k + \frac{1}{2} \sum_k C_{ok}^2 Y_k I_k^2 M_k = j\omega W \quad (V-14)$$

kde  $C_{ok}$  je amplituda intenzity elektrického pole vidu  $k$  vlny TM nebo TE charakteristická admitance vlnovodu vlny TM nebo TE vidu  $k$  norma vlastní funkce Hertzova elektrického nebo magnetického vektoru vidu  $k$  příčná vlnová konstanta vlastní funkce Hertzova elektrického nebo magnetického vektoru.

Zjednodušíme ještě dále označení ve vztahu (V-14) tak, že nahradíme výraz  $\Gamma_k^2 M_k$  novým výrazem  $M^{(k)}$ :

$$M^{(k)} = \Gamma_k^2 M_k \quad (V-15)$$

kde  $M^{(k)}$  budeme nazývat normou vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole vidu k vlny TM nebo TE. Potom lze upravit výraz (V-14) takto:

$$+ \frac{1}{2} \sum_k C_k^2 Y_k M^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_k C_k^2 Y_k M^{(0)} = j\omega W \quad (V-16)$$

Zavedli jsme již na začátku této části podmínku, že se oběma vlnovody šíří jen dominantní vid. Ostatní vidy se vlnovodem nešíří a jejich admittance  $Y_k$  jsou imaginární. Proto oddělíme v součtech vztahu (V-16) členy, které přísluší dominantnímu vidu, od ostatních vidů. Mimo to uvážíme, že se vlnovodem s průřezem  $S_1$  šíří směrem proti kladnému směru normály na ploše  $S_1$  (směrem k transformátoru) jen dominantní vid, kdežto ostatní vidy, které vzniknou až po odrazu, šíří se ve směru normály (za kladný směr normály považujeme směr vně transformátoru). To znamená, že charakteristická admittance dominantního vidu bude mít záporné znaménko, kdežto charakteristická admittance ostatních vidů budou mít znaménko kladné. Ve výstupním vlnovodu (s plochou  $S_2$ ) se šíří všechny vidy (dominantní i vyšší) směrem od transformátoru, a proto budou mít charakteristické admittance kladné znaménko. Potom bude

$$\frac{1}{2} C_1^2 Y_1 M_1 = \frac{1}{2} C_2^2 Y_2 M_2 + \frac{1}{2} \sum_k C_k^2 Y_k M_k + \frac{1}{2} \sum_k C_k^2 Y_k M_k - j\omega W$$

kde  $Y_1$  je admittance dominantního vidu v místě plochy  $S_1$

$Y_2$  charakteristická admittance dominantního vidu výstupního vlnovodu v místě  $S_2$

$Y_k$  charakteristická admittance vyšších vidů.

Protože se oběma vlnovody šíří jen dominantní vidy, jsou tyto charakteristické admittance  $Y_k$  ryze imaginární. Vyjádříme-li z předešlého vztahu vstupní admittance  $Y_1$ , dostaneme

$$Y_1 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{M_2}{M_1} Y_2 + \sum_k \left(\frac{C_k}{C_1}\right)^2 \frac{M_k}{M_1} Y_k + \sum_k \left(\frac{C_k}{C_1}\right)^2 \frac{M_k}{M_1} Y_k - 2j\omega W \frac{1}{C_1^2 M_1}$$

Admittance vyšších vidů jsou imaginární, a tedy součty v předešlém výrazu budou také imaginární. Proto bude

$$Y_1 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{M_2}{M_1} Y_2 + jB \quad (V-17)$$

kde

$$B = \sum_k \left(\frac{C_k}{C_1}\right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| + \sum_k \left(\frac{C_k}{C_1}\right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| - 2\omega W \frac{1}{C_1^2 M_1} \quad (V-17.1)$$

$Y_1$  je vstupní admittance transformátoru

$Y_2$  charakteristická admittance dominantního vidu výstupního vlnovodu

$C_2$  poměrná velikost intenzity elektrického pole dominantního vidu výstupního vlnovodu

$C_1$  poměrná velikost intenzity dominantního vidu vstupního vlnovodu

$B$  vstupní susceptance transformátoru

$|Y_k|$  absolutní hodnota charakteristické impedance vidu (k) vstupního a výstupního vlnovodu.

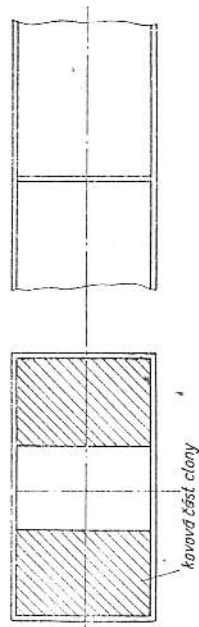
Poměr  $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{M_2}{M_1}$  je ekvivalentní převodu transformátoru a  $W$  rozdíl elektrické a magnetické energie transformátoru. Ve vztaci (V-17.1) jsou charakteristické admittance jednotlivých vidů určeny vztahem (II-24) pro příčnou vlnu magnetickou a vztahem (II-27) pro příčnou vlnu elektrickou.

Budeme-li znát uspořádání elektromagnetického pole v transformátoru, budeme upřesnit všechny potřebné veličiny ve vztacích (V-17) a (V-17.1).

V dalším článku provedeme na základě vztacích (V-17) a (V-17.1) rozbor vlastností některých jednoduchých vlnovodových impedančních transformátorů.

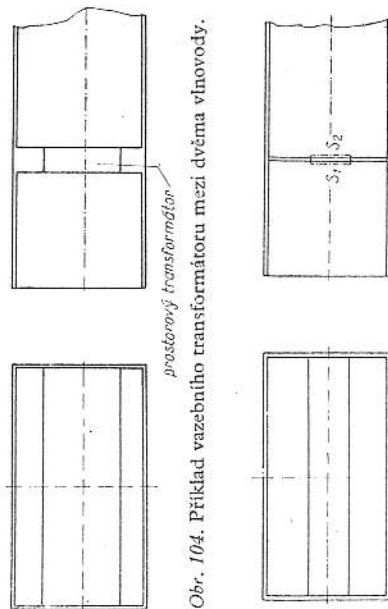
#### 46. Clona ve vlnovodu

Nejjednodušším vlnovodovým impedančním transformátorem je clona. Je to kovová, dokonale vodivá překážka, umístěná kolmo k ose vlnovodu (obr. 103).



Obr. 103. Kovová clona ve vlnovodu.

Má-li clona konečnou tloušťku, bude transformátor vytvořen prostorem uvnitř clony (obr. 104). Obvyklejš však ve výpočtu považujeme clonu za nekonečně tenkou. V tomto případě přechází objem transformátoru ve dvě soumězné plochy  $S_1$  a  $S_2$  (viz obr. 105).



Obr. 104. Příklad vazebního transformátoru mezi dvěma vlnovody.

Obr. 105. Kapacitní clona v obdélníkovém vlnovodu.

Protože objem transformátoru bude v tomto případě nulový, bude i rozdíl energie  $W$  v transformátoru nulový. Další zjednodušení proti obecnému případu transformátoru je



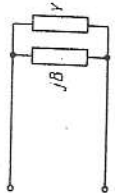
v tom, že při cloně jsou oba vlnovody stejné. Potom jsou amplitudy příčných složek intenzity elektrického pole v průřezu  $S_1$  stejné jako v průřezu  $S_2$ . Proto ve vzorci (V-17.1) je

$$C_1 = C_2; \quad M_1 = M_2; \quad \sum_k \left( \frac{C_k}{C_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| = \sum_k \left( \frac{C_k}{C_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| \quad (V-17.1)$$

Za těchto okolností bude mít vzorec (V-17) tvar

$$Y_1 = Y + jB \quad (V-18)$$

$$B = 2 \sum_k \left( \frac{C_k}{C_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| \quad (V-18.1)$$



kde  $Y \equiv Y_3$  je charakteristická admittance vlnovodu dominantního vidu

$B$  susceptance clony.

Náhradní zapojení clony znázorňuje obr. 106.

Dále provedeme kvalitativní rozbor susceptance (je-li indukční nebo kapacitní) jednotlivých druhů clon.

46.1 Clona v obdélníkovém vlnovodu, jejíž hrany jsou rovnoběžné s menším rozměrem vlnovodu

Kdybychom znali přesné uspořádání elektromagnetického pole v otvoru clony, uměli bychom určit amplitudy všech vidů a tím i povahu a velikost susceptance. Je dosti obtížné určit přesné rozložení pole v otvoru, avšak pokusíme se o to v další části. Provedeme proto nejdříve jen kvalitativní rozbor.



Obr. 107. Indukční clona v obdélníkovém vlnovodu.

Dominantním videm v obdélníkovém vlnovodu je vid  $TE_{10}$ . Intenzita elektrického pole tohoto vidu má směr osy  $y$  a její velikost závisí jen na souřadnici  $x$ , nikoli na souřadnici  $y$ . Elektromagnetická vlna dominantního vidu dopadne na otvor clony a vybudí v otvoru elektromagnetické pole.

V otvoru clony vznikne potom takové pole, jehož velikost nezávisí na souřadnici  $y$  a které bude jen funkcí  $x$ . Můžeme tedy intenzitu elektrického pole v šěrbině vyjádřit výrazem

$$E = E(x) y$$

kde  $y$  je jednotkový vektor ve směru osy  $y$ .

Rozložíme si tento výraz v řadu vlastních funkcí intenzity elektrického pole vidů příčného elektrického a příčného magnetického. Tím určíme amplitudy jednotlivých vidů.

Potom bude

$$E(x) y = \left( \sum_k^{TM} C_k^{TE} E_k^{TE} + \sum_k^{TM} C_k^{TM} E_k^{TM} \right) y$$

kde  $C_k^{TE}$  je amplituda intenzity elektrického pole příčného elektrického vidu  $C_k^{TM}$  amplituda intenzity elektrického pole příčného vidu magnetického  $E_k^{TE}$  vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole příčného vidu elektrického

$E_k^{TM}$  vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole příčného vidu magnetického.

Jak jsme dokázali, jsou tyto funkce vzájemně ortogonální v oboru průřezu vlnovodu. Budeme-li tedy integrovat předcházející výraz v oboru  $S$ , dostaneme, uvážíme-li ortogonálnost funkcí,

$$C_k^{TE} = \frac{1}{M_1} \int_S E(x) T_k^{TE} dS \quad (V-19)$$

kde  $M_1$  je norma vlastní funkce a

$$C_k^{TM} = \frac{1}{M_k} \int_{S'} E(x) E_k^{TM} dS \quad (V-20)$$

V našem případě jde o obdélníkový vlnovod. Vlastní funkce příčných složek intenzity elektrického pole určíme podle rovnic (V-3) až (V-6). Funkce  $T_k$  příčné magnetické vlny u obdélníkového vlnovodu je dána vztahem

$$T_k = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

a u příčné vlny elektrické vztahem

$$T_k = \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

Proto [podle rovnice (V-3)] bude

$$E_{zmn}^{TM} = \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (V-20.1)$$

$$E_{ymn}^{TM} = \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$E_{xmn}^{TE} = \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$E_{ymn}^{TE} = \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (V-19.1)$$

Protože intenzita elektrického pole má v místě šěrbiny clony směr osy  $y$ , uplatní se jen ty vlastní funkce, které přísluší intenzitám elektrického pole ve směru osy  $y$ . Indexy  $k$ , určující vid elektromagnetické vlny, obsahují dva obecné indexy  $m, n$ . Dosadíme-li uvedené vlastní funkce do rovnic (V-19) a (V-20), dostaneme

$$C_{mn}^{TE} = \frac{1}{M_{mn}} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y E(x) dx dy = \\ = \frac{1}{M_{mn}} \int_0^a \int_0^b E(x) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y dx dy$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že se amplituda  $C_{mn}^{TE}$  liší od nuly jen tehdy, bude-li  $n = 0$ , neboť pro  $n > 0$  je integrál  $\int_0^b \cos \frac{n\pi}{b} y \, dy$  vždy nulový. Potom bude

$$C_{mn}^{TE} = \frac{1}{M_{mn}} \int_0^a \int_0^b E(x) \sin \frac{m\pi}{a} x \, dx \, dy$$

Tento výraz bude pro všechny možné hodnoty  $E(x)$  vždy odlišný od nuly.

Pro amplitudu příčných magnetických vidů platí

$$\begin{aligned} C_{mn}^{TM} &= \frac{1}{M_{mn}} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y E(x) \, dx \, dy = \\ &= j \frac{n\pi}{M_{mn} b} \int_0^a \int_0^b E(x) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \end{aligned}$$

Integrál se bude lišit od nuly jen tehdy, bude-li  $n = 0$ . Protože však číslem  $n$  násobíme integrál, bude amplituda vždy nulová.

To znamená, že u clony na obr. 107 mohou vzniknout jen takové vidy, které přísluší příčné elektrické vlně. V tom případě bude susceptance clony dána se zřetelem na rovnici (V-18.1) vztahem

$$\frac{B}{2} = \sum_k \left( \frac{C_k^{TE}}{C_1^{TE}} \right)^2 |Y_k^{TE}| \frac{M_k^{TE}}{M_1^{TE}} \quad (V-21)$$

kde  $k$  neobsahuje index charakterizující dominantní vid (vid TE). Norma  $M_k$  je určena vztahem

$$M_k = \Gamma_k^2 \int_a^b T_k^2 \, dS$$

kde  $T_k$  je vlastní funkce:

$$T_k = \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

Po číselném vyjádření dostaneme

$$M_k = \begin{cases} \frac{1}{4} ab \Gamma_k^2 & (\text{je-li } m \neq 0, n = 0 \text{ nebo } n \neq 0, m = 0) \\ \frac{1}{4} ab \Gamma_k^2 & (\text{je-li } m \neq 0, n \neq 0) \end{cases}$$

Charakteristickou impedanci příčné elektrické vlny jsme určili v kap. II a je dána výrazem

$$Z_k = \frac{j\omega\mu}{\gamma_k}$$

Šíří-li se elektromagnetická vlna daného vidu vlnovodem, musí být konstanta přenosu imaginární. V tom případě je

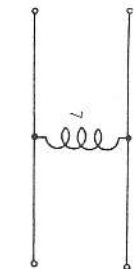
$$Z_k = \frac{j\omega\mu}{\gamma_k} = \frac{\omega\mu}{|\gamma_k|}$$

a charakteristická impedance je v tomto případě reálná. Jsou-li rozměry vlnovodu takové,

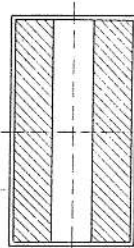
že se jimi nemůže šířit elektromagnetická vlna určitého vidu, je konstanta přenosu reálná a charakteristická impedance imaginární. Charakteristická admittance je určena převrácenou hodnotou charakteristické impedance. Proto je

$$Y_k^{TE} = -j \frac{\gamma_k}{\omega\mu}$$

Z tohoto výrazu je vidět, že charakteristická admittance je imaginární a záporná. Proto bude ve vztahu (V-21) susceptance záporná. To znamená, že susceptance bude mít indukční charakter. Náhradním schématem clony, jejíž hrany jsou rovnoběžné s intenzitou elektrického pole dominantního vidu, je indukčnost paralelně zapojená k vedení, které představuje vlnovod (obr. 108).



Obr. 108. Náhradní schéma indukční clony.



Obr. 109. Kapacitní clona v obdélníkovém vlnovodu.

#### 46.2 Clona v obdélníkovém vlnovodu, jejíž hrany jsou kolmé k směru intenzity elektrického pole dominantního vidu

Přesné uspořádání intenzity v otvoru clony neznáme. Avšak vzhledem k tomu, že je vybuzena videm TE<sub>10</sub>, můžeme předpokládat, že bude mít směr osy  $x$  a že bude záviset na souřadnici  $x$  podle stejného zákona jako dominantní vid. Závislost na souřadnici  $y$  neznáme. Na základě těchto úvah bude dána intenzita elektrického pole v šterbině clony vztahem

$$E = E(y) \sin \frac{\pi}{a} x y$$

Tento vztah opět rozložíme v řadu vlastních funkcí příčných složek intenzity elektrického pole. Protože má intenzita elektrického pole v šterbině jen směr osy  $y$ , použijeme opět jen těch vlastních funkcí, které přísluší intenzitám elektrického pole se směrem  $y$ . Potom bude

$$C_k^{TE} = \frac{1}{M_k} \frac{m\pi}{a} \int_0^a \int_0^b E(y) \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy$$

Z tohoto výrazu vyplývá, že amplituda  $C_k^{TE}$  se bude lišit od nuly jen tehdy, bude-li  $m = 1$ . Provedeme-li integraci podle souřadnice  $x$ , dostaneme

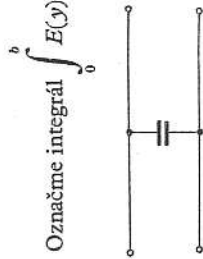
$$C_k^{TE} = \frac{1}{M_k} \frac{1}{2} \pi \int_0^b E(y) \cos \frac{n\pi}{b} y \, dy$$

Amplitudy příčných magnetických vidů určíme ze vztahu

$$C_k^{TM} = \frac{1}{M_k} \frac{1}{I_k} \left( \frac{n\pi}{b} \right) \int_0^a \int_0^b E(y) \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy$$

Integrál se bude lišit od nuly jen tehdy, bude-li  $m = 1$ . V tom případě bude

$$C_k^{TM} = \frac{1}{M_k} \frac{1}{\Gamma_k} \left( \frac{n\pi}{b} \right) \frac{1}{2} a \int_0^b E(y) \cos \frac{n\pi}{b} y dy$$



Označme integrál  $\int_0^b E(y) \cos \frac{n\pi}{b} y dy$  znakem  $A_n$ , neboť je funkcí indexu  $n$ . Potom bude

$$C_{1n}^{TE} = \frac{1}{M_{1n}} \frac{1}{2} \pi A_n \quad (V-22)$$

$$C_{1n}^{TM} = \frac{1}{M_{1n}} \left( \frac{n\pi}{b} \right) \frac{a}{2} A_n \quad (V-23)$$

Obr. 110. Náhradní schéma kapacitní clony.

Dosadíme-li rovnice (V-22) a (V-23) do rovnice (V-18.1), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} &= \sum_n \left( \frac{C_{1n}^{TE}}{C_{10}^{TE}} \right)^2 \frac{M_{1n}}{M_{10}} |Y_{1n}|^{TE} + \sum_n \left( \frac{C_{1n}^{TM}}{C_{10}^{TM}} \right)^2 \frac{M_{1n}}{M_{10}} |Y_{1n}|^{TM} = \\ &= \sum_n \left( \frac{A_n}{A_0} \right)^2 \frac{M_{1n}}{M_{10}} \left( |Y_{1n}|^{TE} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 |Y_{1n}|^{TM} \right) \end{aligned}$$

Absolutní hodnota charakteristické admittance  $Y_{1n}^{TE}$  je dána výrazem  $\left( -\frac{\gamma_{1n}^{TE}}{\omega\mu} \right)$  a absolutní

hodnota charakteristické admittance  $Y_{1n}^{TM}$  výrazem  $\frac{\omega\epsilon}{\gamma_{1n}^{TM}}$  [viz rovnice (II-24) a (II-27)], kde v obou případech je

$$\gamma_{1n} = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2}$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{B}{2} = \sum_n \left( \frac{A_n}{A_{10}} \right)^2 \left( \frac{M_{1n}}{M_{10}} \right) \frac{\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2 - 1}{\omega\mu \sqrt{\left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2}}$$

Susceptance  $\frac{B}{2}$  je vždy kladná, neboť  $\left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2 - 1$  musí být vždy větší než jedna, aby se mohl dominantní vid šířit vlnovodem ( $2a$  je totiž pro dominantní vid mezní délka vlny a musí být vždy větší než použitá délka vlny).

Protože je susceptance  $\frac{B}{2}$  vždy kladná, má kapacitní charakter. Její náhradní schéma je na obr. 110.

#### 46.3 Clona v kruhovém vlnovodu (obr. 111)

Je-li kruhový vlnovod osově souměrně vybuzen, vzniknou v něm buď osově souměrné příčné vidy magnetické, nebo osově souměrné příčné vidy elektrické. Je-li vybuzen tak, že vzniknou osově souměrné příčné vidy magnetické, vybudí se v otvoru clony intenzita elektrického pole radiálního směru, tak jako příčné vidy elektrické, a jejíž velikost je funkcí poloměru  $r$ . Je tedy v otvoru clony

$$E = E(r) r$$

Rozložíme si tento výraz v řadu vlastních funkcí kruhového vlnovodu. Potom musí platit

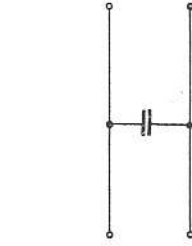
$$E = E(r) r = \sum_k C_k^{TM} E_k^{TM} r$$

Příčné vlny elektrické neuvazujeme proto, že při souměrném vybuzení mají jen směr jednotkového vektoru  $\varphi$ . Protože se vybudí jen vyšší příčné magnetické vidy, jejichž charakteristické admittance mají kladnou absolutní hodnotu, dostali bychom dosazením do výrazu (V-18.1) pro susceptanci clony kladnou hodnotu a má tedy kapacitní charakter. Její náhradní schéma je na obr. 112.

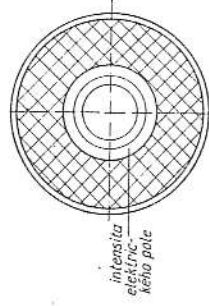
Je-li vlnovod vybuzen tak, že vzniknou jen osově souměrné příčné vidy elektrické, vybudí se v otvoru clony intenzita elektrického pole mající směr jednotkového vektoru  $\varphi$ , jejíž velikost je funkcí poloměru  $r$ . Potom má intenzita elektrického pole v otvoru tvar

$$E = E(r) \varphi$$

Stejně jako v předcházejícím případě lze dokázat, že tuto vektorovou funkci můžeme rozložit jen v příčné vidy elektrické, osově souměrné. Jejich charakteristické admittance jsou



Obr. 112. Náhradní schéma kapacitní clony.



Obr. 113. Indukční clona ve válčovém vlnovodu.

záporné, a proto dosazením do rovnice (V-18.1) dostaneme, že susceptance clony bude záporná, že má tedy indukční charakter. Její náhradní schéma znázorňuje obr. 113.

#### 47. Určení velikosti susceptance clon

Stanovit přesné velikosti susceptance clony je obtížné. Nejdříve musíme určit uspořádání intenzity elektrického pole v otvoru clony a potom teprve amplitudy všech vidů. Určíme-li amplitudy všech vidů, určíme velikost susceptance ze vztahu (V-18.1).

Je několik metod, kterými bychom mohli určit velikost susceptance. Všechny jsou matematicky náročné, založené buď na řešení integrálních rovnic, variačního problému, nebo na Schwartzově transformaci. Zvolíme první z nich.

Všechny metody k určení susceptance clony vycházejí z okrajových podmínek v otvoru:  
 a) v místě kovové části clony je tečná složka intenzity elektrického pole nulová;  
 b) v otvoru je tečná složka intenzity magnetického pole nulová. Tato podmínka platí tehdy, je-li clona nekonečně tenká.)  
 Příčnou složku intenzity elektrického pole v místě clony určíme jako superpozici všech vidů intenzity elektrického pole

$$E_t = \sum_n C_{in} E_{in} \quad (V-24)$$

kde  $C_{in}$  je amplituda příčné složky intenzity elektrického pole  $E_{in}$  vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole. Stejně vyjádříme příčnou složku intenzity magnetického pole

$$H_t = \sum_n C_{in} H_{in} \quad (V-25)$$

kde  $C_{in}$  je amplituda příčné složky intenzity magnetického pole  $H_{in}$  vlastní funkce.

Poměr amplitudy příčné složky intenzity magnetického pole a amplitudy příčné složky intenzity elektrického pole určitého vidu udává charakteristickou admittanci tohoto vidu. Pro daný vid označený indexem  $n$  platí tedy

$$|C_{in} H_{in}| = -Y_n |C_{in} E_{in}|$$

kde  $-Y_n$  je charakteristická admittance vidu  $n$ . Záporné znaménko je zde proto, že se vyšší vidy šíří o pačným směrem než dominantní vid.

Ze vztahů (V-3) až (V-6) pro vlastní funkce příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole vyplývá, že je  $|H_{in}^T| = |E_{in}^T|$  a  $|H_{in}| = |E_{in}|$ . Proto lze upravit předější vztah takto:

$$C_{in} = -Y_n C_{in} \quad (V-26)$$

V otvoru je tečná složka intenzity magnetického pole nulová

$$H_t = 0$$

Dosadíme-li za  $H_t$  vztah (V-25), platí potom v otvoru

$$\sum_n C_{in} H_{in} = 0$$

V tomto součtu je již  $H_{in}$  absolutní hodnota vektoru, neboť všechny vlastní funkce musí mít stejný i edrickový vektor, aby mohl být splněn vztah (V-25). Oddělíme-li z tohoto součtu člen příslušící dominantnímu vidu a vyjádříme-li příčné složky intenzity magnetického pole vyšších vidů (nikoli dominantního) příčnými složkami intenzity elektrického pole, dostaneme

$$C_{in} E_{in} = \sum_{n=2}^{\infty} Y_n C_{in} E_{in} \quad (V-27)$$

neboť  $E_{in} = H_{in}$ .

Abychom určili amplitudy jednotlivých vidů intenzity elektrického pole, vynásobíme skalárně rovnici (V-24) vlastní vektorovou funkcí  $E_{in}$ , která přísluší vidu  $n$ , a integrujeme ji v oboru průřezu vlnovodu. Potom bude

$$\int_S E_t E_{in} dS = \sum_{n=1}^{\infty} E_{in} E_{in} C_{in}$$

1) Je-li v otvoru dána intenzita elektrického pole, vzbudí elektromagnetickou vlnu, která se bude šířit oběma směry. Je-li vlnovod na obou stranách neomezen, rozdělí se výkon, vyzářené polem v otvoru, rovnoměrně na oba směry. Umov-Poyntingův vektor v otvoru, který přísluší jednomu směru šíření, má opačný směr než Umov-Poyntingův vektor, který přísluší druhému směru. Protože je intenzita elektrického pole obou Umov-Poyntingových vektorů totžná, bude intenzita magnetického pole v obou částech vlnovodu stejná, avšak opačného směru, neboť energie se šíří v každé části vlnovodu v obráceném směrem. Protože je celková intenzita magnetického pole dána součtem intenzity magnetického pole, která přísluší jednomu směru šíření, a intenzity magnetického pole, která přísluší druhému směru, a obě tyto intenzity jsou stejné, avšak opačné polarity, bude celková intenzita magnetického pole, jejíž směr leží v rovině otvoru, nulová.

Uvážíme-li, že vlastní vektorové funkce  $E_{in}$  a  $E_{in}$  jsou v oboru průřezu vlnovodu ortogonální, dostaneme pro amplitudu  $C_{in}$  výraz

$$C_{in} = \frac{1}{M_{in}} \int_S E_t E_{in} dS$$

kde  $M_{in}$  je norma vlastní funkce intenzity elektrického pole vidu  $n$ .

Protože je tečná složka intenzity elektrického pole v místě kovové části clony nulová a má jen konečnou velikost v otvoru, jehož plochu označíme  $S'$ , je

$$C_{in} = \frac{1}{M_{in}} \int_{S'} E_t(S') E_{in}(S') dS' \quad (V-28)$$

kde  $E_t(S')$  je intenzita elektrického pole na ploše  $S'$

$E_{in}(S')$  hodnota vlastní funkce na ploše  $S'$ .

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (V-27), dostaneme

$$C_{in} E_{in} = \frac{1}{M_{in}} \int_{S'} Y_n E_{in}(S') E_t(S') E_{in}(S') dS' \quad (V-29)$$

Výraz (V-28) je integrální rovnice, jejíž řešení je poměrně obtížné. Naším úkolem je určit uspořádaní intenzity elektrického pole  $E_t$  v otvoru. Budeme-li znát toto uspořádaní, umíme určit podle rovnice (V-28) amplitudy jednotlivých vidů a potom i susceptanci clony.

Integrální rovnici (V-29) budeme řešit takto: Rozložíme vlastní funkce  $E_{in}$  ve vlastní funkce otvoru clony. Vlastními funkcemi otvoru rozumíme takové funkce, které splňují podmínky vlnové rovnice v oboru  $S'$  a okrajové podmínky na obvodu otvoru. Označíme tyto vlastní funkce  $E'_{in}$  s obecným indexem  $m$ . Potom bude

$$E_{in} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} \quad (V-30)$$

kde  $A_{in}$  je obecné součinitele, který přísluší funkci  $E'_{in}$  při rozkladu funkce  $E_{in}$ .

Dále rozložíme výraz  $E_t$  (intenzitu elektrického pole v otvoru) také v řadu vlastních funkcí  $E'_{in}$ . Při tom je

$$E_t = \sum_{m=1}^{\infty} X_m E'_{in} \quad (V-31)$$

kde  $X_m$  je součinitele u jednotlivých funkcí  $E'_{in}$ .

Dosadíme výrazy z rovnic (V-30) a (V-31) do rovnice (V-29). Potom bude

$$C_{in} \sum_{m=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} = \sum_{n=2}^{\infty} Y_n E_{in} \int_{S'} \left( \sum_{m=1}^{\infty} X_m E'_{in} \right) \sum_{m=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} dS' \quad (V-32)$$

Na základě ortogonálnosti funkce  $E'_{in}$  platí

$$\int_{S'} \left( \sum_{m=1}^{\infty} X_m E'_{in} \right) \sum_{m=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} dS' = \sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{in} M_{in}$$

kde  $M_{in}$  je normovací činitele funkce  $E'_{in}$ . Se zřetelem k tomu upravíme výraz (V-32) takto:

$$C_{in} \sum_{m=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} = \sum_{n=2}^{\infty} Y_n \sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{in} M_{in} \sum_{p=1}^{\infty} A_{op} E'_{ip}$$

kde jsme nahradili vlastní funkci  $E_{in}$  řadou vlastních funkcí  $E'_{ip}$ . Aby předešli vztah platil identicky pro obecnou souřadnici průřezu, musí platit, provedeme-li srovnání podle funkce  $E'_{ip}$  výraz

$$C_{in} A_{ip} = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{pm} X_{im} \quad (V-33)$$

kde

$$B_{pm} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M'_n Y_n A_{nm} A_{np}}{M_{1n}}$$

Vztah (V-33) tvoří soustavu rovnic podle parametru  $p$ . Z této soustavy určíme součinitele  $X_m$  a známe-li  $X_m$ , určíme intenzitu pole v šterbině podle rovnice (V-31).

Podle rovnice (V-28) je potom amplituda dominantního vidu

$$C_{e1} = \frac{1}{M_{e1}} \int_S \sum_{m=1}^{\infty} X_m E'_{im} \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} dS \quad (V-34)$$

Abychom mohli použít odvozených výrazů, upravíme ještě vztah (V-18.1) pro susceptanci. Dokážeme, že

$$\frac{B}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{C_{en}}{C_{e1}} \right)^2 |Y_n| = \frac{C_{h1}}{C_{e1}} \quad (V-35)$$

kde  $C_{h1}$  je amplituda příčné složky intenzity magnetického pole dominantního vidu  
 $C_{e1}$  amplituda intenzity elektrického pole dominantního vidu.

Násobíme proto výraz (V-27) výrazem  $\sum_{n=1}^{\infty} C_{en} E_{in}$  a integrujeme v oboru průřezu vlnovodu. Potom se zřetelem na ortogonální vlastnosti funkcí  $E_{in}$  platí

$$C_{h1} C_{e1} = \sum_{n=2}^{\infty} |Y_n| C_{en}^2$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnice (V-18.1), dostaneme výraz (V-35).

Protože známe amplitudu intenzity elektrického pole [je dala vztahem (V-34)], dostaneme pro susceptanci clony vztah

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{M_{e1}} \int_S \left( \sum_{m=1}^{\infty} X_m E'_{im} \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} E'_{in} \right) dS \quad (V-36)$$

Součinitele  $X_m$  určíme, jak jsme již uvedli, ze soustavy rovnic (V-33). Nesmí nás zarazit neznámá veličina  $C_{h1}$ , neboť je nejpřímě zahrnuta v součinitelích  $X_m$  jako lineární součinitel, a proto se lze vzorci (V-36) vykráti. Ve vzorci (V-36) lze ještě upravit jmenovatele. Se zřetelem na ortogonální vlastnosti funkcí  $E'_{im}$  potom dostaneme

$$\frac{B}{2} = \frac{C_{h1}}{M_{e1}} \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{im} M'_m} \quad (V-37)$$

kde  $M_{e1}$  je norma funkce  $E_{e1}$  a  $M'_m$  norma funkce  $E'_{im}$ .

Obyčejně vztahujeme susceptanci na charakteristickou admittanci dominantního vidu. To znamená, že určujeme hodnotu  $\frac{B}{2Y_1}$ . Tuto veličinu označíme  $\frac{b}{2}$ . Ze vzorce (V-37) potom vyplývá

$$\frac{b}{2} = \frac{C_{h1}}{Y_1 M_{e1}} \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{im} M'_m} \quad (V-38)$$

Podle vzorce (V-38) lze určit susceptanci jakékoli clony, podaří-li se nám určit její vlastní funkce. Tato metoda se dobře hodí zejména pro tabelární vyjádření susceptanci.

## 48. Přehled clon používaných ve vlnovodech

48.1 Kapacitní clona v obdélníkovém vlnovodu (obr. 114).

Susceptance, vztahující se na charakteristickou admittanci obdélníkového vlnovodu, je dána vzorcí (pro souměrnou clonu)

$$\frac{B}{Y} = \frac{4\pi}{\lambda_g} \left\{ \ln \frac{2b}{\pi d} + \frac{1}{6} \left( \frac{\pi d}{2b} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{\lambda_g} \right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi d}{2b} \right)^2 \right] \right\} \quad \text{je-li } \frac{d}{b} \ll 1 \quad (V-39)$$

$$\frac{B}{Y} = \frac{2b}{\lambda_g} \left[ \left( \frac{\pi d'}{2b} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\pi d'}{2b} \right)^4 + \frac{3}{2} \left( \frac{b}{\lambda_g} \right)^2 \left( \frac{\pi d'}{2b} \right)^4 \right] \quad \text{je-li } \frac{d'}{b} \ll 1 \quad (V-40)$$

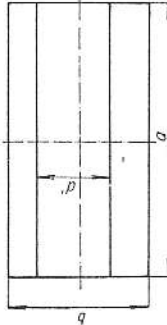
Tyto vzorce platí tehdy, je-li  $\frac{b}{\lambda_g} < 1$ . Ve vzorcích je

$\lambda_g$  délka vlny ve vlnovodu

$d'$  šířka šterbiny

$d$  šířka kovové části clony

$b$  menší rozměr ve vlnovodu.



Obr. 114. Kapacitní clona s rozměry.

Obr. 115. Křivky pro určení velikosti kapacitní clony.

Na křivkách obr. 115 je znázorněna vztažná susceptance v závislosti na poměru  $\frac{d}{b}$  při parametru  $\frac{b}{\lambda}$ .

48.2 Indukční (souměrná) clona v obdélníkovém vlnovodu

Reaktance vztážená na charakteristickou impedanci je dána výrazy

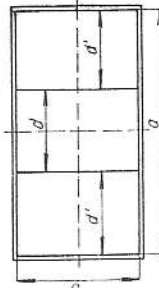
$$\frac{X}{Z_0} = \frac{a}{\lambda_g} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi d}{2a} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^2 \right], \quad \text{je-li } \frac{d}{a} \ll 1 \quad (V-41)$$

$$\frac{X}{Z_0} = \frac{a}{\lambda_g} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi d'}{a} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{\pi d'}{\lambda} \right)^2 \right], \quad \text{je-li } \frac{d'}{a} \ll 1 \quad (V-42)$$

Vzorců lze použít v tomto rozsahu vln:

$$\frac{2}{3} a < \lambda < 2a$$

Rozměry použité ve vzorcích jsou znázorněny na obr. 116. Křivky na obr. 117 udávají závislost vztažné reaktance na poměru  $\frac{d'}{a}$  při parametru  $\frac{a}{\lambda}$ .

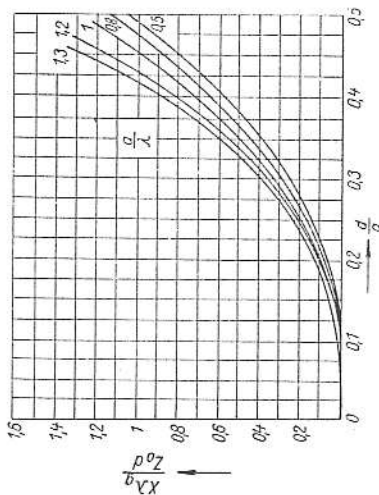


Obr. 116. Indukční clona s rozměry.

#### 48.3 Kulatý otvor v obdélníkovém vlnovodu

Je-li průměr otvoru malý proti menšímu rozměru vlnovodu, je určena vztázná susceptance vzorcem

$$\frac{B}{Y_0} = \frac{3}{2\pi} \frac{ab\lambda_g}{d^3} \text{ je-li } d \ll b \quad (\text{V-43})$$

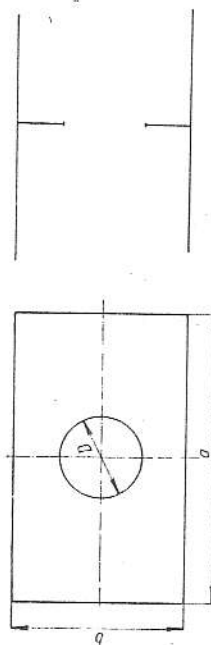


Obr. 117. Křivky pro určení velikosti indukční clony.

a je indukčního charakteru.

Tohoto vzorce lze použít v tomto rozsahu vln:

$$2a > \lambda > \frac{2a}{3}$$



Obr. 118. Kruhová clona v obdélníkovém vlnovodu.

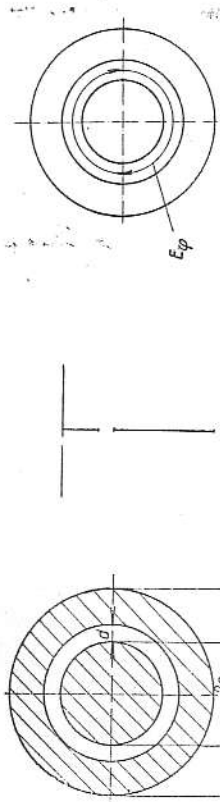
#### 48.4 Kulatý otvor v kruhovém vlnovodu (obr. 119)

Předpokládáme, že se vlnovodem šíří vlna  $TE_{01}$ . Clona má indukční charakter. Její vztáznou reaktanci určíme takto:

$$\frac{X}{Z_0} = r \left( \frac{\pi d}{2R} \right)^2 \frac{I_{01}^2 \left( \frac{3,83r}{R} \right)}{0,162} \quad (\text{V-44})$$

kde  $\lambda_g$  je vlnová délka vidu  $TE_{01}$ . Rozměry jsou znázorněny na obr. 119. Vzorce lze použít v tomto vlnovém rozsahu:

$$0,896R < \lambda < 1,04R$$

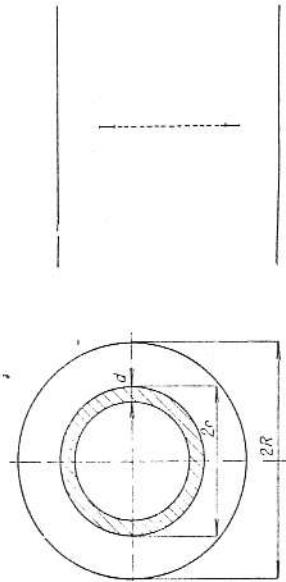


Obr. 120. Orientace intenzity elektrického pole v mezikruhové cloně.

Obr. 119. Mezikruhová clona ve válcovém vlnovodu.

#### 48.5 Kruhová překážka v kruhovém vlnovodu (obr. 121)

Tato mezikruhová překážka má kapacitní charakter. Její vztázná susceptance je dána vzorcem



Obr. 121. Clona ve tvaru kotouče v kruhovém vlnovodu.

$$\frac{B}{Y_0} = r \left( \frac{\pi d}{\lambda_g} \right)^2 \frac{I_{01}^2 \left( 2,405 \frac{r}{R} \right)}{0,269} \quad (\text{V-45})$$

Vzorce platí pro vlnu  $TM_{01}$  a pro vlnový rozsah

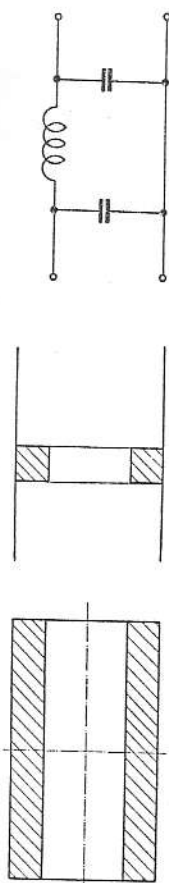
$$1,14R < \lambda < 2,61R$$

#### 49. Clony s konečnou tloušťkou

V čl. 45 jsme určili vstupní impedanci prostorového transformátoru, zatíženého charakteristickou impedancí vlnovodu. Dokázali jsme, že při nekonečně tenké cloně přejde prostorový transformátor v jednoduchý čtyřpól, vytvořený impedancí paralelně zapojenou k náhradnímu vedení vlnovodu. Bude-li však clona konečné tloušťky, nemůžeme ve vý-

razu (V-17.1) zanedbat energii elektromagnetického pole  $W$ . Transformátor je při cloně konečné tloušťky vytvořen prostorem uvnitř clony (obr. 122).

Transformátor se v tomto případě nechová jako impedance zapojená paralelně k náhradnímu vedení, nýbrž jako obecný čtyřpól, který si lze představit jako článek II nebo I.



Obr. 122. Čtyřpólový vazební prvek v obdélníkovém vlnovodu.

Tak můžeme na př. kapacitní clonu konečné tloušťky vyjádřit jako článek II, znázorněný na obr. 123.

Velikosti jednotlivých členů náhradních čtyřpólů s různými tvary clon najde čtenář v knize Справочник по волноводам (преклад), „Советское радио“, Москва 1952.

### 50. Dvoupólové soustavy vznikající změnou průřezu vlnovodu

V předcházející části jsme uvažovali prostorový transformátor zakončený vlnovodem, kterým se může šířit určitý vid elektromagnetické vlny. Je-li však transformátor zatížen vlnovodem, jehož rozměry jsou takové, že se jim nemůže šířit elektromagnetická vlna, nebude náhradním obvodem takového transformátoru čtyřpól, nýbrž dvoupól.

Charakteristická impedance vlnovodu bude v tomto případě imaginární, tedy ve vzorci (V-17) bude  $Y_2$  také imaginární, a potom podle rovnic (V-17) a (V-17.1) bude

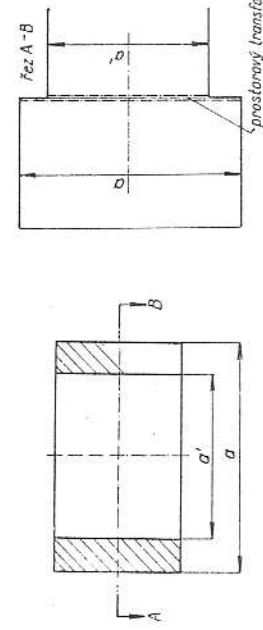
$$Y_1 = jB \quad (V-46)$$

kde

$$B = \frac{1}{k} \left( \frac{C_k}{G_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| + \sum_k \left( \frac{C_k}{G_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| - 2\omega W \frac{1}{C_1^2 M_1} \quad (V-47)$$

Z těchto vztahů je vidět, že náhradní obvod takového vlnovodového uspořádání je reaktance, již je zatížen vstupní vlnovod (obr. 124).

Nejjednodušší vznikne takový prostorový dvoupól skokovou změnou průřezu vlnovodu (obr. 125).



Obr. 125. Příklad dvoupólového zakončení vlnovodu.

Při tom jsou rozměry menšího vlnovodu takové, že se jim nešíří elektromagnetická vlna. Prostor transformátoru přechází ve dvě souměrné plochy, jak znázorňuje obr. 125. Susceptanci určíme podle vzorce (V-47), položíme-li v něm  $W = 0$ . Potom bude

$$B = \sum_k \left( \frac{C_k}{G_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| + \sum_k \left( \frac{C_k}{G_1} \right)^2 \frac{M_k}{M_1} |Y_k| \quad (V-47.1)$$

Podají-li se nám zjistit velikosti konstant  $C_k$ , budeme umět určit susceptanci. Pokusíme se určit konstanty metodou vlastních funkcí.

Na hranicích obou vlnovodů musí platit rovnost příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole. Příčná složka intenzity elektrického a magnetického pole ve vlnovodu označeném I budíž dána superposicí všech vidů

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} C_{en} E_{ln}$$

kde  $C_{en}$  je amplituda  $n$ tého vidu v prvním vlnovodu

$E_{ln}$  vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole.

Amplitudu intenzity magnetického pole  $n$ tého vidu určíme pomocí charakteristické admittance a amplitudy příčné složky intenzity elektrického pole

$$C_{ln} = Y_n C_{en}$$

Příčná složka intenzity magnetického pole je potom dána součtem

$$H_x = \sum_{n=1}^{\infty} C_{ln} E_{ln} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n C_{en} E_{ln}$$

neboť absolutní hodnota vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole se rovná absolutní hodnotě vlastní funkce příčné složky intenzity magnetického pole. V druhém vlnovodu dostaneme podobně

$$E'_x = \sum_{n=1}^{\infty} C'_{en} E'_{ln}$$

$$H'_x = \sum_{n=1}^{\infty} Y'_n C'_{en} E'_{ln}$$

kde  $E'_x$  je příčná složka intenzity elektrického pole, která přísluší druhému vlnovodu

$H'_x$  příčná složka intenzity magnetického pole v druhém vlnovodu.

Na hranicích obou vlnovodů musí platit identity

$$E_x = E'_x$$

$$H_x = H'_x$$

Dosadíme-li za  $E_x$ ,  $E'_x$ ,  $H_x$  a  $H'_x$  příslušné výrazy, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{en} E_{ln} = \sum_{n=1}^{\infty} C'_{en} E'_{ln}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n C_{en} E_{ln} = \sum_{n=1}^{\infty} Y'_n C'_{en} E'_{ln}$$

Násobíme obě rovnice vlastní funkcí druhého vlnovodu  $E'_{ln}$  a integrujeme v oboru plochy  $S'$  (průřezu druhého vlnovodu). Uvážíme-li ortogonální vlastnosti funkcí  $E'_{ln}$ , dostaneme

$$C'_{em} M'_{ln} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{en} \int_{S'} E_{ln} E'_{ln} dS$$

$$Y_m' C_{em}' M_m' = \sum_{m=1}^{\infty} C_{em} Y_n \int_{S'} E_{in} E_{im}' dS$$

kde  $M_m'$  je norma funkcí  $E_{im}'$ .

Označme čále

$$\int_{S'} E_{in} E_{im}' dS = A_{nm}$$

Potom bude

$$C_{em}' M_m' = \sum_{n=1}^{\infty} C_{en} A_{nm} \tag{V-48}$$

$$C_{em}' Y_m' M_m' = \sum_{n=1}^{\infty} C_{en} Y_n A_{nm} \tag{V-49}$$

Porovnáme-li obě předešlé rovnice, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{en} A_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{en} \frac{Y_n}{Y_m'} A_{nm}$$

Po úpravě bude

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{en} A_{nm} \left(1 - \frac{Y_n}{Y_m'}\right) = 0$$

oddělíme ještě člen s dominantním videm. Potom platí po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{en}}{C_{e1}} A_{nm} \left(1 - \frac{Y_n}{Y_m'}\right) = A_{1m} \left(\frac{Y_1}{Y_m'} - 1\right) \tag{V-50}$$

To je soustava rovnic s neznámými členy  $\frac{C_{en}}{C_{e1}}$ ; tyto vztahné amplitudy vzhledem k amplitudě dominantního vidu určíme řešením jmenované soustavy. Známe-li poměr  $\frac{C_{em}'}{C_{e1}}$  ze vztahu (V-48)

$$\frac{C_{em}'}{C_{e1}} = \frac{1}{M_m'} \sum_{n=1}^{\infty} C_{en} A_{nm} \tag{V-51}$$

Susceptanci přechodu určíme podle vzorce (V-47.1) kde v prvním součtu dosadíme za  $\frac{C_k}{C_1}$  poměr  $\frac{C_{em}'}{C_{e1}}$  a v druhém součtu dosadíme za  $\frac{C_k}{C_1}$  poměr  $\frac{C_{em}'}{C_{e1}}$ . Potom bude

$$\frac{B}{Z} = \sum_n \left(\frac{C_{en}}{C_1}\right)^2 \frac{M_n}{M_1} |Y_n| + \sum_m \left(\frac{C_{em}'}{C_{e1}}\right)^2 \frac{M_m'}{M_1} |Y_m'| \tag{V-51.1}$$

kde  $B$  je susceptance přechodu

$C_1$  amplituda dominantního vidu hlavního vlnovodu

$C_{en}$  amplituda vyššího vidu v hlavní vlnovodu

$M_n$  norma vyššího vidu  $n$  v hlavní části

$M_1$  norma dominantního vidu

$C_{em}'$  amplituda vyššího vidu v užším vlnovodu

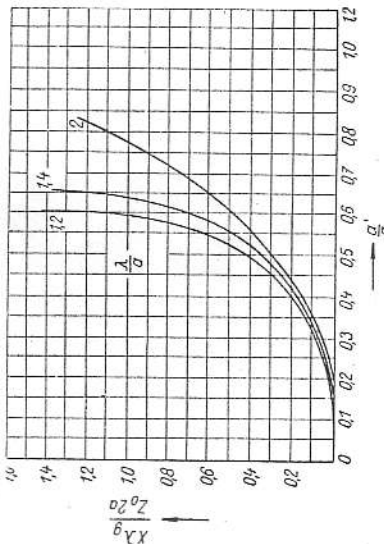
$M_m'$  norma vidu  $m$  v užším vlnovodu

$Y_n$  charakteristická admittance hlavní části vlnovodu vidu  $n$

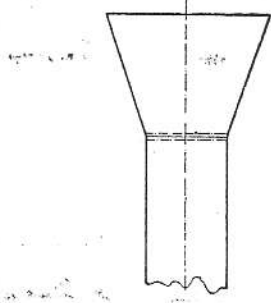
$Y_m'$  charakteristická admittance vedlejšího vlnovodu vidu  $m$ .

Na obr. 126 jsou uvedeny susceptance způsobené změnou rozměrů obdélníkového vlnovodu jako funkce rozměrů.

Podobně bychom určili susceptanci vlnovodu způsobenou trychťovým rozšířením vlnovodu (obr. 127).



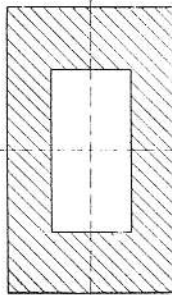
Obr. 126. Křivky pro určení velikosti reaktance dvou-pólového vlnovodového zakončení.



Obr. 127. Přechod vlnovodu na trychťové v. dení.

### 51. Resonanční okénko v obdélníkovém vlnovodu

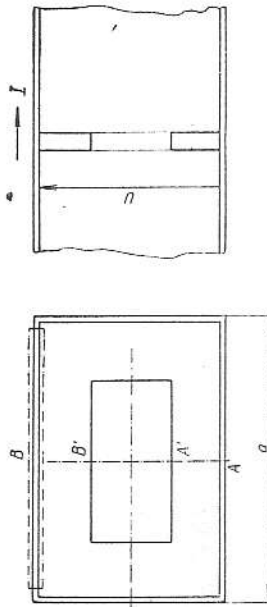
Podle vztahu (V-37) lze také vypočítat susceptanci takové clony, která má tvar znázorněný na obr. 128.



V tomto případě se mohou vybudit vyšší příčné vidy elektrické i vyšší příčné vidy magnetické. Ve zvláštním případě lze volit rozměry clony takové, aby susceptance byla nulová. Potom bude náhradní schéma takové clony paralelně laděný okruh. Jinak může mít tato clona bud kapacitní nebo indukční charakter.

Obvykle se v literatuře uvádějí zjednodušené vztahy pro podmínku resonance clony.

Obr. 128. Obecná clona v obdélníkovém vlnovodu.



Obr. 129. Orientace proudu v obecné cloně.

Předpokládáme, že clona má konečnou tloušťku, takže prostor uvnitř clony pokládáme za vlnovod. Aby nenastal odraz od clony, musí proud, tekoucí v podélném směru, přecházet spojitě z vlnovodu na vlnovod, jímž jsme nahradili clonu. Mimo to zavedeme další podmínku, že napětí ve středu vlnovodu a napětí ve středu clony jsou stejná (viz obr. 129).



Napětí ve středu vlnovodu určíme z křivkového integrálu  $\int (E \, ds)$ , kde za křivku  $l$  zvolíme spojnicí bodů A a B. Je tedy

$$U(x) = \int_A^B E_y \, dy = C \int_A^B \sin \frac{\pi}{a} x e^{i\gamma z} = Cb e^{i\gamma z} \quad \text{pro } x = \frac{a}{2} \quad (\text{V-52})$$

kde  $U(x)$  je napětí v místě  $x = \frac{a}{2}$ .

Proud, který má být na rozhraní vlnovodu a clony, teče ve směru osy  $z$ . Tento proud je způsoben složkou intenzity magnetického pole  $H_x$ . Celkový proud, tekoucí v podélném směru, je dán cirkulací

$$I_c = \oint (H \, ds)$$

Integrační cestu znázorňuje obr. 130.

Protože je

$$H_x = Y_0 C \sin \frac{\pi}{a} x e^{i\gamma z}$$

kde  $Y_0$  je charakteristická admittance, je

$$I_c = CY_0 \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} x e^{i\gamma z} \, dx = CY_0 \frac{2a}{\pi} e^{i\gamma z} \quad (\text{V-53})$$

Obdobně bychom dostali pro proud a napětí na šterbině clony (je-li v místě  $z = 0$ )

$$U' = C'b' \quad (\text{V-54})$$

$$I_c' = C'Y_0' \frac{2a'}{\pi} \quad (\text{V-55})$$

Obě tyto veličiny musí být na rozhraní spojitě. To znamená, že v místě clony musí platit

$$U' = U$$

$$I_c' = I$$

Z této podmínky vyplývá

$$Cb = C'b'$$

$$CY_0 \frac{2a}{\pi} = C'Y_0' \frac{2a'}{\pi}$$

Tato soustava má řešení tehdy, je-li její determinant nulový, to znamená, že musí platit

$$\frac{b}{a} \frac{1}{Y_0} = \frac{b'}{a'} \frac{1}{Y_0'}$$

Dosadíme-li za  $Y_0$  a  $Y_0'$  charakteristické admittance vidu TE<sub>1,0</sub>, dostaneme

$$\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{b'}{a'} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'}\right)^2}} \quad (\text{V-56})$$

kde jsme za admittanci vlnovodu  $Y_0$  dosadili výraz

$$Y_0 = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

a za admittanci vlnovodu, nahrazující clonu, výraz

$$Y_0' = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'}\right)^2}}$$

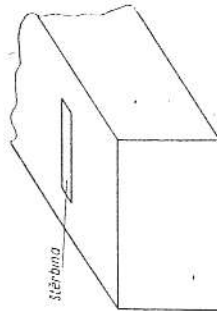
kde  $a$  a  $b$  jsou rozměry vlnovodu  $a'$  a  $b'$  rozměry clony okénka.

Při daném  $a$  a  $b$  představuje tato rovnice s proměnnými  $a'$  a  $b'$  hyperbolu procházející vrcholy obdélníku, tvořícího obrys vlnovodu, jejíž velká poloosa se rovná  $\frac{\lambda}{4}$  (obr. 131).

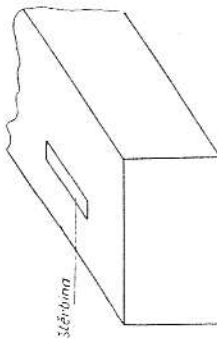
Clona, znázorněná na obr. 128, nebude mít vliv na šíření elektromagnetické vlny tehdy, budou-li její rozměry vyhovovat rovnici (V-56). Náhradní obvod clony je v tomto případě paralelně připojený paralelní rezonanční okruh (obr. 131).

## 52. Nespojitosť způsobená šterbinami v plášti vlnovodu

V tomto článku si vysvětlíme, jaké impedanční nespojitosti jsou způsobeny šterbinami v plášti obdélníkového vlnovodu. Všimneme si dvou případů. V prvním případě je šterbina v širší stěně vlnovodu a je umístěna tak, že její delší rozměr je rovnoběžný s osou vlnovodu (obr. 132).



Obr. 132. Podélná šterbina v obdélníkovém vlnovodu.

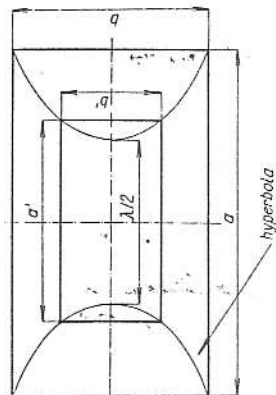


Obr. 133. Příčná šterbina v obdélníkovém vlnovodu.

V druhém případě je šterbina umístěna v širší stěně vlnovodu, avšak její rozměr je kolmý k ose vlnovodu (viz obr. 133).

### 52.1 Šterbina v širší stěně vlnovodu, rovnoběžná s osou $z$

Předpokládejme, že šířka šterbiny je poměrně menší než její délka a zanedbejme vliv konečné tloušťky stěny vlnovodu. Pak bude intenzita elektrického pole v této šterbině



Obr. 131. Resonanční okénko.

kolmá na delší rozměr štěrbiny.<sup>2)</sup> Dokážeme, že náhradní obvod této štěrbiny bude impedance, paralelně připojená k náhradnímu vedení vlnovodu.

Uřídíme vybuzení dominantního vidu intenzitou elektrického pole v této štěrbině. Podle vzorce (IV-46) je amplituda této vidu Hertzova magnetického vektoru  $\Pi_z^m$ , vybuzená štěrbinou

$$T_{z1} = \frac{1}{2\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} M_1 e^{-\gamma_1 z} \int_{S_1} \left\{ j\omega \epsilon (\mathbf{E} \mathbf{t}) T_1 e^{\gamma_1 z} - \frac{1}{j\omega \mu} \left[ \mathbf{n} \operatorname{grad}_t \operatorname{div} (T_1 e^{\gamma_1 z} \mathbf{z}) \right] \mathbf{E} \right\} dS \quad (\text{V-57})$$

Tento vzorec platí pro souřadnici  $z$  ležící napravo od štěrbiny, tedy pro  $z > z_2$  (viz obr. 132). Pro  $z < z_1$  platí obdobně

$$T_{z2} = \frac{1}{2\gamma_1} \frac{1}{T_1^2} M_1 e^{\gamma_1 z} \int_{S_2} \left\{ j\omega \epsilon (\mathbf{E} \mathbf{t}) T_1 e^{-\gamma_1 z} - \frac{1}{j\omega \mu} \left[ \left( \mathbf{n} \operatorname{grad}_t \operatorname{div} (T_1 e^{-\gamma_1 z} \mathbf{z}) \right) \right] \mathbf{E} \right\} dS \quad (\text{V-58})$$

Jak jsme již uvedli, je intenzita elektrického pole ve štěrbině kolmá na osu  $z$  a má v našem případě směr osy  $x$ . Je tedy

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}$$

kde  $E$  je absolutní hodnota intenzity elektrického pole ve štěrbině.

Vektor  $\mathbf{t}$  v předcházejících výrazech je jednotkový vektor kolmý na jednotkový vektor normály  $\mathbf{n}$  a na směr šíření  $z$ . Proto

$$\mathbf{t} = [\mathbf{n} \mathbf{z}] = \mathbf{x}$$

Dominantní vid je u obdélníkového vlnovodu vid  $\text{TE}_{10}$ .<sup>3)</sup> Uvážíme-li směr intenzity elektrického pole ve štěrbině a směr vektoru  $\operatorname{grad} \operatorname{div} (T_1 e^{-\gamma_1 z} \mathbf{z})$  ( $T_1$  je vlastní funkce dominantního vidu  $T_1 = \cos \frac{\pi}{a} x$ ), platí

$$\left[ \left( \mathbf{n} \operatorname{grad} \operatorname{div} (T_1 e^{\gamma_1 z} \mathbf{z}) \right) \right] \mathbf{E} = \left( \mathbf{n} \left[ \operatorname{grad} \operatorname{div} (T_1 e^{\gamma_1 z} \mathbf{z}) \right] \mathbf{E} \right)$$

Po dosazení

$$\left[ \left( \mathbf{n} \operatorname{grad} \operatorname{div} (T_1 e^{\gamma_1 z} \mathbf{z}) \right) \right] \mathbf{E} = \frac{\partial e^{\gamma_1 z}}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial x} E(\mathbf{n}[\mathbf{x} \mathbf{x}]) = 0$$

Potom se vzorce (V-57) a (V-58) zjednoduší takto:

$$T_{z1} = e^{-\gamma_1 z} \frac{1}{T_1^2} \frac{1}{2\gamma_1} M_1 \int_{S_1} (j\omega \epsilon E T_1 e^{\gamma_1 z}) dS \quad \text{pro } z > z_2$$

$$T_{z2} = e^{\gamma_1 z} \frac{1}{T_1^2} \frac{1}{2\gamma_1} M_1 \int_{S_2} (j\omega \epsilon E T_1 e^{-\gamma_1 z}) dS \quad \text{pro } z < z_1$$

kde  $T_z$  je amplituda Hertzova vektoru vlny postupující v kladném směru (napravo od štěrbiny),

$T_z$  amplituda Hertzova vektoru vlny postupující v záporném směru (nalevo od zdroje).

<sup>2)</sup> Podrobně se štěrbínami zabýval sovětský vědec I. N. Fel'd.

<sup>3)</sup> Pokud nebude blíže vysvětleno, bude dále symbol  $T_1$  znamenat vlastní funkci dominantního vidu,  $T_2$  amplitudu dominantního vidu a  $M_1$  normu vlastní funkce dominantního vidu.

Známe-li amplitudu Hertzova vektoru, určíme intenzitu elektrického pole podle rovnice (I-34)

$$E_y = -j\omega \mu_0 \operatorname{rot}_y \Pi_z^m = -j\omega \mu_0 T_1^2 \operatorname{rot}_y T_1 z = \\ = -j\omega \mu_0 \frac{1}{T_1^2} \frac{1}{2\gamma_1} e^{\mp \gamma_1 z} \frac{1}{M_1} \operatorname{rot}_y T_1 z \int_{S_3} j\omega \epsilon T_1 e^{\pm \gamma_1 z} E dS,$$

kde  $E$  je absolutní hodnota intenzity elektrického pole ve štěrbině. Pokládejme za počátek čtení souřadnice  $z$  střed štěrbiny. Potom bude

$$\int_{S_3} T_1 e^{\pm \gamma_1 z} E dS = T_1 d \int_{-d/2}^{d/2} E(z) e^{\pm \gamma_1 z} dz$$

kde  $d$  je šířka štěrbiny,  $l$  délka štěrbiny.

Protože je uspořádání intenzity elektrického pole  $E(z)$  ve štěrbině souměrné vzhledem k počátku, je

$$\int_{-d/2}^{d/2} T_1 E(z) e^{-\gamma_1 z} dz = \int_{-d/2}^{d/2} T_1 E(z) e^{+\gamma_1 z} dz$$

Z toho vyplývá, že intenzita elektrického pole, vybuzená štěrbinou, má stejnou velikost pro oba směry šíření

$$E_y^+ = E_y^-$$

To znamená, že je intenzita elektrického pole v místě  $z = 0$  spojitá.

Přičnou složku intenzity magnetického pole dostaneme podle vzorce (I-36)

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_z^m \equiv \mathbf{H}_x = \operatorname{grad}_y \operatorname{div} \Pi_z^m$$

Po dosazení za  $\Pi_z^m$  bude

$$H_x^+ = \operatorname{grad}_y \operatorname{div} (T_1 T_2 z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{T_1^2} T_1 \frac{1}{M_1} e^{-\gamma_1 z} \int_{S_3} j\omega \epsilon_0 E T_1 e^{\gamma_1 z} dS$$

a

$$H_x^- = \frac{1}{2} \frac{1}{T_1^2} T_1 \frac{1}{M_1} e^{+\gamma_1 z} \int_{S_3} j\omega \epsilon_0 E T_1 e^{-\gamma_1 z} dS$$

Porovnáme-li oba vztahy, zjistíme, že v místě  $z = 0$  platí

$$H_x^+ = -H_x^-$$

Jak jsme již poznali, je napětí ve středu vlnovodu u obdélníkového vlnovodu s vlnou  $\text{TE}_{10}$  úměrné intenzitě elektrického pole  $E_y$  pro  $x = \frac{a}{2}$ , kde  $a$  je větší rozměr vlnovodu.

Proto v místě středu štěrbiny je

$$U^+ = +U^-$$

kde  $U^+$  je napětí, které přísluší vlně šířící se v kladném směru

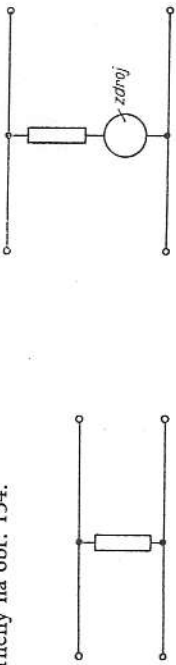
$U^-$  napětí, které přísluší vlně šířící se v záporném směru.

Proud protékající ve směru osy vlnovodu je úměrný intenzitě magnetického pole  $H_x$ .

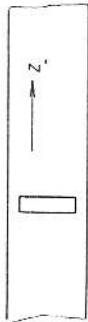
Proto je

$$I_z^+ = -I_z^-$$

Je tedy ve středu štěrbiny napětí spojitě, avšak proud není spojitý. Aby takové podmínky vznikly, musí mít náhradní schéma buzení vlnovodu štěrbinou, rovnoběžnou s osou  $z$  tvar znázorněný na obr. 134.



Obr. 134. Náhradní schéma štěrbiny jako zdroje. Obr. 135. Náhradní schéma štěrbiny.



Obr. 136. Příčná štěrbina ve vlnovodu ( $s$  označením proudů).

Nebudíme-li štěrbinu vnějším polem, nýbrž vlastním polem vlnovodu, bude její vliv takový, jako by byla připojena paralelně k náhradnímu vedení vlnovodu (obr. 135).

### 52.2 Štěrbina kolmá k ose $z$ (obr. 136)

V tomto případě má intenzita elektrického pole ve štěrbine směru osy  $z$ , a tedy  $(\mathbf{E}t) = 0$ , neboť  $\mathbf{t} = [nz]$ .

Budeme tedy uvažovat ve vztahu (V-57) jen druhý člen pod integrálem. Potom bude

$$T_2 = -e^{-\gamma z} \frac{1}{2\gamma_1 \Gamma_1^2} j\omega I_0 \frac{1}{M_1} \int_{s_1} \int_{s_2} (\mathbf{n} | \text{grad div} (T_1 e^{\gamma_1 z}) \mathbf{E} |) dS =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\gamma_1 z} \frac{1}{\Gamma_1^2} j\omega I_0 \frac{1}{M_1} \int_{s_1} \int_{s_2} \text{grad}_x T_1 | e^{\gamma_1 z} E dS$$

a obdobně

$$T_2 = -\frac{1}{2} e^{\gamma_1 z} \frac{1}{\Gamma_1^2} j\omega I_0 \int_{s_1} \int_{s_2} \text{grad}_x T_1 | e^{-\gamma_1 z} E dS$$

Protože je štěrbina ve směru osy  $z$  úzká, umístěná v místě, kde  $z = 0$ , je

$$T_1^+ = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma_1^2} j\omega I_0 \frac{1}{M_1} \int_{s_1} \int_{s_2} \text{grad}_x T_1 | E dS \quad \text{pro } z = 0^+$$

$$T_1^- = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma_1^2} j\omega I_0 \frac{1}{M_1} \int_{s_1} \int_{s_2} \text{grad}_x T_1 | E dS \quad \text{pro } z = 0^-$$

Obr. 137. a — náhradní schéma příčné štěrbiny; b — uspořádání šikmé štěrbiny v širší a užší straně vlnovodu; c — náhradní schéma šikmé štěrbiny v širší a užší straně vlnovodu.

V tomto případě, jak se snadno přesvědčíme, je

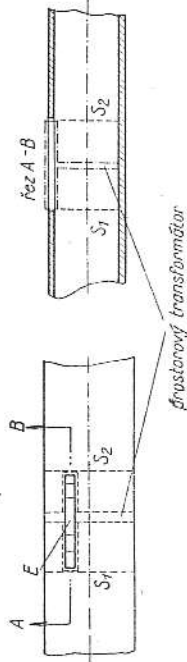
$$\left. \begin{aligned} E_y^+ &= -E_y^- \\ H_x^+ &= H_x^- \end{aligned} \right\} \text{pro } z = 0$$

Protože intenzita magnetického pole  $H_x$  a tím i proud jsou v místě štěrbiny pro kladnou i zápornou vlnu spojitě, plyne z toho, že náhradní schéma štěrbiny podle obr. 136 je seriová impedance (viz obr. 137a).

Stejně bychom dokázali, že štěrbiny ve stěně vlnovodu, znázorněné na obr. 137b, mají náhradní schéma podle obr. 137c.

### 53. Výpočet vztažné impedance štěrbiny

Vyvoříme u vlnovodu se štěrbinou prostorový transformátor tak, jak znázorňuje obr. 138.



Obr. 138. Štěrbina jako zvláštní případ prostorového transformátoru.

Plochy  $S_1$  a  $S_2$  jsou plochy omezuující prostorový transformátor a jsou totožné s průřezem vlnovodu. Uvážíme-li energetické poměry transformátoru, dostaneme tento vztah:

$$\frac{1}{2} \int_{s_1} E_t H_t^* dS + \frac{1}{2} \int_{s_2} E_t H_t^* dS + \frac{1}{2} \int_{s_3} E H^* dS = j\omega W \quad (\text{V-59})$$

Tento vztah se liší od vztahu (V-9.1) jen integrálem  $\frac{1}{2} \int_{s_3} E H^* dS$ , který určuje výkon vyzářený štěrbinou. Označíme tento výkon  $P_v$ .

Dosadíme-li za  $E_t$  a  $H_t$  řadu vlastních funkcí intenzity elektrického a magnetického pole a uvážíme-li ortogonální vlastnosti těchto funkcí, dostaneme

$$\left. \begin{aligned} \int_{s_1} E_t H_t^* dS &= C_1^2 Y M_1 - \sum_k C_k^2 Y_k M_k \\ \int_{s_2} E_t H_t^* dS &= -C_2^2 Y_1 M_1 - \sum_k C_k^2 Y_k M_k \end{aligned} \right\} \quad (\text{V-60})$$

kde  $C_1$  je amplituda dominantního vidu intenzity elektrického pole v místě  $S_1$ ,  $C_2$  amplituda dominantního vidu v místě  $S_2$  (zahrnující vliv štěrbiny),  $Y_k$  amplituda intenzity elektrického pole vidu  $k$ ,  $Y_k$  charakteristická admittance vidu  $k$ ,  $C_k^2$  amplituda dominantního vidu intenzity elektrického pole v místě  $S_2$ .

součet složek  $C_k^2 Y_k M_k$  v místě  $S_1$

$\sum_k C_k^2 Y_k M_k$  součet uvažovaný v místě  $S_2$

$M_1$  norma vlastní funkce dominantního vidu intenzity elektrického pole

$M_k$  norma vlastní funkce vidu  $k$  intenzity elektrického pole.

Dosaďte rovnici (V-60) do rovnice (V-59) a dostaneme

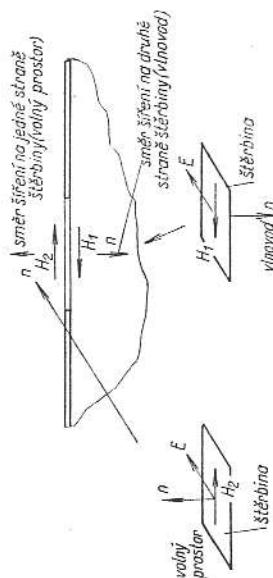
$$Y = Y_1 \frac{C_2^2}{C_1^2} + \sum_k \frac{C_k^2}{C_1^2} Y_k \frac{M_k}{M_1} + \sum_k \frac{C_k^2}{C_1^2} Y_k \frac{M_k}{M_1} - \frac{2P_v}{C_1^2 M_1} W \quad (V-61)$$

Protože charakteristická admittance nedominantního vidu  $k$  je imaginární, jsou oba součtové výrazy vztahu (V-61) imaginární. Proto platí o reálné složce vstupní admittance

$$G = Y_1 \frac{C_2^2}{C_1^2} + \frac{2\text{Re } P_v}{C_1^2 M_1} \quad (V-61.1)$$

kde  $G$  je reálná složka vstupní admittance  $P_v$  výkon vyzářený šěrbinou.

Dopadne-li elektromagnetická vlna na úsek vlnovodu se šěrbinou, část energie se odrazí, část se vyzáří šěrbinou, část projde další částí vlnovodu. Při tom se v šěrbině vybudí intenzita elektrického pole. Je-li šířka šěrbinou nesrovnatelně menší než délka šěrbin, vybudí se taková intenzita elektrického pole, která má směr kolmý k dělicímu rozměru šěrbin. Průběh pole podél šěrbiny bude kosinový (je-li počátek ve středu šěrbiny).



Obr. 139. Uspořádání intenzity elektrického a magnetického pole ve šěrbině.

Všimneme si podrobně impedančních vlastností šěrbin, která je rovnoběžná s osou vlnovodu a je umístěna v širší stěně vlnovodu (Obr. 139).

V tomto případě bude uspořádání intenzity elektrického pole vyjádřeno vztahem

$$E = E \cos kx$$

rovná-li se délka šěrbiny polovině délky vlny ve volném prostoru. Podrobnější výklad o uspořádání intenzity elektrického pole v šěrbinách najde čtenář v knize: I. N. Fel'd, Теория волновых аппаратов.

Protože je šěrbinou překážkou pro elektromagnetickou vlnu, odrazí se část energie. Tato odražená část je vybudena intenzitou elektrického pole v šěrbině. Známe-li průběh intenzity elektrického pole v šěrbině, umíme určit intenzitu elektrického pole odražené vlny. Označme amplitudu intenzity elektrického pole odražené vlny  $C_0$ . Pomocí této amplitudy určíme amplitudu  $C_1$  intenzity elektrického pole dominantního vidu v místě  $S_1$ .

Se zřetelím na energetickou rovnováhu platí, že energie dopadající elektromagnetické vlny se rovná součtu energie odražené vlny, energie vyzářené šěrbinou a energie postupující elektromagnetické vlny za šěrbinou. Označme amplitudu dopadající vlny  $C_0$ , amplitudu odražené vlny  $C_0$  a postupující vlny za šěrbinou  $C_1$ . Potom platí

$$\frac{1}{2} C_1^2 Y_1 M_1 = \frac{1}{2} C_0^2 Y_1 M_1 + \text{Re } P_v + \frac{1}{2} C_0^2 Y_1 M_1$$

Z toho vyplývá

$$C_1^2 = C_0^2 + C_p^2 + \frac{2\text{Re } P_v}{Y_1 M_1} \quad (V-62)$$

V předchozí části jsme dokázali, že intenzita elektrického pole je v místě šěrbin spojita, je-li šěrbinou rovnoběžná s osou vlnovodu a umístěna v širší stěně vlnovodu. Proto platí v místě  $S_1$  vztah

$$C_1 + C_0 = C_0 e^{j\pi/2} = C_1 \quad (V-63)$$

kde  $C_1 = C_1 + C_0$  je celková amplituda intenzity elektrického pole v místě  $S_1$  (rovná součtu amplitud vlny dopadající a odražené).

Výraz  $C_0 e^{+j\pi/2}$  je amplituda postupující elektromagnetické vlny, transformovaná do místa  $S_1$  (l je délka šěrbiny). Řešením rovnice (V-62) a (V-63) dostaneme, uvážíme-li, že čtverce amplitud jsou vlastně čtverce absolutních hodnot amplitud,

$$C_1 = -\frac{\text{Re } P_v}{Y_1 M_1} \frac{1}{C_0} \quad (V-64)$$

Tím jsme vyjádřili amplitudu  $C_1$  pomocí amplitudy  $C_0$ , která je určena amplitudou vybudzenou intenzitou elektrického pole v šěrbině.

Dosadíme-li rovnici (V-64) do rovnice (V-61.1) a uvážíme-li [viz rovnici (V-63)], že  $C_1^2 = C_0^2 = C_0^2$  (amplituda  $C_2$  v místě  $S_2$  je amplituda postupné vlny  $C_0$ ), dostaneme

$$G = Y_1 + \frac{2Y_1^2 M_1 |C_0|^2}{\text{Re } P_v} \quad (V-65)$$

Admittanci v místě  $S_1$ , vztáženou na charakteristickou admittanci dominantního vidu  $Y$ , označnou  $g$ , určíme potom ze vztahu

$$g = \frac{G}{Y_1} = 1 + \frac{2Y_1 M_1 |C_0|^2}{P_v} \quad (V-66)$$

kde  $Y_1$  je charakteristická admittance vlnovodu

$M_1$  norma vlastní funkce intenzity elektrického pole dominantního vidu

$C_0$  amplituda intenzity elektrického pole odražené vlny

$P_v$  výkon vyzářený šěrbinou.

Amplitudu odražené vlny  $C_0$  určíme ze vztahu, odvozených pro buzení vlnovodu šěrbinou. Uvedli jsme již, že vlastní funkce příčné složky intenzity elektrického pole ve vlnovodu s vlnou TE vidu l je

$$E_{nl} = C_{nl} \text{Re}[\text{grad } T_{1l} \text{vz}].$$

Vyjádříme-li intenzitu elektrického pole z Hertzova vektoru, platí [viz rovnice (II-24)]

$$E_{nl} = -j\omega\mu T_{1l}[\text{grad } T_{1l} \text{vz}]$$

Porovnáme-li oba výrazy, dostaneme převod mezi amplitudou  $C_{nl}$  a amplitudou  $T_{1l}$ :

$$C_{nl} \text{TE} = -j\omega\mu T_{1l} \quad (V-67)$$

V kap. IV jsme řešili buzení vlnovodu šěrbinou. Zjistili jsme, že pro amplitudu vlny vidu TE, buzenou šěrbinou, platí

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_l} \frac{1}{T_{1l}^2} M_1 e^{+j\gamma_l z} \int_{S_k} \int_{S_k} \text{grad}(\mathbf{E}\mathbf{E}) T_{1l} e^{-j\gamma_l z} - \frac{1}{j\omega\mu} (\text{grad div}(T_{1l} e^{-j\gamma_l z}) \mathbf{z}) \mathbf{E} \} dS$$

kde  $\mathbf{t}$  je jednotkový vektor kolmý k jednotkovému vektoru  $\mathbf{z}$  a  $k$  jednotkovému vektoru normální  $\mathbf{n}$   $\mathbf{E}$  intenzita elektrického pole v šěrbině.

Jak jsme již uvedli, má tato intenzita průběh

$$E = E \cos kx$$

je-li počátek ve středu šěrbiny.

Jednotkový vektor  $\mathbf{t}$  má v našem případě směr osy  $x$ . Druhý člen pod integrálem se nebude rovnat nule tehdy, budeme-li uvažovat u grad div  $(T_{1l} e^{-j\gamma_l z})$  jen složku ve směru osy  $z$ . Potom dostaneme po úpravě

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_l} \frac{1}{T_{1l}^2} M_1 e^{j\gamma_l z} \frac{1}{j\omega\mu} \int_{S_k} \int_{S_k} T_{1l} \mathbf{E} \cos kx e^{-j\gamma_l z} dS$$

V našem případě jde o vybudzení dominantního vidu  $T_{11}$ . Šěrbinou je ve směru osy  $x$  úzká, takže vlastní funkci v místě šěrbiny lze pokládat za konstantní, a je-li šěrbinou v místě  $x = x_0$ , bude

$$T_{11} = \sin \frac{\pi}{a} x_0 \quad (\text{v místě šěrbiny})$$

Při tom považujeme za počátek souřadnice  $x$  místo na ose vlnovodu (na rozdíl od předchozích případů). Na základě toho je

$$T_{21} = \frac{1}{2j\gamma_l} \frac{1}{M_1} \frac{1}{j\omega\mu} E d \sin \frac{\pi}{a} x_0 \int_0^a \cos kx e^{-j\gamma_l z} dz$$

kde  $T_2$  je amplituda dominantního vidu v místě plochy  $S_1$ , vybuzená intenzitou elektrického pole ve šterbině  
 $d$  šířka šterbiny  
 $l$  délka šterbiny.

Plocha  $S_1$  leží v místě se souřadnicí  $z = 0$ .

Jednoduchý vztah pro intenzitu elektrického pole v místě šterbiny ( $E = E \cos kx$ ) platí tehdy (jak dokázal Pistolors), jde-li o rezonanční šterbinu, t. j. o rákovou šterbinu, jejíž délka se rovná polovině délce vlny ve volném prostoru. Potom je  $l = \frac{1}{2}\lambda$ . Vyjádříme-li integrál ve vztahu pro  $T_2$  číselně, dostaneme

$$T_2 = -\frac{k}{\gamma_1} \frac{1}{\omega \mu M_1} \frac{1}{T_1^2} e^{2\lambda k} Ed \sin \frac{\pi}{a} x_0 \cos \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g} \quad (V-68)$$

kde  $\gamma_1$  je konstanta přenosu dominantního vidu

$M_1$  norma vlastní funkce  $T_1$  ( $M_1 = \frac{1}{2}ab$ )

$E$  absolutní hodnota intenzity elektrického pole ve středu šterbiny

$d$  šířka šterbiny

$x_0$  souřadnice určující polohu šterbiny ve směru osy  $x$

$\lambda_g$  délka vlny ve vlnovodu

$T_1$  přčná konstanta vlnovodu ( $T_1 = \frac{\pi}{a}$ ).

Známe-li amplitudu Hertzova vektoru  $T_2$ , určíme amplitudu vlastní funkce přčné složky intenzity elektrického pole podle rovnice (V-67)

$$C_{el}^{TE} = C_0 = -\frac{jk}{\gamma_1} \frac{1}{M_1} \frac{1}{T_1^2} e^{2\lambda k} Ed \sin \frac{\pi}{a} x_0 \cos \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g}$$

Známe-li  $C_0$ , určíme vztahovou admittanci šterbiny podle rovnice (V-65). Při tom musíme uvážit, že v rovnici (V-66) je  $M_1$  norma vlastní funkce přčné složky intenzity elektrického pole, a dokázali jsme, že platí obecně o normě vlastní funkce přčné složky intenzity elektrického pole (viz rovnici (V-7a))

$$M_k^{TE} = \Gamma_k^2 M_k$$

kde  $M_k$  je norma vlastní funkce Hertzova vektoru.

V našem případě tedy platí

$$M_1 = \Gamma_1^2 M$$

Potom

$$g = 1 + \frac{2Y_1 \Gamma_1^2 M_1 k^2}{\gamma_1^2 M_1^2} \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{1}{T_1^2} E^2 d^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x_0 \cos^2 \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g} \operatorname{Re} P_v$$

kde  $P_v$  je výkon vyzářený šterbinou.

Tento výkon lze vyjádřit pomocí napětí ve středu šterbiny a pomocí vyzářovacího odporu šterbiny (viz Fradin: Anteny pro decimetrové a centimetrové vlny). Napětí ve středu šterbiny je dáno součinem  $Ed$ . Proto je

$$\operatorname{Re} P_v = \frac{1}{2} \frac{E^2 d^2}{R_v}$$

kde  $R_v$  je vyzářovací odpor šterbiny.

Uvážíme-li, že  $M_1 = \frac{1}{2}ab$ ,  $\Gamma_1 = \frac{\pi}{a}$ , upravíme vztah pro  $g$  takto:

$$g = 1 + 8R_v Y_1 \frac{k^2}{\gamma_1^2} \frac{1}{\pi^2} \frac{a}{b} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g}$$

Je dokázáno, že vyzářovací odpor šterbiny (vyzařuje-li jen jedním směrem jako u vlnovodu) je

$$R_v = 1000 \Omega$$

Charakteristická admittance obdélníkového vlnovodu s dominantním videm je

$$Y_1 = \frac{1}{120\pi} \sqrt{1 - v^2}$$

kde  $v$  je poměr délky vlny k mezní délce vlny. Protože

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - v^2}}$$

při čemž  $\lambda_g$  je délka vlny ve vlnovodu

délka vlny ve volném prostoru,

lze psát

$$Y_1 = \frac{1}{120\pi} \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

Uvážíme-li, že  $\frac{k}{\gamma_1} = \frac{\lambda_g}{\lambda}$ , dostaneme pro vztahovou admittanci šterbiny

$$g = 1 + \frac{400}{60\pi} \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{a}{b} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_0 \cos^2 \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g} \quad (V-69)$$

kde  $g$  je vztahová admittance šterbiny (na charakteristickou admittanci vlnovodu), umístěná v konečné dlouhém vlnovodu podle obr. 132

$\lambda_g$  délka vlny ve vlnovodu

délka vlny ve volném prostoru

$a, b$  rozměry obdélníkového vlnovodu

$x_0$  souřadnice určující polohu šterbiny.

Ze vzorce (V-69) vyplývá, že reálná složka admittance  $g$  šterbiny, je-li umístěna v místě o souřadnici  $x_0 = 0$  (na ose vlnovodu), je nulová. To znamená, že šterbina umístěná v ose vlnovodu nevyzařuje a nemá podstatný vliv na šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu.

Obdobně bychom odvodili, že reálnou složku impedance šterbiny, umístěné v širší strně vlnovodu kolmo na osu vlnovodu, určíme podle vzorce

$$r = 0,523 \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \frac{\lambda^2}{ab} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} \cos^2 \frac{\pi \lambda}{4x} \quad (V-70)$$

kde  $r$  je vztahová reálná složka impedance šterbiny (vztahená na charakteristickou impedance vlnovodu)

délka vlny ve vlnovodu

použitá délka vlny

$a, b$  rozměry vlnovodu

$x_0$  vzdálenost osy šterbiny od osy vlnovodu.

Vlastnosti této šterbiny určujeme pomocí impedance (ne admittance) proto, že u šterbiny uvedeného druhu je intranzita elektrického pole v místě šterbiny nespjitá, a proto je, jak jsme již odvodili, náhradní obvod šterbiny impedance zapojený do serie s vedením.

Všechny uvažované případy se týkaly vlnovodů na obou stranách otevřených (napříkladno). Bude-li však vlnovod na jedné straně od šterbiny omezen dokonale vodivou stěnou (nakrátko), změní se vzorec (V-69) a (V-70) tak, že za vztahovou charakteristickou admittanci nebo impedance musíme dosadit charakteristickou admittanci nebo impedance části vlnovodu za šterbinou. Charakteristická admittance nebo impedance bezstržtového vlnovodu zakoněného nakrátko je určena vztahem

$$Y_k = -jY_1 \cotg \frac{2\pi}{\lambda_g} l$$

$$Z_k = jZ_1 \tg \frac{2\pi}{\lambda_g} l$$

kde  $Y_k$  je admittance vlnovodu nakrátko

$l$  délka úseku vlnovodu nakrátko

impedance vlnovodu nakrátko

$Z_k$  charakteristická admittance obdélníkového vlnovodu s videm  $TE_{10}$

$Z_1$  charakteristická impedance obdélníkového vlnovodu s videm  $TE_{10}$

Dosadíme-li vztah pro  $Y_k$  do rovnice (V-69) a (V-70) místo vztahové charakteristické admittance a impedance, dostaneme

$$g = -j \cotg \frac{2\pi}{\lambda_g} l + 2,1 \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{a}{b} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_0 \cos^2 \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g} \quad (V-71)$$

$$r = j \tg \frac{2\pi}{\lambda_g} l + 0,523 \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \frac{\lambda^2}{ab} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} \cos^2 \frac{\pi \lambda}{4a} \quad (V-72)$$

Je nutno připomenout, že vzorec (V-71) a (V-72) platí za předpokladu, že imaginární složky impedance a admittance, způsobené šterbinou, zanedbáme proti imaginárním složkám částí vlnovodů zakončených nakrátko.

Znalost impedančních vlastností šterbin je velmi důležitá při praktickém provádění šterbinových anten.

#### PŘÍKLADY

**Příklad 1.** Určete indukčnost clony (podle obr. 103), předpokládáme-li v otvoru clony sinusový průběh intenzity elektrického pole ve směru  $x$  a konstantní ve směru  $y$ .

**Příklad 2.** Určete kapacitu clony (podle obr. 104), předpokládáme-li sinusový průběh intenzity elektrického pole ve směru  $x$  a konstantní ve směru  $y$ .

**Příklad 3.** Určete impedanci vlnovodu zakončeného trychtýřovým vedením (v prvním přiblížení z charakteristické impedance trychtýřového vedení).

**Příklad 4.** Určete impedance šterbin znázorněných na obr. 137b.

## VI. NÁHRADNÍ VELENÍ VLNOVODU

### 54. Obdoba telegrafní rovnice

Dosud jsme se podrobněji zabývali příčnou funkcí vlnovodu  $T_1$ . Protože nás hlavně zajímal vlnovod nekonečně dlouhý, byla podélná funkce vlnovodu  $T_2$  dána jednoduchým výrazem  $e^{\pm j\gamma z}$ . V této kapitole se budeme zabývat obecným vlnovodem uzavřeným na jednom konci obecnou impedancí. Potom bude podélná funkce obecným výrazem  $C_1 e^{+j\gamma z} + C_2 e^{-j\gamma z}$  [viz rovnici (II-8)]. Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty. Tyto konstanty určíme pomocí intenzity elektrického a magnetického pole na konci vlnovodu. Tak dospějeme ke vztahu mezi intenzitami elektrického a magnetického pole na počátku a na konci vlnovodu. Protože elektromagnetická energie se šíří ve směru osy vlnovodu a je určena příčnými složkami intenzity elektrického a magnetického pole, určíme uvedené vztahy mezi absolutní hodnotou příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole na začátku a na konci vedení.

U příčné magnetické vlny je intenzita elektrického a magnetického pole dána vzorcí (I-33) a (I-35)

$$E_t = \text{grad}_t \text{div} \Pi_z = \frac{\partial T_2}{\partial z} \text{grad}_t T_1 = j\gamma (C_1 e^{+j\gamma z} - C_2 e^{-j\gamma z}) (\text{grad}_t T_1) \quad (\text{VI-1})$$

neboť  $T_2 = C_1 e^{+j\gamma z} + C_2 e^{-j\gamma z}$  [viz rovnici (II-8)].

$$H_t = j\omega \varepsilon \|\text{grad}_t T_1\| (C_1 e^{+j\gamma z} + C_2 e^{-j\gamma z}) = j\omega \varepsilon \|\text{grad}_t T_1\| (C_1 e^{+j\gamma z} + C_2 e^{-j\gamma z}) \quad (\text{VI-2})$$

Souřadnice  $z$  budeme číst od konce vedení. Proto určíme absolutní hodnotu příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole na konci vlnovodu ze vztahů (pro  $z = 0$ ):

$$E_{tk} = j\gamma \|\text{grad}_t T_1\| (C_1 - C_2)$$

$$H_{tk} = j\omega \varepsilon \|\text{grad}_t T_1\| (C_1 + C_2)$$

Řešením těchto dvou rovnic určíme konstanty  $C_1$  a  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\|\text{grad}_t T_1\|} \left( \frac{E_{tk}}{j\gamma} + \frac{E_{tk}}{j\omega \varepsilon} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\|\text{grad}_t T_1\|} \left( \frac{H_{tk}}{j\omega \varepsilon} - \frac{E_{tk}}{j\gamma} \right)$$

a dosazením do rovnic (VI-1) a (VI-2) dostaneme

$$|E_t| = |E_{tk}| \cos \gamma z + j |H_{tk}| Z_0 \sin \gamma z \quad (\text{VI-3})$$

$$|H_t| = j |E_{tk}| \frac{1}{Z_0} \sin \gamma z + |H_{tk}| \cos \gamma z \quad (\text{VI-4})$$

kde  $Z_0 = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon}$  je charakteristická impedance příčné magnetické vlny ve vlnovodu.

Rovnice (VI-3) a (VI-4) jsou obdobou výsledku telegrafní rovnice. Stejně by platilo pro vlnu elektrickou

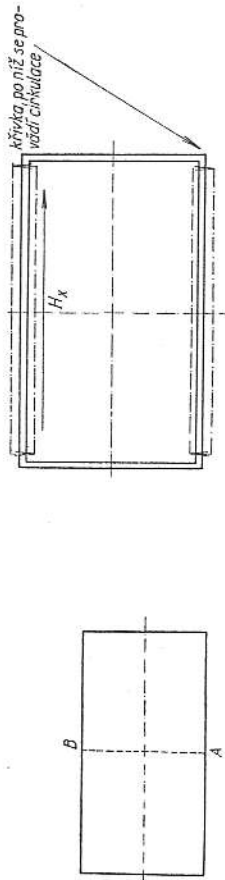
$$|E_x| = |E_{tk}| \cos \gamma z + jH_{tk} Z_0 \sin \gamma z \quad (VI-5)$$

$$|H_x| = j|E_{tk}| \frac{1}{Z_0} \sin \gamma z + |H_{tk}| \cos \gamma z \quad (VI-6)$$

kde  $Z_0 = \frac{\omega \mu}{\gamma}$  je charakteristická impedance příčné elektrické vlny,  $\gamma$  je konstanta přenosu

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

kde  $\lambda_g$  je délka vlny ve vlnovodu.



Obr. 140. Integrační čára pro určení napětí ve středu vlnovodu.

Absolutní hodnota příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole v předcházejících výrazech představuje velikost těchto veličin v určitém místě průřezu vlnovodu. Proto jsou vztahy (VI-3) až (VI-6) vhodné jen pro jeden druh vlnovodu (s konstantním průřezem).

Navazují-li však dva různé druhy vlnovodu na sebe, na př. vlnovody s různými průřezy, nebo navazují-li na vlnovod páskové vedení, nelze použít vztahů (VI-5) a (VI-6). V tomto případě musíme zavést takové veličiny, které bychom mohli porovnávat ve všech vlnovodech tvořících složenou soustavu vedení.

U obdélníkových vlnovodů a páskových vedení splňují požadované vlastnosti vhodné definované napětí a proud. Napětí budeme definovat křivkovým integrálem

$$U(z) = \int_a^b E dy \quad \text{pro} \quad x = \frac{a}{2}$$

Integraci provedeme po přímce spojující body A a B (viz obr. 140).

Protože je intenzita elektrického pole v obdélníkovém vlnovodu dána vztahem

$$E = C \sin \frac{\pi}{a} x (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

je

$$U(z) = C b (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

kde  $b$  je menší rozměr obdélníkového vlnovodu  
 $C$  konstanta.

Protože se energie šíří vlnovodem ve směru osy  $z$ , zvolíme za další veličinu, kterou bychom mohli charakterizovat přenos energie ve směru vedení, proud  $I_x$  tekoucí v podélném směru. Je způsoben u obdélníkového vlnovodu intenzitou elektrického pole  $H_x$ .

Uurčíme jej z cirkulace intenzity magnetického pole po plášti vlnovodu podle obr. 141.

$$I_c = \int_0^a H_x dx = \frac{C}{Z_0} \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} x (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z}) dx =$$

$$= C \frac{1}{Z_0} \frac{2a}{\pi} (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z})$$

Je tedy

$$U = C b (C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z})$$

$$I = C \frac{1}{Z_0} \frac{2a}{\pi} (C_1 e^{i\gamma z} - C_2 e^{-i\gamma z})$$

Vyjádříme-li konstanty  $C_1$  a  $C_2$  opět pomocí napětí  $U$  a proudu  $I$  na konci vlnovodu, dostaneme pro proud a napětí na začátku

$$U_p = U_k \cos \gamma_1 z + j I_k Z \sin \gamma_1 z \quad (VI-7)$$

$$I_p = U_k \frac{j}{Z} \sin \gamma_1 z + I_k \cos \gamma_1 z \quad (VI-8)$$

kde  $I_k$  je proud na konci vedení

$U_k$  napětí na konci vedení

$Z$  vlnový odpor vedení

$\gamma$  konstanta přenosu.

Kdyby byla konstanta přenosu  $\gamma$  komplexní veličina, nikoli čistě imaginární, přišly by trigonometrické funkce v předěšlých rovnicích v hyperbolické. V tomto případě by platilo

$$U_p = U_k \cosh \gamma_1 z + I_k Z \sinh \gamma_1 z$$

$$I_p = U_k \frac{1}{Z} \sinh \gamma_1 z + I_k \cosh \gamma_1 z$$

Při tom je vlnový odpor dán výrazem

$$Z = \frac{b\pi}{2a} Z_0$$

kde  $Z_0$  je charakteristická impedace vlnovodu (pro vid TE<sub>10</sub>):

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

kde  $\lambda$  je délka vlny.

Vztahů (VI-7) a (VI-8) použijeme při řešení úloh týkajících se kombinovaných vedení.

*Příklad 1.* Určete vstupní impedanci trychtýřového vedení zakončeného danou impedancí.

*Příklad 2.* Určete vstupní impedanci trychtýřového vedení zakončeného čtvrtvlnným transformátorem z páskového vedení, připojeným na vlnovod (obr. 49).

*Příklad 3.* Určete vstupní impedanci radiálního vedení zakončeného souosým vodičem (obr. 25).

*Příklad 4.* Proveďte rozbor kmitočtové závislosti širokopásmové tlumivky.

## VII. VYZAŘOVÁNÍ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY Z VLNOVODŮ, TRYCHTÝŘŮ A DIFRAKCE ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY OD JEDNODUCHÝCH, DOKONALE VODIVÝCH TĚLES

Je-li vlnovod (nebo trychtýřové vedení) zakončen naprázdno, vyzáří se podstatná část energie, která se jím šíří, do prostoru. Naším úkolem bude určit geometrické uspořádání této vyzářené elektromagnetické vlny v prostoru.

Druhý problém, kterým se budeme v této kapitole zabývat, je určit vliv dokonale vodivého tělesa na dopadající elektromagnetickou vlnu.

Elektromagnetická vlna dopadne na dokonale vodivé prostředí a způsobí v něm povrchové proudy, které jsou potom zdrojem sekundárního záření. Naším úkolem bude určit geometrické uspořádání odražené elektromagnetické vlny.

Než přejdeme k vlastnímu řešení těchto dvou problémů, uvedeme nejdříve některé základní poznatky z oboru šíření elektromagnetických vln.

### 55. Přímá integrace Maxwellových rovnic

V předcházejících článcích jsme řešili Maxwellovy rovnice tak, že jsme je převedli na vlnovou rovnici potenciálů nebo Hertzových vektorů a řešili jsme ji v diferenciálním tvaru. V této části nalezneme výsledky Maxwellových rovnic přímo. Použijeme k tomu Greenovy věty ve vektorovém tvaru [rovnice (IX-23)]. Určíme intenzitu elektrického a magnetického pole uvnitř uvažovaného prostoru, známe-li rozložení proudů a nábojů uvnitř prostoru a známe-li intenzity elektrického a magnetického pole na hraniční ploše. Podle (IX-23) platí

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P}) dV - \int_V (\mathbf{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) dV &= \\ = \int_S ([\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \mathbf{n}) dS - \int_S ([\mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathbf{P}] \mathbf{n}) dS \end{aligned}$$

kde  $V$  je uvažovaný prostorový obor omezený plochou  $S$ .

Za kladný směr jednotkového vektoru normály  $\mathbf{n}$  pokládáme směr vně plochy  $S$ . Je-li v objemu  $V$  obecně uspořádaní proudové hustoty  $\mathbf{J}$  a objemové hustoty náboje  $\rho$ , mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} + \mathbf{J} & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j\omega\mu \mathbf{H} & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

Při tom předpokládáme, že je prostředí uvnitř objemu  $V$  isotropní. Z těchto rovnic vyplývá



$$\text{rot rot } \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{j} \quad (\text{VII-1})$$

kde  $k^2 = -j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon)$ .  
Obdobně bychom dostali

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = k^2 \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{j} \quad (\text{VII-2})$$

Použijeme-li diferenciálních rovnic (VI-1) a (VI-2) a Greenovy věty (IX-23), určíme intenzity elektrického a magnetického pole v libovolném místě uzavřeného prostoru, budeme-li znát proudové a nábojové uspořádání uvnitř tohoto prostoru a velikost intenzity elektrického a magnetického pole na ploše uzavírající uzavřený prostor.

Dosaďme v rovnici (IX-23) za  $\mathbf{P}$  vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a za  $\mathbf{Q}$  vektor  $\mathbf{H}$ , při čemž  $\mathbf{a}$  je jednotkový vektor libovolného směru a  $\phi$  skalární funkce vyhovující vlnové rovnici

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V (\phi \mathbf{a} \text{ rot rot } \mathbf{E}) dV &= \int_V [\mathbf{E} \text{ rot rot } (\phi \mathbf{a})] dV = \\ &= \int_S \{ [\mathbf{E} \text{ rot } (\phi \mathbf{a})] \mathbf{n} \} dS - \int_S \{ (\phi \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{E}) \mathbf{n} \} dS \end{aligned} \quad (\text{VII-3})$$

Upravme postupně jednotlivé integrály tohoto vztahu. Při tom se budeme snažit upravit výrazy pod integrálem tak, aby v nich byl jednotkový vektor  $\mathbf{a}$  vyjádřen jako součinitel skalárního součinu, aby se mohl u všech integrálů zkrátit.

Upravme nejdříve první integrál. Se zřetelem na rovnici (VII-1) dostaneme

$$\int_V (\phi \mathbf{a} \text{ rot rot } \mathbf{E}) dV = \int_V [\phi \mathbf{a} (k^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{j})] dV \quad (\text{VII-4})$$

Druhý integrál upravíme tak, že rozvedeme rot rot  $(\phi \mathbf{a})$ :

$$\text{rot rot } (\phi \mathbf{a}) = \text{grad div } (\phi \mathbf{a}) - \mathbf{a} \Delta \phi = \text{grad } (\text{grad } \phi \mathbf{a}) + \mathbf{a} k^2 \phi$$

neboť

$$\text{div } (\phi \mathbf{a}) = (\text{grad } \phi \mathbf{a}) + \phi \text{ div } \mathbf{a} = (\text{grad } \phi \mathbf{a})$$

kde  $\mathbf{a}$  je jednotkový vektor konstantního směru

$$\Delta \phi = -k^2 \phi$$

Potom je

$$\int_V [\mathbf{E} \text{ rot rot } (\phi \mathbf{a})] dV = \int_V [\mathbf{E} \text{ grad } (\text{grad } \phi \mathbf{a})] dV + \int_V (\mathbf{E} \mathbf{a}) k^2 \phi dV$$

Protože

$$[\mathbf{E} \text{ grad } (\text{grad } \phi \mathbf{a})] = \text{div } [\mathbf{E} (\text{grad } \phi \mathbf{a})] - (\text{grad } \phi \mathbf{a}) \text{ div } \mathbf{E}$$

je

$$\begin{aligned} \int_V [\mathbf{E} \text{ rot rot } (\phi \mathbf{a})] dV &= \int_V \text{div } [\mathbf{E} (\text{grad } \phi \mathbf{a})] dV - \\ &- \int_V (\text{grad } \phi \mathbf{a}) \text{ div } \mathbf{E} dV + \int_V (\mathbf{E} \mathbf{a}) k^2 \phi dV \end{aligned}$$

První integrál na pravé straně převedeme podle Greenovy věty na plošný integrál a v třetím integrálu dosadíme za  $\text{div } \mathbf{E}$  výraz  $\frac{\rho}{\epsilon}$ .

Potom bude

$$\begin{aligned} \int_V [\mathbf{E} \text{ rot rot } (\phi \mathbf{a})] dV &= \int_S (\mathbf{E} \mathbf{n}) (\text{grad } \phi \mathbf{a}) dS - \\ &- \int_V (\text{grad } \phi \mathbf{a}) \frac{\rho}{\epsilon} dV + \int_V (\mathbf{E} \mathbf{a}) k^2 \phi dV \end{aligned} \quad (\text{VII-5})$$

Ve třetím integrálu vztahu (VII-3) je výraz rot  $(\phi \mathbf{a})$ . Po rozvedení tohoto výrazu dostaneme

$$\text{rot } (\phi \mathbf{a}) = \phi \text{ rot } \mathbf{a} + [\text{grad } \phi \mathbf{a}] = [\text{grad } \phi \mathbf{a}]$$

neboť rot  $\mathbf{a} = 0$  ( $\mathbf{a}$  je jednotkový vektor konstantního směru). Při této úpravě

$$\begin{aligned} \int_S \{ [\mathbf{E} \text{ rot } (\phi \mathbf{a})] \mathbf{n} \} dS &= \int_S \{ [\mathbf{E} [\text{grad } \phi \mathbf{a}]] \mathbf{n} \} dS = \\ &= \int_S \{ \mathbf{a} [\text{grad } \phi (\mathbf{E} \mathbf{n})] \} dS \end{aligned} \quad (\text{VII-6})$$

Ve čtvrtém integrálu vztahu (VII-3) dosadíme za rot  $\mathbf{E}$  z Maxwellovy rovnice výraz  $(-j\omega \mu) \mathbf{H}$ .

Potom bude

$$\begin{aligned} \int_S \{ (\phi \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{E}) \mathbf{n} \} dS &= -j\omega \mu \int_S \{ (\phi \mathbf{a} \mathbf{H}) \mathbf{n} \} dS = \\ &= j\omega \mu \int_S \{ \phi \mathbf{a} [\mathbf{n} \mathbf{H}] \} dS \end{aligned} \quad (\text{VII-7})$$

Uvážíme-li vztahy (VII-4), (VII-5), (VII-6) a (VII-7), upravíme vztah (VII-3) takto (po zkrácení jednotkového vektoru  $\mathbf{a}$ )

$$\begin{aligned} \int_V \left( \text{grad } \phi \frac{\rho}{\epsilon} - j\omega \mu \mathbf{j} \phi \right) dV = \\ = \int_S \{ \text{grad } \phi (\mathbf{E} \mathbf{n}) - [\text{grad } \phi (\mathbf{n} \mathbf{E})] - j\omega \mu \phi [\mathbf{n} \mathbf{H}] \} dS \end{aligned} \quad (\text{VII-8})$$

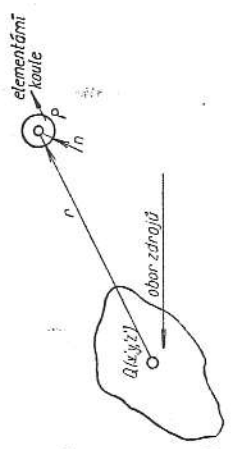
Zvolíme skalární funkci  $\phi$  takovou,<sup>1)</sup> že

$$\phi = \frac{e^{-kr}}{r} \quad (\text{VII-9})$$

V tomto případě je  $r$  vzdálenost bodu  $P$ , v němž uvažujeme pole, od místa elementu zdroje. Toto místo označíme  $Q$  (viz obr. 142).

Vztah (VII-8) platí pro jakoukoli hodnotu funkce  $\phi$ , mimo její hodnotu v pozorovaném bodě  $P$ , kde při  $r \rightarrow 0$  jeví funkce  $\phi$  singularitu. Abychom tento bod vyloučili, obklopíme jej koulí poloměru  $r \rightarrow 0$ . Označme povrch této elementární koule  $K$  (obr. 142).

<sup>1)</sup> Tato funkce souvisí přímo s Greenovou funkcí uvedeného problému.



V tomto případě přejde vztah (VII-8) na tvar

$$\int_V \left( \text{grad } \phi \frac{\rho}{\varepsilon} - j\omega\mu\phi \right) dV = \int_S \{ \text{grad } \phi(\mathbf{En}) - [\text{grad } \phi[\mathbf{nE}]] - j\omega\mu\phi[\mathbf{nH}] \} dS + \int_S \{ \text{grad } \phi(\mathbf{En}) - [\text{grad } \phi[\mathbf{nE}]] - j\omega\mu\phi[\mathbf{nH}] \} dS \quad (\text{VII-10})$$

Z rovnice (VII-9) vyplývá

$$\text{grad } \phi = -\frac{e^{-jkr}}{r} \left( -jk - \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}_0$$

kde  $\mathbf{r}_0$  je jednotkový vektor ve směru  $r$ , směřující od místa P k místu elementu zdroje Q. Je-li plošný element v kulových souřadnicích

$$dS = r^2 \sin \delta \, d\delta \, d\varphi$$

je potom

$$\phi \, dS = \frac{e^{-jkr}}{r} r^2 \sin \delta \, d\delta \, d\varphi$$

a

$$\text{grad } \phi \, dS = \frac{e^{-jkr}}{r} \left( -jk - \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}_0 r^2 \sin \delta \, d\delta \, d\varphi$$

Pro  $r \rightarrow 0$  je

$$\phi \, dS \rightarrow 0$$

$$\text{grad } \phi \, dS \rightarrow -\sin \delta \, d\delta \, d\varphi \, \mathbf{r}_0$$

Protože plocha  $K$  je elementární koule s poloměrem blížícím se nule, lze předpokládat, že intenzita elektrického a magnetického pole na této elementární kouli se rovná určité střední hodnotě  $E$  a  $H$ . Normála k elementární kouli  $\mathbf{n}$  má opačný směr než jednotkový vektor průvodiče  $\mathbf{r}_0$ . Proto je

$$\int_K \{ \text{grad } \phi(\mathbf{En}) - [\text{grad } \phi[\mathbf{nE}]] - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \phi \} dS =$$

$$= \int_K \{ (\mathbf{Er}_0) \mathbf{r}_0 - [\mathbf{r}_0[\mathbf{r}_0\mathbf{E}]] \} \sin \delta \, d\delta \, d\varphi = 4\pi \{ \mathbf{r}_0(\mathbf{Er}_0) - \mathbf{r}_0(\mathbf{Er}_0) \} = 4\pi\mathbf{E}$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (VII-10), dostaneme po úpravě

$$4\pi\mathbf{E} = \int_V \left\{ \text{grad } \phi \frac{\rho}{\varepsilon} - j\omega\mu\phi \right\} dV - \int_S \{ \text{grad } \phi(\mathbf{nE}) + + [[\mathbf{nE}] \text{grad } \phi] - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \phi \} dS \quad (\text{VII-11})$$

Obdobně bychom odvodili pro intenzitu magnetického pole

$$4\pi\mathbf{H} = \int_V \{ j \text{grad } \phi \} dV - \int_S \{ j\omega\varepsilon[\mathbf{nE}] \phi + + [[\mathbf{nH}] \text{grad } \phi] + (\mathbf{nH}) \text{grad } \phi \} dS \quad (\text{VII-12})$$

258

$$\text{kde je } \phi = \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$r$  vzdálenost mezi proměnným bodem Q, určujícím plochu elementu zdroje, a mezi bodem P, kde určujeme pole.

Podle vzorců (VII-11) a (VII-12) určíme intenzitu elektrického a magnetického pole uvnitř oblasti  $V$ , známe-li uvnitř  $V$  proudovou hustotu  $\mathbf{J}$ , objemovou hustotu náboje  $\rho$  a známe-li na ploše  $S$ , uzavírající oblast  $V$ , intenzitu elektrického a magnetického pole.

Uvedené vzorce platí tehdy, je-li intenzita elektrického a magnetického pole na ploše  $S$  spojitá a je-li spojitá také první a druhá derivace intenzity elektrického pole na ploše  $S$ .

Vzdaluje-li se plocha  $S$  do nekonečna, zmizí plošný integrál. Předpokládejme, že je plocha  $S$  koule poloměru  $r \rightarrow \infty$ . Protože se při velkém  $r$  zmenšuje intenzita elektrického a magnetického pole nejméně tak rychle jako výraz  $\frac{1}{r^2}$ , potenciál funkce  $\phi$  a grad  $\phi$  se také zmenšuje nejméně tak rychle, je vidět, že pro  $r \rightarrow \infty$  zmizí všechny členy plošného integrálu. Potom bude

$$4\pi\mathbf{E} = \int_V \left( \text{grad } \phi \frac{\rho}{\varepsilon} - j\omega\mu\phi \right) dV \quad (\text{VII-13})$$

a

$$4\pi\mathbf{H} = - \int_V [\text{grad } \phi \mathbf{J}] dV \quad (\text{VII-14})$$

V tomto případě jsou  $\rho$  a  $\mathbf{J}$  funkcemi bodů  $Q(x', y', z')$  a  $dV = dx' dy' dz'$  se vztahuje k bodu Q.

Skalární funkce

$$\phi = \frac{e^{-jkr}}{r}$$

kde  $r$  je vzdálenost pozorovaného bodu P a bodů Q.

V předcházejících vzorcích jsme vztahovali grad  $\phi$  na proměnný bod Q. Budeme-li vztahovat grad  $\phi$  na proměnný bod P, zjistíme, že

$$\text{grad}_r \phi = -\text{grad}_r \phi$$

Při tom je grad<sub>Q</sub> vztážen na proměnný bod Q a grad<sub>r</sub>  $\phi$  na proměnný bod P. Zaměníme-li v předěšlých rovnicích grad<sub>Q</sub> za grad<sub>r</sub>, dostaneme

$$4\pi\mathbf{E} = \int_V \left( -\text{grad}_r \phi \frac{\rho}{\varepsilon} - j\omega\mu\phi \right) dV$$

a

$$4\pi\mathbf{H} = \int_V [\text{grad}_r \phi \mathbf{J}] dV$$

Protože se integrace provádí vzhledem k proměnným bodům Q, můžeme vektorovou operaci gradientu, kterou nyní provádíme vzhledem k proměnnému bodu P, provádět před integracím znaménkem. Upravme ještě ve výrazu pro intenzitu magnetického pole výraz  $[\text{grad}_r \phi \mathbf{J}]$ . Z vlastností vektorových operátorů je známo, že

$$\text{rot}_r(\phi \mathbf{J}) = \phi \text{rot}_r \mathbf{J} + [\text{grad}_r \phi \mathbf{J}]$$

17\*

259

Protože se v našem případě provádí vektorová operace vzhledem k proměnnému bodu P a proudová hustota  $\mathbf{j}$  je funkcí proměnného bodu Q, je proto  $\text{rot}_P \mathbf{j} = 0$ , a tedy

$$\text{rot}_P (\Phi \mathbf{j}) = [\text{grad}_P \Phi]$$

Přihlédneme-li k těmto výsledkům, můžeme psát

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \int_V \frac{\rho e^{-ikr}}{4\pi r} dV - j\omega\mu \int_V \frac{\mathbf{j} e^{-ikr}}{4\pi r} dV$$

a

$$\mathbf{H} = \text{rot} \int_V \frac{\mathbf{j} e^{-ikr}}{4\pi r} dV$$

při čemž jsme  $\Phi$  nahradili výrazem  $\frac{e^{-ikr}}{r}$

Porovnáme-li tyto vztahy (I-11) a (I-12), vidíme, že

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mathbf{j} e^{-ikr}}{4\pi r} dV \quad \text{a} \quad V = -\int_V \frac{\rho e^{-ikr}}{4\pi r} dV \quad (\text{VII-15})$$

Tak jsme dostali výraz pro vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  v závislosti na proudové hustotě a výraz pro skalární potenciál v závislosti na objemové hustotě náboje. Veličiny  $\mathbf{A}$  a  $V$ , vyjádřené předcházejícími vzorci, nazýváme zpožděnými potenciály.

## 56. Huygens-Kottlerův vzorec

Vzorců (VII-11) a (VII-12) lze použít jen tehdy, je-li intenzita elektrického a magnetického pole na ploše  $S$  spojitá. Při praktické aplikaci nebývá však tato podmínka vždy splněna. Uvažme jen jednoduchý případ vyzatování elektromagnetické vlny z vlnovodu (obr. 143).

V ústí vlnovodu je určité uspořádání intenzity elektrického a magnetického pole. Plocha ústí vlnovodu tvoří část uzavřené plochy. Další část uzavřené plochy tvoří stěna vlnovodu a potom plocha uzavírající se v nekonečnu. Na kovové části ústí vlnovodu je intenzita elektrického pole nulová. Je tedy přechod mezi intenzitou elektrického pole v ústí vlnovodu a intenzitou elektrického pole na kovové části ústí nespojitý. V tomto případě nemůžeme použít vzorců (VII-11) a (VII-12), nýbrž musíme je zvlášť upravit. Protože hledáme obvyčejně pole ve vnějším prostoru, kde není proudových a nábojových zdrojů, vyjádíme ze vztahů (VII-11) a (VII-12) bez objemového integrálu:

$$4\pi\mathbf{E} = -\int_S \{\text{grad} \Phi(\mathbf{E}\mathbf{n}) + [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi] - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \Phi\} dS \quad (\text{VII-16})$$

$$4\pi\mathbf{H} = -\int_S \{j\omega\mu[\mathbf{nE}] \Phi + [[\mathbf{nH}] \text{grad} \Phi] + (\mathbf{nH}) \text{grad} \Phi\} dS \quad (\text{VII-17})$$

Uvažujeme nyní případ, kdy je elektromagnetické pole na ploše  $S$  nespojitě podél určité křivky C (obr. 144).

Při vyzatování z vlnovodu je křivka nespojitosti dána křivkou obrysu průřezu vlnovodu

(viz obr. 142). Vytvoříme kolem křivky nespojitosti C souměznou plošku  $S'$ . Potom podle vzorce (VII-16) platí

$$\begin{aligned} 4\pi\mathbf{E} = & -\int_{S_1} \{\text{grad} \Phi(\mathbf{E}\mathbf{n}) - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \Phi + [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi]\} dS_1 - \\ & -\int_{S_2} \{\text{grad} \Phi(\mathbf{E}\mathbf{n}) - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \Phi + [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi]\} dS_2 - \\ & -\int_{S'} \{\text{grad} \Phi(\mathbf{E}\mathbf{n}) - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \Phi + [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi]\} dS' \end{aligned}$$

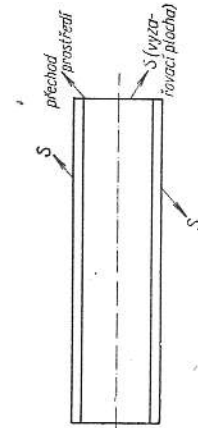
kde  $S_1$  je jedna část plochy  $S$ , omezená křivkou C  
 $S_2$  druhá část plochy  $S$   
 $S'$  soumězná ploška.

Element soumězné plošky je

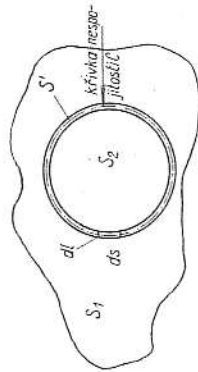
$$dS' = ds dl$$

kde  $ds$  je element oblouku křivky nespojitosti  $d/l$  tloušťka soumězné plochy  $S'$ .

Všimneme si podrobněji posledního integrálu pravé strany předcházející rovnice.



Obr. 143. Vyzatování z otevřeného konce vlnovodu.



Obr. 144. Označení křivky nespojitosti na povrchu vyzarujícího zdroje.

Rozdělíme souměznou plošku  $S'$  na elementární plošky  $dl ds$  a provedeme integraci po těchto ploškách. Provedeme-li integraci po jedné z těchto plošek, dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{ds} \{\text{grad} \Phi[\mathbf{E}\mathbf{n}] - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \Phi + [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi]\} dS' = \\ & = \int_{ds} \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{grad} \Phi(\text{rot} \mathbf{H}\mathbf{n}) - j\omega\mu[\mathbf{nH}] \Phi + [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi] \right\} dl ds \end{aligned}$$

Při tom jsme nahradili v prvním členu pod integrálem intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  podle první Maxwellovy rovnice výrazem  $\frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot} \mathbf{H}$ . V oboru malé plošky  $dl ds$  pokládáme hodnotu  $\text{grad} \Phi$  za konstantní. Označíme-li celkový integrál přes plošku  $dS'$  známkem  $\mathbf{J}$ , dostaneme

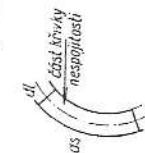
$$\mathbf{J} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{grad} \Phi \int_{ds} (\text{rot} \mathbf{H}\mathbf{n}) dl ds - j\omega\mu \int_{ds} [\mathbf{nH}] \Phi dl ds + \int_{ds} [[\mathbf{nE}] \text{grad} \Phi] dl ds$$

První integrál na pravé straně předešlé rovnice přeměníme pomocí Stokesovy věty v křivkový integrál. Potom bude

$$J = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{grad } \phi((H_2 s) ds - (H_1 s) ds) + N + \int_{ds} \{j\omega\mu[nH] \phi + [[nE] \text{grad } \phi]\} dI ds$$

kde  $H_2$  je intenzita magnetického pole na ploše  $S_2$ ,  $H_1$  intenzita magnetického pole na ploše  $S_1$ ,  $s$  jednotkový vektor ve směru rečny křivky nespojitosti v daném místě  $N$  příspěvek cirkulace na stranách  $d$ .

Část křivky nespojitosti je na obr. 145.



Pro  $dI \rightarrow 0$  platí, že  $N \rightarrow 0$  a

$$\int_{ds} \{j\omega\mu[nH] \phi + [[nE] \text{grad } \phi]\} dI ds \rightarrow 0$$

Potom je

$$J = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{grad } \phi((H_2 - H_1) s) ds$$

Obr. 145. Část křivky nespojitosti.

To je příspěvek integrálu, příslušný elementární plošce  $dS'$ . Provedeme integraci všech těchto příspěvků po celé křivce nespojitosti. Musíme sečit hodnoty všech elementárních cirkulací. Při tom se velikosti elementárních křivkových integrálů, příslušných stranám s rozměrem  $dI$ , navzájem ruší a plošný integrál přes souměznou plochou  $S'$  přejde v křivkový integrál po křivce nespojitosti  $C$ . Potom dostaneme

$$\begin{aligned} \int \{ \text{grad } \phi(E_n) - j\omega\mu[nH] \phi + [[nE] \text{grad } \phi] \} dI ds = \\ = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\text{c}} \text{grad } \phi((H_2 - H_1) s) ds \end{aligned}$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (VII-16), můžeme potom obecný vztah (VII-11) upravit takto:

$$\begin{aligned} 4\pi E = \int_V \left\{ \text{grad } \phi \frac{\rho}{\epsilon} + j\omega\mu \phi \right\} dV - \int_S \{ \text{grad } \phi(E_n) - j\omega\mu[nH] \phi + \\ + [[nE] \text{grad } \phi] \} dS - \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\text{c}} \text{grad } \phi((H_2 - H_1) s) ds \end{aligned} \quad (\text{VII-18})$$

Podobně bychom postupovali při odvozování vztahu pro  $H$ . Dostali bychom

$$\begin{aligned} 4\pi H = \int_V \{ [J \text{ grad } \phi] dV - \int_S \{ j\omega\epsilon[nE] \phi + [[nH] \text{grad } \phi] + \\ + (nH) \text{grad } \phi \} dS + \frac{1}{j\omega\mu} \int_{\text{c}} \text{grad } \phi((E_2 - E_1) s) ds \end{aligned} \quad (\text{VII-19})$$

Podle vzorců (VII-18) a (VII-19) určíme intenzitu elektrického a magnetického pole, známe-li uspořádání polí na ploše  $S$  a je-li elektromagnetické pole na ploše  $S$  nespojitě podle křivky  $C$ . Vzorci (VII-18) a (VI-19) nazveme Huygens-Kottlerovými vzorci.

## 57. Úprava Huygens-Kottlerova vzorce

Při určování intenzity elektrického a magnetického pole podle vzorců (VII-18) a (VII-19) rozeznáváme několik zvláštních případů při dosazování do těchto vzorců. Kritériem je vzdálenost, v níž určujeme intenzitu elektrického a magnetického pole.

V malé vzdálenosti od zdroje záření (ústí vlnovodu) je t. zv. blízká oblast. Ve vzdálenosti poněkud odlehlejší je střední oblast neboli oblast Fresnelovy difrakce a ve velké vzdálenosti (v porovnání s délkou vlny) od zdroje záření je vzdálená oblast neboli oblast Fraunhoferovy difrakce (viz některou učebnici optiky).

Největší význam pro praktickou aplikaci má vzdálená oblast. Proto upravíme Huygens-Kottlerův vzorec pro vzdálenou oblast. Odvodili jsme již výraz

$$\text{grad } \phi = \frac{e^{-jkr}}{r} \left( -jk - \frac{1}{r} \right) r_0$$

Vzdálená oblast se uvažuje v té vzdálenosti od zdroje záření, při které platí nerovnost  $\frac{\lambda}{r} \ll 1$ , při čemž  $r$  je vzdálenost místa, kde určujeme pole, od zdroje záření. Zanedbáme-li

tedy  $\frac{1}{r}$  proti  $jk$  ( $jk = \frac{2\pi}{\lambda}$ ), dostaneme

$$\text{grad } \phi = -jk \frac{e^{-jkr}}{r} r_0 \quad (\text{VII-20})$$

Dosadíme tento výraz do rovnice (VII-18). Při tom musíme uvážit, že ve vzorci (VII-18) znamená  $S$  celkovou plochu, t. j. plochu  $S_1$  a  $S_2$ , je-li  $S_1$  plocha uvnitř uzavřené křivky nespojitosti  $C$  a  $S_2$  plocha vně této křivky. Se zřetelem na toto rozdělení ploch dostaneme

$$\begin{aligned} 4\pi E = \int_{S_1} \{ jkr_0(E_n) + j\omega\mu[nH_1] + jk[[nE_1] r_0] \} \frac{e^{-jkr}}{r} dS + \\ + \int_{S_2} \{ jkr_0(E_2 n) + j\omega\mu[nH_2] + jk[[nE_2] r_0] \} \frac{e^{-jkr}}{r} dS + \\ + \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\text{c}} jk \frac{e^{-jkr}}{r} r_0((H_2 - H_1) s) ds \end{aligned} \quad (\text{VII-21})$$

Upravíme křivkový integrál

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\text{c}} jk \frac{e^{-jkr}}{r} r_0((H_2 - H_1) s) ds = \frac{jk}{j\omega\epsilon} r_0 \int_{\text{c}} \left\{ \left( \frac{e^{-jkr}}{r} H_2 - \frac{e^{-jkr}}{r} H_1 \right) s \right\} ds$$

Podle Stokesovy věty platí

$$\int_C \left\{ \left( \frac{e^{-jk r}}{r} H_2 - \frac{e^{-jk r}}{r} H_1 \right) s \right\} ds = - \int_{S_2} \left\{ \operatorname{rot} \left( \frac{e^{-jk r}}{r} H_2 \right) n \right\} - \int_{S_1} \left\{ \operatorname{rot} \left( \frac{e^{-jk r}}{r} H_1 \right) n \right\} dS^2 \quad (\text{VII-22})$$

Výrazy pod plošným integrálem na pravé straně předešlého vztahu upravíme, použijeme-li známých vlastností rotoru vektorové funkce násobené skalární funkcí a uvažujeme-li jen vzdálenou oblast:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{e^{-jk r}}{r} H \right) = \frac{e^{-jk r}}{r} \operatorname{rot} H + \left[ \operatorname{grad} \frac{e^{-jk r}}{r} H \right] = \frac{e^{-jk r}}{r} \operatorname{rot} H - jk \frac{e^{-jk r}}{r} [r_0 H] \quad (\text{VII-23})$$

Použijeme-li těchto vztahů, upravíme vzorec (VII-22) takto:

$$\int_C \left\{ \left( \frac{e^{-jk r}}{r} H_2 - \frac{e^{-jk r}}{r} H_1 \right) s \right\} ds = - \int_{S_2} \frac{e^{-jk r}}{r} \{ (\operatorname{rot} H_2 n) - jk ([r_0 H_2] n) \} dS - \int_{S_1} \frac{e^{-jk r}}{r} \{ (\operatorname{rot} H_1 n) - jk ([r_0 H_1] n) \} dS \quad (\text{VII-23})$$

Dosadíme-li do rovnice (VII-21) za křivkový integrál vzorec (VII-23), dostaneme po úpravě

$$4\pi E = jk \int_{S_1} \left\{ \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} [n H_1] + [[n E_1] r_0] - \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} r_0 ([n H_1] r_0) \right\} \frac{e^{-jk r}}{r} dS + \int_{S_2} \left\{ \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} [n H_2] + [[n E_2] r_0] - \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} r_0 ([n H_2] r_0) \right\} \frac{e^{-jk r}}{r} dS \quad (\text{VII-24})$$

Vztah (VII-24) je upravený Huygens-Kottlerův vzorec (VII-18). Používá se ho při výpočtu pole difrakčních anten ve vzdálené oblasti.

### 58. Difrakce od odrazné plochy

Předpokládáme, že v primárním poli je umístěna dokonale vodivá plocha (viz obr. 146). Známe-li průběh intenzity elektrického a magnetického pole v místě odrazné plochy, zjistíme parametry elektromagnetického pole v pozorovaném místě P použitím Huygens-Kottlerova vzorce. Plochu  $S_1$  po které budeme provádět integraci v Huygens-Kottlerově vzorci, zvolíme tak, aby obklopovala odraznou plochu, postupovala po zadní stěně odrazné plochy a aby se uzavírala v nekonečnu. Plochu jdoucí od odrazné plochy směrem k nekonečnu volme ve tvaru válce s poloměrem blízkým se nule. Přední část uvažované plochy, souměrná s odraznou plochou, přísluší vnějšímu prostředí. Kraj odrazné plochy tvoří křivku nespojitosti C. Zadní část plochy  $S$  patří odrazné ploše.

<sup>3)</sup> Znaménko u prvního integrálu je záporné proto, že plocha  $S_2$  je vně křivky C, takže při kladném směru cirkulace má normála na plochu  $S_2$  opačný směr než normála na plochu  $S_1$ .

Intenzitu elektrického pole v místě P vypočítáme podle upraveného Huygens-Kottlerova vzorce (VII-24). V tomto případě náleží plocha  $S_1$  vnějšímu prostředí a plocha  $S_2$  přísluší odrazné ploše. Plochy  $S_1$  a  $S_2$  jsou totožné, avšak normály k nim mají opačný směr. Uvážíme-li, že na odrazné ploše platí okrajová podmínka

$$[n(E_1 - E_2)] = 0$$

a že je  $S_1 \equiv S_2 \equiv S$ , změní se vzorec (VII-24) na tvar

$$4\pi E = j\omega\mu \int_S \{ [n(H_1 - H_2)] - r_0([n(H_1 - H_2)] r_0) \} \frac{e^{-jk r}}{r} dS \quad (\text{VII-25})$$

Jak známo, platí na rozhraní dielektrika a ideálně vodivého prostředí okrajová podmínka, že rozdíl tečných složek intenzity magnetického pole se rovná hustotě povrchového proudu. Platí tedy na odrazné ploše

$$[n(H_1 - H_2)] = K$$

kde  $K$  je hustota povrchového proudu.

Na základě toho upravíme vzorec (VII-25) takto:

$$4\pi E = j\omega\mu \int_S \{ K - (K r_0) r_0 \} \frac{e^{-jk r}}{r} dS \quad (\text{VII-26})$$

kde  $r$  je vzdálenost elementu odrazné plochy od pozorovaného místa P

$S$  odrazná plocha

$r_0$  jednotkový vektor ve směru pozorovaného místa P.

Ze vzorce (VII-26) je vidět, že intenzita elektrického pole  $E$  ve vzdálené oblasti má směr kolmý k  $r_0$ , neboť

$$4\pi(E r_0) = j\omega\mu \int_S \{ (K r_0) - (K r_0) \} \frac{e^{-jk r}}{r} dS = 0$$

Při odvozování vzorce pro intenzitu magnetického pole bychom postupovali obdobně. Zjistili bychom, že ve vzdálené oblasti je intenzita magnetického pole kolmá ke směru šíření a ke směru intenzity elektrického pole a že ji lze určit ze vzorce pro intenzitu elektrického pole podle vztahu

$$H = \frac{1}{Z} [r_0 E] \quad (\text{VII-27})$$

kde  $Z$  je charakteristická impedance volného prostoru

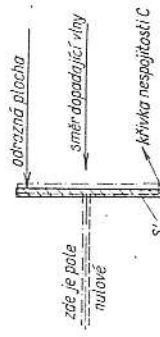
$r_0$  jednotkový vektor ve směru šíření.

V čl. 62 použijeme jako příkladu vzorec (VII-26) při určování geometrického uspořádání odražené rovinné vlny od některých jednoduchých geometrických těles.

### 59. Vyzarování z otevřených plochy

V tomto článku upravíme Huygens-Kottlerův vzorec (VII-24) pro vyzarování elektromagnetického pole z otevřené anteny (viz obr. 147).

Na hranici otevřené plochy a dokonale vodivého prostředí (na př. pláště vlnovodu) je



Obr. 146. Odrazná plocha elektromagnetické vlny.

elektromagnetické pole nespojitě. Plocha  $S_2$  přísluší v tomto případě vnější části pláště napáječe a plocha  $S_1$  otvoru. Na vnější části pláště napáječe je intenzita elektrického a magnetického pole nulová. Proto lze v tomto případě upravit vzorec (VII-24) takto:

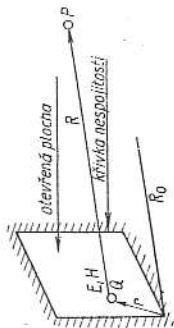
$$4\pi\mathbf{E} = jk \int_{S_1} \left\{ \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{nH}_1] + [[\mathbf{nE}_1] \mathbf{r}_0] - \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} r_0([\mathbf{nH}_1] \mathbf{r}_0) \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} dS$$

Protože je

$$[\mathbf{r}_0[\mathbf{r}_0[\mathbf{nH}]]] = r_0([\mathbf{nH}] \mathbf{r}_0) - [\mathbf{nH}]$$

zjednodušíme předcházející vztah takto:

$$4\pi\mathbf{E} = jk \int_S \left\{ [[\mathbf{nE}] \mathbf{r}_0] - \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{r}_0[\mathbf{r}_0[\mathbf{nH}]]] \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (\text{VII-28})$$



Obr. 147. Vyzářování z otevřené plochy.

kde  $\mathbf{E}$  je intenzita elektrického pole v otvoru

$\mathbf{H}$  intenzita magnetického pole v otvoru

$\mathbf{r}_0$  jednotkový vektor ve směru pozorovaného místa P

$r$  vzdálenost elementu otvoru od pozorovaného místa P.

Vzorcem (VII-28) je určena intenzita elektrického pole v místě P (viz obr. 147), je-li na vyzářovací ploše dána intenzita elektrického a magnetického pole.

Protože intenzita magnetického pole  $\mathbf{H}$  pod integrálem vzorce (VII-28) je vyjádřena ve tvaru  $[\mathbf{nH}]$ , kde  $\mathbf{n}$  je normála k ploše  $S$ , vyplývá z toho, že přispívá jen složka  $\mathbf{H}$  ve směru kolmém k normále. Av tom případě lze vyjádřit intenzitu magnetického pole v otvoru anteny pomocí intenzity elektrického pole

$$\mathbf{H} = -Y[\mathbf{nE}]$$

kde  $Y$  je charakteristická admitance v otvoru

$\mathbf{n}$  směr Umov-Poyningova vektoru v otvoru, který je opačný než směr normály otvoru (normála otvoru je vzhledem k vnějšímu prostředí orientována vně plochy uzavírající vnější prostor, tedy v opačném směru, než je směr šíření v otvoru).

Dosaďme za  $\mathbf{H}$  uvedený výraz do rovnice (VII-28). Potom bude

$$4\pi\mathbf{E} = jk \int_S \left\{ [[\mathbf{nE}] \mathbf{r}_0] + \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} Y [\mathbf{r}_0[\mathbf{r}_0[\mathbf{n}[\mathbf{nE}]]]] \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (\text{VII-29})$$

Vektorový součin v druhém členu pod integrálem můžeme rozložit takto:

$$[\mathbf{r}_0[\mathbf{n}[\mathbf{nE}]]] = [\mathbf{r}_0[\mathbf{n}(\mathbf{nE}) - \mathbf{E}]]$$

Můžeme se snadno přesvědčit, že je tento vektorový součin nulový, bude-li mít intenzita elektrického pole jen složku ve směru normály. Budeme tedy uvažovat jen složky intenzity elektrického pole ve směru kolmém k normále. Potom bude

$$[\mathbf{r}_0[\mathbf{n}[\mathbf{nE}]]] = -[\mathbf{r}_0\mathbf{E}]$$

neboť v tomto případě je  $(\mathbf{En}) = 0$ . Se zřetelem na tento výsledek upravíme vzorec pro vyzářenou intenzitu elektrického pole (VII-29)

$$4\pi\mathbf{E} = -jk \int_S \left\{ [\mathbf{nE}] + \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} Y[\mathbf{r}_0\mathbf{E}] \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (\text{VII-30})$$

kde  $\mathbf{E}$  je složka intenzity elektrického pole ve směru kolmém k normále.

Vzorce (VII-30) použijeme tehdy, máme-li určit vyzářené pole z otvoru, jehož plocha má obecný tvar.

Vyzářovací plocha bývá nejčastěji rovinná. V tom případě bude mít jednotkový vektor ve směru normály konstantní směr. Potom bude

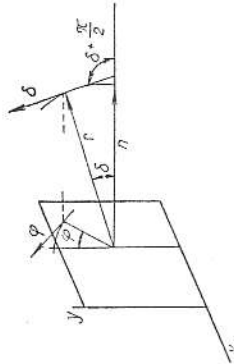
$$4\pi\mathbf{E} = -jk \int_S \left\{ \left[ \mathbf{r}_0 \left[ \left( \mathbf{n} + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{r}_0 \right] \mathbf{N} \right] \right\} dS \quad (\text{VII-31})$$

kde je  $\mathbf{N} = \int_S \frac{e^{-jkr}}{r} dS$ .

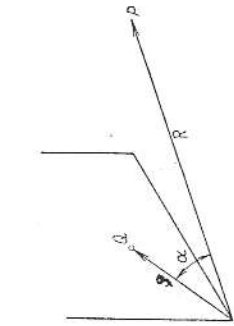
Rozvedeme-li ve vzorci (VII-31) složené vektorové součiny, dostaneme

$$4\pi\mathbf{E} = -jk \left\{ (\mathbf{r}_0\mathbf{N}) \left( \mathbf{n} + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{r}_0 \right\} - \mathbf{N} \left\{ (\mathbf{r}_0\mathbf{n}) + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{VII-32})$$

Abychom mohli v předchozím vztahu číselně vyjádřit skalární součiny, rozložíme vektor  $\mathbf{N}$  do směru  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Potom bude  $\mathbf{N} = N_x\mathbf{x} + N_y\mathbf{y}$ , kde jednotkové vektory jsou ve směru osy  $x$  a  $y$ . Skalární součiny vyjádříme číselně tak, že směry jednotkových vektorů vyjádříme pomocí úhlových kulových souřadnic a skalární součiny potom určíme jako kosiny úhlů sevržených jednotkovými vektory skalárních součinů.



Obr. 148. Označení souřadnic na otevřené vyzářující ploše.



Obr. 149. Označení směru  $R$  a směru průvodiče  $U$ .

Označíme-li úhlové kulové souřadnice jednotkového vektoru ve směru šíření  $\mathbf{r}_0$  úhly  $\delta, \varphi$  (viz obr. 148), budou jednotlivé vektory, uvedené na obr. 148, dány těmito kulovými souřadnicemi (první udává azimut, druhá úhlovou výšku):

$$\mathbf{x} \dots \frac{\pi}{2}, 0; \quad \mathbf{y} \dots \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \quad \mathbf{n} \dots 0$$

$$\delta \dots \delta + \frac{\pi}{2}, \varphi; \quad \varphi \dots \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Úhel  $\alpha$ , sevřený dvěma jednotkovými vektory  $r_1$  a  $r_2$ , danými kulovými souřadnicemi  $\delta_1, \varphi_1$  a  $\delta_2, \varphi_2$  (viz obr. 149), je dán vztahem

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \cos \alpha = \cos \delta_1 \cos \delta_2 + \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Tento vztah se odvodí ze sférického trojúhelníka. Na základě tohoto vztahu platí

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{x}) N_x + (\mathbf{r}_0, \mathbf{y}) N_y = \sin \delta (N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi)$$

$$(\mathbf{r}_0, \delta) = 0; \quad (\mathbf{n}, \delta) = -\sin \delta; \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = \cos \delta$$

$$(\mathbf{N}, \delta) = \cos \delta (N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi); \quad (\mathbf{n}, \varphi) = 0; \quad (\mathbf{r}_0, \varphi) = 0$$

$$(\mathbf{N}, \varphi) = (\mathbf{x}, \varphi) N_x + (\mathbf{y}, \varphi) N_y = -\sin \varphi N_x + \cos \varphi N_y$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice (VI-32), dostaneme

$$E_\delta = -jk \left[ 1 + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \delta_0 \right] (N_x \cos \varphi_0 + N_y \sin \varphi_0) \quad (\text{VII-33})$$

$$E_\varphi = jk \left\{ \cos \delta_0 + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} (N_x \sin \varphi_0 - N_y \cos \varphi_0) \quad (\text{VII-34})$$

kde  $E_\delta$  je složka vyzářované intenzity elektrického pole ve směru jednotkového vektoru  $\delta_0$ ,  $E_\varphi$  složka vyzářované intenzity elektrického pole ve směru jednotkového vektoru  $\varphi_0$

$$N_x = \int_S E_x \frac{e^{-jkR}}{R} dS$$

$$N_y = \int_S E_y \frac{e^{-jkR}}{R} dS$$

kde  $r$  je vzdálenost elementu plochy od místa P, kde určujeme pole  $\delta_0, \varphi_0$  kulové souřadnice místa P

$Y$  charakteristická admitance otvoru.

Ve všech předěších vzorcích je  $r$  vzdálenost elementu odrazné plochy nebo otvoru od místa P, kde určujeme elektromagnetické pole. Místo P pokládáme za pevné, místa na odrazné ploše nebo v otvoru za proměnná. Je-li vzdálenost místa P velká v porovnání s rozměry vyzářovací plochy, je možno proměnnou vzdálenost  $r$  vyjádřit pomocí neproměnné vzdálenosti  $R$  mezi stanoveným počátkem a místem P a pomocí proměnného průvodiče  $\varrho$  (obr. 149). Při tom je  $\varrho$  vzdálenost mezi proměnným bodem Q na vyzářovací ploše a pevným počátkem O. Potom je

$$r = R - \varrho \cos \alpha$$

kde  $\alpha$  je úhel sevřený průvodičem  $\varrho$  a  $R$ .  
Potom bude

$$\frac{e^{-jkR}}{r} = \frac{e^{-jkR} e^{jk\varrho \cos \alpha}}{R - \varrho \cos \alpha} = \frac{e^{-jkR}}{R} e^{jk\varrho \cos \alpha} \quad (\text{VII-35})$$

neboť  $R \gg \varrho \cos \alpha$  ( $R$  je pro dané P konstantní). Upravme podle rovnice (VII-35) vztorce (VII-26), (VII-28), (VII-30), (VII-33) a (VII-34). Dostaneme

$$a) \quad 4\pi\mathbf{E} = j\omega\mu \int_S \{ \mathbf{K} - (\mathbf{K}\mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 \} e^{jk\varrho \cos \alpha} dS \quad (\text{VII-36})$$

kde  $\mathbf{K}$  je hustota povrchového proudu na odrazné ploše  $r_0$  jednotkový vektor ve směru místa P, kde určujeme pole  $R$  vzdálenost počátku O a místa P  $\varrho$  průvodič určující vzdálenost zvoleného počátku  $\varrho$  od proměnných bodů na odrazné ploše

$\alpha$  úhel mezi průvodiči  $\varrho$  a  $R$ .

Vzorce (VII-36) použijeme tehdy, chceme-li určit vyzářené elektromagnetické pole odraznou plochou a známe-li průběh povrchového proudu na odrazné ploše

$$b) \quad 4\pi\mathbf{E} = jk \frac{e^{-jkR}}{R} \int_S \left\{ [\mathbf{n}\mathbf{E}] \mathbf{r}_0 \right\} - \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \mathbf{r}_0 [\mathbf{r}_0 \mathbf{n}\mathbf{H}] \right] \right\} e^{jk\varrho \cos \alpha} dS \quad (\text{VII-37})$$

kde  $\mathbf{E}$  je intenzita elektrického pole v otvoru

$\mathbf{H}$  intenzita magnetického pole v otvoru

$r_0$  jednotkový vektor ve směru pozorovaného místa P

$R$  vzdálenost zvoleného počátku od místa P

$\varrho$  vzdálenost počátku od proměnného bodu v otvoru

$\mathbf{n}$  jednotkový vektor ve směru normály na ploše S

$\alpha$  úhel sevřený průvodičem  $\varrho$  a  $R$ .

Tohoto vzorce použijeme při vyzářování z obecného otvoru, na př. při vyzářování elektrického drátu nebo při vyzářování ze štěrbin

$$c) \quad 4\pi\mathbf{E} = -jk \frac{e^{-jkR}}{R} \int_S \left[ \mathbf{r}_0 \int_S \{ \mathbf{n}\mathbf{E} \} + \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y} [\mathbf{r}_0 \mathbf{E}] \right] e^{jk\varrho \cos \alpha} dS \quad (\text{VII-38})$$

Jednotlivé výrazy v tomto vzorci mají též význam jako u vzorce (VII-37). Tohoto vzorce použijeme při vyzářování elektromagnetického pole z nerovinných otvorů, které jsou vytvořeny ústím obecného vedení (na př. při vyzářování z bikonické anteny)

$$d) \quad E_\delta = -jk \frac{e^{-jkR}}{R} \left\{ 1 + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \delta_0 \right\} (N_x \cos \varphi_0 + N_y \sin \varphi_0) \quad (\text{VII-39})$$

$$E_\varphi = jk \frac{e^{-jkR}}{R} \left\{ \cos \delta_0 + Y \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} (N_x \sin \varphi_0 - N_y \cos \varphi_0) \quad (\text{VII-40})$$

$$\text{kde } N_x = \int_S E_x e^{jk\varrho \cos \alpha} dS$$

$$N_y = \int_S E_y e^{jk\varrho \cos \alpha} dS$$

$Y$  charakteristická admitance otvoru

$\delta_0, \varphi_0$  kulové souřadnice místa P

$E_x, E_y$  složky intenzity elektrického pole do osy  $x$  a  $y$  v otvoru.

Vzorců (VII-39) a (VII-40) použijeme při vyzářování elektromagnetické vlny z rovinného otvoru (na př. z ústí vlnovodu, trychtýře).

#### PŘÍKLADY

**Příklad 1.** Určete vyzářovací charakteristiku štěrbin (ve vlnovodu podle obr. 132), vyzářuje-li do volného poloprostoru, a určete její vyzářovací odpor.

**Příklad 2.** Určete průběh elektromagnetického pole odraženého od kruhového kotoúče (směr dopadající vlny je kolmý k rovině kotoúče).

### VIII. VYZAŘOVÁNÍ Z VLNOVODŮ A TRYCHTYŘŮ

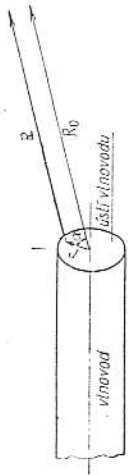
Jako příklad aplikace předšlých vzorců uvedeme výpočet vyzářovací charakteristiky vlnovodu (geometrického uspořádání vyzářovaného pole).

Je-li vlnovod na konci otevřen, vyzáruje. Naším úkolem je určit vyzářovací charakteristiku takového otevřeného vlnovodu. Předpokládáme, že známe charakteristickou impedanci na konci vlnovodu a průběh pole na konci vlnovodu. Protože je vyzářovací plocha rovinná, určme vyzářené pole podle výrazů (VII-39) a (VII-40):

$$(E\delta_p) = \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \left\{ (N_x \cos \varphi_0 - N_y \sin \varphi_0) \left[ 1 + Y \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \cos \delta_0 \right] \right\}$$

$$(E\varphi_0) = -\frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \left\{ (N_x \sin \varphi_0 - N_y \cos \varphi_0) \left[ \cos \delta_0 + Y \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

V těchto výrazech je  $Y$  charakteristická admittance ústí vlnovodu a  $\alpha$  je úhel mezi směrem šíření a směrem proměnného průvodiče  $\varrho$  (viz obr. 150). Počíták čtení průvodiče  $\varrho$  umístíme do středu vlnovodu.



Obr. 150. Vyzářování z otevřeného konce válcového vlnovodu.

Známe-li průběh intenzity elektrického pole na vyzářovací ploše  $S$ , určíme vektor  $N$  a potom složky intenzity elektrického a magnetického pole. Nejdříve je nutné znát  $N_x$  a  $N_y$ :

$$N_x = \int_S E_x e^{jkr \cos \alpha} dS \quad \text{a} \quad N_y = \int_S E_y e^{jkr \cos \alpha} dS$$

kde  $r$  má stejný význam jako průvodič  $\varrho$  ve vzorcích (VII-39) a (VII-40).

#### 60. Kruhový vlnovod, vlny vidu $TE_{11}$ a $TE_{01}$

Známe-li složky intenzity elektrického pole  $E_r, E_\varphi$  (viz čl. 14), určíme složky  $E_x$  a  $E_y$  podle vztahu

$$E_x = E_r \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi$$

$$E_y = E_r \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi$$

kde podle rovnic (II-73) a (II-74) platí pro přízřubovaný vlnovod

$$E_r = -j\omega\mu C_n J_n(J_r) \sin \frac{1}{r}$$

$$E_\varphi = -j\omega\mu C_n J_n'(J_r) \cos \frac{1}{r}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do výrazů pro  $E_x$  a použijeme-li součtových pouček trigonometrických funkcí, dostaneme

$$E_x = -\frac{1}{2} C_j \omega \mu \left\{ \sin(n+1)\varphi \left[ \frac{1}{r} n J_n(J_r) - J_n'(J_r) \right] + \right. \\ \left. + \sin(n-1)\varphi \left[ \frac{1}{r} n J_n(J_r) + J_n'(J_r) \right] \right\}$$

Protože platí (viz kap. IX)

$$n \frac{1}{r} J_n(J_r) = \frac{1}{r} J_n'(J_r) + J_{n-1}(J_r)$$

$$J_n'(J_r) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(J_r) - J_{n+1}(J_r)]$$

bude po dosazení do předcházejícího vztahu

$$E_x = \frac{J}{2} C_j \omega \mu [\sin(n+1)\varphi J_{n-1}(J_r) + \sin(n-1)\varphi J_{n-1}(J_r)] \quad \text{(VIII-1)}$$

Stejně dostáváme pro složku ve směru  $y$ :

$$E_y = \frac{J}{2} C_j \omega \mu [\cos(n-1)\varphi J_{n-1}(J_r) - \cos(n+1)\varphi J_{n+1}(J_r)] \quad \text{(VIII-2)}$$

Ve vztahu pro  $N_x$  a  $N_y$  úhel  $\alpha$  znamená úhel mezi poloměrem vlnovodu  $r$  a směrem šíření. Obecně, jak jsme již uvedli,

$$\cos \alpha = \cos \delta \cos \delta_0 + \sin \delta \sin \delta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

V našem případě úhel poloměru  $\delta = \frac{r}{R}$ , neboť ústí vlnovodu je kolmé k ose vlnovodu. Tato osa je zároveň osou kulových souřadnic. Proto je

$$\cos \alpha = \sin \delta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Potom

$$N_x = \int_S E_x e^{jkr \sin \delta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} dS$$

Rozvedeme-li výraz  $e^{jkr \sin \delta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$  v řadu Besselových funkcí, dostaneme

$$e^{jkr \sin \delta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} = J_0(kr \sin \delta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2J_m(kr \sin \delta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0)$$

a potom

$$N_x = \int_S E_x e^{jkr \sin \delta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} dS = \int_S \left\{ \frac{J}{2} C_j \omega \mu [\sin(n+1)\varphi J_{n-1}(J_r) + \right. \\ \left. - \sin(n-1)\varphi J_{n-1}(J_r) \right] [J_0(kr \sin \delta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2J_m(kr \sin \delta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0)] \right\} dS$$

Při tom jsme dosadili za  $E_x$  vztah (VIII-1). Uvážíme-li ortogonální vlastnosti trigonometrických funkcí a součtové vlastnosti trigonometrických funkcí, dostaneme po úpravě

$$N_x = J C_j^{n-1} j \omega \mu \tau \sin(n+1)\varphi_0 \int_0^R J_{n-1}(J_r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr + \\ + J C_j^{n-1} j \omega \mu \tau \sin(n-1)\varphi_0 \int_0^R J_{n-1}(J_r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr \quad \text{(VIII-3)}$$



Obdobně se odvodí vztah pro  $N_y$ . Protože

$$E_y = \frac{I}{2} C_{j0} \mu \int_0^{\pi} \cos(n-1)\varphi_0 J_{n-1}(I r) - \cos(n+1)\varphi_0 J_{n+1}(I r) ]$$

je

$$N_y = \int_S E_y e^{ikr} \sin \delta \cos(\varphi - \varphi_0) dS = \\ = IC_{j0} \mu^{-1} j_0 \mu \pi \cos(n-1)\varphi_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr - \\ - IC_{j0} \mu^{-1} j_0 \mu \pi \cos(n+1)\varphi_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n+1}(I r) J_{n+1}(kr \sin \delta_0) r dr \quad (VIII-4)$$

Při výpočtu intenzity elektrického pole podle (VII-39) a (VII-40) je směřovaný výraz  $N_x \cos \varphi_0 + N_y \sin \varphi_0$ ; dosadíme-li do tohoto výrazu za  $N_x$  a  $N_y$  výrazy (VIII-3) a (VIII-4), je

$$N_x \cos \varphi_0 + N_y \sin \varphi_0 = \\ = C I \mu^{n-1} j_0 \mu \pi \sin(n+1)\varphi_0 \cos \varphi_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr + \\ + C I \mu^{n-1} j_0 \mu \pi \sin(n-1)\varphi_0 \cos \varphi_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr + \\ + C I \mu^{n-1} j_0 \mu \pi \cos(n-1)\varphi_0 \sin \varphi_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr - \\ - C I \mu^{n+1} j_0 \mu \pi \cos(n+1)\varphi_0 \sin \varphi_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n+1}(I r) J_{n+1}(kr \sin \delta_0) r dr = \\ = C I \mu^{n-1} j_0 \mu \pi \sin \varphi_0 \left[ \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr - \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr \right]$$

neboť  $j^{n-1} = -j^{n+1}$ .

Předěle integrály vyjádříme číselně podle Lommelova integrálu (viz kap. IX). Potom bude

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n+1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr - \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{n-1}(I r) J_{n-1}(kr \sin \delta_0) r dr = \\ = I^{-2} - k^2 \sin^2 \delta_0 \left[ k \sin \delta_0 a \int_0^a J_{n-1}(I r) J_{n-2}(ka \sin \delta_0) r dr - \right. \\ \left. - J_{n-1}(I a) J_n(ka \sin \delta_0) \right] + I a \left[ J_n(I a) J_{n-1}(ka \sin \delta_0) - \right. \\ \left. - J_{n-2}(I a) J_{n-1}(ka \sin \delta_0) \right]$$

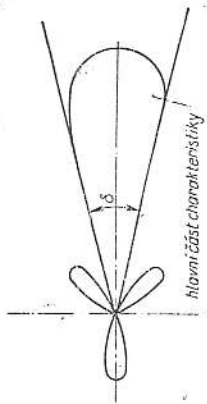
Uvážíme-li, že na základě okrajových podmínek vln  $TE_n'(U_a) = 0$ , a použijeme-li rekurenčních vzorců pro Besselovy funkce, zjistíme, že intenzitu elektrického pole, danou výrazy (VII-39) a (VII-40), lze vyjádřit takto:

$$E_y = C_{0j} \mu \frac{e^{-ikr}}{R} a_j^{n-1} \sin n\varphi_0 \left[ 1 + Y \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right) \cos \delta_0 \right] J_n(I a) \frac{J_n(ka \sin \delta_0)}{\sin \delta_0} \quad (VIII-5) \\ E_\varphi = C_{0j} \mu \frac{e^{-ikr}}{R} i a_j^{n-1} \cos n\varphi_0 \left[ \cos \delta_0 + Y \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right) \right] \frac{1}{1 - \left( \frac{k \sin \delta_0}{I} \right)^2} J_n(I a) J_n'(ka \sin \delta_0) \quad (VIII-6)$$

kde  $E_\delta$  je složka vyzářené intenzity elektrického pole ve vzdálené oblasti ve směru jednotkového vektoru  $\delta$   
 $E_\varphi$  složka vyzářené intenzity elektrického pole ve vzdálené oblasti ve směru jednotkového vektoru  $\varphi$   
 $Y$  charakteristická admittance vlnovodu.

Hlavním videm v kruhovém vlnovodu je vid  $TE_{11}$ . Všimneme si vyzářovací charakteristiky tohoto vidu v rovinách daných kulovou souřadnicí  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  a  $\varphi_0 = 0$ .

Část směrové charakteristiky, obsahující směr s maximální hodnotou intenzity elektrického pole a omezená nejbližšími nulovými hodnotami, nazývá se hlavní částí směrové charakteristiky (viz obr. 151).  
 Nášim úkolem bude určit úhlovou šířku této hlavní části. Je dána úhlem, který svírají tečny omezuující hlavní část charakteristiky. Tyto tečny přísluší těm místům charakteristiky, kde je intenzita elektrického pole nulová.



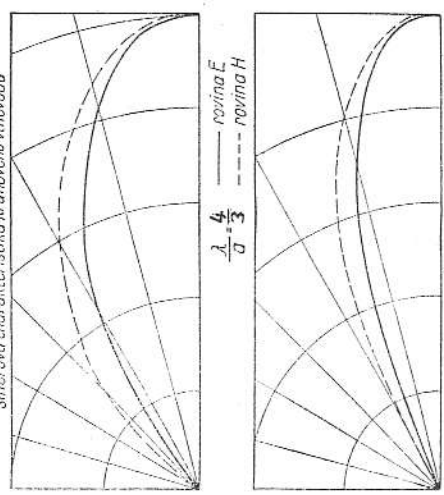
Aby v rovině  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  (t. zv. rovina  $E$ ) složka  $E_\delta$  intenzity elektrického pole byla nulová, musí podle rovnice (VIII-5) být

$$J_1'(ka \sin \delta_0) = 0 \quad (VIII-7)$$

Z toho je  $ka \sin \delta_0 = 3,83$  (viz tab. II na str. 53) a šířka svazku od nulové hodnoty k nulové hodnotě je

$$\delta_1 = 2 \arcsin \frac{3,83a}{2\pi a} \quad (VIII-7)$$

V rovině  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  je podle rovnice (VIII-6) složka  $E_\delta$  nulová. Uspořádání složky intenzity elektrického pole  $E_\varphi$  je v rovině  $\varphi_0 = 0$  dáno vzorcem (VIII-6). Určíme šířku hlavní části vyzářovací charakteristiky. Ta je omezena tečnami v místech první nulové hodnoty. Aby složka  $E_\varphi$  byla nulová, musí platit



Obr. 151. Vyzářovací charakteristika.

Avšak pro tuto hodnotu je výraz

$$\frac{J_1'(ka \sin \delta)}{1 - \left( \frac{k \sin \delta}{I_1} \right)^2} = 0$$

a je po číselném vyjádření konečný. První nulová hodnota přísluší potom druhému kořenu rovnice

$$J_1'(ka \sin \delta) = 0$$

neboli pro argument 5,33. Potom je

$$\delta_1 = \arcsin \frac{5,33a}{2\pi a} \quad (VIII-8)$$

Kromě hlavního vidu  $TE_{11}$  se často používá vidu  $TE_{10}$ . V tomto případě je složka  $E_\delta$  pro jakoukoli hodnotu  $\varphi_0$  nulová, neboť  $n = 0$ . Aby složka  $E_\varphi$  byla nulová, musí být

$$J_0'(ka \sin \delta) = 0$$

Obr. 152. Hlavní část vyzářovací charakteristiky vlnovodu vidu  $TE_{11}$ .

To je tedy, platí-li

$$ka \sin \delta = 3,83$$

Z toho je

$$\sin \delta = \frac{3,832}{2\pi a}$$

a

$$\delta_0 = 2 \arcsin \frac{3,832}{2\pi a} \quad (\text{VIII-9})$$

V tomto případě pro  $n = 0$  je směrová charakteristika osově souměrná.

Na obr. 152 jsou směrové charakteristiky pro některé poměry  $\frac{\lambda}{a}$ .

### 61. Vyzářování z obdélníkového vlnovodu

Při výpočtu obdélníkového vlnovodu budeme postupovat stejně jako u kruhového vlnovodu. Hlavním videm je u obdélníkového vlnovodu vid  $TE_{10}$ . V tomto případě platí

$$E_0 = C \frac{\pi a^2 b}{2\lambda^2 R} e^{-jkz} \sin \varphi_0 \left[ 1 + Y_0 \left( \frac{e}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ \frac{\cos \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta_0 \cos \varphi_0 \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta_0 \cos \varphi_0 \right)^2 - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2} \right] \times \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \delta_0 \sin \varphi_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \delta_0 \sin \varphi_0} \right] \quad (\text{VIII-10})$$

$$E_{\varphi_0} = C \frac{\pi a^2 b}{2\lambda^2 R} e^{-jkz} \cos \varphi_0 \left[ \cos \delta_0 + Y_{10} \left( \frac{e}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ \frac{\cos \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta_0 \cos \varphi_0 \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta_0 \cos \varphi_0 \right)^2 - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2} \right] \times \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \delta_0 \sin \varphi_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \delta_0 \sin \varphi_0} \right] \quad (\text{VIII-11})$$

Při tom  $Y_{10}$  je charakteristická admitance konce vlnovodu s videm  $TE_{10}$ . Vzorci (VIII-10) a (VIII-11) udávají velikost intenzity elektrického pole vyzářené elektromagnetické vlny z ústí obdélníkového vlnovodu, šíří-li se vlnovodem dominantní vid  $TE_{10}$ .

### 62. Difrakce od dokonale vodivé plochy

Jako příklad aplikace vzorce (VII-36) uvedeme výpočet difrakce rovinné elektromagnetické vlny na rovinné odrazné ploše.

Než přikročíme k vlastnímu výpočtu, všimneme si podrobněji okrajových podmínek na odrazné ploše. Obecně platí na rozhraní vodivého prostředí podmínky<sup>1)</sup> (viz kap. IX):

$$(n(D_2 - D_1)) = \sigma \quad (\text{VIII-12})$$

$$(n(B_2 - B_1)) = 0 \quad (\text{VIII-13})$$

$$[n(H_2 - H_1)] = K \quad (\text{VII-14})$$

$$[n(E_2 - E_1)] = 0 \quad (\text{VIII-15})$$

<sup>1)</sup> Viz na př. И. Е. Тамм: Основы теории электричества. (Základy teorie elektriny.)

kde  $n$  je jednotkový vektor ve směru normály k odrazné ploše (ploše rozhraní)  $\sigma$  hustota povrchového náboje

$K$  hustota povrchového proudu.

Na základě rovnice (VIII-15) platí, že na rozhraní dvou prostředí jsou tečné složky elektrického pole v obou prostředích stejné.

$$[nE_2] = [nE_1]$$

Obdobně vyplývá z rovnice (VIII-13), že složky ve směru normály intenzity magnetického pole, je-li v obou prostředích stejná permeabilita, jsou na rozhraní stejné.

$$(nH_2) = (nH_1)$$

Je-li odrazná plocha dokonale vodivá (prostředí označené indexem 1), musí platit, že na hranici dokonale vodivého prostředí a dielektrického prostředí je tečná složka intenzity elektrického pole nulová. Proto podle rovnice (VIII-15) je

$$[nE_2] = 0 \quad (\text{na rozhraní}) \quad (\text{VIII-16})$$

Obdobně platí

$$(nH_2) = 0 \quad (\text{na rozhraní})$$

Potom na základě rovnice (VIII-12) je

$$\sigma = -(nD_2) = -\varepsilon_0 (nE_2)$$

a

$$K = -(nH_2)$$

Dopadá-li na odraznou plochu elektromagnetická vlna, odráží se a šíří se zpět, takže v prostoru před odraznou plochou je dáno celkové pole součtem pole dopadající a odražené vlny (viz obr. 153).

Potom je

$$E_2 = E_u + E_o$$

kde  $E_u$  je intenzita elektrického pole dopadající vlny

$E_o$  intenzita elektrického pole odražené vlny.

Na rozhraní musí platit [viz rovnici (VIII-16)]

$$[nE_2] = [n(E_u + E_o)] = 0$$

Z toho je

$$[nE_u] = -[nE_o] \quad (\text{VIII-17})$$

Dále určíme vztah mezi hustotou povrchového proudu  $K$  a intenzitou elektrického pole dopadající vlny  $E_u$ . Pro povrchový proud jsme odvodili výraz

$$K = [nH_2] = [n(H_u + H_o)]$$

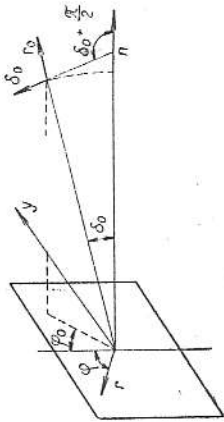
kde  $H_u$  je intenzita magnetického pole dopadající vlny

$H_o$  intenzita magnetického pole odražené vlny.

Dopadá-li na kovovou přeskáčku rovinná vlna, odráží se. Při tom se musí výkon dopadající vlny rovnat výkonu vlny odražené. Musí tedy platit

$$(n[E_u H_u]) = -(n[E_o H_o]) \quad (\text{VIII-18})$$

kde  $n$  je normála k odrazné ploše.



Obr. 153. Vyzářování z obdélníkového vlnovodu.

Pravá strana předěsíle rovnice je záporná proto, že odražená vlna se šíří opačným směrem. Uvážíme-li rovnice (VIII-17) a (VIII-18), vyplýne z toho

$$H_a = H_o \quad (VIII-19)$$

$$K = 2[nH_{||}]$$

Předpokládáme, že je odrazná plocha v místě, které je vzhledem k poloze primárního zdroje ve vzdálené oblasti. V tom případě platí mezi intenzitou elektrického a magnetického pole dopadající vlny vztah

$$H_a = \frac{1}{Z_0} [r_o E_a]$$

kde  $Z_0$  je charakteristická impedance volného prostoru  $r_o$  směr Umov-Poyntingova vektoru dopadající vlny. Dosadíme-li tento vztah do rovnice (VIII-19), je

$$K = \frac{2}{Z_0} [n[r_o E_a]] \quad (VIII-20)$$

Označíme-li dále jednotkový vektor intenzity elektrického pole dopadající vlny  $e_a$  a  $E_a$  absolutní velikost vektoru  $E_a$ , dostaneme dosazením do rovnice (VIII-20) a po úpravě

$$K = \frac{2}{Z_0} E_a [r_o (n e_a) - e_a (n r_o)] \quad (VIII-21)$$

kde  $K$  je hustota povrchového proudu na odrazné ploše  $E_a$  absolutní hodnota intenzity elektrického pole dopadající vlny  $r_o$  jednotkový vektor ve směru šíření dopadající vlny  $e_a$  jednotkový vektor intenzity elektrického pole.

Šíří-li se primární elektromagnetická vlna od vysílače prostorem a narazí-li na dokonale vodivou plochu, vybudí se na této ploše povrchové proudy a náboje. Jsou potom zdrojem druhotné vlny. Intenzitu elektrického pole vyzářené vlny určíme podle vzorce (VII-36)

$$4\pi E = j\omega \int \frac{e^{-jkR}}{R} \{K - (Kr_o) r_o\} e^{jkz} dz$$

kde  $K$  je určeno vzorcem (VIII-19). Intenzitu magnetického pole  $H_a$  určíme pomocí absolutní hodnoty intenzity elektrického pole

$$H_a = \frac{1}{Z_0} |E_a| h_a$$

kde  $|E_a|$  je absolutní hodnota intenzity elektrického pole dopadající vlny  $h_a$  jednotkový vektor intenzity magnetického pole dopadající vlny.

Potom po úpravě bude

$$E = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} \int \{([nh_{||}]) - ([nh_{||}] r_o) - ([nh_{||}] r_o) e^{jkz}\} e^{jkz} dz \quad (VIII-22)$$

kde  $\varrho$  je průvodič určující vzdálenost zvoleného počátku od elementu odrazné plochy  $\alpha$  úhel tohoto průvodiče s jednotkovým vektorem  $r_o$  ve směru místa, kde určujeme pole.

Všimneme si konkrétního případu, kdy na obdélníkovou rovinnou odraznou plochu dopadá šikmo rovinná elektromagnetická vlna (viz obr. 154). V místě odrazné plochy bude mít intenzita elektrického pole konstantní velikost, avšak fáze níkolí.

Nechť svírá Umov-Poyntingův vektor dopadající vlny s osou  $x$  pravý úhel  $\lambda$  s normálou k odrazné ploše úhel  $\gamma$  (viz obr. 154). Potom je fáze intenzity elektrického pole nebo magnetického pole v místech se souřadnicí  $y$  posunuta o fázový úhel  $ky \sin \gamma$  vzhledem k fázi ve středu. Je tedy dána intenzita elektrického pole v místě dopadající plochy

$$E_a = |E_a| e^{ky \sin \gamma}$$

Potom je

$$E = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_a| \int e^{ky \sin \gamma} \{([nh_{||}]) - ([nh_{||}] r_o) e^{jkz}\} e^{jkz} dz \quad (VIII-23)$$

a jednotlivé složky ve směru jednotkového vektoru  $\delta_o$  a  $\varphi_o$  budou

$$E_\delta = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_a| \int e^{ky \sin \gamma} (\delta_o [nh_{||}]) e^{jkz} dz \quad (VIII-23)$$

$$E_\varphi = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_a| \int e^{ky \sin \gamma} (\varphi_o [nh_{||}]) e^{jkz} dz \quad (VIII-24)$$

neboť

$$(\delta_o r_o) = 0; \quad (\varphi_o r_o) = 0$$

kde  $\gamma$  je úhel dopadu rovinné vlny na vodivou odraznou plochu

$\alpha$  úhel, který svírá průvodič  $\varrho$  se směrem  $r_o$ , jenž určuje polohu místa, kde určujeme vyzářené pole (viz obr. 154).

Nechť je osa kulových souřadnic ve směru normály k odrazné ploše. Potom má průvodič  $\varrho$  a vektor  $r_o$  tyto úhlové kulové souřadnice:

$$\varrho \dots \frac{\pi}{2}, \varphi$$

$$r_o \dots \delta_o, \varphi_o$$

a

$$\cos \lambda = (r_o \delta) = \sin \delta_o \cos (\varphi - \varphi_o)$$

Z toho je

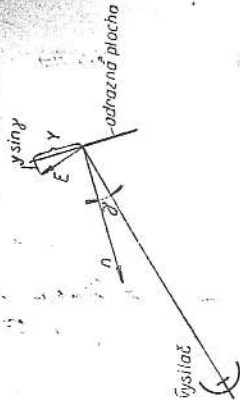
$$\varrho \cos \lambda = \varrho \sin \delta_o \cos (\varphi - \varphi_o) = x \sin \delta_o \cos \varphi_o + y \sin \delta_o \sin \varphi_o$$

neboť

$$\varrho \cos \delta = x \quad \text{a} \quad \varrho \sin \delta = y \quad (\text{viz obr. 149})$$

Jednotkový vektor intenzity magnetického pole je kolmý ke směru šíření dopadající vlny. Vlna může dopadat na odraznou plochu tak, že jednotkový vektor  $r_o$  může svírat s osou  $x$  a y obecný úhel. Všimneme si však u tohoto příkladu zvláštního případu, kdy jednotkový vektor  $r_o$  svírá s osou  $x$  pravý úhel a kdy jednotkový vektor intenzity magnetického pole dopadající vlny je rovnoběžný s osou  $x$ . Potom bude

$$(\delta_o [nh_{||}]) = (\delta_o [nx]) = -(\delta_o \gamma) = \cos \delta_o \sin \varphi_o$$



Obr. 154. Vyzářování z odrazné plochy.

neboť o úhlových souřadnicích vektorů  $\delta_0$  a  $\gamma$  platí

$$\delta_0 \dots \delta_0 + \frac{\pi}{2}, \varphi_0$$

$$\gamma \dots \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

Dále

$$(\varphi_0[nh_0]) = -(\varphi_0\gamma) = \cos \varphi_0$$

neboť

$$\varphi_0 \dots \frac{\pi}{2}, \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice (VIII-23) a (VIII-24), dostaneme

$$E_\delta = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_d| \cos \delta_0 \sin \varphi_0 \int_s e^{jkR \sin \delta_0 \cos \varphi_0} e^{jk\gamma(\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma)} dx dy$$

$$E_\varphi = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_d| \cos \varphi_0 \int_s e^{jkR \sin \delta_0 \cos \varphi_0} e^{jk\gamma(\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma)} dx dy$$

Provedeme-li integraci v mezích rozměrů odrazné plochy (rozměry  $a, b$ ), upravíme předcházející vztahy takto:

$$E_\delta = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_d| \cos \delta_0 \sin \varphi_0 \frac{2 \sin \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta_0 \cos \varphi_0 \right) 2 \sin \left[ \frac{\pi b}{\lambda} (\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma) \right]}{k \sin \delta_0 \cos \varphi_0} k (\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma) \quad \text{(VIII-25)}$$

$$E_\varphi = jk \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} |E_\delta| \cos \varphi_0 \frac{2 \sin \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta_0 \cos \varphi_0 \right) 2 \sin \left[ \frac{\pi b}{\lambda} (\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma) \right]}{k \sin \delta_0 \cos \varphi_0} k \sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma \quad \text{(VIII-26)}$$

kde  $E_\delta, E_\varphi$  jsou složky intenzity elektrického pole, odražené od odrazné plochy v místě s kulovými souřadnicemi  $R, \delta_0, \varphi_0$  délka vlny.

Složky intenzity elektrického pole  $E_\delta, E_\varphi$  budou maximální, jak vyplývá ze vzorců (VIII-25) a (VIII-26), tehdy, bude-li

$$\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma = 0$$

kdy výraz

$$\sin \left[ \frac{\pi b}{\lambda} (\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma) \right]$$

$$\sin \delta_0 \sin \varphi_0 + \sin \gamma$$

nabývá maximální hodnoty.

Bude tedy odražená intenzita elektrického pole maximální při  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  a  $\delta_0 = -\gamma$  viz obr. 154).

## IX. DODATEK

### 63. Matematická část

#### 63.1 Vektorová analýza

Předpokládáme, že základy vektorové analýzy jsou známy a uvedeme jen přehled nej-důležitějších vzorců.

Skalární součin vektorů

$$u = u_x i + u_y j + u_z k$$

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

kde  $i, j, k$  jsou jednotkové vektory ve směru os  $x, y, z$ , rovná se

$$(uv) = uv \cos(\angle uv) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

kde  $\cos(\angle uv)$  je kosinus úhlu sevřeného vektory  $u, v$ .

Vektorový součin  $[uv]$  vektorů  $u, v$  je vektor kolmý k  $u$  a  $v$  a jeho absolutní hodnota se rovná ploše rovnoběžníku sestrojeného z vektorů  $u, v$ :

$$|[uv]| = uv \sin(\angle uv)$$

$$[uv] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y) i + (u_x v_z - u_z v_x) j + (u_x v_y - u_y v_x) k$$

Vektorový součin není komutativní

$$[uv] = -[vu]$$

Smíšený součin

Smíšený součin  $(u[vw])$  je skalár, jehož hodnota se rovná objemu rovnoběžnostěny sestrojeného z vektorů  $u, v, w$

$$(u[vw]) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Dvojný vektorový součin

$$[u[vw]] = v(uw) - w(uv)$$

Derivace vektoru podle skaláru

Nechť je vektorová funkce funkcí skalární proměnné

$$V = V(t)$$

Potom je derivace vektoru podle skaláru definována limitou

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$$

Je-li vektor  $V$  dán třemi složkami ve směrech jednotkových vektorů  $i, j, k$ , navzájem kolmých, je

$$V = V_x i + V_y j + V_z k$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_x}{dt} i + \frac{dV_y}{dt} j + \frac{dV_z}{dt} k$$

jsou-li složky  $V_x, V_y, V_z$  funkcí skalární proměnné  $t$  a  $i, j, k$  jednotkové vektory konstantního směru.

Derivace vektorových a skalárních součinů dvou vektorů se provede obdobně jako derivace součinů skalárních funkcí

$$\frac{d(uv)}{dt} = \left(\frac{du}{dt} v\right) + \left(u \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{d(uv)}{dt} = \left[\frac{du}{dt} v\right] + \left[u \frac{dv}{dt}\right]$$

Derivace jednotkového vektoru podle skaláru

Nechť vektor  $V$  má absolutní hodnotu  $V$  a směr  $v$ , potom

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} v + V \frac{dv}{dt}$$

Je-li jednotkový vektor  $v$  vektoru  $V$  konstantního směru, platí

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt} v$$

Protože se skalární součin dvou stejných jednotkových vektorů rovná jedné

$$(vv) = 1$$

je

$$\frac{d}{dt}(vv) = 2 \left( v \frac{dv}{dt} \right) = 0$$

To platí obecně tehdy, je-li

$$v \perp \frac{dv}{dt}$$

Je tedy derivace jednotkového vektoru kolmá k jednotkovému vektoru, který derivujeme.

### 63.2 Skalární pole a gradient

Skalární pole je část prostoru, v níž je definována určitá skalární funkce. Budiž tedy  $\varphi(x, y, z)$  skalární funkce, mající v každém bodě daném souřadnicemi  $x, y, z$  určitou hodnotu. Úplný diferenciál funkce  $\varphi$  je dán vztahem

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

Zavedme nový vektor grad  $\varphi$ , definovaný vztahem

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k$$

Potom je úplný diferenciál funkce  $\varphi$  dán skalárním součinem vektoru grad  $\varphi$  s diferenciálem průvodiče  $r$ :

$$d\varphi = (\text{grad } \varphi \cdot dr)$$

kde

$$dr = dx i + dy j + dz k$$

Provedme skalární součin grad  $\varphi$  s libovolným jednotkovým vektorem  $n$ :

$$(\text{grad } \varphi \cdot n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (in) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (jn) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} (kn)$$

Výrazy  $(in), (jn), (kn)$  jsou směrové kosiny vektoru  $n$ , a tedy

$$(\text{grad } \varphi \cdot n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n, z)$$

Pravou stranou předcházejícího vztahu je dána derivace funkce  $\varphi$  ve směru  $n$ , daném směrovými kosiny

$$(\text{grad } \varphi \cdot n) = \frac{d\varphi}{dn}$$

Derivace  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  bude nulová tehdy, budeme-li derivovat ve směru tečné roviny k ekvipotenciální ploše, dané rovnicí  $\varphi = \text{konst.}$  Potom platí  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ , a tedy  $(\text{grad } \varphi \cdot n) = 0$ .

Z toho plyne, že grad  $\varphi \perp n$ , kde  $n$  je v tomto případě jednotkový vektor, ležící v tečné rovině ekvipotenciální plochy. Je tedy grad  $\varphi$  vektor, kolmý k ekvipotenciální ploše.

Zvolme dále směr  $n$  ve směru normály k ekvipotenciální ploše. Protože

$$\text{grad } \varphi = |\text{grad } \varphi| n$$

je

$$(\text{grad } \varphi \cdot n) = \frac{d\varphi}{dn}$$

Z toho vyplývá

$$|\text{grad } \varphi| = \frac{d\varphi}{dn}$$

Z uvedených výsledků vyplývá: grad  $\varphi$  je vektor, mající směr normály k ekvipotenciální ploše  $\varphi = \text{konst.}$  a velikost rovnající se přírůstku funkce  $\varphi$  ve směru normály na ekvipotenciální plochu.

Je-li  $\varphi = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , platí

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } r = \frac{r}{r}$$

kde  $r$  je radiusvektor.

Je-li  $\varphi = f(r)$ , je

$$\text{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi' \frac{dr}{dx}$$

Totéž platí o ostatních složkách vektoru grad  $\varphi$ . Proto je

$$\text{grad } [f(r)] = f'(r) \frac{r}{r}$$

kde  $f'(r)$  je derivace funkce  $f(r)$  podle průvodiče  $r$ .

63.3 Vektorové pole, divergence, Gaussova věta

Část prostoru, v níž je každému bodu přiřčen určitý vektor, nazývá se vektorovým polem. Takto je tedy definován vektor funkci tří prostorových souřadnic, na př.  $V(x, y, z)$ . Skalárním součinem vektoru s vektorem elementu plochy se definuje element vektorového toku  $N$ :

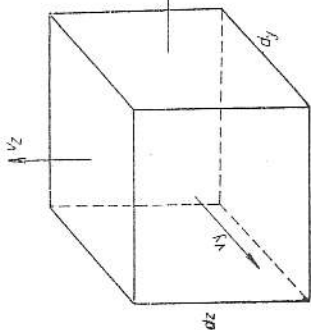
$$dN = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

kde  $\mathbf{v}$  je vektor uvažovaného pole

$\mathbf{n}$  jednotkový vektor normály elementu plochy  $dS$ .

Celkový tok  $N$  danou plochou  $S$  určíme integrací elementu toku na ploše  $S$ :

$$N = \int_S v_x dS$$



kde  $v_x$  je složka vektoru  $\mathbf{v}$  ve směru jednotkového vektoru normály  $\mathbf{n}$ .

Tok vektoru z jednotkového objemu nazýváme divergencí. V limitě je divergence vektoru  $\mathbf{v}$  (označujeme ji  $\text{div } \mathbf{v}$ ) definována vztahem

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})}{V} \quad (\text{IX-1})$$

Obr. 155. Orientace složek vektoru na elementární kouli.  $S$  plocha uzavírající tento objem.

Analytické vyjádření divergence v prostorových souřadnicích odvodíme z uvedeného vztahu. Za objem  $V$  budeme považovat elementární krychli (s objemem  $dx \, dy \, dz$ ). Integrál  $\int_S (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$  představuje tok vektoru  $\mathbf{v}$  z uzavřené plochy  $S$ , v našem případě ze šesti stěn elementární krychle. Rozložíme-li vektor  $\mathbf{v}$  do tří složek ve směru osy  $x, y, z$ , platí

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{j} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

Tok vektoru v elementární ploškou  $dy \, dz$  je  $v_x \, dy \, dz$  (viz obr. 155). Tok vektoru v protější ploškou bude o diferenciál větší a záporného znaménka, neboť směr normály je opačný, tedy

$$-\left( v_x \, dy \, dz - \frac{\partial v_x}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \right)$$

Druhý člen má záporné znaménko proto, že změnu toku  $v_x \, dy \, dz$  určujeme v záporném směru souřadnice  $x$ . Stejně bychom určili toky vektoru ostatními elementárními ploškami. Tedy

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) &= v_x \, dy \, dz - v_x \, dy \, dz + \frac{\partial v_x}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + v_y \, dx \, dz - v_y \, dx \, dy + \\ &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + v_z \, dx \, dy - v_z \, dx \, dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \\ &= \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Divergenci určíme z rovnice (IX-1)

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

neboť v tomto případě je  $V = dx \, dy \, dz$ .

Ke stejnému vztahu dospějeme tím, že provedeme skalární součin operátorů grad s vektorem  $\mathbf{v}$ .

$$\text{div } \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

kde  $x, y, z$  jsou pravouhlé souřadnice.

Dále určíme vztah mezi objemovým integrálem  $\int_V \text{div } \mathbf{v}$  a plošným integrálem  $\int_S (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$ , kde  $S$  je plocha omezuující objem  $V$ .

Rozdělme objem  $V$  na sit elementárních krychli  $dx \, dy \, dz$ . Podle rovnice (IX-1) platí pro každou elementární krychli

$$\text{div } \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz = \int_{S'} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$$

kde  $S'$  je plocha omezuující elementární krychli, tedy šest elementárních plošek. Především vztah platí pro každou krychli. Sečteme tedy levé strany i pravé strany předělských vztahů pro všechny elementární krychle objemu  $V$ . Potom bude

$$\sum_V \text{div } \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz = \sum_{S'} \int (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) \quad (\text{IX-2})$$

Protože toky na sousedních ploškách (viz obr. 156) elementárních krychli jsou stejné a opačného směru, zruší se jednotlivé toky na stěnách elementárních krychli uvnitř objemu  $V$  mimo ty plošky, které přiléhají k povrchu  $S$  objemu  $V$ . Proto lze upravit v limitě při  $dx \, dy \, dz \rightarrow 0$  vztah (IX-2) takto:

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} \, dV = \int_S (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) \quad (\text{IX-3})$$

kde  $V$  je objem uzavřený plochou  $S$ .

Vztahem (IX-3) je definována Gaussova věta. Vztah (IX-3) platí tehdy, je-li vektorová funkce, určující průběh vektoru  $\mathbf{v}$  uvnitř objemu  $V$ , spojitá.

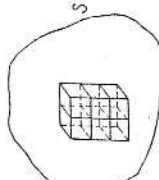
63.4 Rotace, Stokesova věta

Cirkulace  $C$  vektoru  $\mathbf{v}$  po uzavřené křivce  $C$  je křivkový integrál po uzavřené křivce skalárního součinu vektoru  $\mathbf{v}$  a elementu křivky  $ds$

$$C = \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) \quad (\text{IX-4})$$

Rotace vektoru  $\mathbf{v}$  je vektor, jehož složka v daném bodě  $P$  do daného směru  $\mathbf{n}$  se rovná limitě poměru cirkulace vektoru  $\mathbf{v}$  po obvodu libovolné plošky  $S$ , procházející bodem  $P$  a kolmé na jednotkový vektor  $\mathbf{n}$ , k povrchu této plošky  $S$ :

$$\text{rot } \mathbf{v} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})}{S} \quad (\text{IX-5})$$



Obr. 156. K odvození Gaussovy věty.

Uřídíme složky  $\text{rot } \mathbf{v}$  ve směru osy  $x, y, z$  pravotoúhlých souřadnic. Tyto složky určíme z cirkulace vektoru  $\mathbf{v}$  po obvodu plošek stěn elementární krychle  $dx \, dy \, dz$ .

Pro cirkulaci vektoru  $\mathbf{v}$  po obvodu plošky  $dy \, dz$  platí (viz obr. 155)

$$C = v_y \, dy + v_z \, dz - \left( v_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} \, dz \right) dy - \left( v_z - \frac{\partial v_x}{\partial y} \, dy \right) dz = \\ = \frac{\partial v_z}{\partial y} \, dy \, dz - \frac{\partial v_y}{\partial z} \, dz \, dy$$

Protože normála ke stěně krychle uzavřené hranami  $dy, dz$  je ve směru  $x$ , platí po dosazení do rovnice (IX-5)

$$\text{rot}_x \, \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (\text{IX-6})$$

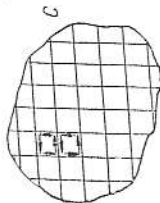
Obdobně bychom dostali pro ostatní složky

$$\text{rot}_y \, \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (\text{IX-7})$$

$$\text{rot}_z \, \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{IX-8})$$

Ze vztahů (IX-6), (IX-7) a (IX-8) je vidět, že  $\text{rot } \mathbf{v}$  je vektor daný vektorovým součinem operátoru  $\text{grad}$  s vektorem  $\mathbf{v}$ :

$$\text{rot } \mathbf{v} = [\text{grad } \mathbf{v}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$



Obr. 157. K odvození Stokesovy věty.

Uvažujeme část plochy omezené křivkou  $s$  a rozdělíme ji na infinitesimální plošky (obr. 157).

Provedeme cirkulaci vektoru  $\mathbf{v}$  po těchto infinitesimálních ploškách. Je zřejmé, že příspěvky k cirkulaci od sousedních stran elementárních plošek se ruší, zachováme-li u obou plošek stejný směr cirkulace. Sečteme pravé i levé strany vztahu (IX-6) pro všechny elementární plošky. Potom bude

$$\sum_T \text{rot}_n \, \mathbf{v} \, dS = \sum_T \oint_C (\mathbf{v} \, ds)$$

a pro  $ds \rightarrow 0$  přejde součet v plošný integrál

$$\int_S \text{rot}_n \, \mathbf{v} \, dS = \oint_C (\mathbf{v} \, ds) \quad (\text{IX-9})$$

kde  $C$  je křivka omezující plochu  $S$ .

Vztah (IX-9) se nazývá Stokesovou větou a platí tehdy, je-li vektor  $\mathbf{v}$  uvnitř  $S$  spojitý.

Některé vztahy, které platí pro vektorové operátory:

$$\text{rot grad } \varphi = 0 \quad (\text{IX-10})$$

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{IX-11})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} \quad (\text{IX-12})$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0 \quad (\text{IX-13})$$

$$\text{grad } (\varphi \psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi \quad (\text{IX-14})$$

$$\text{div } (\varphi \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \text{ grad } \varphi) + \varphi \text{ div } \mathbf{v} \quad (\text{IX-15})$$

$$\text{rot } (\varphi \mathbf{v}) = [\text{grad } \varphi \mathbf{v}] + \varphi \text{ rot } \mathbf{v} \quad (\text{IX-16})$$

$$\text{div } [\mathbf{uv}] = (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot (\text{rot } \mathbf{v}) \quad (\text{IX-17})$$

Tyto vztahy platí identicky pro libovolnou skalární funkci  $\varphi, \psi$  a libovolný vektor  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{u}$ . Lze je všechny odvodit rozepsáním do pravotoúhlých souřadnic a provést postupně diferenciální operace.

### Greenovy věty

Při odvozování Greenových vět vyjádíme z Gaussovy věty, podle které platí

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} \, dV = \int_S (\mathbf{v} \, d\mathbf{S})$$

Budiž  $\mathbf{v} = \varphi \mathbf{a}$ , kde  $\varphi$  je libovolná skalární funkce; potom bude

$$\text{div } (\varphi \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \text{ grad } \varphi) + \varphi \text{ div } \mathbf{a}$$

Je-li dále  $\mathbf{a} = \text{grad } \psi$ , je

$$\int_S \varphi (\text{grad } \psi \, \mathbf{n}) \, dS = \int_V \{ (\varphi \Delta \psi) + (\text{grad } \psi \text{ grad } \varphi) \} \, dV$$

kde  $\mathbf{n}$  je vektor normály plochy  $S$ .

Po úpravě, protože  $(\text{grad } \psi \, \mathbf{n}) = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ , je

$$\int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS = \int_V \{ \varphi \, d\psi + (\text{grad } \varphi \text{ grad } \psi) \} \, dV \quad (\text{IX-18})$$

Tímto vztahem je definována první Greenova věta.

Zaměníme-li v rovnici (IX-18)  $\varphi$  za  $\psi$  a naopak, dostaneme

$$\int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS = \int_V \{ \psi \, d\varphi + (\text{grad } \varphi \text{ grad } \psi) \} \, dV \quad (\text{IX-19})$$

Odečteme-li rovnici (IX-19) od rovnice (IX-18), dostaneme

$$\int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, dS = \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, dV \quad (\text{IX-20})$$

Tímto vztahem je definována druhá Greenova věta.

Greenova věta ve vektorovém vyjádření

Vyjádíme opět z Gaussovy věty

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S (\mathbf{v} \mathbf{n}) dS$$

Dosadíme za vektor  $\mathbf{v}$  vektorový součin  $[\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}]$ , kde  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  jsou libovolné vektory. Potom bude

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] dV = \int_S ([\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \mathbf{n}) dS$$

Protože je  $\operatorname{div} [\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] = (\operatorname{rot} \mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathbf{P}) - (\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P})$ , platí

$$\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) dV - \int_V (\mathbf{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) dV = \int_S ([\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \mathbf{n}) dS \quad (\text{IX-21})$$

Zaměníme-li v rovnici (IX-21) za  $\mathbf{P}$  vektor  $\mathbf{Q}$  a naopak, dostaneme

$$\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) dV - \int_V (\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P}) dV = \int_S ([\mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathbf{P}] \mathbf{n}) dS \quad (\text{IX-22})$$

Odečteme-li rovnici (IX-22) od rovnice (IX-21), dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P}) dV - \int_V (\mathbf{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) dV = \\ = \int_S ([\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \mathbf{n}) dS - \int_S ([\mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathbf{P}] \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (\text{IX-23})$$

Vztah (IX-23) je obdobou Greenovy věty ve vektorovém vyjádření.

### 63.5 Vektorové operátory v křivočarých souřadnicích

Zavedme obecně křivočaré souřadnice  $u_1, u_2, u_3$ . Vztahy

$$u_1 = \text{konst}, \quad u_2 = \text{konst}, \quad u_3 = \text{konst}$$

jsou rovnicemi ploch. Na př. v kulových souřadnicích (viz obr. 158)

$$u_1 = r, \quad u_2 = \delta, \quad u_3 = \varphi$$

Rovnice  $r = \text{konst}$  je rovnice kulové plochy se středem v počátku,  $\delta = \text{konst}$  je rovnice kuželové plochy s vrcholem v počátku a  $\varphi = \text{konst}$  je rovnice roviny procházející osou kulových souřadnic  $z$ .

Uvedené plochy  $u_1 = \text{konst}, u_2 = \text{konst}, u_3 = \text{konst}$  se navzájem protínají v křivkách, které spolu svírají u křivočarých ortogonálních souřadnic pravý úhel (viz obr. 159).

Označme jednotkové vektory ve směru tečen průseček uvedených ploch  $u_1, u_2, u_3$ . Elementární oblouky průseček označme  $ds_1, ds_2, ds_3$ . Při tom platí

$$ds_1 = h_1 du_1, \quad ds_2 = h_2 du_2, \quad ds_3 = h_3 du_3$$

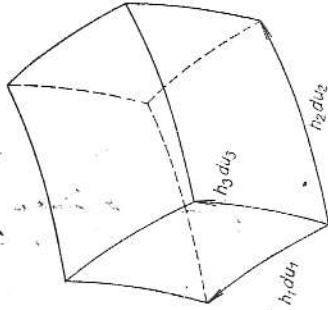
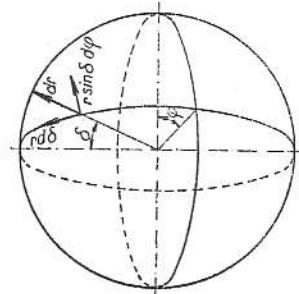
kde  $h_1, h_2, h_3$  jsou Laméovy koeficienty křivočarých souřadnic. Tyto koeficienty mohou být obecně funkcemi souřadnic  $u_1, u_2, u_3$ . Oblouky  $ds_1, ds_2, ds_3$  jsou u ortogonálních souřadnic navzájem kolmé, mají směry  $u_1, u_2, u_3$ , a proto je

$$ds = h_1 du_1 \mathbf{u}_1 + h_2 du_2 \mathbf{u}_2 + h_3 du_3 \mathbf{u}_3$$

kde  $ds$  je vektor elementárního posunu v uvedených křivočarých souřadnicích.

Jsou-li souřadnice  $u_1, u_2, u_3$  ortogonální, je

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$



Obr. 158. Orientace kulových souřadnic.

Obr. 159. Elementární rovnoběžnostěn obecných ortogonálních souřadnic.

Na příklad u válcových souřadnic je  $u_1 = r, u_2 = \varphi, u_3 = z$ . Elementární oblouky ve směru jednotlivých souřadnic jsou

$$ds_1 = dr; \quad ds_2 = r d\varphi; \quad ds_3 = dz$$

tedy

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1$$

u kulových souřadnic je

$$ds_1 = dr; \quad ds_2 = r d\delta; \quad ds_3 = r \sin \delta d\varphi$$

proto je

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \delta$$

Gradient v křivočarých souřadnicích

Složky gradientu skalární funkce do jednotkových vektorů jednotlivých souřadnic jsou dány změnou skalární funkce v směru oblouku  $ds_1, ds_2$  nebo  $ds_3$ . Platí tedy

$$\operatorname{grad}_1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = \frac{\partial \varphi}{h_1 \partial u_1}; \quad \operatorname{grad}_2 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \frac{\partial \varphi}{h_2 \partial u_2};$$

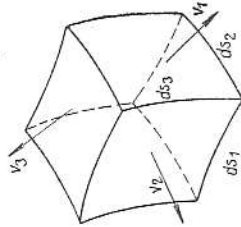
$$\operatorname{grad}_3 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = \frac{\partial \varphi}{h_3 \partial u_3} \quad (\text{IX-24})$$

Divergence v křivočarých souřadnicích

Divergenci vektoru jsme definovali jako tok vektoru z jednotkového objemu. V limitě

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int (\mathbf{v} dS)}{V}$$

Uřídíme tok vektoru  $\mathbf{v}$  z elementárního objemu, jehož rozměry jsou v křivočarých souřadnicích:  $ds_1, ds_2, ds_3$  (viz obr. 160).



Obr. 160. Orientace složek vektoru na elementárním rovnoběžnostěnu.



Tok vektoru v stěnou o ploše  $ds_1, ds_2, ds_3$  je  $h_1 h_3 du_1 dv_2 dv_3$ , kde  $v_2$  je složka vektoru v ve směru  $u_2$ , kolmém k uvažované plošce. Tok protější stěnou je o diferenciál rozdílňý. Proto bude tok na protější stěně

$$- \left[ h_1 h_3 du_1 dv_2 dv_3 - \frac{\partial}{\partial u_2} (v_2 h_1 h_3) du_1 du_2 dv_3 \right]$$

Záporné znaménko před výrazem je proto, že normála k protější stěně má opačný směr, a záporné znaménko u druhého členu za lomenou závkotkou je proto, že určujeme změnu toku v záporném směru odčítání souřadnice  $u_2$ .

Je tedy tok stěnou  $ds_1, ds_3$  a její protější stěnou, označíme-li je  $N_{u_2}$ , určen výrazem

$$\begin{aligned} N_{u_2} &= h_1 h_3 du_1 dv_2 dv_3 - h_1 h_3 du_1 dv_2 dv_3 + \frac{\partial}{\partial u_2} (v_2 h_1 h_3) du_1 du_2 dv_3 = \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} (v_2 h_1 h_3) du_1 du_2 dv_3 \end{aligned}$$

Obdobně bychom zjistili, že o toku stěnamí  $ds_2, ds_3$  a  $ds_1, ds_2$  platí

$$N_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (v_1 h_2 h_3) du_1 du_2 du_3$$

$$N_{u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3} (v_3 h_1 h_2) du_1 du_2 du_3$$

Celkový tok elementárním objemem je dán součtem dílčích toků  $N_{u_1}, N_{u_2}, N_{u_3}$  a  $N_{u_4}$ . Dosa-  
díme-li celkový tok do rovnice (IX-1) za  $f(v ds)$  a uvážíme-li, že v limitě je  $V = h_1 h_2 h_3 \cdot$   
 $\cdot du_1 du_2 du_3$ , dostaneme

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (v_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (v_3 h_1 h_2) \right] \quad (\text{IX-25})$$

Vztahem (IX-25) je určena divergence v křivočarých souřadnicích. Vztah platí tehdy,  
jsou-li složky  $v_1, v_2$  a  $v_3$  v uvažovaném prostoru spojitě.



Obr. 161. Cirkulace vektoru v po elementární ploše kolmé ke směru složky  $v_2$ .

Rotace v křivočarých souřadnicích

Rotaci jsme definovali vztahem (IX-5)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint (\mathbf{v} ds)}{S}$$

Aplikujeme tento vztah na stěny elementárního objemu (viz obr. 161).

Uřídíme nejdříve složku rotace do směru jednotkového vektoru  $u_2$ . Na tento jednotkový vektor je kolmá stěna s rozměry  $ds_1, ds_3$ . Složku rotace do  $u_2$  určíme z cirkulace vektoru v po objemu plošky  $ds_1, ds_3$ . Označíme tuto cirkulaci  $C_{u_2}$ . Potom (viz obr. 161)

$$\begin{aligned} C_{u_2} &= h_1 du_1 v_1 + h_3 du_3 v_3 - \left[ h_1 du_1 v_1 + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 v_1) du_1 dv_3 \right] - \\ &- \left[ h_3 du_3 v_3 - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 v_3) dv_3 du_1 \right] = \frac{\partial}{\partial u_1} (v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (v_1 h_1) \end{aligned}$$

Potom je

$$\operatorname{rot}_{u_1} \mathbf{v} = \frac{C_{u_2}}{h_1 h_3 du_1 du_3} = \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (v_1 h_1) \right] \quad (\text{IX-26})$$

Obdobně bychom určili ostatní složky rotace vektoru v:

$$\operatorname{rot}_{u_2} \mathbf{v} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (v_2 h_2) \right] \quad (\text{IX-27})$$

$$\operatorname{rot}_{u_3} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (v_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (v_2 h_2) \right] \quad (\text{IX-28})$$

Vztahy (IX-26), (IX-27) a (IX-28) určují složky rotace vektoru v. Tyto vztahy platí tehdy, jsou-li složky  $v_1, v_2$  a  $v_3$  v uvažovaném objemu spojitě.

Laplaceův operátor v křivočarých souřadnicích

Uvedli jsme již, že Laplaceův operátor skalární funkce  $\varphi$  je

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

Pro  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  v křivočarých souřadnicích jsme odvodili vztah

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (v_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (v_3 h_1 h_2) \right]$$

V našem případě je  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . Dosaíme proto do předšlého vztahu za  $v_1, v_2, v_3$  složky  $\operatorname{grad} \varphi$  ve směru jednotkových vektorů  $u_1, u_2, u_3$ . Platí pro ně vztah (IX-24). Proto je

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (\text{IX-29}) \end{aligned}$$

Uvedeme dále vektorové operátory ve válcových a kulových souřadnicích: ve válcových souřadnicích

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial \varphi}{r \partial \varphi} \mathbf{u}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{u}_3 \quad (\text{IX-30})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad (\text{IX-31})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & r \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & r v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (\text{IX-32})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{IX-33})$$

v kulových souřadnicích

$$\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\sin \delta} u_2 + \frac{\partial \psi}{r \partial \delta} u_3 \quad (\text{IX-34})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_1) + \frac{1}{r \sin \delta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \delta} \frac{\partial}{\partial \delta} (\sin \delta v_3) \quad (\text{IX-35})$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \delta} \begin{vmatrix} u_1 r \sin \delta & u_2 r u_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \delta} \\ v_1 r \sin \delta & v_2 r u_3 & \end{vmatrix} \quad (\text{IX-36})$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \delta} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \sin \delta \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \right) \quad (\text{IX-37})$$

### 63.6 Besselovy funkce

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu tvaru

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (\text{IX-38})$$

se nazývá Besselovou diferenciální rovnicí.

Řešení této diferenciální rovnice vyjádříme ve tvaru řady

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{s+\gamma}$$

Dosažením této řady do Besselovy diferenciální rovnice a porovnáním součinitelů u jednotlivých členů dostaneme dvě partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k)} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k} \quad (\text{IX-39})$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k-n} \quad (\text{IX-40})$$

kde  $n$  je libovolné číslo.

Výsledné řešení je dáno součtem dvou partikulárních integrálů

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Při tom musí být splněna podmínka, že  $y_1$  a  $y_2$  nejsou lineárně závislé funkce. Ze vztahů (IX-39) a (IX-40) lze dokázat, že je to splněno tehdy, není-li  $n$  celé číslo. Partikulárním integrálem (IX-39) je definována Besselova funkce prvního druhu; označujeme ji  $J_n(x)$ .

Platí tedy

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k)} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k} \quad (\text{IX-41})$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k-n} \quad (\text{IX-42})$$

Je-li  $n$  celé číslo, lze nahradit funkci  $\Gamma$  faktoriálem argumentu. Potom je

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k-n}$$

Porovnáme-li oba tyto vztahy, zjistíme, že

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

je-li  $n$  celé číslo.

To jsou výrazy, které jsou na sobě lineárně závislé. Nemůže být tedy součet těchto výrazů úplným řešením diferenciální rovnice (IX-38). Druhým partikulárním integrálem Besselovy diferenciální rovnice, je-li  $n$  celé číslo, je Neumannova funkce. Pro jakékoli  $n$  definujeme Neumannovu funkci  $N_n(x)$  vztahem

$$N_n(x) = \frac{\cos(n\pi) J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

Z tohoto vztahu je vidět, že pro necelé  $n$  je Neumannova funkce lineární kombinací Besselových funkcí  $J_n(x)$  a  $J_{-n}(x)$  a je proto také řešením Besselovy diferenciální rovnice. Pro celé  $n$  se stává definující výraz neurčitým a definuje také druhé partikulární řešení Besselovy diferenciální rovnice. Pro celé  $n$  platí, vyjádříme-li uvedený neurčitý výraz,

$$\pi N_n(x) = 2J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left( \sum_{m=1}^{n-k} m^{-1} + \sum_{m=1}^k m^{-1} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2k} \frac{(n-k-1)!}{k!} \quad (\text{IX-42.1})$$

kde  $\gamma = 0,5772$  je Eulerova konstanta.

Úplné řešení Besselovy diferenciální rovnice je potom

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)$$

Hodnoty  $J_n(x)$  a  $N_n(x)$  pro velké a malé argumenty  $x$

Převědme nejprve Besselovu diferenciální rovnici na normální tvar. Provedeme to substitucí  $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ . Potom bude

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - u}{x} = \frac{du}{dx} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{ux^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{du}{dx} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \frac{du}{dx} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} \frac{ux^{-\frac{3}{2}}}{x}$$

Dosazením do rovnice (IX-38) dostaneme pro  $u$  diferenciální rovnici

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 + \frac{\frac{1}{2} - n^2}{x^2}\right) u = 0 \quad (\text{IX-43})$$

Pro velké hodnoty  $x$  je  $\frac{\frac{1}{2} - n^2}{x^2} \ll 1$ , takže diferenciální rovnice (IX-43) přejde na tvar

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$

z čehož

$$u = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

a potom

$$y = \frac{u}{\sqrt{x}} = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad (\text{IX-44})$$

Besselova a Neumannova funkce se tedy chová při velkých argumentech jako trigonometrická funkce s klesající amplitudou podle  $1/\sqrt{x}$ . Podrobnějším rozbořem bychom určili hodnoty  $C_1$  a  $C_2$ . Při tom bychom dostali

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \left( x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} x}} \quad (\text{IX-45})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} x}} \quad (\text{IX-46})$$

Pro malé argumenty  $x$  dostaneme pro Besselovu a Neumannovu funkci hodnoty tak, že v definičních řadách (IX-41) a (IX-42.1) zanedbáme malé členy vyšších řádů

$$\text{při } x \rightarrow 0 \quad J_n(x) \rightarrow \frac{x^n}{2^n n!} \quad (\text{IX-47})$$

$$N_n(x) \rightarrow \frac{-(n-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^n \quad \text{pro } n \neq 0 \quad (\text{IX-48})$$

$$N_0(x) \rightarrow -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \quad (\text{IX-49})$$

kde  $\gamma = 0,5772$  je Eulerova konstanta.

## Rekurentní vzorce

Z definiční řady (IX-41) lze odvodit různé vzájemné vztahy mezi Besselovými funkcemi. Uvedeme nejdůležitější z nich:

$$x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \quad (\text{IX-50})$$

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad (\text{IX-51})$$

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad (\text{IX-52})$$

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (\text{IX-53})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (\text{IX-54})$$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{IX-55})$$

Hankelovy funkce (Besselovy funkce třetího druhu)

Tyto funkce jsou definovány vztahy

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + j N_n(x) \quad (\text{IX-56})$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - j N_n(x) \quad (\text{IX-57})$$

Pro malé argumenty  $x$  platí pro  $x \rightarrow 0$

$$H_n^{(1)}(x) \rightarrow j \frac{-(n-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^n$$

$$H_0^{(1)}(x) \rightarrow -j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

$$H_n^{(2)}(x) \rightarrow j \frac{(n-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^n$$

$$H_0^{(2)}(x) \rightarrow j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

Pro velké argumenty  $x$  platí

$$\text{pro } x \rightarrow \infty \quad H_n^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} x}} e^{j \left( x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)}$$

$$H_n^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} x}} e^{-j \left( x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)}$$

Modifikované Besselovy funkce

Modifikované Besselovy funkce jsou Besselovy funkce ryze imaginárního argumentu a definují se takto:

$$I_n(x) = (j)^{-n} J_n(jx) \quad (\text{IX-58})$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(jx) \quad (\text{IX-59})$$

Lommelův integrál a orthogonálnost Besselových funkcí

Besselova diferenciální rovnice argumentu  $\alpha_1 x$  má tvar

$$\frac{d^2 y}{(dx_1 x)^2} + \frac{1}{\alpha_1 x} \frac{dy}{dx_1 x} + \left(1 - \frac{n^2}{(\alpha_1 x)^2}\right) y = 0$$

Po úpravě je

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\alpha_1^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (\text{IX-60})$$

Převědme tuto rovnici na normální tvar dosazením  $y = v \sqrt{\frac{1}{x}}$ . Potom platí pro  $v$ :

$$\frac{d^2 v_{x_1}}{dx^2} + \left(\alpha_1^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) v_{x_1} = 0 \quad (\text{IX-61})$$

kde  $v_{x_1}$  je funkce  $v$ , jde-li o argument  $\alpha_1 x$ .

Obdobně bychom dostali pro argument  $\alpha_2 x$ :

$$\frac{d^2 v_{x_2}}{dx^2} + \left(\alpha_2^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) v_{x_2} = 0 \quad (\text{IX-62})$$

Rovnici (IX-61) násobme výrazem  $\sqrt{\alpha_2}$  a rovnici (IX-62) výrazem  $\sqrt{\alpha_1}$ . Obě rovnice pak odečteme. Dostaneme

$$\frac{d^2 v_{x_2}}{dx^2} - v_{x_2} - \frac{d^2 v_{x_2}}{dx^2} + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) v_{x_1} v_{x_2} = 0$$

Integrujme tuto rovnici v mezích od 0 do  $a$ . Potom bude

$$\int_0^a \left( v_{x_2} \frac{d^2 v_{x_1}}{dx^2} - v_{x_1} \frac{d^2 v_{x_2}}{dx^2} \right) dx = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \int_0^a v_{x_1} v_{x_2} dx$$

Protože

$$v_{x_2} \frac{d^2 v_{x_1}}{dx^2} - v_{x_1} \frac{d^2 v_{x_2}}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( v_{x_2} \frac{dv_{x_1}}{dx} - v_{x_1} \frac{dv_{x_2}}{dx} \right)$$

je

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \int_0^a v_{x_1} v_{x_2} dx = \left[ v_{x_2} \frac{dv_{x_1}}{dx} - v_{x_1} \frac{dv_{x_2}}{dx} \right]_0^a \quad (\text{IX-63})$$

Protože

$$y = J_n(v_{x_1} x) = \frac{v_{x_1}}{\sqrt{x}}$$

je

$$v_{x_1} = \sqrt{x} J_n(v_{x_1} x)$$

a

$$v_{x_2} = \sqrt{x} J_n(v_{x_2} x)$$

Dosadíme tyto výrazy do rovnice (IX-63). Potom bude

$$\begin{aligned} & \int_0^a [x \alpha_1 J_n(\alpha_2 x) J_n(\alpha_1 x) - x \alpha_2 J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_2 x)] dx = \\ & = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \int_0^a x J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_2 x) dx \end{aligned}$$

Po dosazení mezi

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a J_n(\alpha_2 a) J_n(\alpha_1 a) - a \alpha_2 J_n(\alpha_1 a) J_n(\alpha_2 a) = \\ & = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \int_0^a x J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_2 x) dx \end{aligned}$$

a po úpravě, použijeme-li rekurentních vzorců, dostaneme

$$\int_0^a x J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_2 x) dx = \frac{1}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} [a \alpha_2 J_n(\alpha_1 a) J_{n-1}(\alpha_2 a) - a \alpha_1 J_n(\alpha_2 a) J_{n-1}(\alpha_1 a)] \quad (\text{IX-64})$$

Tento integrál nazýváme Lommelovým integrálem.

Pro  $\alpha_1 = \alpha_2$  představuje rovnice (IX-64) neurčitý výraz. Vyřešením tohoto výrazu dostaneme

$$\int_0^a x J_n^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} a^2 [J_n^2(\alpha a) - J_{n-1}(\alpha a) J_{n+1}(\alpha a)] \quad (\text{IX-65})$$

Dosadíme-li do rovnice (IX-65) za  $n = 0$  a za  $\alpha_1 = 0$ , dostaneme

$$\int_0^a x J_0(\alpha x) dx = \frac{a}{\alpha} J_1(\alpha a) \quad (\text{IX-66})$$

Provedme v rovnici (IX-64) integraci v mezích od 0 do 1. Necht  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou dva obecné argumenty, při nichž je Besselova funkce  $J_n(x)$  nulová. Potom bude

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x J_n(\alpha_1 x) J_n(\alpha_2 x) dx = \\ & = \frac{1}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} [\alpha_2 J_n(\alpha_1) J_{n+1}(\alpha_2) - \alpha_1 J_n(\alpha_2) J_{n+1}(\alpha_1)] = 0 \quad (\text{IX-67}) \end{aligned}$$

neboť

$$J_n(\alpha_1) = 0; \quad J_n(\alpha_2) = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2$  jsou kořeny funkce  $J_n(x) = 0$ .

Pro  $\alpha_1 = \alpha_2$  je

$$\int_0^1 x J_n^2(\alpha_1 x) dx = \frac{1}{2} J_{n+1}(\alpha) J_{n-1}(\alpha) = \frac{1}{2} J_n^2(\alpha) \quad (\text{IX-67.1})$$

Podmínka (IX-67) definuje orthogonální vlastnosti Besselových funkcí a výraz (IX-67.1) je normou těchto funkcí.

## 64. Základní vlastnosti elektromagnetických vln

### 64.1 Maxwellovy rovnice

Vztahy mezi elektrickým a magnetickým polem při elektromagnetických jevech lze vyjádřit diferenciálními rovnicemi, které zavedl Maxwell. Při odvození Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru vyjdeme z dvou hlavních zákonů elektrodynamiky, z Faradayova zákona a z Ampérova zákona.

Faradayův zákon udává známý vztah mezi indukovanou elektromotorickou silou a časovou změnou magnetického toku. Vyjádřen v integrálním tvaru zní

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{E} \, d\mathbf{s}) = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) \quad (\text{IX-68})$$

kde  $\mathbf{E}$  je vektor intenzity elektrického pole

$\mathbf{B}$  vektor magnetické indukce

$d\mathbf{S}$  vektor elementu plochy

$d\mathbf{s}$  vektor elementu obločky křivky, uzavírající plochu, již protéká magnetický tok.

Křivkový integrál (cirkulace)  $\oint (\mathbf{E} \, d\mathbf{s})$  představuje elektromotorickou sílu indukovanou časovou změnou magnetického toku  $\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S})$ .

Ampérův zákon udává velikost intenzity magnetického pole, způsobenou celkovým protékajícím elektrickým proudem. Celkovým elektrickým proudem rozumíme vodivý proud a proud posuvný. Hustota vodivého proudu je vyjádřena vztahem

$$\mathbf{J}_v = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{IX-69})$$

kde  $\sigma$  je vodivost prostředí.

Pro hustotu posuvného proudu platí

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (\text{IX-70})$$

kde  $\mathbf{D}$  je vektor elektrické indukce.

Označíme-li hustotu celkového proudu  $\mathbf{J}_o$ , můžeme vyjádřit Ampérův zákon vztahem

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{H} \, d\mathbf{s}) = \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{J}_o \, d\mathbf{S}) \quad (\text{IX-71})$$

Dosaďme do rovnice (IX-71) výrazy z rovnice (IX-69) a (IX-70). Dostaneme

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{H} \, d\mathbf{s}) = \int_{\mathcal{S}} \left[ \left[ \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right] d\mathbf{S} \right] \quad (\text{IX-72})$$

kde  $\mathbf{H}$  je vektor intenzity magnetického pole.

Nahradíme v rovnicích (IX-68) a (IX-72) cirkulace na základě Stokesovy věty plošným integrálem; potom bude

$$\int_{\mathcal{S}} \left\{ (\text{rot } \mathbf{E} \, d\mathbf{S}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) \right\} = 0$$

a

$$\int_{\mathcal{S}} \left\{ (\text{rot } \mathbf{H} \, d\mathbf{S}) - \left[ \left[ \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right] d\mathbf{S} \right] \right\} = 0$$

Aby se tyto integrály pro jakoukoli plochu  $\mathcal{S}$  rovnaly nule, musí se výrazy pod integrálem též rovnat nule.

Rovnice

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (\text{IX-73})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (\text{IX-74})$$

jsou rovnice Maxwellovy. Rovnice (IX-73) je první Maxwellova rovnice a rovnice (IX-74) druhá Maxwellova rovnice.

Protože vektorové pole magnetické indukce je pole bez zdrojů (bez zřídla), je plošný integrál

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) = 0$$

neboli na základě Gaussovy věty

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{IX-75})$$

Podle Gaussovy poučky, že se tok vektoru elektrického posunu uzavřenou plochou rovná celkovému náboji, který je uvnitř uzavřené plochy, lze psát

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{D} \, d\mathbf{S}) = \int_V \rho \, dV \quad (\text{IX-76})$$

Na základě Gaussovy věty z vektorové analýsy bude mít rovnice (IX-76) tvar

$$\int_V \text{div } \mathbf{D} \, dV = \int_V \rho \, dV$$

Z toho je

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{IX-77})$$

kde  $\rho$  je objemová hustota náboje.

Rovnice (IX-75) je třetí a rovnice (IX-77) čtvrtá Maxwellova rovnice. Další rovnice charakterizují prostředí a udávají vztah mezi hustotou vodivého proudu a intenzitou elektrického pole, intenzitou elektrického pole a elektrickou indukcí a mezi intenzitou magnetického pole a magnetickou indukcí:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{IX-78})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{IX-79})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{IX-80})$$

kde  $\sigma$  je vodivost

$\epsilon$  dielektrická konstanta

$\mu$  magnetická permeabilita.

V isotropním prostředí jsou veličiny  $\sigma$ ,  $\epsilon$  a  $\mu$  konstanty. Provedeme-li u rovnice (IX-74) divergenci levé i pravé strany, je

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right)$$

protože  $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$ , je

$$\text{div } \mathbf{J} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D}$$

ježto  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ , je

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{IX-81})$$

Rovnice (IX-81) se nazývá rovnicí kontinuity.

#### 64.2 Energetické poměry v elektromagnetickém poli

Na základě první a druhé Maxwellovy rovnice platí

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) + \mathbf{J}_a \quad (\text{IX-82})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}) \quad (\text{IX-83})$$

kde  $\mathbf{J}_a$  je hustota vnučeného proudu.

Násobme skalárně rovnici (IX-82) vektorem intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a rovnici (IX-83) zápornou hodnotou vektoru intenzity magnetického pole ( $-\mathbf{H}$ ). Obě rovnice potom sečteme:

$$(\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}\mathbf{E}) + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}\mathbf{E}) + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}\mathbf{H}) + (\mathbf{J}_a \mathbf{E})$$

Protože

$$(\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}) = -\text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

platí

$$-\text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \sigma E^2 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} H^2 + (\mathbf{J}_a \mathbf{E})$$

Integrujeme předešlou rovnici přes objem  $V$ :

$$-\int_V \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV = \int_V \sigma E^2 dV + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_V E^2 dV + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V H^2 dV + \int_V (\mathbf{J}_a \mathbf{E}) dV$$

Podle Gaussovy věty je

$$-\int_V \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV = -\int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}] \mathbf{n}) dS$$

Proto je

$$\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}_a \mathbf{E}) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma E^2 dV + \frac{1}{4} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_V E^2 dV + \frac{1}{4} \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V H^2 dV + \int_V ([\mathbf{E}\mathbf{H}] \mathbf{n}) dS \quad (\text{IX-84})$$

Integrál  $\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}_a \mathbf{E}) dV$  určuje příkon zdroje vnučeného proudu  $\frac{1}{2} \int_V \sigma E^2 dV$  výkon, který se mění v Joulovo teplo,  $\frac{1}{4} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_V E^2 dV$  je časová změna energie elektrického pole,

$\frac{1}{4} \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V H^2 dV$  časová změna energie magnetického pole,  $\int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}] \mathbf{n}) dS$  výkon vyzářený

plochou  $S$ , uzavírající objem  $V$ . Vektor  $\frac{1}{2}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  udává velikost vyzářeného výkonu na jednotku plochy. Nazýváme jej Umov-Poyntingovým vektorem.

Rovnice (IX-84) je rovnicí energetické rovnováhy v elektromagnetickém poli.

#### 64.3 Okrajové podmínky na rozhraní dvou prostředí

Maxwellovy rovnice, uvedené v předcházející části, platí tehdy, je-li intenzita elektrického a magnetického pole v uvažovaném prostoru spojitá. Rovněž musí být spojitá první i druhá derivace. Tyto podmínky jsou obvykle splněny tehdy, jde-li o prostředí, kde je dielektrická konstanta  $\epsilon$ , magnetická permeabilita  $\mu$  a vodivost  $\sigma$  buď konstantní, nebo se spojitě mění. Avšak bývají případy, kdy se parametry prostředí mění skokem. V tomto případě je porušena spojitost intenzity elektrického a magnetického pole v místě takové skokové změny prostředí, a proto musíme zkoumat vlastnosti elektromagnetického pole v těchto místech zvlášť.

Uvažujme dvě prostředí oddělená plochou  $S$ . Jedno z nich má parametry  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  a druhé  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ . Určíme vlastnosti tečných složek a složek ve směru normály plochy  $S$  intenzity elektrického a magnetického pole.

Vytkneme na ploše  $S$  elementární objem tak, jak znázorňuje obr. 162. Určíme tok vektoru elektrické indukce  $\mathbf{D}$  uvnitř elementárního objemu. Podle Gaussovy věty platí [uvážíme-li (IX-77)]

$$\int_V \text{div } \mathbf{D} dV = \int_S (\mathbf{D}\mathbf{n}) dS = \int_V \rho dV = q$$

kde  $q$  je celkový náboj v objemu.

Aplikujme v našem případě Gaussovu větu na elementární objem  $dV$ . Určíme tok vektoru  $\mathbf{D}$  stěnami elementárního objemu

$$(\mathbf{D}_2 \mathbf{n}) dS - (\mathbf{D}_1 \mathbf{n}) dS + N = q$$

kde  $\mathbf{D}_2$  je vektor elektrického posunu v prostředí 2

$\mathbf{D}_1$  vektor elektrického posunu v prostředí 1

$\mathbf{n}$  vektor normály plochy  $S$  v místě elementárního objemu

$N$  příspěvek toku stěnami s rozměrem  $dt$

$q$  celkový náboj elementárního objemu.

V limitě pro  $dt \rightarrow 0$  také  $N \rightarrow 0$ ,  $q$  zůstává konstantní

$$\{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \mathbf{n}\} = \frac{q}{dI dS}$$

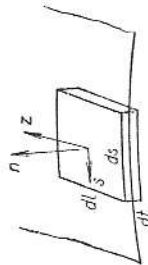
Výraz  $\frac{q}{dI dS}$  je náboj, který přísluší plošné jednotce povrchu  $S$ . Nazýváme ho hustotou povrchového náboje a označujeme ho  $\sigma$ . Potom

$$\{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \mathbf{n}\} = \sigma$$

Výraz  $\{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \mathbf{n}\}$  se také označuje  $\text{Div } \mathbf{D}$  a nazývá se povrchovou divergencí.

Obdobně dostaneme okrajové podmínky složky vektoru magnetické indukce ve směru normály hraniční plochy  $S$ . Protože pole magnetické indukce je bez zdrojů ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ), platí v tomto případě

$$\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \mathbf{n}\} = 0$$



Obr. 162. Elementární objem k určení okrajových podmínek.

neboli

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{IX-85})$$

Uřídíme dále okrajové podmínky pro tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole. Rovina plošky  $ds$  je kolmá na tečnou rovinu hraniční plochy. Použijeme Stokesovy věty, při čemž uvažujeme Maxwellovu rovnici (IX-83)

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{E} \, d\mathbf{S}) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \int (\mathbf{H} \, d\mathbf{S}) = \oint (\mathbf{E} \, ds)$$

Pro plošku  $d\mathbf{l}$   $dt$  se změnil předchozí vztah takto:

$$(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{s}) \, ds - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{s}) \, ds + C = - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \, ds \, dt$$

kde  $\mathbf{s}$  je jednotkový vektor ve směru rozměru  $ds$

$\mathbf{E}_2$  intenzita elektrického pole v prostředí 2

$\mathbf{E}_1$  intenzita elektrického pole v prostředí 1

$C$  příspěvek cirkulace na stranách  $dt$

$H_z$  složka intenzity magnetického pole, kolmá k plošce  $dt \, ds$ .

Jednotkové vektory  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{z}$  (viz obr. 162) tvoří pravotočivou soustavu jednotkových ortogonálních vektorů. Proto je

$$\mathbf{s} = [\mathbf{nz}]$$

Potom je

$$(\mathbf{E}_2 \cdot [\mathbf{nz}]) - (\mathbf{E}_1 \cdot [\mathbf{nz}]) + C = - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \, ds \, dt$$

V limitě pro  $dt \rightarrow 0$  také  $C \rightarrow 0$  a  $\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \, ds \, dt \rightarrow 0$ , neboť intenzita magnetického pole musí zůstat konečná. Potom po cyklické záměně

$$\mathbf{z}([\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}]) = 0$$

Aby tento vztah platil identicky pro jakýkoli směr  $\mathbf{z}$  na ploše  $S$ , musí být

$$[\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}] = 0 \quad (\text{IX-86})$$

Výraz  $[\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}]$  se také nazývá povrchovou rotací a označujeme jej  $\text{Rot } \mathbf{E}$ .

Zbývá určit okrajové podmínky pro tečné složky intenzity magnetického pole.

Podle rovnice (IX-74) platí

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

potom je

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{H} \, d\mathbf{S}) = \sigma \int_S (\mathbf{E} \, d\mathbf{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{D} \, d\mathbf{S}) = \oint (\mathbf{H} \, ds)$$

Pro plošku  $ds \, dt$  (kolmou k jednotkovému vektoru  $\mathbf{z}$ ) je

$$(\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{s}) \, ds - (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{s}) \, ds + C = \frac{\partial D_z}{\partial t} \, ds \, dt + \sigma E_z \, ds \, dt$$

kde  $C$  je příspěvek k cirkulaci na stranách  $dt$ .

V limitě

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} \, ds \, dt \rightarrow 0$$

neboť elektrický posun musí zůstat konečný.

Bude-li vodivost  $\sigma$  konečná, bude i

$$\sigma E_z \, ds \, dt \rightarrow 0$$

je-li však  $\sigma \rightarrow \infty$ , což prakticky bývá v kovovém prostředí, potom  $\sigma E_z \, ds \, dt$  bude konečné. V tomto případě je

$$(\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{s}) = \sigma E_z \, dt$$

Výraz  $\sigma E_z$  je hustota vodivého proudu. Při  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $dt \rightarrow 0$  bude výraz  $\sigma E_z \, dt$  konečný. Označíme jej  $K_z$ . Má rozměr  $\left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$  a nazýváme jej hustotou povrchového proudu. Platí tedy

$$(\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{s}) = (K \cdot \mathbf{z})$$

Nahradíme opět jednotkový vektor vektorovým součinem  $[\mathbf{nz}]$ . Potom se zřetelem na cyklickou záměnu bude

$$\mathbf{z}([\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}]) = (K \cdot \mathbf{z})$$

Tento vztah musí platit identicky pro jakýkoli směr  $\mathbf{z}$ . Proto

$$[\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}] = K$$

nebo

$$\text{Rot } \mathbf{H} = K \quad (\text{IX-87})$$

kde  $\mathbf{H}$  je intenzita magnetického pole

$K$  hustota povrchového proudu

$\mathbf{n}$  jednotkový vektor normály hraniční plochy  $S$ .

Полехин, А. И.: Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. (Některé problémy z difrakce elektromagnetických vln.) Moskva: Sovjetskoje radio, 1948.  
 Fradin, A. Z.: Anteny pro decimetrové a centimetrové vlny. Překlad. Praha: Technicko-  
 vědecké vydavatelství, 1952.  
 Антенны сантиметровых волн. (Anteny pro centimetrové vlny.) Překlad. Moskva:  
 Sovjetskoje radio, 1950.

## LITERATURA

### Кapitola I

Кисунько, Г. В. Электродинамика полых систем. (Elektrodynamika dutých soustav.) Leningrad: Nakladatelství VKAS, 1949.  
 Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. (Theorie elektromagnetismu.) New York: McGraw-Hill, 1941.  
 Votruba, V. a Muzikář, Č.: Theorie elektromagnetického pole. Praha: ČSAV, 1955.

### Кapitola II

Введенский, В. А.-Аренберг, А. Г.: Радиоволноводы. (Vlnovody.) Moskva-Leningrad: Gostschizdat, 1946.  
 Shelnkoff, S. A.: Electromagnetic Waves. (Elektromagnetické vlny.) New York: McGraw-Hill, 1943.  
 Гуревич, А. Г.: Полые резонаторы и волноводы. (Dutinové resonátory a vlnovody.) Moskva: Sovjetskoje radio, 1952.

### Кapitola III

Нейман, М. С.: Выпуклые эндобивраторы. (Dutinové resonátory.) EST, č. 9, 1939.  
 Нейман, М. С.: К теории тороидальных эндобивраторов. (K teorii toroidních resonátorů.) EST, č. 11, 1946.  
 Левин М. Д.: К теории тороидальных эндобивраторов. (K teorii toroidních resonátorů.) ŽTF, č. 16, 1946.  
 Кисунько, Г. В.: Об одном методе приближенного расчета собственных длин волн электромагнитных полых резонаторов неправильных форм. (O jedné metodě přibližného výpočtu vlastních délek vln elektromagnetických dutinových resonátorů nepravidelného tvaru.) Radiotekhnika, č. 5, 1948.

### Кapitoly IV a V

Самарский А. А.-Тихонов А. Н.: О возбуждении радиоволноводов. (O buzení vlnovodů.) Č. II, ŽTF 17/12/1431, 1947.  
 Кисунько, Г. В.: Теория возбуждения волночодов. (Theorie buzení vlnovodů.) ŽTF, č. 5, 1946.  
 Левин, М. И.: Современная теория волноводов. (Dnešní teorie vlnovodů.) Překlad. Moskva: Vydavatelství zahraniční literatury, 1954.  
 Справочник по волноводам. (Příručka o vlnovodech.) Překlad. Moskva: Sovjetskoje radio, 1952.

### Кapitola VI

Slater, G.: Передача ультракоротких волн. (Přenos velmi krátkých vln.) Překlad. Moskva-Leningrad: Ogiz, 1947.



Ing. Dr. Bohumil Kvasil

THEORETICKÉ ZÁKLADY TECHNIKY CENTIMETROVÝCH VLN

DT 538.56.029.64

Vazbu navrhl Josef Ambrož

Grafická úprava a technická redakce Marie Králová

Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, n. p., Spálená 51, Praha II  
v únoru 1957 jako svou 2339. publikaci, typové číslo L26-C3-5-II  
v řadě elektrotechnické literatury  
304 stran, 162 obrázků, 5 tabulek

Odpovědný redaktor Rudolf Major

Jazyková úprava Otto Levínský

Tiskové korektury Olga Klimentová

Z nové sazby písmem Plantin

výtiskly Pražské tiskárny, n. p., závod 05, Třída Rudé armády 171, Praha VIII  
formát papíru 70 × 100 cm — 35,99 AA, 36,91 VA  
38869-55-SV3 — D 566 04

Sazba 16. 4. 1956 — tisk 17. 1. 1957 — 2700 výtisků — vydání první — 05/38

Cena váz. 36,30 Kčs

56/II-6-C3

*Publikace je určena jako učebnice pro vysoké školy a pro pracovníky ve výzkumných ústavech*