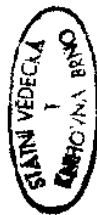

Teoretické základy mikrovlnné techniky

Prof. Ing. Václav Tysl, DrSc.
doc. Ing. Vladimír Růžička, CSc.

Kniha seznamuje čtenáře s teoretickými základy mikrovlnné techniky zahrnujícími zejména mikrovlnná vedení, rezonanční obvody, reciproční a nereciproční mikrovlnné obvody a základní měřicí metody používané v mikrovlnné oblasti.

Kniha je celostátní vysokoškolskou učebnicí pro studenty elektrotechnických fakult studijního oboru radioelektronika, mohou ji však využít všichni inženýři pracovníci, kteří se zabývají mikrovlnnou technikou.



MZK-TK Brno



2529979233

Obsah

PŘEDMLUVA

SEZNAM SYMBOLŮ

1.	Úvod do problematiky velmi vysokých frekvencí (V. Tysl)	17
1.1.	Obvody se sousředy a rozloženými parametry	17
1.2.	Základní rovnice elektromagnetického pole	18
1.2.1.	Druhy prostředí	19
1.2.2.	Elektrická a magnetická polarizace	21
1.3.	Řešení Maxwellových rovnic	22
1.3.1.	Vektorový a skalární potenciál	23
1.3.2.	Hertzovy vektory	27
1.3.3.	Elektromagnetická pole příčná a podélná	33
	<i>Literatura ke kapitole 1</i>	34
2.	Mikrovlnná vedení obecného příčného průřezu (V. Tysl)	35
2.1.	Charakteristické případy řešení vlnové rovnice	36
2.2.	Vlnovody s vlnami TM a TE	42
2.2.1.	Okrajové podmínky na plášti vlnovodu	42
2.2.2.	Charakteristická impedance vlnovodu	44
2.2.3.	Výkon přenášený vlnovodem	46
2.2.4.	Rychlost šíření energie ve vlnovodu	50
2.2.5.	Geometrická představa o šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu	52
2.3.	Vlnovod s konečnou vodivostí pláště	55
2.3.1.	Charakteristická impedance vodiče, poměrný vysokofrekvenční odpor	56
2.3.2.	Poměrný útlum vlnovodu při šíření vln	60
2.4.	Vliv ztrátového dielektrika na přenosové vlastnosti vlnovodu	66
2.5.	Vedení s vlnou příčně elektricko-magnetickou (TEM)	68
2.5.1.	Parametry vedení	68
2.5.2.	Výkon přenášený vedením s vlnou příčně elektricko-magnetickou	72
2.5.3.	Poměrný útlum vedení s vlnou příčně elektricko-magnetickou	73
2.6.	Dvouvodičové vedení s rozloženými parametry L_0, C_0, R_0, G_0	74
2.6.1.	Telegrafní rovnice vedení	75
2.6.2.	Impedanční poměry na vedení	77
2.6.3.	Transformace impedance na vedení	78
2.6.4.	Činitel odrazu na vedení	78
2.7.	Vlastnosti vlnovodu při úhlové frekvenci nižší než kritické	80
	<i>Literatura ke kapitole 2</i>	85
3.	Mikrovlnná vedení nejčastěji používaná v technické praxi (V. Tysl)	86
3.1.	Vlnovod obdélníkového průřezu a jeho vlastnosti	86
3.1.1.	Vlny příčně magnetické (TM, E) ve vlnovodu obdélníkového průřezu	87

Lektoři: prof. Ing. Gojko Lončar, CSc.
prof. Ing. Vladimír Mikula, CSc.

Redakce elektrotechnické literatury
Hlavní redaktor Ing. Josef Říha
Odpovědný redaktor Ing. Milan Dufek, CSc.

© Prof. Ing. Václav Tysl, DrSc., doc. Ing. Vladimír Růžička, CSc., 1989 ISBN 80-03-00141-2

27 listop. 1989

3.1.2.	Vlny příčné elektrické (TE, H) ve vlnovodu obdélníkového průřezu	89
3.2.	Vlnovod kruhového průřezu a jeho vlastnosti	97
3.2.1.	Vlny příčné magnetické (TM, E) ve vlnovodu kruhového průřezu	99
3.2.2.	Vlny příčné elektrické (TE, H) ve vlnovodu kruhového průřezu	104
3.3.	Koaxiální (souosé) vedení	111
3.3.1.	Vlnodové vidy v koaxiálním vedení	115
3.4.	Deskové vedení se středním vodičem	121
3.5.	Dvoudrátové vedení	126
3.6.	Symetrické páskové vedení	131
3.7.	Nesymetrické páskové vedení	139
<i>Literatura ke kapitole 3</i>		
4.	Nehomogenní vedení (V, Tysl)	142
4.1.	Podélné spojitě nehomogenní vedení	143
4.1.1.	Vedení s exponenciální změnou impedance	143
4.2.	Podélné nehomogenní vedení se stupňovou změnou impedance	144
4.2.1.	Vedení se stupňovou změnou impedance podle binomického rozložení	145
4.3.	Příčné nehomogenní vedení	146
4.3.1.	Vlnovod obdélníkového průřezu s vložkou dielektrickou deskou	147
4.3.2.	Metoda příčné rezonance	148
4.4.	Radiální vedení	152
<i>Literatura ke kapitole 4</i>		
5.	Dielektrické vlnovody (V, Tysl)	154
5.1.	Zpomalení elektromagnetické vlny	159
5.1.1.	Šíření elektromagnetické vlny podél zpomalujícího prostředí	160
5.2.	Šíření elektromagnetické vlny podél neohraničené dielektrické desky	161
5.2.1.	Šíření vlny TM podél dielektrické desky	163
5.2.2.	Šíření vlny TE podél dielektrické desky	163
5.2.3.	Rozklad elektromagnetického pole na rovinné vlny	165
5.3.	Šíření elektromagnetické vlny podél neohraničené dielektrické vrstvy umístěné na vodivé podložce	168
5.4.	Šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického válce	172
5.4.1.	Mezní případy šíření vlny podél dielektrického válce	172
5.4.2.	Vlny HE_{mn} a EH_{mn} v dielektrickém válci	177
5.4.3.	Vlny HE_{11} v dielektrickém válci	179
5.4.4.	Vlny TM_{0n} a TE_{0n} v dielektrickém válci	180
5.4.5.	Grafická interpretace vidů šíření v dielektrickém válci	181
5.5.	Šíření vlny podél vodiče potaženého dielektrickou vrstvou	181
<i>Literatura ke kapitole 5</i>		
6.	Periodické struktury (V, Růžička)	182
6.1.	Obecné zákony v periodických strukturách	185
6.1.1.	Pomale elektromagnetické vlny	186
6.1.2.	Povrchové vlny	186
6.1.3.	Prostorové harmonické	188
6.2.	Šíření vln podél periodických struktur	189
6.2.1.	Sroubovicové vedení	191
6.2.2.	IIIébinkové vedení	191
<i>Literatura ke kapitole 6</i>		
7.	Mikrovlnné rezonanční obvody (V, Tysl)	196
6		

7.1.	Rezonanční obvody s vlnami TEM	201
7.1.1.	Rezonátor vytvořený z úseku vedení na jednom konci otevřeného a na druhém konci uzavřeného nakrátko	201
7.1.2.	Rezonátor vytvořený z úseku vedení na obou koncích uzavřeného nakrátko	202
7.1.3.	Rezonátor vytvořený z úseku vedení na obou koncích otevřeného	204
7.1.4.	Rezonátor vytvořený z úseku vedení nakrátko a sousředěné kapacity	205
7.1.5.	Rezonátor vytvořený z úseku vedení naprázdno a sousředěné kapacity	206
7.2.	Činitel jakosti rezonančního obvodu	207
7.3.	Dutinové rezonátory, obecné vlastnosti	209
7.4.	Dutinové rezonátory vlnodového typu	211
7.4.1.	Rezonátor s vlnou příčné magnetickou (TM, E)	212
7.4.2.	Rezonátor s vlnou příčné elektrickou (TE, H)	217
7.5.	Rezonátory vlnodového typu s kruhovým průřezem	221
7.5.1.	Diagram vidů rezonátoru s kruhovým průřezem	221
7.5.2.	Elektromagnetické pole vidů TM_{mp} ve vlnodovém rezonátoru s kruhovým průřezem	223
7.5.3.	Elektromagnetické pole vidů TE_{mp} ve vlnodovém rezonátoru s kruhovým průřezem	225
7.5.4.	Činitel jakosti vlnodových rezonátorů kruhového průřezu s vidy TM_{mp}	226
7.5.5.	Činitel jakosti vlnodových rezonátorů kruhového průřezu s vidy TE_{mp}	227
7.5.6.	Vlnodový rezonátor kruhového průřezu s videm TE_{01P}	229
7.6.	Rezonátory vlnodového typu s obdélníkovým průřezem	234
7.6.1.	Diagram vidů vlnodového rezonátoru s obdélníkovým průřezem	234
7.6.2.	Elektromagnetické pole vidů TE_{mp} ve vlnodovém rezonátoru s obdélníkovým průřezem	235
7.6.3.	Činitel jakosti vlnodových rezonátorů obdélníkového průřezu s vidy TE_{mp}	236
7.7.	Otevřené rezonátory	237
7.8.	Dielektrické rezonátory	242
7.9.	Feritové rezonátory	245
<i>Literatura ke kapitole 7</i>		
8.	Nespojitosti na vedeních (V, Růžička)	246
8.1.	Ciony ve vlnovodu	247
8.1.1.	Indukční clona v obdélníkovém vlnovodu	249
8.1.2.	Kapacitní clona v obdélníkovém vlnovodu	250
8.1.3.	Indukční clona v kruhovém vlnovodu	257
8.1.4.	Kapacitní clona v kruhovém vlnovodu	257
8.1.5.	Rezonanční okénko	258
8.2.	Prizpůsobovací rezonanční kolik ve vlnovodu	258
<i>Literatura ke kapitole 8</i>		
9.	Reciproční mikrovlnné obvody (V, Růžička)	261
9.1.	Maticový popis mikrovlnných lineárních mnohobran	262
9.1.1.	Mikrovlnný dvojpól	263
9.1.2.	Imitanci matice mikrovlnného obvodu	263
9.1.3.	Vlastnosti imitancí matice	265
9.1.4.	Rozptylová matice	267
9.1.5.	Vlastnosti přenosové matice	269
9.1.6.	Vlnová přenosová matice	272
9.2.	Prostorová symetrie mikrovlnných obvodů	274
9.2.1.	Matematická formulace symetrických transformací	277
9.2.2.	Reflexní grupa operátorů symetrie	280

<i>Literatura ke kapitole 11</i>	378
12. Úvod do měření při velmi vysokých frekvencích (V. Tysl)	379
12.1. Stojaté vlny na vedení	379
12.1.1. Experimentální určení činitele stojatých vln	383
12.2. Kruhový impedanční diagram	384
12.2.1. Zobrazení konstantních reálných složek impedance	385
12.2.2. Zobrazení konstantních reaktancí	386
12.2.3. Zobrazení komplexní roviny přenosu	387
12.2.4. Zobrazení činitele odrazu a činitele stojatých vln	389
12.2.5. Zobrazení konstantní fáze a konstantní absolutní hodnoty impedance	391
12.3. Příklady použití kruhového impedančního diagramu	394
12.3.1. Transformace impedance podél vedení	394
12.3.2. Určení zakončovací impedance	399
12.3.3. Přizpůsobování impedancí	400
12.4. Měření impedancí	402
12.4.1. Určení impedance z průběhu stojatých vln na vedení	403
12.4.2. Určení impedance pomocí můstkového T	406
12.5. Určení prvků náhradního obvodu mikrovlňného čtyřpólu	408
12.6. Měření činitele jakosti rezonančních obvodů	412
12.6.1. Určení činitele jakosti rezonančního obvodu impedanční metodou	413
12.6.2. Určení činitele jakosti z výkonu odraženého od rezonančního obvodu	419
12.7. Měření výkonu	420
12.7.1. Bolometrické metody měření výkonu	421
12.7.2. Kalorimetrické metody měření výkonu	422
<i>Literatura ke kapitole 12</i>	424

<i>Matematická příloha</i>	425
A. Vektorový počet	425
B. Besselovy funkce	433
C. Lineární algebra	437
D. Schwarzovo – Christoffelovo zobrazení	442
E. Sřední hustota toku výkonu	443
F. Ortogonální vlastnosti vlastních funkcí vlnovodu	445
G. Rovnice kružnice v komplexním tvaru	445
H. Silové čáry elektrického a magnetického pole	446
<i>Rejstřík</i>	448

9.3. Analýza vlastností mikrovlňných mnohobran	281
9.3.1. Mikrovlňný dvojbřan – tlustá clona ve vlnovodu	282
9.3.2. Mikrovlňný trojbřan	288
9.3.3. Mikrovlňné čtyřbřany	291
9.3.4. Kruhová polarizace v mikrovlňných obvodech	305
9.3.5. Kruhové polarizátory	308
9.3.6. Rozptylová matice kruhového polarizátoru	309
9.3.7. Kruhové polarizované magnetické pole v obdélníkovém vlnovodu s vlnou TE ₁₀	311
9.4. Analýza mikrovlňných obvodů metodou orientovaných grafů	313
9.4.1. Definice základních pojmů a jejich grafické interpretace	313
9.4.2. Jednoduché úpravy orientovaných grafů	315
9.4.3. Určování hledaných veličin	316
9.4.4. Řešení mikrovlňných obvodů metodou grafů	318
<i>Literatura ke kapitole 9</i>	320
10. Mikrovlňné nereziproční obvody (V. Růžička)	321
10.1. Obecné vlastnosti nerezipročních mikrovlňných obvodů	321
10.1.1. Složení a struktura feritů	321*
10.1.2. Rozdělení obvodů s ferity	322
10.2. Gyromagnetické jevy ve feritech	323
10.2.1. Feromagnetická rezonance	323
10.2.2. Vynucené kmity magnetizace	325
10.3. Šíření vln v gyrotropním prostředí	330
10.3.1. Faradayův jev	332
10.3.2. Dvojloň a příčná feromagnetická rezonance	333
10.4. Praktické využití gyromagnetických jevů	335
10.4.1. Obvody s podélně magnetovaným feritem	335
10.4.2. Obvody s příčně magnetovaným feritem	337
<i>Literatura ke kapitole 10</i>	340
11. Mikrovlňné integrované obvody (V. Růžička)	341
11.1. Monolitické mikrovlňné integrované obvody	341
11.2. Hybrdní mikrovlňné integrované obvody	343
11.3. Mikrovlňné integrované obvody s rozloženými parametry	344
11.3.1. Nesymetrické mikropáskové vedení	345
11.3.2. Štěrbinové vedení	350
11.3.3. Koplanární vedení	352
11.3.4. Porovnání vlastností páskových vedení	353
11.3.5. Vázaná vedení	354
11.3.6. Mikropáskové vedení na feritovém substrátu	355
11.3.7. Buzení mikropáskových vedení	357
11.3.8. Nespjitosti v mikropáskových vedeních	360
11.4. Mikrovlňné obvody a součástky v mikropáskovém provedení	361
11.4.1. Mikrovlňné rezonátory	362
11.4.2. Reciproční mnohobřany v mikropáskovém provedení	364
11.4.3. Nereziproční obvody v mikropáskovém provedení	367*
11.5. Mikrovlňné integrované obvody se soustředěnými parametry	371
11.5.1. Pasivní součástky pro mikrovlňné integrované obvody se soustředěnými parametry	372
11.5.2. Některá praktická provedení mikrovlňných integrovaných obvodů se soustředěnými parametry	376

Předmluva

Označení velmi vysoké frekvence se v průběhu let vžilo pro elektromagnetické frekvenční spektrum 1 až 1 000 GHz (tj. 10^9 až 10^{12} Hz), hranice však nebývají zcela ostré a často se kladou do oblasti 300 MHz až 3 000 GHz. Tomuto spektru frekvencí přísluší vlnové délky 30 cm až 0,3 mm. Často se proto setkáváme i s rozdělením tohoto spektra podle vlnových délek, takže sem patří vlny decimetrové, centimetrové, milimetrové a submilimetrové. Protože vyšší části frekvenčního spektra přísluší velmi krátké vlnové délky, používá se pro tuto oblast název mikrovlny.

Rozvoj mikrovlnné techniky začal ke konci druhé světové války a byl úzce vázán na vývoj radiolokačních zařízení. Bylo to dáno tím, že velmi krátké elektromagnetické vlny lze soustředit pomocí relativně malých antén do velmi úzkého svazku, což zlepšuje rozlišovací schopnost radiolokátorů. Šířka svazku elektromagnetické vlny vyzářované z antény je nepřímo úměrná poměru D/λ , kde D je průměr antény a λ je vlnová délka. Například pro dosažení svazku šířky 2° je potřebný průměr antény $D \approx 30\lambda$. Tomu při frekvenci $f = 10$ GHz odpovídá průměr antény 1 m. při frekvenci $f = 100$ GHz průměr antény 10 cm, zatímco při frekvenci $f = 100$ MHz by byl průměr antény $D = 100$ m.

Možnost soustředění elektromagnetických vln do úzkých svazků a velká šířka frekvenčního spektra předurčila mikrovlny k využití v tzv. směrových spojích. Zde se používají pro telekomunikační a radiokomunikační účely (dálnopis, rozhlas, televize, telefonní spojení), a to nejen při spojení mezi pozemními stanicemi, ale i v družicových přenosech.

Existence absorpčních jevů při šíření elektromagnetických vln určitých frekvencí daly podnět k rozvoji nového vědního odvětví, tzv. mikrovlnné spektroskopie plynů, par i pevných látek. Její pomocí bylo možné určit nejen absorpční frekvence nejruznějších látek, a tím i jejich meziatomové vzdálenosti, ale našla uplatnění jako pracovní metoda v mnoha vědních oborech. Jednou z aplikací bylo sestrojení tzv. kvantových etalonů frekvence využívaných např. par cesia ($f = 9\,192\,631$ MHz) nebo atomárního vodíku ($f = 1\,420\,405$ MHz). Velmi významnou aplikaci, využívající poznatků mikrovlnné spektroskopie, byla konstrukce tzv. mikrovlnných kvantových zesilovačů (maseru), na něž navázal vývoj kvantových generátorů viditelného, popř. infračerveného záření (lasertů).

Velmi citlivé mikrovlnné přijímače se používají v radioastronomii k detekci elektromagnetického záření vyzářovaného kosmickými objekty i k detekci záření vyzářovaného planetami naší sluneční soustavy. Tyto tzv. radiometry (umístěné

na kosmických sondách) umožňují určit i povrchovou teplotu těchto těles. Pomocí mikrovlnných radiometrů je však možné snímat i rozložení teplot na povrchu Země a z něj usuzovat o výskytu vody, o vlastnostech sněhové pokrývky, o stavu vegetace, o znečištění oceánů apod.

Významnou technickou aplikací mikrovlnné techniky je mikrovlnný ohřev. Mikrovlnná zařízení se používají nejen k průmyslovému ohřevu a vysoušení nejruznějších látek, ale i k ohřevu jídla at již v restauračních zařízeních nebo v domácnostech.

Jsou však možné ještě další aplikace. Mikrovlny se používají v mikrovlnných urychlovačích nabitých částic, k měření vlhkosti tuhých i sypkých látek, k měření rychlosti, ve zdravotnictví k lokální hypertermii atd.

Pro celou tuto oblast frekvencí je charakteristické použití obvodů s rozloženými parametry. K přenosu energie se používají různé druhy vedení, přičemž v nižší frekvenční oblasti převažují souosá (koaxiální) vedení, ve vyšší frekvenční oblasti pak tzv. vlnovody, vytvářené z kovových trubek různého průřezu (nejčastěji obdélníkového nebo kruhového). Elektromagnetické vlny se však mohou šířit i podél dielektrických vedení. Využití těchto vedení je zvlášť významné při frekvencích ještě vyšších, tj. v infračervené a viditelné oblasti frekvenčního spektra, kde bývají tato vedení označována jako planární, popř. vláknové světlovody.

Mikrovlnné rezonanční obvody se též liší od obvodů používaných při nižších frekvencích. V pásmu decimetrových vln se indukcí obvykle nevytváří cívky, ale úsekem vedení (nejčastěji zakončeným nakrátko), kapacita bývá ještě vytvořena kondenzátorem. V pásmech centimetrových a milimetrových vln se většinou používají tzv. dutinové rezonátory, pro pásmo vln submilimetrových je charakteristické použití tzv. otevřených rezonátorů. Rezonanční obvody je však možné realizovat i jinými způsoby. Zejména v mikrovlnné integrované technice nalzájí pro své malé rozměry velké uplatnění dielektrické a feritové rezonátory.

Vývoj mikrovlnné techniky, směřující k integraci dílčích obvodů i systémů, vede k tomu, že se ke konstrukci používají takové druhy vedení a rezonátorů, které integraci z technologického hlediska umožňují. Jsou to zejména obvody v mikropáskovém provedení.

Obsah této knihy je náplní studia dvousemestrálního předmětu na elektrotechnických fakultách studijního oboru radiotechnika a tvoří základ, na kterém by měl budoucí inženýr – radiotechnik stavět. Studenti, kteří se později specializují na mikrovlnnou techniku, mají možnost rozšířit své znalosti studiem dalších specializovaných předmětů, jako jsou např. mikrovlnná integrovaná technika a základy optických komunikací.

K úspěšnému osvojení látky účinně napomáhá řešení praktických problémů a proto předpokládáme, že na fakultách budou vydány soubory řešených příkladů formou učebních textů. Jejich zařazení do učebnice by vyžadovalo podstatné zvětšení rozsahu.

Za podnětné připomínky k textu, popř. k úpravě rukopisu jsme zavázáni jak oběma lektorem, prof. Ing. Vladimírem Mikulovi, CSc., a prof. Ing. Gojko

Lončarovi, CSc., tak i svým spolupracovníkům, Ing. Josefu Punčochářovi a doc. Ing. Jiřímu Svačinovi, CSc., z katedry radioelektroniky FE VUT Brno a prof. Ing. Jaroslavovi Vokurkovi, DrSc., a doc. Ing. Jánů Zehentnerovi, CSc., z katedry elektromagnetického pole FEL ČVUT Praha. Náš dík patří rovněž odpovědnému redaktorovi Ing. Milanu Dufkovi, CSc., za mnoho věcných připomínek k rukopisu učebnice.

Autoři

Seznam symbolů

A	vektorový potenciál magnetického pole
a	vektorový potenciál elektrického pole
a	sloupcový vektor vlny vstupující do n -brany
a⁽ⁱ⁾	i -tý vlastní vektor
a, b	rozměry vlnovodu obdélníkového průřezu
B	vektor magnetické indukce
B, b	normovaná susceptance
b	sloupcový vektor vlny vystupující z n -brany
C	konstanta, kapacita, vazba
C₀	kapacita na jednotku délky
c	rychlost světla ve vakuu, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$
D	vektor elektrické indukce
D	odbočný útlum
d	hloubka vniku vř proudů
E	vektor intenzity elektrického pole
E	velikost vektoru E
E_T	velikost příčné složky vektoru E
E_t	velikost tečné složky vektoru E
F	operátor reflexe
f	frekvence
f_m	mezní frekvence
G₀	vodivost na jednotku délky
g	součinitel šíření
H	vektor intenzity magnetického pole
H	velikost vektoru H
H_T	velikost příčné složky vektoru H
H_t	velikost tečné složky vektoru H
ħ	Planckova konstanta
h₁, h₂, h₃	Laméovy koeficienty
I	operátor identity
I	izolace směrové odbočnice
I(z)	proud jako funkce souřadnice z
i_j(z)	normovaný proud v j -tém rameni
i	sloupcový vektor proudu
I_n(r)	modifikovaná Besselova funkce

J vektor magnetické polarizace, $\mathbf{J} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$; vektor hustoty proudu
 $J_n(r)$ Besselova funkce 1. druhu, n -tého řádu
j imaginární jednotka
 $K_n(r)$ modifikovaná Besselova funkce (MacDonaldova)
k vlnové číslo
L indukčnost, vložný útlum, perioda struktury
 L_0 indukčnost na jednotku délky
l délka vedení
M vektor magnetizace, $\mathbf{M} = \mathbf{J}/\mu_0$
M norma vlastní funkce vlnovodu
m magnetický moment
 m_{sp} magnetický moment spiny
 $N_n(r)$ Besselova funkce 2. druhu, n -tého řádu (Neumannova)
n jednotkový vektor ve směru normály
P vektor elektrické polarizace, $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$
P operátor inverze
P výkon
 P_z ziráťový výkon
p činitel stojaté vlny
Q činitel jakosti
R operátor rotace
 R_{rf} vysokofrekvenční odpor vodiče
 R_0 odpor na jednotku délky
 R_0, r_0 rozměry sousedního vedení
r normovaný odpor
S plocha, směřovost
s normovaná rozptylová matice
 s_{ij} prvek matice **s**
s obrysová křivka vlnovodu
T nenormovaná přenosová matice
 T_1 příčná funkce vlnovodu
 T_2 podélná funkce vlnovodu
t normovaná přenosová matice
t jednotkový vektor ve směru tečny
 t_{kj} přenos mezi j -tým a k -tým uzlem
 $t^{(n)}$ přenos smyčky n -tého řádu
U napětí
 $u(z)$ normované napětí jako funkce souřadnice z
 $u_j(z)$ normované napětí v j -tém rameni
u sloupcový vektor napětí (normovaného)
V objem, skalární potenciál
v rychlost
 v_T fázová rychlost

skupinová rychlost
energie
reaktance
normovaná hodnota reaktance
charakteristická admittance (na bázi $E-H$)
vlnová admittance (na bázi $U-I$)
normovaná admittance matice
prvek matice **y**
normovaná admittance jako funkce souřadnice z
charakteristická impedance (na bázi $E-H$)
charakteristická impedance vodivého prostředí
vlnová impedance (na bázi $U-I$)
normovaná impedance matice
prvek matice **z**
normovaná impedance jako funkce souřadnice z
poměrný posun, úhel, koeficient
prvky rozptylové matice
poměrný útlum
příčná konstanta
součinitel šíření, gyromagnetický poměr
Laplaceův operátor
šířka pásma
determinant
Kroneckerův symbol
tangenta ztrátového úhlu, ztrátový činitel
tenzor permittivity
permittivita
relativní permittivita
permittivita vakua
reálná a imaginární část komplexní permittivity
činitel vazby
vlnová délka ve volném prostoru
mezí vlnová délka
vlnová délka ve vlnovodu
tenzor permeability
permeabilita
relativní permeabilita
složka tenzoru permeability
Bohrův magneton
permeabilita vakua (magnetická konstanta)
reálná a imaginární část komplexní permeability
poměr $\omega_m/\omega = f_m/f$
Herizův vektor elektrický a magnetický

Π°, Π^m	velikost Hertzova vektoru elektrického a magnetického
π	Ludolfovo číslo
ρ	objemová hustota náboje, rezistivita, činitel odrazu
ρ_{vt}	poměrný vf odpor
σ	konduktivita
τ	činitel přenosu, časová konstanta
ϕ	skalární potenciál
ϕ_0	magnetický tok
φ	skalární potenciál, fázový úhel
χ°, χ^m	susceptibilita elektrická a magnetická
ψ	skalární potenciál, fázový úhel
ω	úhlová frekvence
ω_m	mezní úhlová frekvence
∇	Hamiltonův operátor
u_1, u_2, u_3	obecné křivočaré ortogonální souřadnice
u_1, u_2, u_3	jednotkové vektory ve směru souřadnic u_1, u_2, u_3
x, y, z	kartézské souřadnice
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	jednotkové vektory ve směru souřadnic x, y, z
r, φ, z	válcové souřadnice
r, φ, z	jednotkové vektory ve směru souřadnic r, φ, z

Poznámky:

1. V seznamu jsou uvedeny pouze nejdůležitější symboly. Ostatní použité symboly jsou vysvětleny na příslušných místech textu.

2. Složky vektorů ve směru souřadnic jsou označeny indexy udávajícími příslušnou souřadnici.

3. U časově proměnných veličin se předpokládají harmonické průběhy a používá se vyjádření těchto průběhů pomocí fázorů. Fázory a fázory vektorů nejsou proto vyznačovány odlišným typem písma. Například:

symbol \mathbf{H} znamená vektor i fázor vektoru intenzity magnetického pole, symbol H znamená velikost vektoru \mathbf{H} i fázor (komplexní amplitudu) velikosti vektoru \mathbf{H} .

Podobně nejsou typem písma vyznačovány komplexní veličiny (např. komplexní imitance apod.). Komplexně sdružená hodnota je vyznačena hvězdičkou, např. \mathbf{H}^* , H^* . Modul je vyznačen $|q|$ apod.

4. U matic je použita tato symbolika:

$\tilde{\mathbf{A}}$ znamená transponovanou matici k matici \mathbf{A} ,

\mathbf{A}^{-1} znamená inverzní matici k matici \mathbf{A} ,

$\mathbf{1}$ znamená jednotkovou matici.

1. Úvod do problematiky velmi vysokých frekvencí

Úspěšné zvládnutí techniky velmi vysokých frekvencí vyžaduje dobré znalosti teorie elektromagnetického pole. V této kapitole připomeneme některé základní pojmy a vztahy, s nimiž se studenti elektrotechnických fakult setkali již v předmětů Teorie elektromagnetického pole. Při řešení většiny problémů vycházíme z Maxwellových rovnic, které jsou základními rovnicemi makroskopické elektrodynamiky. Maxwellovy rovnice popisují elektromagnetické pole v každém bodě vyšetřovaného systému, takže makroskopickou elektrodynamiku lze také nazývat diferenciální teorií elektromagnetického pole.

Některé úlohy, vyskytující se v technice velmi vysokých frekvencí, není však nutné řešit tak, že určíme hodnoty elektromagnetického pole v každém bodě systému. Elektrické procesy je vhodnější popisovat jednoduššími a názornějšími metodami elektrických obvodů, přičemž se jako základní veličiny používají napětí U a proud I , které jsou integrálními veličinami elektromagnetického pole.

V převážné většině problémů nebudeme řešit Maxwellovy rovnice přímo, ale zavedením Hertzových vektorů převedeme jejich řešení na řešení vlnových rovnic pro Hertzovy vektory. Tento postup má výhodu v univerzálnosti získaných výsledků v případech, kdy určíme vlastnosti vedení různých příčných průřezů.

1.1. OBVODY SE SOUSTŘEDĚNÝMI A ROZLOŽENÝMI PARAMETRY

Pokud jsou geometrické rozměry elektrického obvodu zanedbatelné oproti vlnové délce signálu, který je k obvodu přiveden, můžeme předpokládat, že okamžitě hodnoty napětí a proudu jsou v daném okamžiku ve všech příčných průřezech vodiče stejné. To však znamená, že v podstatě předpokládáme nekonečně velkou rychlost šíření elektromagnetického rozruchu podél vodiče, takže v každém místě určitého členu obvodu je stejná okamžitá hodnota signálu. Parametr, jímž je tento člen charakterizován, předpokládáme soustředěný v místě jeho připojení. Uvedený předpoklad je téměř vždy splněn v nízkofrekvenční technice a ve většině technických aplikací rozhlasové vysokofrekvenční techniky. Technika velmi vysokých frekvencí je naopak charakteristická tím, že použitá vlnová délka je porovnatelná s rozměry obvodů.

Ke znázornění uvedených úvah předpokládáme jednoduchý uzavřený obvod, v němž se šíří střídatý harmonický signál rychlostí v (obr. 1.1). Je-li v místě S_1

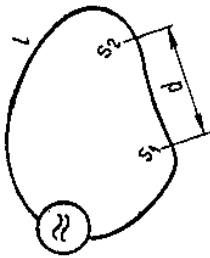
a v okamžiku t okamžitá hodnota proudu

$$i_1 = I \sin \omega t$$

bude proud v místě S_2 časově zpožděn o $\tau = d/v$, takže

$$i_2 = I \sin \omega(t - \tau) = I \sin(\omega t - \varphi)$$

kde $\varphi = \omega\tau$.



Obr. 1.1.

Protože platí $\omega = 2\pi f$; $\lambda = v/f$, je mezi místy S_1 a S_2 fázový rozdíl

$$\varphi = \omega\tau = \omega \frac{d}{v} = 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

Z toho je zřejmé, že okamžitá hodnota signálu nebude závislá na geometrických rozměrech obvodu pouze tehdy, jsou-li rozměry obvodu považujeme členy obvodu za současnou délku, tj. je-li $l \ll \lambda$. V takovém případě považujeme členy obvodu za součástky s nulovou délkou, soustředěné v jednotlivých bodech, takže hovoříme o *obvodu se soustředěnými parametry*. Jestliže jsou rozměry porovnatelné s vlnovou délkou, tj. je-li $l \approx \lambda$ nebo $l > \lambda$, je třeba při výpočtech brát v úvahu i rozměry součástek. Jejich parametry nejsou soustředěny v jednom místě, ale jsou spojitě rozloženy po celém objemu. V takovém případě hovoříme o *obvodech s rozloženými parametry*.

I když obvody s rozloženými parametry jsou typické v technice velmi vysokých frekvencí, nelze říci, že se v této oblasti obvody se soustředěnými parametry nepoužívají. Moderní technologie výroby mikroelektronických obvodů umožňuje miniaturizaci rozměrů realizovat i v mikrovlnné oblasti obvody se soustředěnými parametry, přičemž podmínka $l \ll \lambda$ je zachována.

1.2. ZÁKLADNÍ ROVNICE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

V makroskopické elektrodynamice je možné vyjádřit vlastnosti elektromagnetického pole při obecné časové závislosti Maxwellovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}; & \text{div } \mathbf{D} &= \rho \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Pro elektromagnetické pole ve vakuu platí vztahy

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

kde

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi \cdot c^2} \doteq 8,854 \, 188 \cdot 10^{-12} \quad (\text{F} \cdot \text{m}^{-1})$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \doteq 1,256 \, 637 \cdot 10^{-6} \quad (\text{H} \cdot \text{m}^{-1})$$

Ve hmotném prostředí platí

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{J}_v = \sigma \mathbf{E}$$

Parametry ϵ , μ a σ vyjadřují makroskopické vlastnosti prostředí a určují se většinou experimentálně. V praxi bývá výhodné udávat parametry prostředí v poměru k vakuu. Proto se zavádějí pojmy

$$\text{relativní permittivita} \quad \epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$$

$$\text{relativní permeabilita} \quad \mu_r = \mu/\mu_0$$

Při konkrétních aplikacích budeme vždy předpokládat u všech časově proměnných veličin harmonický průběh. Okamžité hodnoty intenzit elektrického a magnetického pole můžeme psát symbolicky ve tvaru

$$\mathbf{E}(u, v, z, t) = \mathbf{E}(u, v, z) e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{H}(u, v, z, t) = \mathbf{H}(u, v, z) e^{j\omega t}$$

Vektorové funkce $\mathbf{E}(u, v, z)$ a $\mathbf{H}(u, v, z)$ jsou tzv. *fázory* vektorů intenzit pole (též se používá označení *komplexní amplitudy*). Fázory již nejsou funkcí času, ale jen funkcí prostorových souřadnic. Při derivaci příslušné veličiny podle času násobíme její fázor výrazem $j\omega$, při integraci dělíme fázor výrazem $j\omega$. Při harmonickém časovém průběhu můžeme tedy psát Maxwellovy rovnice ve fázorovém tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + j\omega \mathbf{D}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

(1.2)

1.2.1 Druhy prostředí

O makroskopických parametrech ϵ , μ , σ budeme předpokládat, že jsou nezávislé na velikosti vektorů pole, takže vztahy $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ a $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ jsou *lineární*. Existují však prostředí, která jsou zejména při silných magnetických nebo elektrických polích *nelineární* (např. feromagnetika nebo ferroelektrika) a kde veličiny ϵ , μ , popř. i σ jsou funkcemi intenzity magnetického, popř. elektrického pole.

Pokud jsou vlastnosti prostředí stejné pro elektromagnetické pole libovolného směru, hovoříme o *prostředí izotropním*. V takovém prostředí jsou vektory \mathbf{B} a \mathbf{H} ,

\mathbf{D} a \mathbf{E} popř. \mathbf{J} , a \mathbf{E} paralelní. Rozložíme-li např. vektor magnetické indukce \mathbf{B} do tří složek kartézských souřadnic, potom platí

$$\mathbf{B}_x = \mu \mathbf{H}_x; \quad \mathbf{B}_y = \mu \mathbf{H}_y; \quad \mathbf{B}_z = \mu \mathbf{H}_z$$

Existují však prostředí, která mají v různých směrech různé vlastnosti. Taková prostředí jsou označována jako *prostředí anizotropní*. Například v anizotropním magnetiku platí vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\ \mathbf{B}_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\ \mathbf{B}_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z \end{aligned}$$

To znamená, že každá složka vektoru magnetické indukce závisí obecně na všech třech složkách vektoru intenzity magnetického pole. Z toho je zřejmé, že vektory \mathbf{B} a \mathbf{H} nejsou paralelní. Pro zjednodušení se obvykle používá zápis

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ nazýváme *tenzory permeability a permittivity*. Tyto tenzory můžeme vyjádřit maticemi

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Parametry μ a ε mohou mít též komplexní charakter. Komplexní permittivitu můžeme např. vyjádřit přímo z Maxwellových rovnic. Z rovnic (1.2) platí pro bezstrátové dielektrikum ($\sigma = 0$) vztah

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}$$

Nelze-li ztráty prostředí zanedbat, tj. $\sigma \neq 0$, platí

$$\text{rot } \mathbf{H} = (\sigma + j\omega \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{E}$$

neboli

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega \left(\boldsymbol{\varepsilon} - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

Výraz v závorce této rovnice bývá označován jako *komplexní permittivita* $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' - j\boldsymbol{\varepsilon}''$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}' = \sigma/\omega$, popř.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}'(1 - j \text{tg } \delta)$$

kde $\text{tg } \delta = \sigma/\omega \boldsymbol{\varepsilon}'$ je *činitel ztrát* v daném dielektrickém prostředí.

V obecném případě má komplexní charakter i permeabilita, kterou vyjadřujeme v výrazu

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}' - j\boldsymbol{\mu}''$$

popř. i vodivost

$$\sigma = \sigma' - j\sigma''$$

Parametry prostředí se mohou měnit i v závislosti na frekvenci, tj. prostředí může vykazovat *frekvenční disperzi*. Příčina této disperze je v tom, že hodnoty \mathbf{D} a \mathbf{B} nejsou určeny pouze okamžitými hodnotami \mathbf{E} a \mathbf{H} v určitém okamžiku, ale i jejich hodnotami v předcházejících časových intervalech. Fyzikální smysl závislosti $\boldsymbol{\varepsilon}$ na frekvenci je zřejmý v mezním případě, kdy $\omega \rightarrow \infty$, neboť při extrémně rychle se měnících polích nemůže vzniknout žádná změna v polarizaci dielektrika a $\boldsymbol{\varepsilon}_r \rightarrow 1$.

1.2.2. Elektrická a magnetická polarizace

Elektrickou polarizaci nazýváme vektorovou veličinu \mathbf{P} , která udává, jak se liší elektrická indukce v daném prostředí od elektrické indukce ve vakuu při téže intenzitě elektrického pole. Platí tedy

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

neboli

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_r - 1) \quad (1.3)$$

Podobně pro *magnetickou polarizaci* \mathbf{J} platí

$$\mathbf{J} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.4)$$

neboli

$$\mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{H}(\mu_r - 1)$$

Poznámka: Místo magnetické polarizace \mathbf{J} se často používá *magnetizace* \mathbf{M} , pro kterou platí vztah

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} \quad (1.5)$$

neboli

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{J}}{\mu_0}$$

V izotropních prostředích mají vektory \mathbf{P} a \mathbf{J} souhlasný směr s vektory \mathbf{E} a \mathbf{D} , popř. \mathbf{H} a \mathbf{B} , a bývá zvykem psát

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^e \mathbf{E}; \quad \mathbf{J} = \mu_0 \chi^m \mathbf{H} \quad (1.6)$$

popř.

$$\mathbf{M} = \chi^m \mathbf{H}$$

kde χ^e a χ^m jsou *elektrická a magnetická susceptibilita*.

Z uvedených vztahů vyplývá

$$\chi^e = \varepsilon_r - 1; \quad \chi^m = \mu_r - 1 \quad (1.7)$$

V anizotropních prostředích jsou susceptibilita tenzorové veličiny.

V případě, že prostředí s parametry μ a ε je buzeno vlivy nezávislými na řešení elektromagnetického poli, můžeme vyjádřit celkovou polarizaci součtem dvou členů, z nichž jeden je na řešení elektromagnetického poli závislý, zatímco druhý je na tomto poli nezávislý. Platí tedy

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^e \mathbf{E} + \mathbf{P}_{vn}$$

$$\mathbf{J} = \mu_0 \chi^m \mathbf{H} + \mathbf{J}_{vn}$$

kde \mathbf{P}_{vn} je vnučená elektrická polarizace, \mathbf{J}_{vn} je vnučená magnetická polarizace.

1.3. ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC

Předpokládejme elektromagnetické pole bez nábojů v bezeztrátovém dielektriku při obecném časovém průběhu. Vzhledem k tomu, že $\rho = 0$, $\sigma = 0$, lze psát Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (1.10)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.11)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.13)$$

Provedeme-li rotaci rovnice (1.8), lze psát

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \text{ rot } \mathbf{E}$$

takže za použití rovnice (1.9) dostaneme vztah

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$$

dostaneme po úpravě rovnici

$$\Delta \mathbf{H} \mp \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

Podobně bychom dostali

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.15)$$

Rovnice (1.14) a (1.15) jsou vlnové rovnice, z nichž lze v konkrétních případech (při znalostech okrajových podmínek) určit složky vektorů intenzit elektrického a magnetického pole. Protože k určení všech složek musíme pracovat se šesti neznámými, což je nepohodlné (např. v kartézském souřadnicovém systému mohou být složky $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$), zavádějí se tzv. *elektromagnetické potenciály*, jejichž pomocí se určení složek vektorů intenzit elektrického a magnetického pole zjednodušuje.

1.3.1. Vektorový a skalární potenciál

Vzhledem k tomu, že vždy platí

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

můžeme položit

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.16)$$

(neboť $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$). Veličinu \mathbf{A} budeme nazývat *vektorovým potenciálem*.

Dosadíme-li vztah $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ do Maxwellovy rovnice (1.9), dostaneme rovnici

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Tato rovnice je splněna např. tehdy, položíme-li

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \quad (1.17)$$

kde φ je libovolná skalární funkce, tzv. *skalární potenciál*. Je tedy zřejmé, že veličiny \mathbf{B} a \mathbf{E} lze určit z průběhu potenciálů \mathbf{A} a φ .

Jestliže do Maxwellovy rovnice

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dosadíme vztah (1.16) ve tvaru

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}$$

lze psát

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Intenzitu elektrického pole \mathbf{E} lze vyjádřit podle (1.17) vztahem

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

takže

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Za použití uvedených vztahů dostaneme

$$\frac{1}{\mu\epsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

neboli

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\mu\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

a po úpravě

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.18)$$

Vyjdeme-li z Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

neboli v případě izotropních prostředí

$$\epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

můžeme psát

$$\epsilon \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

neboli

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

Tento vztah lze psát ve tvaru

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

popř. po úpravě (rozšířením o výraz $\pm \mu\epsilon \partial^2 \varphi / \partial t^2$)

$$\Delta \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.19)$$

Bude-li v rovnicích (1.18) a (1.19) splněn vztah (vzhledem k tomu, že máme možnost volby potenciálů)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.20)$$

dostaneme z (1.18) rovnici

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.21)$$

a z (1.19)

$$\Delta \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.22)$$

Vztah (1.20) je tzv. *Lorentzova* nebo *kalibrační podmínka*. Z potenciálů \mathbf{A} a φ , které vyhovují vlnovým rovnicím (1.21) a (1.22) a které splňují Lorentzovu podmínku, lze odvodit průběh elektromagnetického pole podle vztahů (1.16) a (1.17).

Poznámka: Z Lorentzovy podmínky (často bývá označována jako kalibrační podmínka) vyplývá, že při volbě potenciálů \mathbf{A} a φ nejsou ani tak důležité jejich velikosti jako jejich vzájemný vztah. Změníme-li veličinu \mathbf{A} o libovolnou hodnotu, magnetické ani elektrické pole se nezmění, pokud zůstává splněna Lorentzova podmínka. Předpokládejme např., že platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} \psi$$

kde ψ je libovolná skalární funkce, vyhovující vlnové rovnici. Z Lorentzovy podmínky vyplývá

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

neboli

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta \psi = 0$$

(kde jsme použili vyjádření $\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi$).

Protože funkce ψ vyhovuje vlnové rovnici

$$\Delta \psi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

můžeme psát

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

neboli

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0$$

popř.

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$$

kde

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Vektory intenzity magnetického a elektrického pole \mathbf{H} a \mathbf{E} určíme z rovnic

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = - \left(\operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

takže při použití vztahů

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} \psi$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

dostaneme pro \mathbf{H} a \mathbf{E} výrazy

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}' + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}'$$

$$\mathbf{E} = - \left(\operatorname{grad} \varphi' - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \psi + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \psi \right) = - \left(\operatorname{grad} \varphi' + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \right)$$

Z toho je zřejmé, že se vektory \mathbf{H} a \mathbf{E} nezmění, změníme-li hodnoty potenciálů \mathbf{A} a φ na hodnoty \mathbf{A}' a φ' .

Vyděme-li analogicky jako při zavedení potenciálů \mathbf{A} a φ z rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

můžeme položit $\mathbf{D} = -\operatorname{rot} \mathbf{a}$, neboť vždy platí $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Vektorovou veličinu \mathbf{a} budeme opět nazývat *vektorovým potenciálem*.

Dosadíme-li vztah $\mathbf{D} = -\operatorname{rot} \mathbf{a}$ do Maxwellovy rovnice (1.8), dostaneme rovnici

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{a}$$

neboli

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) = 0$$

Tuto rovnici splníme např. tehdy, položíme-li

$$\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi$$

kde Φ je skalární funkce (*skalární potenciál*), takže lze psát

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{a} \quad (1.24)$$

Je tedy zřejmé, že veličiny \mathbf{E} a \mathbf{H} lze určit z průběhu potenciálů \mathbf{a} a Φ .

Protože z rovnice (1.24) vyplývá

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$$

dostaneme po úpravě za použití vztahů (1.9) a (1.23) rovnici

$$\Delta \mathbf{a} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{a} + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.25)$$

která je analogická rovnici (1.18).

Vyděme-li z Maxwellovy rovnice (1.11)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

neboli

$$\mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

dostaneme za použití rovnice (1.23) vztah

$$-\mu \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \Phi + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) = 0$$

což můžeme napsat ve tvaru

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{a} = 0$$

Rozšíříme-li tento vztah o výraz $\pm \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$, dostaneme po úpravě rovnici

$$\Delta \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{a} + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.26)$$

Splníme-li v rovnících (1.25) a (1.26) (vzhledem k možnosti volby potenciálů) vztah

$$\operatorname{div} \mathbf{a} + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.27)$$

dostaneme rovnice

$$\Delta \mathbf{a} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.28)$$

$$\Delta \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.29)$$

Vztah (1.27) je opět tzv. Lorentzova podmínka. Z potenciálů \mathbf{a} a Φ , které vyhovují vlnovým rovnicím (1.28) a (1.29) a které splňují Lorentzovu podmínku, lze odvodit vektorové veličiny \mathbf{H} a \mathbf{E} elektromagnetického pole podle vztahů (1.23) a (1.24).

1.3.2. Hertzovy vektory

Předpokládejme, že určité prostředí s parametry μ_0 a ε_0 je vybuzeveno vlivy nezávislými na těšeném elektromagnetickém poli, a to v obecném případě vnučenou elektrickou polarizací \mathbf{P}_{vn} a vnučenou magnetickou polarizací \mathbf{J}_{vn} . Tyto vnučené polarizace mohou být vyvolány elektrickými a magnetickými dipólovými momenty, neboť polarizace můžeme vyjádřit jako objemové hustoty dipólových momentů

$$\mathbf{P}_{vn} = \frac{d\mathbf{p}_0}{dV}; \quad \mathbf{J}_{vn} = \mu_0 \frac{d\mathbf{m}_0}{dV}$$

kde \mathbf{p}_0 je elektrický dipólový moment,

\mathbf{m}_0 magnetický dipólový moment.

Podle vztahů uvedených v odst. 1.2.2. lze psát (pro prostředí s parametry μ_0 a ε_0)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_{vn} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}_{vn} \quad (1.31)$$

JSOU-LI VOMIVOSTI PROSTŘEDÍ A HUSTOTA VYKLEDOVÁNÍ NEJEDNĚ, IŽE PŮBÍ MAXWELLOVY ROVNICE VE TVARU

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

takže za použití vztahů (1.30) a (1.31) dostaneme

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}_{vn}}{\partial t} \quad (1.32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \mathbf{J}_{vn} \quad (1.33)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{vn}}{\partial t} \quad (1.34)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}_{vn} \quad (1.35)$$

Elektrický Hertzův vektor

Předpokládejme nejprve $\mathbf{J}_{vn} = 0$ a $\mathbf{P}_{vn} \neq 0$. V takovém případě podle vztahů (1.32) až (1.35) platí

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}_{vn}}{\partial t} \quad (1.36)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.37)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.38)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}_{vn} \quad (1.39)$$

Vyjádříme-li veličiny \mathbf{B} a \mathbf{E} pomocí potenciálů \mathbf{A} a φ podle vztahů (1.16) a (1.17) (pro $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

lze napsat rovnici (1.36) ve tvaru

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{P}_{vn}}{\partial t}$$

popř. po úpravě

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}_{vn}}{\partial t}$$

PROTOŽE PRO POTENCIÁLY \mathbf{A} A φ IŽE PŘEDPISAT VEDLEJŠÍ PODMÍNKU (1.20)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

platí

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}_{vn}}{\partial t} \quad (1.40)$$

Rovnici (1.39) můžeme napsat pomocí elektromagnetických potenciálů ve tvaru

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}_{vn}$$

neboli

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}_{vn}$$

Podle vztahu (1.20) platí

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

takže předcházející rovnici můžeme upravit takto

$$\Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}_{vn} \quad (1.41)$$

Vyjádříme-li nyní potenciály \mathbf{A} a φ s použitím pomocného vektoru \mathbf{H}^e výrazy

$$\mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{H}^e}{\partial t}; \quad \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{H}^e \quad (1.42)$$

je identicky splněna Lorentzova podmínka (1.20) a rovnice (1.40), (1.41) nabývají tvaru

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \mathbf{H}^e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^e}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{P}_{vn} \right) = 0 \quad (1.43)$$

$$-\operatorname{div} \left(\Delta \mathbf{H}^e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^e}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{P}_{vn} \right) = 0 \quad (1.44)$$

Určíme-li vektor \mathbf{H}^e tak, aby vyhovoval rovnici

$$\Delta \mathbf{H}^e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{P}_{vn} \quad (1.45)$$

jsou splněny rovnice (1.43) i (1.44). Tím jsme pro případ, kdy $\mathbf{J}_{vn} = 0$, převedli řešení Maxwellových rovnic na řešení jediné nelomogenní rovnice. Tuto možnost objevil Hertz a vektor \mathbf{H}^e je označován jako *elektrický Hertzův vektor*. Vzhledem k tomu, že podle rovnice (1.45) je tento vektor určen elektrickou polarizací \mathbf{P}_{vn} , nazývá se též *potenciál elektrické polarizace*.

Vektory intenzity elektrického a magnetického pole \mathbf{E} a \mathbf{H} jsme vyjádřili vztahy (1.17) a (1.16) (pro $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A}$$

takže za použití vztahů (1.42) dostaneme

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi^e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial t^2} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi^e \quad (1.47)$$

Magnetický Hertzův vektor

Předpokládejme nyní $\mathbf{J}_{vn} \neq 0$ a $\mathbf{P}_{vn} = 0$. V takovém případě podle vztahů (1.32) až (1.35) platí

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.48)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } \mathbf{J}_{vn} \quad (1.49)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{vn}}{\partial t} \quad (1.50)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (1.51)$$

Použijeme-li k vyjádření elektromagnetického pole pomocné potenciály \mathbf{a} a Φ , platí podle vztahů (1.24) a (1.23) (pro $\epsilon = \epsilon_0$)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{rot } \mathbf{a}$$

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$

takže rovnici (1.50) můžeme napsat ve tvaru

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \text{rot rot } \mathbf{a} - \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \text{grad } \Phi - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{vn}}{\partial t}$$

nebo po úpravě

$$\Delta \mathbf{a} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{a} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{vn}}{\partial t}$$

Protože pro potenciály \mathbf{a} a Φ lze předepsat vedlejší podmínku (1.27)

$$\text{div } \mathbf{a} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

dostaneme pro potenciál \mathbf{a} rovnici

$$\Delta \mathbf{a} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{vn}}{\partial t} \quad (1.52)$$

Rovnici (1.49) můžeme napsat za použití vztahu (1.23) po úpravě ve tvaru

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0} \text{div } \mathbf{J}_{vn}$$

Protože podle podmínky (1.27) platí

$$\text{div } \mathbf{a} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

dostaneme pro potenciál Φ rovnici

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} \text{div } \mathbf{J}_{vn} \quad (1.53)$$

Vyjádříme-li potenciály \mathbf{a} a Φ s použitím pomocného vektoru Π^m výrazy

$$\mathbf{a} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Pi^m}{\partial t}; \quad \Phi = -\text{div } \Pi^m \quad (1.54)$$

je identicky splněna Lorentzova podmínka (1.27) a rovnice (1.52), (1.53) nabývají tvaru

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \Pi^m - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{J}_{vn} \right) = 0 \quad (1.55)$$

$$-\text{div} \left(\Delta \Pi^m - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{J}_{vn} \right) = 0 \quad (1.56)$$

Určíme-li vektor Π^m tak, aby vyhovoval rovnici

$$\Delta \Pi^m - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{J}_{vn} \quad (1.57)$$

jsou rovnice (1.55) a (1.56) splněny. Tím jsme pro případ, kdy $\mathbf{J}_{vn} \neq 0$ převedli řešení Maxwellových rovnic na řešení jedné nehomogenní rovnice. Protože vektor Π^m je určen magnetickou polarizací \mathbf{J}_{vn} , bývá označován jako *potenciál magnetické polarizace* nebo též *magnetický Hertzův vektor*.

Intenzity elektrického a magnetického pole \mathbf{E} a \mathbf{H} vyjádříme rovnicemi (1.24), (1.23) (pro $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{rot } \mathbf{a}$$

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$

takže za použití vztahů (1.54) dostaneme

$$\mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}^m \quad (1.58)$$

$$\mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H}^m - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^m}{\partial t^2} \quad (1.59)$$

V případě, že oba vektory vnučené polarizace \mathbf{P}_{vn} a \mathbf{J}_{vn} jsou nenulové, vyjádříme vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} a vektor intenzity magnetického pole \mathbf{H} součty vektorů určených rovnicemi (1.46), (1.47) a (1.58), (1.59) takto

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{H}^e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^e}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}^m \quad (1.60)$$

$$\mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H}^m - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^m}{\partial t^2} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}^e \quad (1.61)$$

Pro harmonické časové průběhy, které vyjádříme použitím fázorů, dostaneme

$$\mathbf{E} = k_0^2 \mathbf{H}^e + \text{grad div } \mathbf{H}^e - j\omega \mu_0 \text{rot } \mathbf{H}^m \quad (1.62)$$

$$\mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H}^m + \text{grad div } \mathbf{H}^m + j\omega \epsilon_0 \text{rot } \mathbf{H}^e \quad (1.63)$$

kde pro vlnové číslo k platí $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$. (Pokud je dielektrické prostředí zirátové je vlnové číslo komplexní, neboť $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \omega^2 \mu (\epsilon' - j\epsilon'')$.)

K úplnému řešení elektromagnetického pole (tj. k určení všech složek složek elektrického pole \mathbf{E} a intenzity magnetického pole \mathbf{H}) není třeba znát všechny složky Hertzových vektorů \mathbf{H}^m nebo \mathbf{H}^e , ale stačí znát pouze průběh dvou složek Hertzova vektoru \mathbf{H}^m nebo \mathbf{H}^e příp. jednu složku vektoru \mathbf{H}^m a jednu \mathbf{H}^e . To vyplývá přímo z rovnic (1.62) a (1.63), uvážíme-li, že při rozepsání rot \mathbf{H} a grad div \mathbf{H} do složek, např. v pravouhlých souřadnicích, platí

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ \text{grad div } \mathbf{H} &= \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Ze složkového vyjádření rot \mathbf{H} je zřejmé, že k získání nenulových příspěvků do všech tří souřadnic, je třeba znát alespoň dvě složky Hertzova vektoru.

1.3.3. Elektromagnetická pole příčná a podélná

Zavedeme-li Hertzovy vektory tak, aby měly pouze podélné složky (složky ve směru osy z)

$$\mathbf{H}^e = (0, 0, H_z^e); \quad \mathbf{H}^m = (0, 0, H_z^m)$$

dostaneme vztahy, které umožňují vyjádřit charakteristické vlastnosti vedení bez ohledu na použitou souřadnicovou soustavu. Rovnice (1.62) a (1.63) lze pak psát ve tvaru (pro prostředí s parametry μ, ϵ)

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{H}^e + \text{grad div } \mathbf{H}^e - j\omega \mu \text{rot } \mathbf{H}^m \quad (1.62a)$$

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \text{rot } \mathbf{H}^e + k^2 \mathbf{H}^m + \text{grad div } \mathbf{H}^m \quad (1.63a)$$

Rozdělíme-li pravé strany rovnic (1.62) a (1.63) na části závislé na Hertzově elektrickém vektoru a na části závislé na Hertzově magnetickém vektoru, lze psát

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

kde

$$\mathbf{E}_1 = k^2 \mathbf{H}^e + \text{grad div } \mathbf{H}^e \quad (1.64)$$

$$\mathbf{H}_1 = j\omega \epsilon \text{rot } \mathbf{H}^e \quad (1.65)$$

$$\mathbf{E}_2 = -j\omega \mu \text{rot } \mathbf{H}^m \quad (1.66)$$

$$\mathbf{H}_2 = k^2 \mathbf{H}^m + \text{grad div } \mathbf{H}^m \quad (1.67)$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že elektromagnetické pole označené indexem 1 nemá složku intenzity magnetického pole ve směru osy z , magnetické pole má pouze příčné složky. Toto elektromagnetické pole bývá proto označováno jako *příčné* nebo *transverzálně magnetické*, zkráceně TM. Elektromagnetické pole označené indexem 2 nemá složku intenzity elektrického pole ve směru osy z , elektrické pole má pouze příčné složky. Toto elektromagnetické pole bývá označováno jako *příčné* nebo *transverzálně elektrické*, zkráceně TE¹).

Vzhledem k tomu, že elektromagnetické pole TM má v podélném směru pouze složku $E_z (H_z = 0)$, bývá někdy označováno jako elektromagnetické pole typu E. Podobně elektromagnetické pole TE má ve směru podélném pouze složku $H_z (E_z = 0)$ za předpokladu dokonale vodivých stěn vlnovodu) a bývá někdy označováno jako elektromagnetické pole typu H. Úplné řešení elektromagnetického pole je dáno superpozicí pole TM a TE.

Použijeme-li k určení elektromagnetického pole některé z příčných složek Hertzových vektorů, není možné rozdělit elektromagnetické pole na pole příčné elektrické a příčné magnetické. V takovém případě dostaneme pomocí Hertzova elektrického vektoru *pole podélné (longitudinální) magnetické*, které označujeme LM a pomocí

¹) Nemá-li vlnovod dokonale vodivé stěny, může u vln TE existovat malá složka intenzity elektrického pole ve směru osy z , vyvolaná podélně procházejícím povrchovým proudem na plášti vlnovodu (viz dále).

Hertzova magnetického vektoru dostaneme *pole podélné (longitudinální) elektrické*, která označujeme LE. Podélné magnetické pole (LM) může mít obecně všechny složky intenzity elektrického pole, magnetické pole bude mít složku podélnou a jednu složku příčnou (druhá příčná složka vždy chybí). Podélné elektrické pole (LE) může mít obecně všechny složky intenzity magnetického pole, elektrické pole bude mít složku podélnou a jednu složku příčnou (druhá příčná složka vždy chybí). Úplné řešení elektromagnetického pole je opět dáno superpozicí poli LM a LE.

U hladkých vlnodů vyplněných homogenním dielektrikem je výhodnější, jak již bylo řečeno, použít k určení elektromagnetického pole podélné složky Hertzových vektorů.

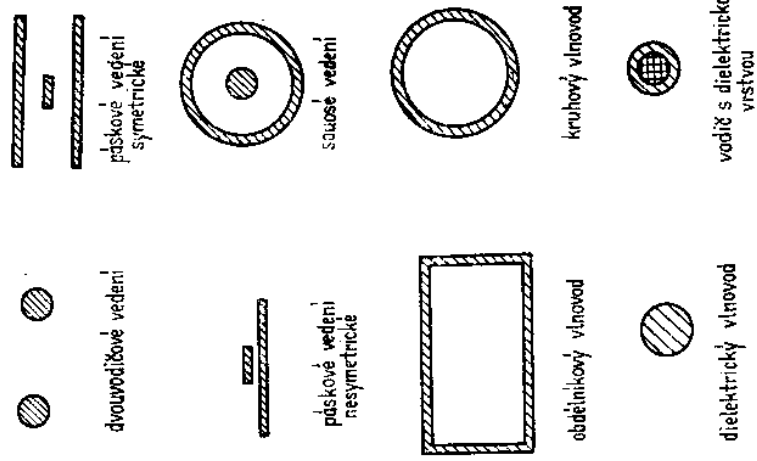
Použití příčných složek Hertzových vektorů k určení elektromagnetického pole je výhodné při řešení vlnodů, popř. dutinových rezonátorů částečně vyplněných dielektrikem nebo při řešení vlnodů se složitější geometrickou strukturou. V takových případech umožňuje jejich zavedení splnit okrajové podmínky na rozhraní.

Literatura ke kapitole 1

- [1] *Krasil, B.*: Theoretické základy techniky centimetrových vln. Praha, SNTL 1957.
- [2] *Votruba, V. – Muzikář, Č.*: Teorie elektromagnetického pole. Praha, NČSAV 1955.
- [3] *Stratton, J. A.*: Teorie elektromagnetického pole (překlad z angl.). Praha, SNTL 1961.
- [4] *Haňka, L.*: Teorie elektromagnetického pole. Praha, SNTL 1982.
- [5] *Vajnsťejn L. A.*: Elektromagnitnye volny. Moskva, Radio i svjaz 1988.

2. Mikrovlnná vedení obecného příčného průřezu

V mikrovlnné technice se používají k přenosu elektromagnetických vln různé druhy vedení. Především to jsou *vedení vytvořená dvěma, popř. i více vodiči*. Průřez jednotlivých vodičů může mít obecně libovolný tvar, v praxi se však nejvíce používají *vedení dvou vodičová* s vodiči kruhového průřezu, s vodiči sousými nebo s vodiči ve tvaru pásků (obr. 2.1).



Obr. 2.1. Nejpoužívanější typy mikrovlnných vedení

Všechna tato vedení mohou přenášet energii ve velmi širokém frekvenčním rozsahu. Protože však jejich příčné rozměry (popř. vzájemná vzdálenost vodičů) musí být podstatně menší, než je vlnová délka přenášené elektromagnetické vlny, jsou tato vedení používána spíše v nižší frekvenční oblasti mikrovlnného pásma.

Výjimku tvoří *mikropásková vedení*, která jsou velmi vhodná i pro výrobu miniaturních mikrovlnných integrovaných obvodů.

Další skupinu tvoří vedení, nazývaná *vlnovody*, u nichž je elektromagnetická vlna vedena uvnitř kovové trubice určitého průřezu. Příčný průřez těchto vlnovodů může být libovolný, z praktických důvodů se však nejčastěji používají trubice s průřezem obdélníkovým nebo kruhovým (obr. 2.1). Charakteristikou vlastností vlnovodu je, že se jimi elektromagnetické vlny mohou šířit teprve od určité frekvence. Kromě vlnovodů tvořených kovovou trubicí je možné použít k přenosu elektromagnetické vlny tzv. *dielektrické vlnovody*, tvořené nízkoztrátovým dielektrikem nejčastěji kruhového nebo obdélníkového průřezu. Dielektrické vlnovody našly největší uplatnění zejména v infračervené a viditelné oblasti frekvenčního spektra jako *vláknové a planární vlnovody*.

K přenosu elektromagnetické vlny lze použít i další typy vedení, např. vodiče potažené dielektrickou vrstvou, dielektrické trubice i holý drát. Pro speciální účely (např. při konstrukci některých typů mikrovlnných elektronek, urychlovačů elementárních částic apod.) se používají vedení s tzv. *periodickými strukturami*.

2.1. CHARAKTERISTICKÉ PŘÍPADY ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

Při teoretickém řešení přenosových vlastností a geometrického uspořádání elektromagnetického pole vyjdeme vždy z řešení Maxwellových rovnic při respektování okrajových podmínek daných fyzikální představou.

Z rovnic (1.45) a (1.57) vyplývá, že Hertzovy vektory vyhovují jistým vlnovým rovnicím. Předpokládejme nadále část prostoru, ve kterém je elektromagnetické pole bez zdrojů. V takovém případě budeme řešit místo nehomogenních rovnic (1.45) a (1.57) rovnice homogenní, tj. při harmonickém časovém průběhu rovnice

$$\Delta \Pi^e + k^2 \Pi^e = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta \Pi^m + k^2 \Pi^m = 0 \quad (2.2)$$

Zvolme Hertzovy vektory tak, aby měly pouze podélné složky. V takovém případě je možné vyjádřit celkové elektromagnetické pole jako superpozici pole příčné magnetického a pole příčné elektrického (viz odst. 1.3.3). Zavedeme-li tedy vztahy

$$\Pi^e = (0, 0, \Pi_z^e \mathbf{z})$$

$$\Pi^m = (0, 0, \Pi_z^m \mathbf{z})$$

platí pro složky Hertzových vektorů Π_z^e a Π_z^m vlnové rovnice

$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0$$

$$\Delta \Pi_z^m + k^2 \Pi_z^m = 0$$

Předpokládejme, že složky Hertzových vektorů Π_z^e a Π_z^m lze vyjádřit součinem dvou funkcí. Vynecháme-li prozatím horní indexy rozlišující druh Hertzových vektorů, lze psát

$$\Pi_z = T_1 T_2 \quad (2.3)$$

kde T_1 je funkcí příčných obecných souřadnic, T_2 funkcí podélné souřadnice z .

Vlnovou rovnici pro Hertzův vektor pak můžeme psát ve tvaru

$$\Delta(T_1 T_2) + k^2 T_1 T_2 = 0$$

neboli

$$T_2 \Delta T_1 + T_1 \Delta T_2 + 2(\text{grad } T_1 \cdot \text{grad } T_2) + k^2 T_1 T_2 = 0$$

Vzhledem k tomu, že vektory grad T_1 a grad T_2 jsou vzájemně kolmé, je jejich skalární součin nulový a tuto rovnici lze upravit do tvaru

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2} + k^2 = 0 \quad (2.4)$$

Rovnice (2.4) bude splněna tehdy, budou-li výrazy $\Delta T_1/T_1$ a $\Delta T_2/T_2$ rovny konstantám, neboť vlnové číslo k je konstantní.

Pro další řešení je výhodné zvolit tyto konstanty takto

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = -\Gamma^2; \quad \frac{\Delta T_2}{T_2} = \gamma^2$$

takže platí

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dz^2} - \gamma^2 T_2 = 0 \quad (2.6)$$

(neboť T_2 je funkcí pouze podélné souřadnice a operátor Δ se redukuje na d^2/dz^2). Rovnici (2.4) lze tedy vyjádřit vztahem

$$k^2 = \Gamma^2 - \gamma^2 \quad (2.7)$$

popř.

$$\gamma = \pm \sqrt{\Gamma^2 - k^2} \quad (2.8)$$

Řešení dílčí vlnové rovnice (2.5) bude závislé na průřezu vedení. Aby řešení bylo jednoznačné, je třeba k této rovnici přidat okrajovou podmínku pro funkci T_1 . Přitom vyjdeme z fyzikální představy, že na dokonale vodivém povrchu vedení musí být každá tečná složka intenzity elektrického pole rovna nule. Řešením této rovnice s přihlídnutím k okrajové podmínce určíme vlastní funkci průřezu vedení T_1 a konstantu průřezu Γ (vlastní hodnotu Γ). Rovnice (2.6) má řešení

$$T_2 = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \quad (2.9)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.

Je zřejmé, že funkce T_2 udává charakter elektromagnetického pole ve směru podélné souřadnice z . Kvalitativní roli pro určení charakteru elektromagnetického pole má konstanta γ , kterou budeme nazývat *součinitel přenosu* nebo *součinitel šíření* (konstanta přenosu). Je-li veličina γ reálná, má elektromagnetické pole ve směru osy z monotónní (exponenciální) průběh – nenastává šíření vlny ve směru z . Aby se po vedení šířila elektromagnetická vlna, musí mít elektromagnetické pole ve směru z periodický charakter, takže veličina γ musí být imaginární nebo komplexní (u ztrátového vedení).

Zavedme pro šíření se vlnu komplexní součinitel šíření ve tvaru

$$\gamma = \beta + j\alpha \quad (2.10)$$

kde β je *poměrný útlum* (konstanta útlumu),

α *poměrný posun* (fázová konstanta šíření).

Pro *bezeztrátové vedení* je vždy

$$\beta = 0$$

takže

$$\gamma = j\alpha$$

Vztahy (2.7) a (2.8) lze potom vyjádřit ve tvaru

$$k^2 = \Gamma^2 + \alpha^2 \quad (2.11)$$

$$\alpha = \pm \sqrt{k^2 - \Gamma^2} \quad (2.12)$$

Velikost konstant k a Γ (popř. jejich vzájemný vztah) má vliv na charakter elektromagnetického pole. V praxi mohou nastat tyto případy:

Případ 1.

$k > \Gamma$, tj. $2\pi/\lambda > \Gamma$ neboli $\omega\sqrt{\mu\epsilon} > \Gamma$

Podle (2.8) platí

$$\gamma = \pm \sqrt{\Gamma^2 - k^2} = \pm j \sqrt{k^2 - \Gamma^2} = \pm j\alpha$$

a tedy

$$T_2 = C_1 e^{j\alpha z} + C_2 e^{-j\alpha z} \quad (2.13)$$

Elektromagnetické pole má ve směru osy z periodický charakter, ve směru osy z se šíří elektromagnetická vlna (přesněji dvě vlny, jejichž smysl šíření je opačný).

Případ 2.

$k < \Gamma$, tj. $2\pi/\lambda < \Gamma$ neboli $\omega\sqrt{\mu\epsilon} < \Gamma$

Konstanta γ je číslo reálné, neboť platí

$$\gamma = \pm \sqrt{\Gamma^2 - k^2}$$

a tedy

$$T_2 = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \quad (2.14)$$

Elektromagnetické pole má ve směru osy z exponenciální průběh, nenastává šíření elektromagnetické vlny. Z obecného řešení (2.14) budeme zpravidla brát v úvahu pouze druhý člen, neboť pro $z \rightarrow \infty$ je $T_2 \rightarrow 0$.

Případ 3.

$k = \Gamma$, tj. $2\pi/\lambda = \Gamma$ neboli $\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \Gamma$

Toto je mezní stav mezi oběma předcházejícími. Při určité mezní úhlové frekvenci ω_m (nebo mezní vlnové délce λ_m) je $k = \Gamma$ a $\gamma = 0$. Přitom platí

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\Gamma} \quad (2.15)$$

kde λ_m je *mezní délka vlny* a

$$\omega_m = \frac{\Gamma}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.16)$$

kde ω_m je *mezní úhlová frekvence vedení*.

Lze tedy psát

$$\Gamma = \omega_m \sqrt{\mu\epsilon}$$

popř.

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda_m}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do výrazu (2.12) pro poměrný posun α , lze psát

$$\alpha = \pm \sqrt{k^2 - \omega_m^2 \mu\epsilon} = \pm \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2} = \pm k \sqrt{1 - v^2}$$

popř.

$$\alpha = \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_m}\right)^2} = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}$$

kde jsme dosadili za vlnové číslo k výrazy $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ a zavedli jsme označení $v = \omega_m/\omega = \lambda/\lambda_m$.

Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že pokud platí

$$\lambda < \lambda_m; \quad \omega > \omega_m$$

nastává šíření elektromagnetické vlny ve směru osy z .

Pokud platí

$$\lambda > \lambda_m; \quad \omega < \omega_m$$

je elektromagnetické pole ve směru osy z tlumeno.

Případ 4.

$\Gamma = 0$. V tomto případě může na vedení existovat šířící se vlna, neboť

$$\alpha = k$$

Tab. 1.

Vedení s mezní frekvencí $\Gamma \neq 0$	Vedení bez mezní frekvence $\Gamma = 0$
Poměrný posun	
neboli	$\alpha = \sqrt{k^2 - \Gamma^2}$
kde	$\alpha = k\sqrt{1 - v^2}$
příčemž	$v = \frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{\omega_m}{\omega}$
	$\omega_m = \frac{\Gamma}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
Fázová rychlost šíření ¹⁾	
$v_t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 - v^2}}$	$v_t = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$
Skupinová rychlost šíření ¹⁾	
$v_{sk} = \frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 - v^2}}$	$v_{sk} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$
Délka vlny na vedení ¹⁾	
$\lambda_v = \frac{v_t}{f} = \frac{1}{f} \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 - v^2}}$	$\lambda_v = \frac{v_t}{f} = \frac{1}{f} \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$
neboli	$\lambda_v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 - v^2}} \lambda$
	$\lambda_v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \lambda$

¹⁾ kde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ je rychlost světla ve vakuu

takže

$$T_2 = C_1 e^{ikz} + C_2 e^{-ikz} \quad (2.17)$$

Ze vztahů (2.15) a (2.16) vyplývá, že toto vedení nemá mezní frekvenci, a že se tedy po něm může šířit elektromagnetická vlna při jakémkoliv frekvenci.

Vlnová rovnice (2.5) pro funkci T_1 se redukuje na Laplaceovu rovnici

$$\Delta T_1 = 0 \quad (2.18)$$

kteřá je charakteristická pro řešení dvourozměrných elektrostatických problémů. Povrch vedení při souřadnici $z = konst$ musí být v jistém časovém okamžiku na konstantním potenciálu.

Z uvedeného výkladu je zřejmé, že kovová mikrovlnná vedení mohou být v podstatě dvojího druhu. Jsou to jednak vedení, v jejichž průřezu jsou dva nebo více vodičů a u nichž může být $\Gamma = 0$, dále vedení, jejichž průřez je ohraničen uzavřenou obrysovou křivkou libovolného tvaru, u nichž $\Gamma \neq 0$.

Vlastnosti elektromagnetických vln, šířících se po těchto vedeních, jsou uvedeny ve stručném přehledu v tab. 1.

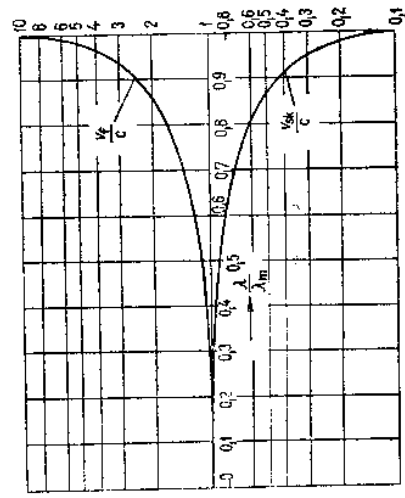
Je zřejmé, že vedení, kde platí $\Gamma \neq 0$, tj. u tzv. vlnodů, jsou rychlostí šíření (fázová i skupinová) funkcemi frekvence. Tato disperzní vlastnost vlnodů je tím výraznější, čím více se frekvence elektromagnetické vln blíží mezní frekvenci vlnodů. Fázová rychlost šíření je u vlnodů se vzduchovým dielektrikem vždy větší než rychlost světla, skupinová rychlost je vždy menší. Z porovnání vztahů určujících fázovou a skupinovou rychlost ve vedení vyplývá, že platí

$$v_t v_{sk} = c^2 \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (2.19)$$

takže pro vzduchové dielektrikum je

$$v_t v_{sk} = c^2 \quad (2.20)$$

Průběh změny fázové a skupinové rychlosti šíření v závislosti na frekvenci je znázorněn na obr. 2.2.



Obr. 2.2. Rychlosti šíření ve vlnodů

2.2. VLNOVODY S VLNAMI TM A TE

Jak již bylo řečeno, pod označením vlnovod rozumíme kovovou trubici libovolného průřezu, přičemž předpokládáme, že se elektromagnetická vlna šíří uvnitř vlnovodu ve směru jeho osy. Použijeme-li k vyjádření elektromagnetického pole uvnitř vlnovodu Hertzovy vektory \mathbf{H}^e a \mathbf{H}^m , a to takové, že platí $\mathbf{H}^e = \mathbf{H}^z$, $\mathbf{H}^m = \mathbf{H}^z \times \mathbf{z}$, je možné vyjádřit celkové pole jako superpozici polí TM a TE. U kovových vlnovodů mohou existovat elektromagnetické vlny TM a TE nezávisle na sobě.

Složky intenzity elektrického a magnetického pole uvnitř vlnovodu určíme z rovnic (1.64) až (1.67) za předpokladu bezeztrátového vlnovodu

$$\begin{aligned} & \text{pro vlny TM} & \text{pro vlny TE} \\ \mathbf{E} &= k^2 \mathbf{H}_z^e + \text{grad div } \mathbf{H}_z^e & \mathbf{E} &= -j\omega\mu \text{rot } \mathbf{H}_z^m \\ \mathbf{H} &= j\omega\epsilon \text{rot } \mathbf{H}_z^e & \mathbf{H} &= k^2 \mathbf{H}_z^m + \text{grad div } \mathbf{H}_z^m \end{aligned}$$

přičemž předpokládáme, že platí (bez ohledu na horní index e nebo m)

$$\mathbf{H}_z = \mathbf{H}_z; \quad \mathbf{H}_z = T_1 T_2$$

Pro funkci T_2 jsme našli řešení (za předpokladu, že se vlna vlnovodem šíří)

$$T_2 = C_1 e^{jz} + C_2 e^{-jz}$$

Funkce T_1 vyhovuje rovnici

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$$

jejíž řešení je závislé na průřezu daného vlnovodu. Aby řešení předcházející rovnice bylo jednoznačné, přidáme k ní okrajovou podmínku, kterou vyjádříme na základě fyzikální představy, že na vnitřním povrchu dokonale vodivého vlnovodu musí být každá tečná složka intenzity elektrického pole E_t rovna nule. Kdyby zde tečná složka intenzity elektrického pole nebyla nulová, vznikl by v plášti s nekonečně velkou vodivostí nekonečně velký proud.

Při aplikaci v praxi není sice plášť vlnovodu dokonale vodivá, ale jeho vodivost je tak velká, že tečná složka intenzity elektrického pole je zanedbatelná. Pouze v případech, kdy vyšetřujeme velikost ztrát ve stěnách vlnovodu, nelze předpokládat, že $E_t = 0$.

2.2.1. Okrajové podmínky na plášti vlnovodu

Vlny příčně magnetické (TM, E)

Intenzitu elektrického pole ve vlnovodu můžeme určit vztahem

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{H}_z^e + \text{grad div } \mathbf{H}_z^e$$

Předpokládáme tečnou složku intenzity elektrického pole ve směru osy z (obr. 2.3). V takovém případě platí

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = (k^2 \mathbf{H}_z^e + \text{grad div } \mathbf{H}_z^e) \cdot \mathbf{z}$$

Vzhledem k tomu, že platí

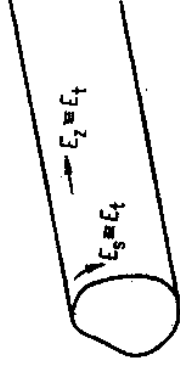
$$\text{div } \mathbf{H}_z = \nabla \cdot \mathbf{H}_z = \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial z}$$

můžeme psát

$$\mathbf{E}_z = k^2 \mathbf{H}_z^e + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_z^e}{\partial z^2}$$

neboli

$$\mathbf{E}_z = (k^2 - \alpha^2) T_1 T_2 = \Gamma^2 T_1 T_2$$



Obr. 2.3. Tečná složka intenzity elektrického pole u vln TM

Na plášti vlnovodu je $E_z = E_t = 0$ pro jakoukoliv souřadnici z . Je tedy zřejmé, že na plášti vlnovodu musí pro funkci T_1 platit

$$T_1 = 0 \quad (2.21)$$

K vlnové rovnici pro funkci T_1

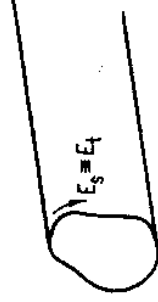
$$T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$$

přislouží tedy u vln TM okrajová podmínka $T_1 = 0$ na plášti vlnovodu.

Vlny příčně elektrické (TE, H)

Intenzitu elektrického pole ve vlnovodu můžeme určit vztahem

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \mathbf{H}_z^m$$



Obr. 2.4. Tečná složka intenzity elektrického pole u vln TE

Tečná složka intenzity elektrického pole u dokonale vodivého vlnovodu může být u vln TE pouze v rovině kolmé na osu vlnovodu, předpokládáme tedy tečnou složku ve směru obrysové křivky vlnovodu (obr. 2.4). V takovém případě platí

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = -j\omega\mu(\text{rot } \mathbf{H}_z^m \cdot \mathbf{s})$$

neboli

$$\mathbf{E}_s = -j\omega\mu(\text{grad } \mathbf{H}_z^m \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{s} = -j\omega\mu \text{grad } \mathbf{H}_z^m \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{s})$$

vektorový součin $\mathbf{z} \times \mathbf{s} = \mathbf{n}$ je vektor kolmý k oběma jednotkovým vektorům, takže je jednotkovým vektorem ve směru normály k povrchu vlnovodu. Platí tedy

$$\mathbf{E}_s = -j\omega\mu \frac{\Pi_z^m}{\partial n} = -j\omega\mu \frac{\partial T_1}{\partial n} T_2$$

Na plášti vlnovodu musí být $\mathbf{E}_s \equiv \mathbf{E}_t = 0$ pro jakoukoliv souřadnici z . Proto je zřejmé, že na plášti vlnovodu musí pro funkci T_1 platit

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0 \quad (2.22)$$

K vlnové rovnici $\Delta T_1 + T_1 = 0$ přísluší tedy u vln TE okrajová podmínka $\partial T_1 / \partial n = 0$ na plášti vlnovodu.

Řešením vlnových rovnic pro funkci T_1 s přihlídnutím k okrajovým podmínkám určíme prostorové rozložení funkce T_1 a konstanty T u vln TM nebo TE. Budeme-li znát tyto veličiny, můžeme určit složky vektorů intenzity elektrického a magnetického pole, mezní vlnovou délku, rychlost šíření a další důležité parametry vlnovodu.

2.2.2. Charakteristická impedance vlnovodu

Charakteristickou impedanci vlnovodu budeme rozumět veličinu danou poměrem vzájemně kolmých příčných složek vektorů intenzity elektrického a magnetického pole u nekonečně dlouhého vlnovodu (tj. u vlnovodu, ve kterém existuje pouze postupná vlna). Jak poznáme dále, při některých praktických aplikacích bývá výhodnější zavést jinou definici impedance, která je dána poměrem napětí a proudu na vedení a kterou budeme nazývat *vlnovou impedanci*.

Vlny příčně magnetické

U vln TM platí pro vektory intenzity elektrického a magnetického pole vztahy (1.64) a (1.65)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e \\ \mathbf{H} &= j\omega\epsilon \text{rot } \Pi_z^e = j\omega\epsilon (\text{grad } \Pi_z^e \times \mathbf{z}) \end{aligned}$$

V obecné ortogonální soustavě s příčnými souřadnicemi u, v a s podélnou souřadnicí z lze vyjádřit jednotlivé příčné složky vektorů takto

$$\mathbf{E}_T(u) = \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{u} = (\text{grad div } \Pi_z^e) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$\mathbf{E}_T(v) = \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{v} = (\text{grad div } \Pi_z^e) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$\mathbf{H}_T(u) = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{u} = j\omega\epsilon T_2 \text{grad } T_1 \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{u}) = j\omega\epsilon \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} T_2$$

$$\mathbf{H}_T(v) = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{v} = j\omega\epsilon T_2 \text{grad } T_1 \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{v}) = -j\omega\epsilon \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} T_2$$

kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}$ jsou jednotkové vektory ($u = u_1, v = u_2, z = u_3$), Laméovy koeficienty křivočarých souřadnic (viz přílohu A, $h_u, h_v, h_z = h_1, h_2 = h_3$), přičemž platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= E_T(u) \mathbf{u} + E_T(v) \mathbf{v} \\ \mathbf{H}_T &= H_T(u) \mathbf{u} + H_T(v) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Charakteristickou impedanci vyjádříme jako poměr vzájemně kolmých příčných složek elektrického a magnetického pole, tj.

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= \frac{E_T(u)}{H_T(v)} = \frac{\frac{\partial T_2}{\partial z}}{-j\omega\epsilon T_2} \\ Z(v, u) &= \frac{E_T(v)}{H_T(u)} = \frac{\frac{\partial T_2}{\partial z}}{j\omega\epsilon T_2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Skutečnost, že impedance $Z(u, v)$ a $Z(v, u)$ se liší znaménkem, je dána smyslem šíření elektromagnetické vlny – viz dále. Pro postupnou vlnu platí

$$\begin{aligned} T_2 &= C e^{\pm j\alpha z} \\ Z &= \frac{\alpha}{\omega\epsilon} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pro poměrný posun α jsme již dříve odvodili výraz $\alpha = k\sqrt{1 - v^2}$, takže lze psát

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - v^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_v} \quad (2.25)$$

kde λ je vlnová délka v prostředí s parametry μ, ϵ , λ_v vlnová délka na vedení s parametry prostředí μ, ϵ .

Pro vzduchové prostředí platí $\mu \approx \mu_0, \epsilon \approx \epsilon_0$ a výraz $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi (\Omega) = 377 \Omega$ nazýváme *charakteristickou impedanci volného prostoru* (přesněji *charakteristickou impedanci vakua*). Je zřejmé, že charakteristická impedance vlnovodu se vzduchovým dielektrikem je pro vlny TM vždy menší než charakteristická impedance volného prostoru (vakua).

Vlny příčně elektrické

U vln TE platí pro intenzity elektrického a magnetického pole vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m = -j\omega\mu (\text{grad } \Pi_z^m \times \mathbf{z}) \\ \mathbf{H} &= k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m \end{aligned}$$

jednotlivé příčné složky elektromagnetických polí můžeme vyjádřit analogicky jako u vln TM výrazy

$$E_T(u) = \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{u} = -j\omega\mu T_2(\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{u} = -j\omega\mu \frac{\partial T_1}{h_u \partial v} \cdot T_2$$

$$E_T(v) = \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{v} = -j\omega\mu T_2(\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v} = j\omega\mu \frac{\partial T_1}{h_v \partial u} \cdot T_2$$

$$H_T(u) = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$H_T(v) = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Charakteristickou impedanci vyjádříme jako poměr vzájemně kolmých příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole, neboli

$$Z(u, v) = \frac{E_T(u)}{H_T(v)} = \frac{-j\omega\mu T_2}{\frac{\partial T_2}{\partial z}} \quad (2.26)$$

$$Z(v, u) = \frac{E_T(v)}{H_T(u)} = \frac{j\omega\mu T_2}{\frac{\partial T_2}{\partial z}} \quad (2.27)$$

takže pro postupnou vlnu platí

$$Z = \frac{\omega\mu}{\alpha} \quad (2.28)$$

Dosadíme-li $\alpha = k\sqrt{1-v^2}$, dostaneme po úpravě

$$Z = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_v}{\lambda} \quad (2.28)$$

kde λ je vlnová délka v prostředí s parametry μ, ϵ ,

λ_v vlnová délka na vedení s parametry prostředí μ, ϵ .

Je zřejmé, že charakteristická impedance vlnovodu se vzduchovým dielektrikem je pro vlny TE vždy větší než charakteristická impedance vlnového prostoru.

2.2.3. Výkon přenášený vlnovodem

Výkon přenášený vlnovodem určíme integrací Poyntingova vektoru v průřezu vlnovodu, takže lze psát (viz přílohu E)

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{z} \, dS \quad (2.29)$$

kde \mathbf{z} je jednotkový vektor ve směru osy z ,

S průřez vlnovodu.

Platí tedy

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \text{Re} \int_S \{ [E_T(u) \mathbf{u} + E_T(v) \mathbf{v}] \times [H_T^*(u) \mathbf{u} + H_T^*(v) \mathbf{v}] \} \cdot \mathbf{z} \, dS = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \int [E_T(u) H_T^*(v) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{z} + E_T(v) H_T^*(u) (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{z}] \, dS = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \int [E_T(u) H_T^*(v) - E_T(v) H_T^*(u)] \, dS \end{aligned} \quad (2.30)$$

Mezi příčnými složkami intenzit elektrického a magnetického pole a charakteristickou impedancí platí vztahy (2.23), popř. (2.26), takže

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S [Z(u, v) H_T(v) H_T^*(v) - Z(v, u) H_T(u) H_T^*(u)] \, dS$$

Protože ve vztazích (2.23) a (2.26) platí $Z(u, v) = -Z(v, u)$, lze psát

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S [Z(u, v) H_T(v) H_T^*(v) + Z(u, v) H_T(u) H_T^*(u)] \, dS$$

neboli

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} [Z] \int_S |H_T|^2 \, dS \quad (2.31)$$

Z výrazu (2.30) dostaneme za použití vztahu (2.26) po úpravě

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S \left[\frac{1}{Z(u, v)} E_T(u) E_T^*(u) + \frac{1}{Z(u, v)} E_T^*(v) E_T(v) \right] \, dS$$

neboli

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{1}{Z} \right] \int_S |E_T|^2 \, dS \quad (2.32)$$

příčměž platí

$$\mathbf{H}_T = H_T(u) \mathbf{u} + H_T(v) \mathbf{v}$$

$$\mathbf{E}_T = E_T(u) \mathbf{u} + E_T(v) \mathbf{v}$$

Při praktických aplikacích je lhostejné, který ze vztahů (2.30) až (2.32) použijeme k určení přenášeného výkonu.

Vlny příčně magnetické

Intenzity \mathbf{E} a \mathbf{H} elektrického a magnetického pole můžeme vyjádřit u vln TM pomocí Hertzova elektrického vektoru s ohledem na vztahy (1.64) a (1.65) takto

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^* + \text{grad div } \Pi_z^*$$

$$\mathbf{H} = \text{joe rot } \Pi_z^*$$

takže pro příčné složky intenzit elektrického a magnetického pole platí

$$E_T = (\text{grad } T_1) \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$H_T = \text{joe}(\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

Vyjádříme-li přenášený výkon např. podle vztahu (2.31), tj.

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z] \int_S |H_T|^2 dS$$

potom platí

$$P = \frac{1}{2} Z \omega^2 \varepsilon^2 T_2^* T_2^* \int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 dS$$

U bezstrátového vlnovodu pro postupnou vlnu platí $T_2 = C e^{-jz}$, takže $T_2^* = C e^{jz}$ a výraz pro přenášený výkon můžeme psát ve tvaru

$$P = \frac{1}{2} C^2 Z \omega^2 \varepsilon^2 \int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 dS$$

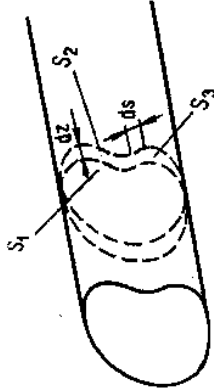
Integrál v tomto vztahu lze vyjádřit jednodušším výrazem na základě následující úvahy. Jsou-li Ψ , Φ skalární potenciální funkce, potom podle Greenovy věty platí

$$\int_V (\operatorname{grad} \Psi \cdot \operatorname{grad} \Phi) dV + \int_V \Psi \Delta \Phi dV = \int_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

kde V je objem uzavřený plochou S ,

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ derivace skalárního potenciálu Φ ve směru normály.

Předpokládejme, že objem V je vytvořen úsekem vlnovodu s průřezy S_1 a S_2 a povrchem pláště S_3 (obr. 2.5).



Obr. 2.5.

Jestliže $dz \rightarrow 0$, není třeba brát v úvahu změnu objemu ve směru osy z a lze psát

$$\begin{aligned} & \int_V (\operatorname{grad} \Psi \cdot \operatorname{grad} \Phi) dS_1 dz + \int_V \Psi \Delta \Phi dS_1 dz = \\ & = \int_{S_3} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dz ds - \int_{S_1} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dz ds + \int_{S_2} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dz ds \end{aligned}$$

Při $dz \rightarrow 0$ je $S_1 \rightarrow S_2$, takže integrály přes plochu S_1 a S_2 se vynuší a dostaneme dvoustranný tvar Greenovy identity

$$\int_S (\operatorname{grad}_T \Psi \cdot \operatorname{grad}_T \Phi) dS + \int_S \Psi \Delta_T \Phi dS = \int_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

popř. pro $\Psi = \Phi = T_1$

$$\int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 dS + \int_S T_1 \Delta T_1 dS = \int_S T_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} ds \quad (2.33)$$

kde S je průřez vlnovodu,

s obrysová křivka průřezu vlnovodu.

Funkce T_1 vyhovuje vlnové rovnici $\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$, takže

$$\Delta T_1 = -\Gamma^2 T_1$$

Na povrchu vlnovodu, tj. na obrysově křivce platí pro funkci T_1 u vln TM $T_1 = 0$ a u vln TE $\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$. Lze tedy na základě Greenovy věty psát

$$\int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 dS = \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS \quad (2.34)$$

a rovnici pro určení přenášeného výkonu u bezstrátového vlnovodu můžeme psát ve tvaru

$$P = \frac{1}{2} Z \omega^2 \varepsilon^2 C^2 \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS \quad (2.35)$$

popř. za použití vztahu (2.24)

$$P = \frac{1}{2} C^2 \frac{\alpha^2}{Z} \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS \quad (2.36)$$

Konstanta C má u vln TM rozměr $V \cdot m$.

Vlny příčně elektrické

Intenzity \mathbf{E} a \mathbf{H} elektrického a magnetického pole je možné vyjádřit u vln TE pomocí Hertzova magnetického vektoru použitím rovnic (1.66) a (1.67) takto

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \operatorname{rot} \mathbf{H}_T^m = -j\omega\mu (\operatorname{grad} \Pi_T^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{H}_T^m + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H}_T^m$$

takže pro příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole platí

$$\mathbf{E}_T = -j\omega\mu (\operatorname{grad} T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

$$\mathbf{H}_T = (\operatorname{grad} T_1) \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Vyjádříme-li přenášený výkon např. vztahem (2.32), tj.

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z} \right] \int_S |E_T|^2 dS$$

potom u bezstrátového vlnovodu platí

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 \mu^2 \frac{1}{Z} T_2 T_2^* \int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 dS$$

neboli po úpravě

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 \mu^2 C^2 \frac{1}{Z} \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS \quad (2.37)$$

popř. za použití vztahu (2.27)

$$P = \frac{1}{2} C^2 \alpha^2 Z \Gamma^2 \int_0^1 T_1^2 dS \quad (2.38)$$

Konstanta C má u vln TE rozměr $A \cdot m$.

2.2.4. Rychlost šíření energie ve vlnovodu

Výkon přenášený vlnovodem, můžeme vyjádřit množstvím energie, která prochází průřezem vlnovodu za jednu sekundu, tj.

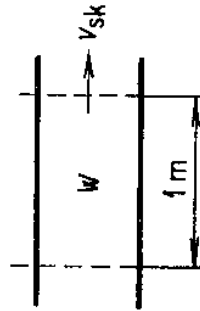
$$P = Wl^{-1}$$

Předpokládejme, že se úsekem vlnovodu jednotkové délky $l = 1$ m šíří energie elektromagnetického pole vlny TM rychlostí v . Pro přenášený výkon platí (obr. 2.6)

$$P = Wv$$

kde W je energie elektromagnetického pole v úseku vlnovodu s délkou $l = 1$ m. ($J \cdot m^{-1}$),

v rychlost šíření energie elektromagnetického pole ve vlnovodu ($m \cdot s^{-1}$)



Obr. 2.6.

Rychlost šíření energie můžeme proto vyjádřit výrazem

$$v = \frac{P}{W} \quad (2.39)$$

K určení přenášeného výkonu zvolme vztah (2.31)

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z] \int_0^1 |H_T|^2 dS$$

Energii elektromagnetického pole W určíme jako součet energií elektrického a magnetického pole, takže

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{4} \epsilon \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV + \frac{1}{4} \mu \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV$$

Protože u vln TM má elektrické pole jak složku příčné, tak i složku podélnou, lze psát

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_z$$

takže platí

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{E}_T^* + \mathbf{E}_z \cdot \mathbf{E}_z^* = |\mathbf{E}_T|^2 + |\mathbf{E}_z|^2$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{H}_T^* = |\mathbf{H}_T|^2$$

Intenzity elektrického a magnetického pole lze vyjádřit pomocí Hertzova vektoru vztahy

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^* + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_z^*$$

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \operatorname{rot} \Pi_z^* = j\omega \epsilon (\operatorname{grad} \Pi_z^* \times \mathbf{z})$$

kde $\Pi_z^* = T_1 T_2$, $T_2 = C e^{-j\alpha z}$.

Lze tedy psát

$$\mathbf{E}_T = (\operatorname{grad} T_1) \frac{\partial T_2}{\partial z} = -j\alpha (\operatorname{grad} T_1) T_2$$

$$\mathbf{E}_z = (k^2 - \alpha^2) T_1 T_2 \mathbf{z} = \Gamma^2 T_1 T_2 \mathbf{z}$$

$$\mathbf{H}_T = j\omega \epsilon (\operatorname{grad} T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

takže platí

$$\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{E}_T^* = \alpha^2 C^2 |\operatorname{grad} T_1|^2$$

$$\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{E}_z^* = \Gamma^4 C^2 T_1^2$$

$$\mathbf{H}_T \cdot \mathbf{H}_T^* = \mu^2 \epsilon^2 C^2 |\operatorname{grad} T_1|^2$$

Po dosazení všech těchto výrazů do vztahu (2.39) dostaneme pro rychlost šíření energie ve vlnovodu výraz

$$v = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 \epsilon^2 C^2 Z \int_0^1 |\operatorname{grad} T_1|^2 dS}{\frac{1}{4} \mu \omega^2 \epsilon^2 C^2 \int_0^1 \int_0^1 |\operatorname{grad} T_1|^2 dS dz + \frac{1}{4} \epsilon \Gamma^4 C^2 \int_0^1 \int_0^1 T_1^2 dS dz + \frac{1}{4} \epsilon \alpha^2 C^2 \int_0^1 \int_0^1 |\operatorname{grad} T_1|^2 dS dz}$$

a po úpravě [s dosazením vztahu (2.34)]

$$v = \frac{2\omega^2 \epsilon Z}{\omega^2 \mu \epsilon + \alpha^2 + \Gamma^2}$$

Vzhledem k tomu, že podle (2.11) platí

$$\Gamma^2 + \alpha^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

dostaneme

$$v = \frac{Z}{\mu}$$

ХАРАКТЕРИСТИКА ИМПЕДАНСА ВОЛНОВОДУ ПРО ВИНУ ПРЯЧНЭ МАГНЕТИЧКУ JE ПОДЛЕ (2.25)

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{1 - v^2}{1 - v^2}}$$

ТАКЖЕ РЫХЛОСТ ШИРЭННЯ ЕНЕРГІЕ ВЕ ВІНОВОДУ JE

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - v^2} \quad (2.40)$$

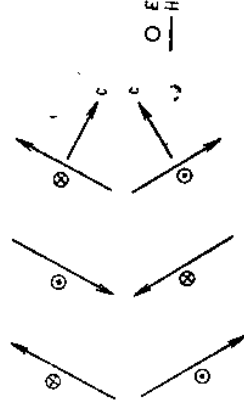
ПРО ВЗДУХОВЭ ПРІСТРІДІ, КДЕ $\mu \approx \mu_0$, $\epsilon \approx \epsilon_0$, JE

$$v = c \sqrt{1 - v^2}$$

Z того выплыва, же се енергіе шірі ве вІнОВОДУ РЫХЛОСТІ, КТЕРА JE ВЗДЫ МЕНШІ НЕЖ РЫХЛОСТ СВІТЛА. Z ПОРОВНАННІ ВІЯЗУ (2.40) А Z ТАБ. 1 JE ЗРЕЙМЭ, же РЫХЛОСТ ШИРЭННЯ ЕНЕРГІЕ JE ШОДНА СЕ СКІПІНОВОУ РЫХЛОСТІ. ПРО ВІНЫ TE БЫХОМ ДОСТАЛІ ВІЯЗ ШОДНЫ С (2.40).

2.2.5. ГеометричкА ПРІДСТАВА О ШІРЭННІ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЧКЭ ВІНЫ ВЕ ВІНОВОДУ

ПРІДПОКЛАДЭМЕ ДВЕ ІДЕНТИЧКЭ РОВІННЭ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЧКЭ ВІНЫ, ШІРІОС SE РІЗНУМІ СМЭРЫ РЫХЛОСТІ СВІТЛА c. ПРІДПОКЛАДЭМЕ, же JE ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЧКЭ ПОЛЕ В УРЧІТЭМ ОКАМІЗІКУ ОРИЕНТОВАНО ПОДЛЕ ОBR 2.7, КДЕ ПЛІНЭ ЧАРЫ ОЗНАЧУЮ МАКСІМА ІНТЕНЗІТУ МАГНЕТИЧКЭ ПОЛЕ. ЕЛЕКТРИЧКЭ ПОЛЕ, КТЕРЭ JE КОЛМЭ К ПОЛІ МАГНЕТИЧКЭМУ, МА МАКСІМА ОЗНАЧЭНА КРІЗЬКУ, ПОПР. ТЭЧКАМІ. (АБЫ БЫЛ ЗАХОВАН СМЭР ПРІНОСУ ЕНЕРГІЕ, МУСІ СЕ ПРІ ЗМЭНЭ ОРИЕНТАЦЕ МАГНЕТИЧКЭ ПОЛЕ ЗМЭНІТІ ОРИЕНТАЦЕ ЕЛЕКТРИЧКЭ-ХО ПОЛЕ.)

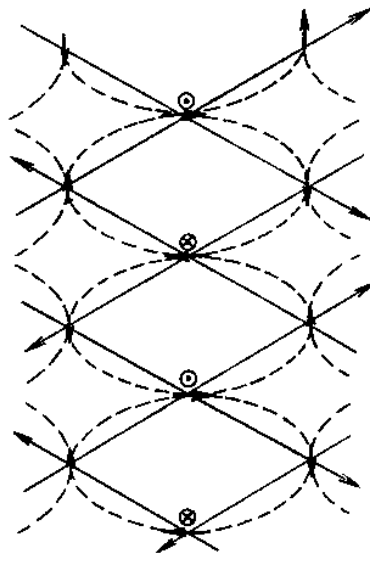


Обр. 2.7. Две ровинне вІны шірі с се рІзнуМІ СМЭРЫ

ВЫСЛЕДНЭ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЧКЭ ПОЛЕ, КТЕРЭ ЗІСКАМЕ СУПЕРПОЗИЦІЮ ОБОУ ВІН, МА УСПОРІАДАНІ УВЕДЕНЭ НА ОBR 2.8. ВЫСЛЕДНЭ ЕЛЕКТРИЧКЭ ПОЛЕ МА МАКСІМАЛНІ ІНТЕНЗІТУ В МІСТЭХ, КДЕ ЕЛЕКТРИЧКА ПОЛЕ ОБОУ ДІЛІЧІХ ВІН МАЮ ШОДНУ ОРИЕНТАЦІ; В МІСТЭХ, КДЕ JE ОРИЕНТАЦЕ ОБОУ ПОЛІ РОЗДІЛНА, JE ВЫСЛЕДНА ІНТЕНЗІТА ЕЛЕКТРИЧКЭ ПОЛЕ НУЛОВА. СУОЧТЕМ МАГНЕТИЧКЭ ПОЛІ ОБОУ ДІЛІЧІХ ВІН ВІЗНІКНЕ МАГНЕТИЧКЭ ПОЛЕ С УЗАВЯЖЭНЫМІ СІЛОЧАРАМІ.

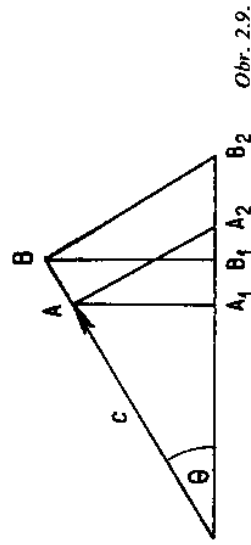
Z ОBR 2.8 JE ЗРЕЙМЭ, же СУПЕРПОЗИЦІЮ ДІЛІЧІХ РОВІННЭХ ВІН ВІЗНІКЛА ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЧКА ВІНА, ПОСТУПІЮЦІ ВЕ СМЭРУ ОСЬ СЫМЕТРІЕ ШІРЭННЯ ОБОУ ДІЛІЧІХ ВІН.

Магнетічкэ поле тэо высліднэ вІны ма взгледэм к томуту смэру поступу слоўку прІчнэ і подэлноу, електрічкэ поле је поуже прІчнэ, также вІзнікла вІна прІчнэ електрічкА. Далэ је зреЙмэ, же ехІстуют ровІны, ве ктерых је выслідна ІнтензІта електрічкэго поле нулОВА, прІчэмз сілоктІвкы магнетічкэго поле јоу к тэмто ровІнам течнэ. Z того выплыва, же розложенІ поле небуде нарушенэ, влозиме-лі до



Обр. 2.8. Суперпозице двох ровІннэх вІн

тэчто ровІн неконечнэ тенкэ, докonale водІвэ стэны. Протоже тІто стэны моћоу бІтІ стэнамІ вІнОВОДУ, је зреЙмэ, же вІзнік прІчнэ електрічкэх вІн ве вІнОВОДУ Ізе высвІтліт јакэ суперпозицІю двох дІлІчІх ровІннэх вІн, шІрІчІх се под уґлом θ взгледэм к осе вІнОВОДУ А мноћонАсобрнэ се одрАжејІчІх од водІвІх стэн. Ке вІзніку слоужІтІшІх вІду бІло бІло тРеба суперпосовАт двэ двојце дІлІчІх ровІннэх вІн ве ровІнАх вІзАемнэ колмых. ЗАмэнэу E зА H на оbr. 2.7. БЫХОМ МОГЛІ АНАЛОГІЧКУ ВЫСВІТЛІТ ВІЗНІК ВІН ПРІЧНЭ МАГНЕТИЧКЭХ.



Обр. 2.9.

Будеме-лі прІдпоклАдат, же дІлІчІ ровІнна вІна шІрІсІ се РЫХЛОСТІ СВІТЛА ПОСТУПІЛА ЗА ЧАСОВЫ ІНТЕРВАЛ Δt О УСЕК AB (вІз оbr. 2.9), ПОТОМ ЗА ТЫЖ ЧАСОВЫ ІНТЕРВАЛ ПОСТУПІЛО ЧЕЛО ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЧКЭ ВІНЫ ВЕ СМЭРУ ОСЬ ВІНОВОДУ СКІПІНОВОУ РЫХЛОСТІ О УСЕК

$$\overline{A_1 B_1} = v_{sk} \Delta t$$

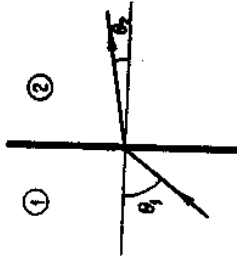
$$\overline{A_2 B_2} = v_r \Delta t$$

прІчэмз ровІна константні фАзе поступІт фАзОВОУ РЫХЛОСТІ О УСЕК

2.3. VLNOVOD S KONEČNOU VODIVOSTÍ PLÁŠTĚ

Nedokonalá vodivost pláště vlnovodu způsobuje ztráty energie, takže každý vlnovod má jistou hodnotu útlumu. Kromě toho v důsledku konečné vodivosti není na plášti tečná složka intenzity elektrického pole nulová.

Protože vodivost pláště kovových vlnovodů je velká, můžeme použít k vyjádření poměrů na rozhraní vodiče a dielektrického prostředí přibližně okrajové podmínky.



Obr. 2.11. Šíření elektromagnetické vlny na rozhraní dvou prostředí

Pro nekonečné rovinné rozhraní platí podle Snellova zákona při šíření rovinné elektromagnetické vlny (obr. 2.11)

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

kde k_1 je vlnové číslo v prostředí 1 (dielektrikum),

k_2 vlnové číslo v prostředí 2 (vodič),

θ_1 úhel dopadu rovinné elektromagnetické vlny v prostředí 1,

θ_2 úhel, který svírá směr šíření elektromagnetické vlny v prostředí 2 s normálou.

Po úpravě dostaneme

$$\cos \theta_2 = \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \theta_1\right)^{1/2}$$

Vzhledem k tomu, že platí $k_2^2 = \omega^2 \mu \epsilon' (1 - j\sigma/\omega\epsilon')$, lze pro vodivé prostředí psát $k_2^2 \approx -j\omega\mu\sigma$ pro $\sigma \gg \omega\epsilon$. Dále z toho vyplývá velmi důležitý poznatek, že totiž při $\sigma \gg \omega\epsilon$ platí $\cos \theta_2 \approx 1$ neboli $\theta_2 \approx 0$ při jakémkoliv úhlu dopadu θ_1 .

Směr rovinné elektromagnetické vlny, šířící se v prostředí 2 bude téměř totožný se směrem normály k hraniční rovině. Tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole E_t a H_t na rozhraní obou prostředí jsou složkami příčnými vzhledem k vlně šířící se ve vodivém prostředí a jsou vzájemně kolmé. Z jejich poměru můžeme vypočítat charakteristickou impedanci vodivého prostředí

$$Z_v = \frac{E_t}{H_t} \quad (2.41)$$

kde Z_v je charakteristická impedance vodivého prostředí,

E_t tečná složka intenzity elektrického pole,

H_t tečná složka intenzity magnetického pole.

$$\overline{A_1 B_1} = \overline{AB} \cos \theta = c \cos \theta \Delta t$$

$$\overline{A_2 B_2} = \overline{AB} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c \Delta t}{\cos \theta}$$

neboli

$$v_{sk} = c \cos \theta$$

$$v_f = \frac{c}{\cos \theta}$$

takže platí

$$v_{sk} v_f = c^2$$

což je vztah totožný se vztahem (2.20), který jsme odvodili již dříve.

Vzhledem k tomu, že podle (2.40) a (2.20) platí

$$v_{sk} = c \sqrt{1 - v^2}; \quad v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2}}$$

je zřejmé, že platí

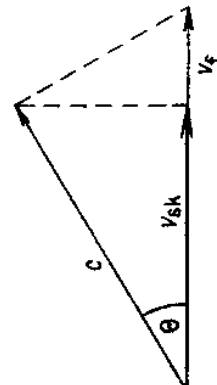
$$\cos \theta = \sqrt{1 - v^2}$$

kde $v = \lambda/\lambda_m = \omega_m/\omega = f_m/f$.

Pro $f \rightarrow f_m$ je $\cos \theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$, $v_{sk} \ll c$, $v_f \gg c$.

Pro $f \gg f_m$ je $\cos \theta \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow 0$, $v_{sk} \rightarrow c$, $v_f \rightarrow c$.

Je vidět, že úhel, který svírá dílčí rovinná vlna s osou vlnovodu, je závislý na velikosti v . Jestliže se frekvence přenášené vlny f blíží frekvenci f_m , úhel θ vzrůstá. Tím vzrůstá i fázová rychlost, skupinová rychlost naopak klesá. Při velkém poměru f/f_m se úhel θ blíží nule, rychlost fázová i skupinová se blíží rychlosti světla.



Obr. 2.10. Trojúhelník rychlostí

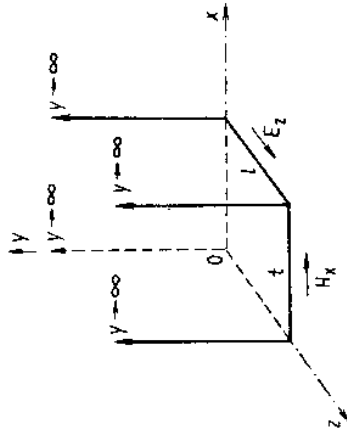
Lze tedy říci, že přenos energie vlnovodem se zprostředkuje rovinnou vlnou šířící se pod určitým úhlem k ose vlnovodu tak, že dochází k mnohonásobným odrazům od stěn vlnovodu. Průmět této rychlosti do osy vlnovodu udává rychlost šíření této energie ve směru osy vlnovodu (obr. 2.10).

Vzhledem k tomu, že charakteristikou impedanci vodivého prostředí lze určit z jeho parametrů výpočtem (viz následující odstavec), můžeme vypočítat velikost tečné složky intenzity elektrického pole z velikosti tečné složky intenzity magnetického pole a z velikosti charakteristické impedance vodiče vztahem

$$E_t = Z_v H_t \quad (2.42)$$

2.3.1. Charakteristická impedance vodiče, poměrný vysokofrekvenční odpor

Z vodiče nekonečné tloušťky vyřizneme kvádr šířky t a délky l (obr. 2.12). Předpokládáme, že na rozhraní vodivého a dielektrického prostředí jsou tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole E_x , H_x , a vyšetříme nejprve rozložení elektromagnetického pole ve vodiči.



Obr. 2.12.

V mikrovlnné oblasti platí pro vodiče $\sigma \gg \omega \epsilon$, neboť vodivost u kovů je řádu $10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ a součin $\omega \epsilon$ je přibližně řádu 10^{-1} až $10^1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Posuvný proud můžeme tedy zanedbat oproti vodivému proudu a Maxwellovy rovnice (1.2) lze psát ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

dostaneme pro složky E_x a H_x tyto vztahy (předpokládáme rovinnou elektromagnetickou vlnu šířící se ve směru y)

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma E_x \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_x \quad (2.44)$$

Derivujeme-li rovnici (2.44), podle y , dostaneme

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -j\omega \mu \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

takže po dosazení z rovnice (2.43) lze psát

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -j\omega \mu \sigma E_x \quad (2.45)$$

Řešení této diferenciální rovnice je

$$E_x = C_1 e^{gy} + C_2 e^{-gy}$$

kde

$$g = \sqrt{j\omega \mu \sigma} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1 + j)$$

Aby řešení pro intenzitu elektrického pole mělo fyzikální smysl, musí být zřejmé $C_1 = 0$, neboť pro $y \rightarrow \infty$ je $E_x \rightarrow 0$. Lze tedy psát

$$E_x = C e^{-gy} \quad (2.46)$$

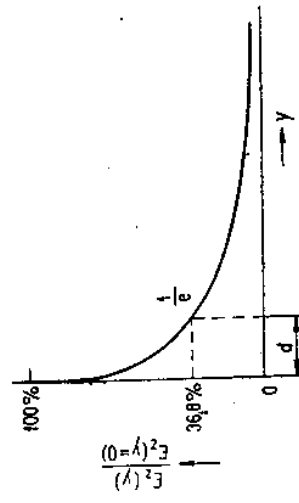
Pro intenzitu magnetického pole H_x platí podle (2.44)

$$H_x = -j \frac{g}{\omega \mu} C e^{-gy} \quad (2.47)$$

Z rovnic (2.46) a (2.47) je zřejmé, že amplitudy intenzit elektrického i magnetického pole exponenciálně klesají se vzdáleností y . Vzdálenost $y = d$, pro kterou platí

$$y = d = \frac{1}{\text{Re}[g]} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}} \quad (2.48)$$

a kde intenzity elektrického a magnetického pole poklesnou v poměru e^{-1} oproti hodnotám na rozhraní, bývá označována jako *hloubka vniku* v proud. Průběh amplitudy intenzity elektrického pole ve vodiči v závislosti na souřadnici y je znázorněn na obr. 2.13.



Obr. 2.13. Útlum elektromagnetického pole ve vodivém prostředí

Charakteristickou impedanci vodiče určíme ze vztahu (2.41)

$$Z_v = \frac{E_t}{H_t}$$

V našem případě je $E_t = E_x$, $H_t = H_x$, takže lze psát

$$Z_v = \frac{j\omega\mu}{g} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+i)$$

a po úpravě

$$Z_v = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+i) \quad (2.49)$$

Výkon vyzářený do vodiče je

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z_v] \int_S |H_t|^2 dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{Z_v}\right] \int_S |E_t|^2 dS$$

Vzhledem k tomu, že při $y = 0$ je $E_z = C = E_t$, platí

$$P_z = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}} C^2 \int_0^l \int_0^l dx dz = \frac{1}{2} \frac{C^2}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}} l$$

Výkon ztracený ve vodiči můžeme určit též ze vztahu

$$P_z = \frac{1}{2} R_{vf} |I|^2 \quad (2.51)$$

kde R_{vf} je vf odpor vodiče,

I vf proud procházející vodičem.

Vysokofrekvenční proud vodiče určíme z Ampérova zákona

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_x l \Big|_{y=0} \quad (2.52)$$

neboť integrujeme po obvodu obdélníka podle obr. 2.12 o stranách l , ∞ , l , ∞ . Nulový příspěvek k cirkulaci je pouze od strany l při $y = 0$ (na straně, l při $y = \infty$ je intenzita magnetického pole nulová, strany $y \rightarrow \infty$ jsou kolmé ke směru intenzity magnetického pole).

Podle Stokesovy věty platí

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

(kde S je plocha uzavřená křivkou s). Použijeme-li z Maxwellových rovnic vztah

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

můžeme psát

$$I = \int_0^{\infty} \sigma E_x l dy \quad (2.53)$$

Ze vztahů (2.53) a (2.52) vyplývá, že vf proud ve vodiči je možné určit buď pomocí intenzity magnetického pole, nebo pomocí intenzity elektrického pole. Použijeme-li k určení proudu vztah (2.52), potom při $y = 0$ platí

$$I = H_x l = -j \frac{g}{\omega\mu} C l$$

takže

$$I = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} l (1-j) C$$

a tedy

$$|I|^2 = \frac{\sigma}{\omega\mu} C^2 l^2$$

Pro výkon ztracený ve vodiči dostaneme na základě vztahu (2.51) výraz

$$P_z = \frac{1}{2} R_{vf} \frac{\sigma}{\omega\mu} C^2 l^2 \quad (2.54)$$

Z porovnání vztahů (2.54) a (2.50) můžeme vyjádřit vf odpor vodiče (pláště vinovodu)

$$R_{vf} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{l}{t} \quad (2.55)$$

neboli

$$R_{vf} = \varrho_{vf} \frac{l}{t} \quad (2.56)$$

kde pro tzv. poměrný vf odpor ϱ_{vf} platí

$$\varrho_{vf} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2.57)$$

Z porovnání vztahů (2.57) a (2.49) je zřejmé, že platí

$$\varrho_{vf} = \operatorname{Re}[Z_v] \quad (2.58)$$

Hloubkou vniku vf proudu jsme označili takovou tloušťku vodiče d , pro kterou podle (2.48) platí

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}$$

Ze vztahů (2.48) a (2.57) je zřejmé, že poměrný vf odpor vodiče lze též vyjádřit výrazem

$$\varrho_{vf} = \frac{1}{\sigma d} \quad (2.59)$$

Vyjádříme-li vf odpor R_{vf} vodiče šifky l , délky l a neomezené výšky $y \rightarrow \infty$

a stejnosměrný odpor téhož vodiče stejné délky i šířky, ale výšky $y = d$, je

$$R_{vf} = \rho_{vf} \frac{l}{I}$$

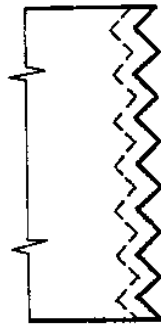
$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{td}$$

Položíme-li $R_{vf} = R$, dostaneme vztah

$$\rho_{vf} = \frac{1}{\sigma d}$$

Z toho je zřejmé, že vf odpor R_{vf} celého průřezu vodiče je shodný se stejnosměrným odporem téhož vodiče stejné šířky, ale výšky rovné hloubce vniku vf proudu.

V mikrovlnné technice se často používá jako vodič stříbro ($\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$). Hloubka vniku vf proudu je velmi malá (řádově 10^{-2} mm až 10^{-4} mm) a na vf odpor má vliv i hladkost povrchu. Drsný povrch vodiče můžeme nahradit tak, jak je znázorněno na obr. 2.14. Z obrázku je zřejmé, že dráha vf proudu se prodlouží $\sqrt{2}$ krát. Tím se zvětší ve stejném poměru i poměrný vf odpor ρ_{vf} .



Obr. 2.14. Prodloužení dráhy vf proudu v důsledku drsnosti povrchu vodiče

U vodičů jiných průřezů než obdélníkových se vf proud šíří také pouze ve velmi tenké vrstvě na povrchu. Výpočet vf odporu proto zjednodušíme tím, že vf odpor počítáme jako odpor tenkostěnné trubky stejného tvaru jako má vodič. Vysokofrekvenční odpor vodiče, který má obvod průřezu s a délku l , je tedy

$$R_{vf} = \rho_{vf} \frac{l}{s}$$

Vzhledem k tomu, že vf proud vniká pouze do velmi tenké povrchové vrstvy, je možné vyrábět mikrovlnné konstrukční díly z materiálů s horší vodivostí než má stříbro nebo měď, jejich povrch se však galvanicky stříbíří. U obvodů, kde chceme dosáhnout co nejmenších ztrát (např. u dutinových rezonátorů), se postříbřený povrch leští do zrcadlového lesku.

2.3.2. Poměrný útlum vlnovodu při šíření vln

Z odstavce (2.2.3) víme, že výkon, přenášený vlnovodem je možné určit např. vztahy

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} [Z] \int_s |H_T|^2 dS$$

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{1}{Z} \right] \int_s |E_T|^2 dS$$

kde pro příčné složky intenzit pole platí

$$\mathbf{E}_T = (\text{grad } T_1) \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{pro TM}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\omega\epsilon(\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) T_2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{pro TE}$$

$$\mathbf{E}_T = -j\omega\mu(\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

$$\mathbf{H}_T = (\text{grad } T_1) \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Jelikož vlnovod má plášť s nedokonalou vodivostí, je třeba počítat s tím, že součinitel přenosu je komplexní a funkci T_2 lze vyjádřit u postupné vlny výrazem

$$T_2 = C e^{-(\theta + j\alpha)z}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$T_2 T_2^* = C^2 e^{-2\beta z}$$

lze vyjádřit výkon přenášený vlnovodem při šíření vlni TM např. výrazem (2.35)

$$P = \frac{1}{2} Z \omega^2 \epsilon^2 C^2 \Gamma^2 e^{-2\beta z} \int_s T_1^2 dS$$

popř. při šíření vln TE výrazem (2.38)

$$P = \frac{1}{2} Z \alpha^2 C^2 \Gamma^2 e^{-2\beta z} \int_s T_1^2 dS$$

Z toho je zřejmé, že následkem nedokonalé vodivosti pláště vlnovodu, popř. i následkem ztrátového dielektrika uvnitř vlnovodu se výkon se vzrůstající vzdáleností z zmenšuje.

Změnu tohoto výkonu ve směru osy z určíme z derivace uvedených výrazů podle z

$$\frac{dP}{dz} = -2\beta P$$

Označíme-li ztrátový výkon na jednotku délky

$$P_z = -\frac{dP}{dz}$$

je zřejmé, že poměrný útlum můžeme vyjádřit výrazem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P} \quad (2.60)$$

Označíme-li P_0 výkon na počátku vlnovodu (tj. při $z = 0$), výkon ve vzdálenosti $z = l$ m (tj. při $z = l$) P_1 , potom (viz obr. 2.15)

$$P_1 = P_0 e^{-2\beta l}$$

a pro poměrný útlum platí

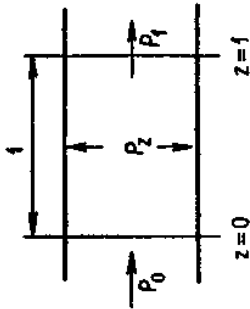
$$\beta = \frac{1}{2} \ln \frac{P_0}{P_1} \quad (2.60a)$$

Rozdíl výkonů P_0 a P_1 je roven ztracenému výkonu P_z , takže

$$P_1 = P_0 - P_z$$

a tedy

$$P_z = P_0(1 - e^{-2\beta}) \quad (2.61)$$



Obr. 2.15.

Výkon P_z , ztracený v nedokonalé vodivém plášti úseku vedení dlouhém l m je

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z_w] \int_0^l |H_z|^2 e^{-2\beta z} dz$$

kde Z_w je charakteristická impedance vodivého pláště vlnovodu,

H_z tečná složka intenzity magnetického pole na plášti vlnovodu.

Po částečné integraci dostaneme

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z_w] (1 - e^{-2\beta l}) \frac{1}{2\beta} \int_0^l |H_z|^2 dz$$

což můžeme napsat ve tvaru

$$P_z = (1 - e^{-2\beta l}) \frac{1}{2\beta} P_{z0} \quad (2.61a)$$

kde označením P_{z0} jsme vyjádřili ztracený výkon na vedení délky l m, vyvolaný tečnou složkou intenzity magnetického pole, odpovídající bezztrátovému vedení.

S použitím vztahů (2.61) a (2.61a) dostaneme pro poměrný útlum výraz

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_{z0}}{P_0} \quad (2.62)$$

který je v podstatě shodný s výrazem (2.60) a který použijeme pro výpočet poměrného útlumu v konkrétních případech.

Vlny příčné magnetické

Předpokládáme vlnovod libovolného příčného průřezu, ve kterém se šíří vlna TM. Pro magnetické pole platí vztah

$$\mathbf{H} = j\omega \operatorname{rot} \mathbf{H}_z = j\omega \epsilon (\operatorname{grad} \mathbf{H}_z \times \mathbf{z})$$

a protože u příčné magnetické vlny může být tečná složka intenzity magnetického pole pouze ve směru obrysových křivek průřezu vlnovodu, platí (obr. 2.16)

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_s = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = j\omega \epsilon T_2 (\operatorname{grad} T_1 \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{s}$$

neboli po úpravě

$$\mathbf{H}_s = j\omega \epsilon T_2 \operatorname{grad} T_1 \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{s})$$



Obr. 2.16.

Vektorový součin jednotkových vektorů \mathbf{z} a \mathbf{s} je jednotkový vektor ve směru normály k plášti vlnovodu, takže lze psát

$$\mathbf{H}_s = j\omega \epsilon T_2 \operatorname{grad} T_1 \cdot \mathbf{n} = j\omega \epsilon \frac{\partial T_1}{\partial n} T_2$$

Výkon P_{z0} ztracený v plášti vlnovodu jednotkové délky je

$$P_{z0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z_w] \oint_0^1 \int_0^1 |H_s|^2 ds dz$$

kde s je obrysová křivka vlnovodu, takže po dosazení za H_s a částečné integraci dostaneme

$$P_{z0} = \frac{1}{2} \epsilon \omega^2 \epsilon^2 C^2 \oint_0^1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds$$

Pro výkon přenášený vlnovodem platí podle (2.35)

$$P_0 = \frac{1}{2} Z \omega^2 \epsilon^2 \Gamma^2 C^2 \int_0^1 T_1^2 ds$$

takže na základě vztahu (2.62) lze po úpravě vyjádřit poměrný útlum vlnovodu výrazem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \omega^2 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds}{Z \Gamma^2 \int_0^1 T_1^2 ds}$$

Pro charakteristickou impedanci vlnovodu, ve kterém se šíří vlna TM, jsme odvodili vztah (2.25)

$$Z = Z_0 \sqrt{1 - v^2}$$

kde Z_0 je charakteristická impedance volného prostoru (vakua), takže poměrný

útlum můžeme též vyjádřit výrazem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{e_{vf}}{Z_0} \int_s \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds \quad (2.63) \quad (1 - v^2)^{-1/2}$$

Vyšetřeme nyní, jak závisí průběh poměrného útlumu na úhlové frekvenci přenášené elektromagnetické vlny. Ve vztahu (2.63) jsou na úhlové frekvenci závislé pouze veličiny e_{vf} a v , pro které platí

$$e_{vf} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}; \quad v = \frac{\omega_m}{\omega}$$

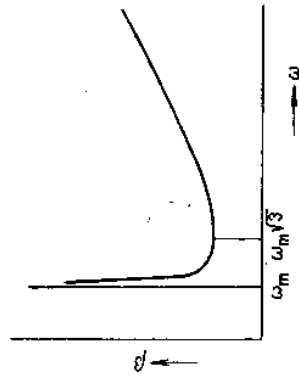
Ostatní veličiny jsou buď konstanty, nebo funkce na úhlové frekvenci nezávislé. Lze tedy psát

$$\beta = K \frac{\omega^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}} = K \left(\frac{\omega^3}{\omega^2 - \omega_m^2} \right)^{1/2} \quad (2.64)$$

kde pro K platí

$$K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma}} \int_s \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds = \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_s T_1^2 ds$$

Grafické zobrazení vztahu (2.64) je na obr. 2.17



Obr. 2.17. Frekvenční závislost poměrného útlumu u vln TM

Z obr. 2.17 je zřejmé, že poměrný útlum příčné magnetických vln ve vlnovodu je při určité úhlové frekvenci minimální. Ze vztahu (2.64) bychom mohli zjistit, že toto minimum nastává při úhlové frekvenci

$$\omega = \sqrt{3}\omega_m$$

kde ω_m je mezní úhlová frekvence vlnovodu.

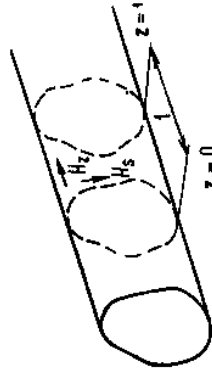
V oblasti úhlových frekvencí $\omega \gg \omega_m$ je vzrůst útlumu způsobem vzrůstem vln odporu pláště vlnovodu.

Při úhlových frekvencích, kdy platí $\omega \rightarrow \omega_m$, útlum vlnovodu narůstá, až při $\omega = \omega_m$ se vlna přestane vlnovodem šířit. Protože jsme výpočet poměrného útlumu provedli pouze pro stav, při němž se vlna vlnovodem šíří, nemůžeme dělat závěry o průběhu útlumu v oblasti, kde je $\omega < \omega_m$. V této oblasti se vlna vlnovodem nešíří, avšak později poznáme, že i zde má vlnovod konečný útlum.

Vlny příčné elektrické

Vlny příčné elektrické TE mohou mít na plášti vlnovodu (obr. 2.18) dvě tečné složky intenzity magnetického pole H_t . Jedna z nich bude vždy ve směru podélném, druhá může být ve směru příčném (u některých vidů může tečná složka ve směru obrysové křivky průřezu vedení chybět). Pro intenzitu magnetického pole platí

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m$$



Obr. 2.18.

takže podélnou složku vyjádříme ze vztahu

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2}$$

neboli po úpravě

$$H_z = \Gamma^2 \Pi_z^m = \Gamma^2 T_1 T_2$$

Tečnou složku intenzity magnetického pole ve směru obrysové křivky průřezu vedení určíme ze vztahu

$$H_s = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = (k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m) \cdot \mathbf{s}$$

neboli

$$H_s = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial s \partial z} = \frac{\partial T_1}{\partial s} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Výkon, ztracený v plášti vlnovodu jednotkové délky, je tedy

$$P_{z0} = \frac{1}{2} \text{Re} [Z_w] \oint_0^1 |H_s|^2 ds dz + \frac{1}{2} \text{Re} [Z_w] \oint_0^1 |H_z|^2 ds dz$$

Protože platí

$$|H_z|^2 = H_z H_z^* = \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 C^2 \alpha^2$$

a podobně

$$|H_s|^2 = H_s H_s^* = \Gamma^4 T_1^2 C^2$$

dostaneme pro ztracený výkon

$$P_{z0} = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{eff}} C^2 \left[\alpha^2 \oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds + \Gamma^4 \oint_S T_1^2 ds \right]$$

Pro výkon přenesený vlnovodem platí podle (2.38) vztah

$$P_0 = \frac{1}{2} C^2 \alpha^2 Z \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS$$

takže na základě vztahu (2.62) lze po úpravě vyjádřit poměrný útlum výrazem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\text{eff}}}{Z} \frac{\Gamma^{-2} \oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds + \Gamma^2 \alpha^{-2} \oint_S T_1^2 ds}{\int_S T_1^2 dS} \quad (2.65)$$

a dosadíme-li do tohoto výrazu

$$\Gamma^2 = \omega_m^2 \mu \epsilon; \quad \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon (1 - v^2); \quad Z = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad v = \frac{\omega_m}{\omega}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\text{eff}}}{Z_0} \left[\frac{\oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds}{\Gamma^2 \int_S T_1^2 dS} \sqrt{1 - v^2} + \frac{\oint_S T_1^2 ds}{\int_S T_1^2 dS} \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \quad (2.66)$$

Je zřejmé, že výraz pro poměrný útlum vedení s vlnou příčně elektrickou je podstatně složitější než pro vlnu příčně magnetickou. Je to způsobeno tím, že na plášti vlnovodu mohou být u vln TE dvě tečné složky magnetického pole, jedna příčná a jedna podélná, zatímco u vln TM může být na plášti vlnovodu pouze jedna tečná složka magnetického pole. Průběh útlumu má u větší vln vidět podobný charakter jako u vln TM s tím rozdílelem, že minimum útlumu nastává u každého vidu při jiné úhlové frekvenci. Jak poznáme později, ve vlnovodech kruhového průřezu mohou existovat vidy šíření, u nichž poměrný útlum se vzrůstající úhlovou frekvencí se neustále zmenšuje.

2.4. VLIV ZTRÁTOVÉHO DIELEKTRICKÉHO PROSTŘEDÍ NA PŘENOSOVÉ VLASTNOSTI VLNOVODU

V dosavadních úvahách o přenosových vlastnostech vedení jsme vycházeli z předpokladu, že dielektrické prostředí uvnitř vedení je bezztrátové. V tomto odstavci ukážeme, že ztrátové dielektrické prostředí má vliv nejen na poměrný útlum β , ale též na poměrný posun α .

Při řešení vlnové rovnice pro Hertzův vektor jsme jako dílčí řešení této rovnice dostali pro součinitel přenosu γ vztah (2.8), který po dosazení za k můžeme napsat ve tvaru

$$\gamma = \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Je-li vlnovou vypinen ztrátovým dielektrickým prostředím, potom podle odst. 1.2.1 platí pro komplexní permitivitu prostředí

$$\epsilon = \epsilon'(1 - j \operatorname{tg} \delta)$$

Dosazením komplexní permitivity do vztahu (2.8) dostaneme

$$\gamma = \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2 \mu \epsilon' (1 - j \operatorname{tg} \delta)}$$

nebo po úpravě

$$\gamma = \pm j \sqrt{k^2 - \Gamma^2 - j k^2 \operatorname{tg} \delta}$$

kde $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$ je vlnové číslo dané reálnou složkou komplexní permitivity ϵ .

Označíme-li

$$\gamma = \beta + j\alpha$$

lze psát

$$\beta^2 - \alpha^2 + j2\beta\alpha = -(k^2 - \Gamma^2 - j k^2 \operatorname{tg} \delta)$$

takže po oddělení reálné a imaginární části dostaneme rovnice

$$\beta^2 - \alpha^2 = -(k^2 - \Gamma^2)$$

$$2\beta\alpha = k^2 \operatorname{tg} \delta$$

které mají řešení

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k^2 - \Gamma^2 + \sqrt{(k^2 - \Gamma^2)^2 + k^4 \operatorname{tg}^2 \delta}} \quad (2.67)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k^2 \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{k^2 - \Gamma^2 + \sqrt{(k^2 - \Gamma^2)^2 + k^4 \operatorname{tg}^2 \delta}}} \quad (2.68)$$

Je zřejmé, že vlivem ztrátového prostředí dochází ke zvětšení poměrného fázového posunu α , a tím i ke zmenšení fázové rychlosti šíření elektromagnetické vlny, neboť platí

$$v_f = \frac{\omega}{\alpha}$$

Jsou-li však ztráty malé, je změna poměrného posunu oproti bezztrátovému vedení zanedbatelná. Pro $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ platí přibližné vztahy

$$\alpha \approx \sqrt{k^2 - \Gamma^2} \quad (2.69)$$

$$\beta \approx \frac{1}{2} \frac{k^2}{\alpha} \operatorname{tg} \delta \quad (2.70)$$

2.5. VEDENÍ S VLNOU PŘÍČNĚ ELEKTRICKO-MAGNETICKOU (TEM)

V článku 2.1 jsme poznali, že na vedeních, která mají ve svém průřezu dva nebo více vodičů, se může šířit elektromagnetická vlna s vlastnostmi nezávislejšími na rozměrech a tvaru průřezu vedení; vlastnosti této vlny jsou závislé pouze na parametrech prostředí, tj. na μ a ϵ . Povrch vedení je v určitém časovém okamžiku a při $z = konst$ ekvipotenciálou a vlnová rovnice pro funkci příčných souřadnic T_1 se redukuje při $\Gamma = 0$ na Laplaceovu rovnici (2.18)

$$\Delta T_1 = 0$$

Je nutné si uvědomit, že možnost šíření vlny TEM nevylučuje šíření vidů TM a TE, které mají mezní vlnovou délku a všechny ostatní vlastnosti typické pro šíření vln ve vlnovodech. Šíření vlnovodových vidů se však snažíme u těchto vedení zabránit, protože by zkomplikovalo poměry na vedení. Kromě vlny TM nebo TE by se současně na vedení šířila i vlna TEM, která nemá mezní frekvenci.

Protože při šíření vln TEM je při $z = konst$ v určitém časovém okamžiku povrch vedení ekvipotenciálou s potenciálem $V = konst$, je $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ vektor mající směr normální k ekvipotenciále $V = konst$.

V odstavci 1.3.2. jsme poznali, že potenciál lze vyjádřit jako divergenci elektrického nebo magnetického Hertzova vektoru [vztahy (1.42) a (1.54)]. Nebudeme-li zatím rozlišovat druh Hertzova vektoru, lze psát

$$\mathbf{V} = -\text{div } \mathbf{H} \quad (2.71)$$

takže platí

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{H} \quad (2.72)$$

Protože k úplnému určení veličin elektromagnetického pole jsme použili vztahy (1.62) a (1.63)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= k^2 \mathbf{H}^e + \text{grad div } \mathbf{H}^e - j\omega\mu \text{rot } \mathbf{H}^m \\ \mathbf{H} &= k^2 \mathbf{H}^m + \text{grad div } \mathbf{H}^m + j\omega\epsilon \text{rot } \mathbf{H}^e \end{aligned}$$

je zřejmé, že Hertzův vektor ve vztahu (2.72) musí být elektrický Hertzův vektor \mathbf{H}^e . Elektromagnetické pole vln TEM je pouze příčné, a je tedy možné vyjádřit je pomocí Hertzova vektoru \mathbf{H}_T^e výrazy

$$\mathbf{E}_T = \text{grad}_T \text{div } \mathbf{H}_T^e \quad (2.73)$$

$$\mathbf{H}_T = j\omega\epsilon \text{rot } \mathbf{H}_T^e \quad (2.74)$$

Při použití magnetického Hertzova vektoru \mathbf{H}_T^m bychom nedostali fyzikálně možné řešení.

2.5.1. Parametry vedení

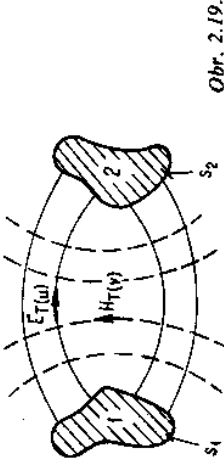
Mějme bezstrátové dvou vodičové vedení podle obr. 2.19. Charakteristickou impedanci určíme ze vztahu

$$Z = \frac{E_T(u)}{H_T(v)}$$

příčměň složky elektromagnetického pole $E_T(u)$ a $H_T(v)$ vyjádříme podle vztahů (2.73) a (2.74) výrazy

$$E_T(u) = \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{u} = (\text{grad}_T \text{div } \mathbf{H}_T^e) \cdot \mathbf{u}$$

$$H_T(v) = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{v} = j\omega\epsilon \text{rot } \mathbf{H}_T^e \cdot \mathbf{v} = j\omega\epsilon (\text{grad } \mathbf{H}_T^e \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$$



Obr. 2.19.

neboli

$$E_T(u) = \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \frac{\partial T_2}{\partial z} = -jkT_2 \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \quad (2.75)$$

$$H_T(v) = j\omega\epsilon \text{grad } \mathbf{H}_T^e \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{v}) = -j\omega\epsilon \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} T_2 \quad (2.76)$$

(neboť pro postupnou vlnu je $T_2 = C e^{-jkz}$ a $\mathbf{z} \times \mathbf{v} = -\mathbf{u}$).

Pro charakteristickou impedanci vedení dostaneme pak výraz

$$Z = \frac{k}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.77)$$

Je zřejmé, že charakteristická impedance vedení s vlnou TEM závisí pouze na parametrech μ a ϵ , ale nezávisí na příčných rozměrech vedení. Aby impedance vedení byla závislá na jeho rozměrech, je třeba vyjít z jiné definice impedance než $E_T(u)/H_T(v)$. Impedanci vedení je např. možné vyjádřit výrazem

$$Z = \frac{U}{I} \quad (2.78)$$

kde U je napětí mezi vodiči,

I proud procházející vodičem.

Takto definovanou impedanci budeme označovat jako *vlnovou impedanci*. Napětí U a proud I vyjádříme pomocí vztahů

$$U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.79)$$

$$I = \oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.80)$$

(Vzhledem k tomu, že i u vlnovodů je obvykle možné určit příčné napětí a podélný proud, můžeme i u vlnovodů určit vlnovou impedanci.)

Velikost vlnové impedance je možné určit též jinými způsoby. V praxi se může vyskytnout problém určit vlnovou impedanci vedení, u kterého je analytické vyjádření elektromagnetického pole obtížné. V takových případech je výhodné určit vlnovou impedanci ne z napětí a proudu, ale z kapacity mezi vodiči.

Elektromagnetické pole postupně vlny na vedení lze vyjádřit zjednodušeným zápisem

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{OT} e^{-jkz} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H}_{OT} e^{-jkz} \quad (2.82)$$

přičemž platí

$$\mathbf{E}_{OT} = -jkC \text{ grad } T_1$$

$$\mathbf{H}_{OT} = j\omega\epsilon C(\text{grad } T_1 \times \mathbf{z})$$

Hustotu povrchového náboje na vodičích vedení podle obr. 2.19 můžeme určit pomocí normálové složky intenzity elektrického pole

$$\sigma = \epsilon(\mathbf{E}_{OT} \cdot \mathbf{n})$$

kde ϵ je permitivita prostředí obklopujícího vodič,

\mathbf{n} - jednotkový vektor ve směru normály k povrchu vodiče.

Protože směr normály \mathbf{n} je totožný se souřadnicí u , platí

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}$$

takže

$$\mathbf{E}_{OT} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_{OT} \cdot \mathbf{u} = E_{OT}(u)$$

Celkový náboj na jednotku délky vodiče vyjádříme podle Gaussovy věty integrálem

$$Q_0 = \epsilon \int_{S_1} (\mathbf{E}_{OT} \cdot \mathbf{n}) dS = \epsilon \int_{s_1}^1 (\mathbf{E}_{OT} \cdot \mathbf{u}) ds dz = \epsilon \int_{s_1}^1 E_{OT}(u) ds \quad (2.83)$$

kde S_1 je plocha povrchu vodiče I dlouhého l m,

s_1 - obrysová křivka průřezu vodiče I ,

neboť směr jednotkového vektoru \mathbf{n} (ve směru normály) je totožný s jednotkovým vektorem \mathbf{u} (ve směru souřadnice u).

Proud procházející vodičem l určíme podle Ampérova zákona

$$I = \oint_{s_1} \mathbf{H}_{OT} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{s_1} (\mathbf{H}_{OT} \cdot \mathbf{v}) ds = \oint_{s_1} H_{OT}(v) ds \quad (2.84)$$

neboť směr jednotkového vektoru \mathbf{v} souřadnice v je totožný se směrem obrysově křivky vodiče I .

Protože charakteristická impedace vedení je

$$Z = \frac{E_T(u)}{H_T(v)} = \frac{E_{OT}(u)}{H_{OT}(v)}$$

lze psát

$$H_{OT}(v) = \frac{1}{Z} E_{OT}(u)$$

Proud vodiče I můžeme pak vyjádřit výrazem

$$I = \frac{1}{Z} \oint_{s_1} E_{OT}(u) ds$$

takže za použití vztahu (2.83) lze psát

$$I = \frac{1}{Z} \frac{Q_0}{\epsilon}$$

Výraz pro vlnovou impedanci můžeme pak napsat ve tvaru

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{U}{\frac{1}{Z} \frac{Q_0}{\epsilon}}$$

neboli

$$Z_0 = \frac{Z\epsilon}{C_0} \quad (2.85)$$

neboť platí

$$\frac{Q_0}{U} = C_0$$

Z toho je zřejmé, že k určení vlnové impedance stačí znát kapacitu vedení. Tu můžeme určit kteroukoliv metodou, používanou při vyšetřování elektrostatických polí.

Kdybychom se zajímali o indukčnost vedení, je možné ji určit ze vztahu

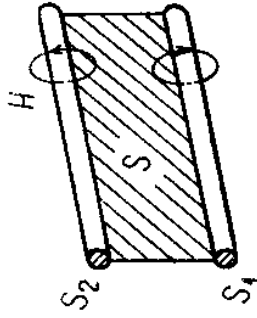
$$L_0 = \frac{\Phi_0}{I}$$

kde L_0 je indukčnost vedení jednotkové délky,

Φ_0 - magnetický tok mezi dvěma vodiči při jednotkové délce vedení a při proudu I ,

I - proud procházející vodičem.

Magnetický tok Φ_0 je podle obr. 2.20



Obr. 2.20.

$$\Phi_0 = \mu \int_S \mathbf{H}_T \cdot d\mathbf{S} = \mu \int_{s_1}^{s_2} \int_0^1 H_{\text{OT}}(v) ds dz$$

Za použití vztahu

$$H_{\text{OT}}(v) = \frac{1}{Z} E_{\text{OT}}(u)$$

lze psát

$$\Phi_0 = \frac{\mu}{Z} \int_{s_1}^{s_2} E_{\text{OT}}(u) ds = \frac{\mu U}{Z}$$

Indukčnost vedení jednotkové délky můžeme pak vyjádřit výrazem

$$L_0 = \frac{\mu}{Z} \frac{U}{I} = \frac{\mu Z_0}{Z} \quad (2.86)$$

kde jsme použili vztah pro vlnovou impedanci $Z_0 = U/I$.

Z výrazů (2.85) a (2.86) je dále zřejmé, že platí

$$L_0 C_0 = \mu \epsilon = \frac{1}{v^2} \quad (2.87)$$

a

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_0 \quad (2.88)$$

což jsou vztahy, které můžeme získat též jako výsledek řešení tzv. telegrafních rovnic pro bezeztrátové vedení.

2.5.2. Výkon přenášený vedením s vlnou příčně elektrickomagnetickou

Výkon přenášený vedením s vlnou TEM můžeme určit stejně jako u vlnovodů integrací Poyntingova vektoru

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS$$

Podle článku 2.5 lze posuzovat vlny TEM jako zvláštní případ vln TM, a proto i pro určení přenášeného výkonu můžeme použít výraz odvozený pro vlny TM, tj.

$$P = \frac{1}{2} C^2 Z_0^2 \epsilon^2 \int_S |\operatorname{grad} T_1|^2 dS$$

Výkon, přenášený vedením, můžeme však určit u vln TEM i jinými způsoby. V odstavci 2.2.4 jsme vyjádřili přenášený výkon součinem energie elektromagnetického pole a rychlosti šíření této energie, tj.

$$P = W v_{\text{sk}}$$

U vln TEM, šířících se v bezeztrátovém prostředí platí $v_{\text{sk}} = v_f = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, takže

$$P = \frac{W}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

kde W je celková energie elektromagnetického pole ve vedení jednotkové délky.

Známe-li kapacitu, popř. indukčnost vedení, můžeme vyjádřit celkovou energii výrazy

$$W = \frac{1}{2} C |U|^2 \quad (2.89)$$

$$W = \frac{1}{2} L |I|^2 \quad (2.90)$$

takže za použití vztahů (2.85) a (2.86) dostaneme po úpravě

$$P = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{Z_0} \quad (2.91)$$

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 Z_0 \quad (2.92)$$

$$P = \frac{1}{2} UI^* \quad (2.93)$$

2.5.3. Poměrný útlum vedení s vlnou příčně elektricko-magnetickou

Pro výpočet poměrného útlumu vedení jsme odvodili v odst. 2.3.2 výraz

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P}$$

kde P_z je výkon ztracený v nedokonale vodivém vedení jednotkové délky, P výkon přenášený vedením.

K určení výkonu ztraceného v nedokonale vodivém vedení bychom mohli použít výraz odvozený pro vlny TM. U vln TEM je však jednodušší vyjádřit výkon ztracený nedokonalou vodivostí vodičů pomocí vlnového proudu, procházejícího vodičem a vlnového odporu

$$P_z = \frac{1}{2} R_{\text{vf}} |I|^2 \quad (2.94)$$

kde R_{vf} je vlnový odpor vodiče.

Použijeme-li k vyjádření výkonu přenášeného vedením výraz (2.92)

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 Z_0$$

je možné určit poměrný útlum velmi jednoduchým výrazem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{R_{\text{vf}}}{Z_0} \quad (2.95)$$

2.6. DVOUVODIČOVÉ VEDENÍ S ROZLOŽENÝMI PARAMETRY L_0, C_0, R_0, G_0

V předcházejících odstavcích jsme ukázali souvislost mezi elektromagnetickým polem a parametry vedení C_0, L_0 . Vztahy mezi těmito veličinami můžeme též vyjádřit pomocí výrazů pro energii. Pro úsek vedení jednotkové délky $l = 1$ m platí

$$\frac{1}{2} L_0 |I|^2 = \frac{1}{2} \mu \int_V |H|^2 dV = \frac{1}{2} \mu \int_S \int_0^1 |H|^2 dS dz$$

$$\frac{1}{2} C_0 |U|^2 = \frac{1}{2} \epsilon \int_V |E|^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon \int_S \int_0^1 |E|^2 dS dz$$

kde S je plocha průřezu vedení.

Poměrnou indukčnost L_0 a poměrnou kapacitu C_0 vedení můžeme tedy vyjádřit výrazy

$$L_0 = \frac{\mu}{|I|^2} \int_S |H|^2 dS \quad (H \cdot m^{-1}) \quad (2.96)$$

$$C_0 = \frac{\epsilon}{|U|^2} \int_S |E|^2 dS \quad (F \cdot m^{-1}) \quad (2.97)$$

U ztrátového vedení můžeme analogicky vyjádřit veličiny R_0 a G_0 z rovnosti ztracených výkonů

$$\frac{1}{2} R_0 |I|^2 = \frac{1}{2} e_{\text{vf}} \int_{S_1} |H|^2 dS = \frac{1}{2} e_{\text{vf}} \int_0^1 \int_S |H|^2 dS dz$$

$$\frac{1}{2} G_0 |U|^2 = \frac{1}{2} \sigma \int_V |E|^2 dV = \frac{1}{2} \sigma \int_0^1 \int_S |E|^2 dS dz$$

kde S_1 je plocha povrchu vedení,

s obrysová křivka příčného průřezu vedení,

S plocha průřezu vedení.

Činný odpor R_0 a vodivost G_0 na jednotku délky vedení můžeme tedy vyjádřit výrazy

$$R_0 = \frac{e_{\text{vf}}}{|I|^2} \oint_S |H|^2 ds \quad (\Omega \cdot m^{-1}) \quad (2.98)$$

$$G_0 = \frac{\sigma}{|U|^2} \int_S |E|^2 ds \quad (S \cdot m^{-1}) \quad (2.99)$$

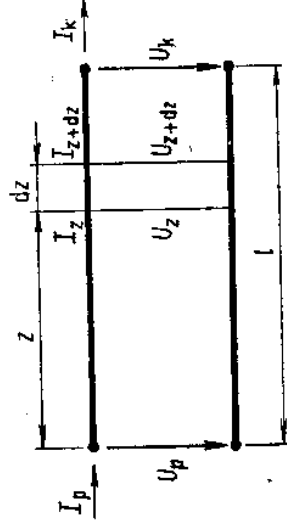
2.6.1. Telegrafní rovnice vedení

Předpokládejme, že dvou vodičové vedení délky $l = 1$ m (obr. 2.21) má parametry L_0, C_0, R_0 a G_0 . Úbytek napětí na vedení elementární délky dz je pro případ harmonického časového průběhu

$$-dU = I(R_0 + j\omega L_0) dz$$

a podobně platí pro úbytek proudu

$$-dI = U(G_0 + j\omega C_0) dz$$



Obr. 2.21. Napětí a proudy na ztrátovém dvou vodičovém vedení

Tyto rovnice můžeme napsat ve tvaru

$$-\frac{dU}{dz} = (R_0 + j\omega L_0) I \quad (2.100)$$

$$-\frac{dI}{dz} = (G_0 + j\omega C_0) U \quad (2.101)$$

Derivaci a úpravou obou rovnic dostaneme tzv. telegrafní rovnice

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) \cdot U \quad (2.102)$$

$$\frac{d^2 I}{dz^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) \cdot I \quad (2.103)$$

Obecné řešení rovnice pro napětí je

$$U = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z} \quad (2.104)$$

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \quad (2.105)$$

kde γ je součinitel přenosu.

Obecné řešení pro proud získáme z rovnice (2.100) dosazením derivace rovnice (2.104)

$$I = \frac{\gamma}{R_0 + j\omega L_0} (C_1 e^{-\gamma z} - C_2 e^{\gamma z}) \quad (2.106)$$

$$I = \sqrt{\frac{G_0 + j\omega C_0}{R_0 + j\omega L_0}} (C_1 e^{-\gamma z} - C_2 e^{\gamma z})$$

popř.

$$I = \frac{1}{Z_0} (C_1 e^{-\gamma z} - C_2 e^{\gamma z}) \quad (2.107)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (2.108)$$

kde Z_0 je *vlnová impedance vedení*.

Předpokládáme, že na počátku vedení, tj. pro $z = 0$, platí, že $U = U_p$, $I = I_p$. Dosazením těchto podmínek do (2.104) a (2.107) dostaneme

$$U_p = C_1 + C_2$$

$$I_p = \frac{1}{Z_0} (C_1 - C_2)$$

takže integrační konstanty jsou

$$C_1 = \frac{1}{2} (U_p + Z_0 I_p)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (U_p - Z_0 I_p)$$

Tyto konstanty dosadíme opět do rovnic (2.104) a (2.107) a po úpravě dostaneme

$$U = \frac{1}{2} (e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) U_p - \frac{1}{2} Z_0 I_p (e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})$$

neboli

$$U = U_p \cosh \gamma z - Z_0 I_p \sinh \gamma z \quad (2.109)$$

a podobně

$$I = I_p \cosh \gamma z - \frac{U_p}{Z_0} \sinh \gamma z \quad (2.110)$$

Vztahy (2.109) a (2.110) umožňují určit proud i a napětí u v libovolném místě vedení, známe-li napětí U_p a proud I_p na počátku vedení.

Vyjádříme nyní napětí a proud v obecném místě vedení pomocí známých hodnot napětí a proudu na konci vedení. Předpokládáme, že pro $z = l$ platí $U = U_k$, $I = I_k$. Dosadíme-li tyto podmínky do vztahů (2.104) a (2.107), dostaneme

$$U_k = C_1 e^{-\gamma l} + C_2 e^{\gamma l}$$

$$I_k = \frac{1}{Z_0} (C_1 e^{-\gamma l} - C_2 e^{\gamma l})$$

takže integrační konstanty jsou

$$C_1 = \frac{1}{2} (U_k + Z_0 I_k) e^{\gamma l} \quad (2.111)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (U_k - Z_0 I_k) e^{-\gamma l} \quad (2.112)$$

Tyto konstanty dosadíme opět do rovnic (2.104) a (2.107), takže po úpravě dostaneme

$$U = U_k \cosh \gamma(l - z) + I_k Z_0 \sinh \gamma(l - z) \quad (2.113)$$

$$I = I_k \cosh \gamma(l - z) + \frac{U_k}{Z_0} \sinh \gamma(l - z) \quad (2.114)$$

Vztahy (2.113) a (2.114) umožňují určit napětí a proud v libovolném místě vedení, známe-li napětí U_k a proud I_k na konci vedení.

Vyjádříme-li napětí a proud na počátku vedení ($U = U_p$; $I = I_p$ pro $z = 0$) pomocí napětí a proudu na konci vedení, dostaneme z rovnic (2.113) a (2.114)

$$U_p = U_k \cosh \gamma l + I_k Z_0 \sinh \gamma l \quad (2.115)$$

$$I_p = I_k \cosh \gamma l + \frac{U_k}{Z_0} \sinh \gamma l \quad (2.116)$$

2.6.2. Impedanční poměry na vedení

Při aplikacích v praxi je vyjadřování poměrů na vedení pomocí napětí a proudu většinou nevýhodné, což vyplývá z obtíží, které vznikají při jejich experimentálním určování. Výhodnější je vyjadřovat poměry na vedení pomocí impedancí.

Definujeme-li impedance jako poměr napětí k proudu, je impedance na vstupu vedení

$$Z_p = U_p / I_p$$

a impedance na konci vedení

$$Z_k = U_k / I_k$$

Z rovnic (2.115) a (2.116) dostaneme po úpravě

$$Z_p = Z_0 \frac{Z_k + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_k \tanh \gamma l} \quad (2.117)$$

Tento vztah umožňuje určit vstupní impedanci vedení s délkou l a s vlnovou impedancí Z_0 , které je zakončeno impedancí Z_k .

Všechny vztahy, uvedené v tomto odstavci, byly odvozeny pro dvou vodičové vedení, které může přenášet vlnu TEM. Jak poznáme v kap. 9, jistá ekvivalentní napětí a proudy je možné zavést i u vedení přenášejících vlny TM nebo TE. Z obvodového hlediska je možné nahradit šíření každého vidu TM nebo TE ve vlnovodu určitým ekvivalentním dvou vodičovým vedením, přičemž počet těchto vedení je roven počtu přenášejících vidů. Pro tato ekvivalentní vedení pak rovněž platí uvedené vztahy.

2.6.3. Transformace impedance na vedení

Ukážeme nyní, že se na bezztrátovém vedení impedance transformuje na tutéž hodnotu impedance po vzdálenostech $l = n\lambda_v/2$, kde n je celé číslo. K tomu účelu upravíme vztah (2.117) tak, že do něj dosadíme $\gamma = j\alpha$, tj. $\tanh \gamma l = \tanh (j\alpha l) = j \operatorname{tg} \alpha l$

$$Z_p = Z_0 \frac{Z_k + jZ_0 \operatorname{tg} \alpha l}{Z_0 + jZ_k \operatorname{tg} \alpha l} \quad (2.118)$$

kde $\alpha = 2\pi/\lambda_v$.

Je-li $l = n\lambda_v/2$, pak $\alpha l = n\pi$. Tangenta je periodická funkce s periodou π , takže

$$Z_p = Z_k$$

Vedení délky $l = n\lambda_v/2$ se tedy chová jako transformátor impedancí s poměrem $1 : 1$.

Transformační vlastnosti vedení zvlášť vyniknou při extrémních hodnotách zátěže, např. je-li vedení na konci zkratované nebo otevřené. Předpokládejme vedení na konci zkratované, tj. $Z_k = 0$. Vstupní impedance tohoto vedení je

$$Z_{\text{vst}} = Z_p = jZ_0 \operatorname{tg} \alpha l \quad (2.119)$$

Z tohoto vztahu bezprostředně vyplývá, že úsekem vedení na konci zkratovaného lze realizovat libovolnou reaktanci $Z_p = jX_p$ nebo admittanci $Y_p = jB_p$ v mezích od $-j\infty$ do $+j\infty$ podle toho, jak se zvolí délka úseku l . Pomocí úseku vedení na konci otevřeného můžeme rovněž realizovat reaktance jX_p nebo susceptance jB_p , avšak tento typ úseku vedení se v praxi používá zřídka pro možnost vyzarování otevřeného konce vedení (zejména je-li to vedení souosé nebo vlnovodové).

2.6.4. Činitel odrazu na vedení

V předcházejícím výkladu bylo řečeno, že k určování poměrů na vedení je výhodnější používat impedanci než napětí a proud se zřetelem k jejich obtížnému měření. K určení impedance bývá nutné znát činitel odrazu na vedení. Činitel odrazu definujeme jako poměr komplexních amplitud napětí (proudu) vlny odražené a vlny přímé, tedy

$$\varrho_E = \frac{U^-}{U^+}; \quad \varrho_H = \frac{I^-}{I^+} \quad (2.120)$$

kde horními indexy + jsou označeny vlny přímé a horními indexy - vlny odražené. Z rovnic (2.104) a (2.106) vyplývá

$$\varrho_E = -\varrho_H$$

Napětí a proudový činitel odrazu se liší od sebe pouze znaménkem. V dalším textu budeme používat pouze *napětíový činitel odrazu* $\varrho = \varrho_E$.

Vyjádříme činitel odrazu v libovolném místě vedení pomocí činitele odrazu

na konci vedení. K tomu účelu dosadíme integrační konstanty (2.111) a (2.112) do (2.104) a dostaneme

$$U = \frac{1}{2}(U_k + Z_0 I_0) e^{j\omega(t-z)} + \frac{1}{2}(U_k - Z_0 I_0) e^{-j\omega(t-z)} \quad (2.121)$$

kde vlnu přímou znamená člen

$$U^+ = \frac{1}{2}(U_k + Z_0 I_0) e^{j\omega(t-z)} \quad (2.122)$$

a vlnu odraženou člen

$$U^- = \frac{1}{2}(U_k - Z_0 I_0) e^{-j\omega(t-z)} \quad (2.123)$$

Na konci vedení je $z = l$, $U = U_0$, $\varrho = \varrho_0$, takže

$$U_0^+ = \frac{1}{2}(U_k + Z_0 I_0) \quad (2.124)$$

$$U_0^- = \frac{1}{2}(U_k - Z_0 I_0) \quad (2.125)$$

a tedy

$$\varrho_0 = \frac{U_k - Z_0 I_0}{U_k + Z_0 I_0} = \frac{Z_k - Z_0}{Z_k + Z_0} \quad (2.126)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že činitelem odrazu ϱ_0 je určen charakter zátěže Z_k a obráceně. Výrazy (2.124) a (2.125) dosadíme do (2.121) a dostaneme

$$U = U_0^+ e^{j\omega(t-z)} + U_0^- e^{-j\omega(t-z)} \quad (2.127)$$

Konečný tvar vzorce pro činitel odrazu pak je

$$\varrho = \frac{U^-}{U^+} = \varrho_0 e^{-2j\gamma y} \quad (2.128)$$

kde $y = l - z$ je vzdálenost měřena od zátěže směrem ke zdroji.

Pomocí činitele odrazu lze posoudit situaci na vedení. Je-li $\varrho = 0$, není na vedení vlna odražená, tedy $U^- = 0$. Z (2.126) vyplývá, že činitel odrazu je nulový, když $Z_k = Z_0$, tj. když je vedení zakončeno svou vlnovou impedancí. Říkáme, že *zátěž je přizpůsobena vedení*.

Pro bezztrátové vedení je $\gamma = j\alpha$ a činitel odrazu u bezztrátového vedení je

$$\varrho = \varrho_0 e^{-2j\alpha y} \quad (2.129)$$

Vlnová impedance je v tomto případě reálná a pro přizpůsobování musí opět platit $Z_k = Z_0$, tj. zátěž musí mít charakter činného odporu.

Není-li splněna podmínka $Z_k = Z_0$, vznikne na vedení odražená vlna, která se skládá s vlnou přímou a výsledkem této superpozice je vznik *stojatého vlnění*.

2.7. VLASTNOSTI VLNOVODU PRI UHLOVE FREKVENCI NIŽŠÍ NEŽ KRITICKÉ

V článku 2.1 jsme poznali, že pro součinitel přenosu γ platí

$$\gamma = \pm \sqrt{\Gamma^2 - k^2}$$

neboli

$$\gamma = \pm k \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - 1}$$

kde λ je délka vlny,

λ_m mezní délka vlny daného vlnovodu.

Vlna ve vlnovodu se šíří, je-li

$$\lambda < \lambda_m; \quad \omega > \omega_m$$

takže

$$\gamma = \pm jk \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2} = \pm j\alpha$$

Platí-li však

$$\lambda > \lambda_m$$

potom je součinitel přenosu γ reálný a elektromagnetické pole ve vlnovodu nemá charakter šířící se vlny, ale monotónní průběh. Funkci podélné souřadnice z můžeme pro tento případ vyjádřit výrazem (2.14)

$$T_2 = C_1 e^{jz} + C_2 e^{-jz}$$

Pro elektromagnetické pole vln TM platí rovnice (1.64) a (1.65)

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^c + \text{grad div } \Pi_z^c$$

$$\mathbf{H} = j\omega \varepsilon \text{rot } \Pi_z^c = j\omega \varepsilon (\text{grad } \Pi_z^c \times \mathbf{z})$$

takže při použití obecných příčných souřadnic u, v dostaneme po úpravě pro složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$E_T(u) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \frac{\partial T_2}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} (C_1 e^{jz} - C_2 e^{-jz})$$

$$E_T(v) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \frac{\partial T_2}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} (C_1 e^{jz} - C_2 e^{-jz})$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = (k^2 + \gamma^2) T_1 (C_1 e^{jz} + C_2 e^{-jz})$$

$$H_T(u) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = j\omega \varepsilon \frac{\partial T_1}{h_u \partial v} (C_1 e^{jz} + C_2 e^{-jz}) \quad (2.130)$$

$$H_T(v) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} = -j\omega \varepsilon \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} (C_1 e^{jz} + C_2 e^{-jz})$$

$$H_z = 0$$

Zavedme podle (2.120) činitel odrazu

$$\rho = \frac{U^-}{U^+} = \frac{E^-}{E^+}$$

neboť

$$U = \int_l E \, dl$$

takže z rovnice (2.130) vyplývá

$$\rho = -\frac{C_1}{C_2} e^{-2jz}$$

(2.131)

Na konci vedení, tj. při $z = l$ je činitel odrazu ρ_0

$$\rho_0 = -\frac{C_1}{C_2} e^{-2jz}$$

takže platí

$$-\frac{C_1}{C_2} = \rho_0 e^{-2jz}$$

a tedy

$$\rho = \rho_0 e^{-2jz(1-z)} \quad (2.132)$$

Rovnice (2.130) můžeme s použitím vztahu pro ρ napsat ve tvaru

$$E_T(u) = -\gamma \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} C_2 e^{-jz} (1 + \rho)$$

$$E_T(v) = -\gamma \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} C_2 e^{-jz} (1 + \rho)$$

$$E_z = (k^2 + \gamma^2) T_1 C_2 e^{-jz} (1 - \rho)$$

$$H_T(u) = j\omega \varepsilon \frac{\partial T_1}{h_u \partial v} C_2 e^{-jz} (1 - \rho)$$

$$H_T(v) = -j\omega \varepsilon \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} C_2 e^{-jz} (1 - \rho)$$

Protože platí

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - 1}; \quad \omega \varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

je zřejmé, že při $\lambda \gg \lambda_m$ je $\gamma \gg \omega \varepsilon$. Z toho pak vyplývá, že u elektromagnetického pole převládá podélná složka intenzity elektrického pole E_z . Je-li činitel odrazu ve vztazích (2.133) nulový, jsou příčné složky intenzity elektrického a magnetického pole E_T a H_T oproti sobě fázově posunuty o 90° , takže přenos energie vlnovodem není možný. Je-li však imaginární složka činitele odrazu nenulová, je možný

určitý přenos energie i tímto *podkritickým vlnovodem* (tj. vlnovodem, pro který platí $\lambda > \lambda_m$). Pro výkon přenášený vlnovodem platí vztah (2.30)

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [E_T(u) H_T^*(v) - E_T(v) H_T^*(u)] dS$$

takže lze psát

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -j\omega\epsilon\gamma(1+\varrho)(1-\varrho^*) |C_2|^2 e^{-2\gamma z} \int_S \left[\left(\frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \right)^2 \right] dS \right\}$$

Činitele odrazu je komplexní výraz a platí

$$\varrho = \operatorname{Re} [\varrho] + j \operatorname{Im} [\varrho]; \quad \varrho^* = \operatorname{Re} [\varrho] - j \operatorname{Im} [\varrho]$$

takže přenášený výkon je

$$P = \omega\epsilon\gamma |C_2|^2 \operatorname{Im} [\varrho] e^{-2\gamma z} \int_S \left[\left(\frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \right)^2 \right] dS \quad (2.134)$$

Označíme-li P_1 výkon pro $z = l_1$ a P_2 výkon pro $z = l_2$, je

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{2\gamma l}$$

kde $l = l_1 - l_2$, takže útlum vedení délky l můžeme vyjádřit výrazem

$$L = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = \gamma l \quad (2.135)$$

popř. v decibelech

$$L = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \doteq 8,68\gamma l \quad (\text{dB}) \quad (2.136)$$

Je zřejmé, že útlum závisí lineárně na délce l , přičemž téměř nezávisí na frekvenci (pokud platí $\lambda \gg \lambda_m$). Proto je výhodné použít tyto vlnovody ke konstrukci tzv. *mezních zesilovačů*, které bývají označovány též jako reaktanční, popř. odrazové.



Obr. 2.22. Schematické znázornění proměnného zesilovače (TM₀₁₁)

Princip konstrukce mezního proměnného zesilovače je znázorněn na obr. 2.22. Mezní zesilovač je vytvořen úsekem kruhového podkritického vlnovodu, do něhož z obou stran zasahuje koaxiální vedení. Elektromagnetické pole ve vlnovodu odpovídá vidu TM₀₁₁. Útlum se mění posuvem výstupního koaxiálního vedení.

U vln příčné elektrických TE je elektromagnetické pole určeno rovnicemi

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \operatorname{rot} \mathbf{H}_z^m = -j\omega\mu (\operatorname{grad} \mathbf{H}_z^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{H}_z^m + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H}_z^m$$

takže podobně jako u vln TM můžeme vyjádřit složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$E_T(u) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = -j\omega\mu \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z})$$

$$E_T(v) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = j\omega\mu \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z})$$

$$H_T(u) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \gamma \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z}) \quad (2.137)$$

$$H_T(v) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} = \gamma \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} (C_1 e^{\gamma z} - C_2 e^{-\gamma z})$$

$$H_z = (k^2 + \gamma^2) T_1 (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z})$$

Zavedeme-li do těchto rovnic činitele odrazu stejným způsobem jako u vln příčné magnetických, můžeme podle (2.120) psát

$$\varrho = \frac{C_1}{C_2} e^{2\gamma z}$$

takže

$$E_T(u) = -j\omega\mu \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} C_2 e^{-\gamma z} (1 + \varrho)$$

$$E_T(v) = j\omega\mu \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} C_2 e^{-\gamma z} (1 + \varrho)$$

$$H_T(u) = -\gamma \frac{\partial T_1}{h_u \partial u} C_2 e^{-\gamma z} (1 - \varrho) \quad (2.138)$$

$$H_T(v) = -\gamma \frac{\partial T_1}{h_v \partial v} C_2 e^{-\gamma z} (1 - \varrho)$$

$$H_z = (k^2 + \gamma^2) T_1 C_2 e^{-\gamma z} (1 + \varrho)$$

Protože platí $\gamma \approx 2\pi/\lambda_m$ a $\omega\mu = 2\pi\sqrt{\mu/\epsilon}/\lambda$, je zřejmé, že při $\lambda \gg \lambda_m$ je $\gamma \gg \omega\mu$. Z uvedených rovnic pak vyplývá, že u elektromagnetického pole převládá podélná složka intenzity magnetického pole H_z .

Je-li činitele odrazu ve vztazích (2.138) nulový, jsou příčné složky intenzit elektrického a magnetického pole E_T , H_T oproti sobě fázově posunuty o 90° , takže přenos energie vlnovodem není možný. Je-li však imaginární složka činitele odrazu ne nulová, je možný určitý přenos energie i tímto podkritickým vlnovodem (tj. při $\lambda \gg \lambda_m$).

Výkon přenášený vlnovodem je

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [E_T(u) H_T^*(v) - E_T(v) H_T^*(u)] dS$$

takže za použití vztahů (2.138) dostaneme

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ j\omega\mu\gamma |C_2|^2 e^{-2\gamma l} (1 + \varrho)(1 - \varrho^*) \int_S \left[\left(\frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \right)^2 \right] dS \right\}$$

Dosadíme-li

$$\varrho = \operatorname{Re} [\varrho] + j \operatorname{Im} [\varrho]; \quad \varrho^* = \operatorname{Re} [\varrho] - j \operatorname{Im} [\varrho]$$

je

$$P = \omega\mu\gamma |C_2|^2 \operatorname{Im} [\varrho] e^{-2\gamma l} \int_S \left[\left(\frac{\partial T_1}{h_v \partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{h_u \partial u} \right)^2 \right] dS \quad (2.139)$$

Jestliže při $z = l_1$ je výkon P_1 a při $z = l_2$ výkon P_2 , lze psát

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{2\gamma l}$$

kde $l = l_1 - l_2$, takže útlum vedení délky l můžeme opět vyjádřit vztahem

$$L = \gamma l \quad (2.140)$$

nebo (v decibelech)

$$L \approx 8,68\gamma l \quad (\text{dB}) \quad (2.141)$$

Princip konstrukce proměnného zeslabovače je stejný jako u vln TM, vazba však musí být magnetická. Schematické zobrazení možného provedení zeslabovače je na obr. 2.23, kde vazba z koaxiálního vedení do kruhového vlnovodu je provedena smyčkou. Elektromagnetické pole ve vlnovodu odpovídá pak vidu TE₁₁.



Obr. 2.23. Schematické zobrazení proměnného zeslabovače (TE₁₁)

Velikost součinitele γ určíme ze vztahu

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_m} \sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^2 - 1}$$

Je třeba poznamenat, že rovnice pro určení útlumu platí pouze pro vyjádření změny útlumu v závislosti na změně délky vedení a není možné je použít pro určení celkového útlumu (od nulové, počáteční délky zeslabovače). Hlavní důvod je v tom, že na přechodu mezi přenosovým vedením a podkritickým vlnovodem vzniká složitější rozložení elektromagnetického pole (vlivem vyšších vidů), které v této jednoduché úvaze nerespектуjeme.

Podkritické vlnovody lze použít i k realizaci filtrů. Zmenšíme-li např. rozměry obdélníkového vlnovodu přenášejícího dominantní vid TE₁₀ tak, aby se elektromagnetická vlna nemohla šířit, je charakteristická impedance tohoto vlnovodu

imaginární a má charakter indukčnosti, neboť podle (2.26) platí

$$Z = \frac{-j\omega\mu T_2}{\frac{\partial T_2}{\partial z}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

Kombinací takového úseku vedení s kapacitní reaktancí (tvořenou např. kapacitním kolíkem) můžeme realizovat rezonanční obvod. Zařazením několika rezonančních vlnodů za sebou lze zkonstruovat filtr požadovaných vlastností. V porovnání s filtry tvořenými klasickými rezonátory mohou mít tyto filtry podstatně menší rozměry.

Literatura ke kapitole 2

- [1] Kvasil, B.: Theoretické základy techniky centimetrových vln. Praha, SNTL 1957.
- [2] Vajnsťejn, L. A.: Elektromagnitnyje volny. Moskva, Sovětskoje radio 1957.
- [3] Collin, R. E.: Foundations for Microwave Engineering. New York, Mc Graw-Hill 1966.
- [4] Tysl, V.: Obvody a technika velmi vysokých kmitočtů I. Skriptum. Praha, Ediční středisko ČVUT 1982.
- [5] Růžička, V.: Punčochář, J.: Teorie obvodů V. Skriptum FE VUT. Praha, SNTL 1974.
- [6] Waldron R. A.: Theory of guided electromagnetic waves. London, Van Nostrand 1970.

3. Mikrovlnná vedení nejčastěji používaná v technické praxi

Až dosud jsme předpokládali mikrovlnná vedení libovolných, zcela obecných průřezů, pro která jsme odvodili všechny charakteristické vlastnosti v závislosti na funkci příčných souřadnic T_1 a na hodnotě konstanty příčných souřadnic F . Výsledky získané pro vedení obecného průřezu budeme v této kapitole aplikovat na ta vedení, která mají pro praxi největší význam.

3.1. VLNODOV OBDĚLNÍKOVÉHO PRŮŘEZU A JEHO VLASTNOSTI

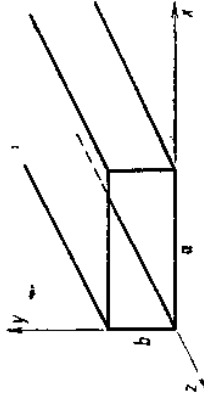
Nejvíce používaným vlnodovým vedením je *vlnod obdélníkového průřezu* (obr. 3.1). Jak poznáme v dalším, je to zejména proto, že má výhodné přenosové vlastnosti, že základní vid šíření má jednoduché a jednoznačné geometrické rozložení elektromagnetického pole a že z úseků obdélníkových vlnodů lze poměrně snadno sestavit složitější mikrovlnné obvody (*H*-brány).

Vlnovou rovnici

$$\Delta T_1 + F^2 T_1 = 0$$

budeme řešit v pravouhlých souřadnicích vzhledem k tomu, že pak je snadné splnit okrajové podmínky. Předpokládáme, že funkci T_1 lze vyjádřit součinem funkcí X a Y , přičemž funkce X je závislá pouze na souřadnici x a funkce Y je závislá pouze na souřadnici y . Jestliže tedy platí

$$T_1 = XY$$



Obr. 3.1. Vlnod obdélníkového průřezu

dostaneme po dosazení tohoto vztahu do vlnové rovnice a po úpravě rovnice

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + F^2 = 0 \quad (3.1)$$

Vzhledem k tomu, že $F = konst$, musí být i ostatní členy této rovnice rovny konstantám. Pro další řešení je výhodné, zvolíme-li tyto konstanty tak, aby platilo

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\xi^2 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\eta^2 \quad (3.3)$$

Řešení diferenciálních rovnic (3.2) a (3.3) můžeme tedy psát ve tvaru

$$X = C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x \quad (3.4)$$

$$Y = C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y \quad (3.5)$$

přičemž platí

$$F^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (3.6)$$

Funkci příčných souřadnic T_1 lze pak vyjádřit ve tvaru

$$T_1 = (C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x)(C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y) \quad (3.7)$$

3.1.1. Vlny příčně magnetické (TM, E) ve vlnododu obdélníkového průřezu

U vln příčně magnetických musí být splněna okrajová podmínka (2.21), že na plášti vlnododu je

$$T_1 = 0$$

V pravouhlé souřadnicové soustavě podle obr. 3.1 je plášť vlnododu určen souřadnicemi

$$x = 0; \quad x = a \quad \text{pro } y = 0 \text{ až } y = b$$

$$y = 0; \quad y = b \quad \text{pro } x = 0 \text{ až } x = a$$

Obecné řešení pro funkci T_1 je podle (3.7)

$$T_1 = (C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x)(C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y)$$

Aby platilo $T_1 = 0$ pro $x = 0$ při jakémkoliv souřadnici y , musí zřejmě být $C_2 = 0$.

Aby platilo $T_1 = 0$ pro $x = a$ při jakémkoliv souřadnici y , musí být $\sin \xi a = 0$; to bude splněno např. tehdy, bude-li $\xi a = m\pi$ (kde m je libovolné celé číslo). Z toho vyplývá

$$\xi = \frac{m\pi}{a}$$

Aby platilo $T_1 = 0$ pro $y = 0$ při jakémkoliv souřadnici x , musí zřejmě být $C_4 = 0$.

Aby platilo $T_1 = 0$ pro $y = b$ při jakémkoliv souřadnici x , musí být $\sin \eta b = 0$;

то будет приращению $\Delta \Pi_z$, $\Delta \Pi_x$, $\Delta \Pi_y$, $\Delta \Pi_z = n\pi$ (где n — произвольное целое число). Δ тогда выливается

$$\eta = \frac{n\pi}{b}$$

Pro funkci příčných souřadnic T_1 dostaneme tedy s dosazením okrajových podmínek výraz

$$T_1 = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.8)$$

kde $C = C_1 C_3$.

Konstantu Γ určíme na základě vztahu (3.6) výrazem

$$\Gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (3.9)$$

Známe-li konstantu Γ , můžeme určit mezní vlnovou délku vlnovodu ze vztahu (2.15)

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}}$$

nebo po úpravě

$$\lambda_m = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}} \quad (3.10)$$

mezní frekvenci vlnovodu ze vztahu (2.16)

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad (3.11)$$

a poměrný posun α ze vztahu (2.12)

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad (3.12)$$

Protože známe výraz pro funkci příčných souřadnic T_1 , je možné napsat výraz pro Hertzův vektor ve tvaru (pro vlnu, šířící se jedním směrem, tj. pro postupnou vlnu)

$$\mathbf{H}_z^* = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\alpha z} \quad (3.13)$$

kde konstanta C zahrnuje jak konstanty funkce T_1 , tak konstantu funkce T_2 . Tato výsledná konstanta určuje amplitudu elektromagnetické vlny ve vlnovodu (má rozměr V. m) a její velikost závisí na buzení elektromagnetické vlny.

Jestliže známe Hertzův vektor, můžeme určit veličiny elektromagnetického pole ve vlnovodu podle rovnic (1.64) a (1.65)

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{H}_z^* + \text{grad div } \mathbf{H}_z^*$$

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon \text{rot } \mathbf{H}_z^* = j\omega\epsilon (\text{grad } \mathbf{H}_z^* \times \mathbf{z})$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole jsou

$$E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_z^*}{\partial x \partial z} = -j\alpha \frac{m\pi}{a} C \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\alpha z}$$

$$E_y = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_z^*}{\partial y \partial z} = -j\alpha \frac{n\pi}{b} C \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\alpha z}$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = k^2 \mathbf{H}_z^* + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_z^*}{\partial z^2} = \Gamma^2 C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\alpha z} \quad (3.14)$$

$$H_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = j\omega\epsilon \frac{\partial \mathbf{H}_z^*}{\partial y} = j\omega\epsilon C \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\alpha z}$$

$$H_y = \mathbf{H} \cdot \mathbf{y} = -j\omega\epsilon \frac{\partial \mathbf{H}_z^*}{\partial x} = -j\omega\epsilon C \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\alpha z}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = 0$$

Vzhledem k tomu, že vlnová rovnice pro funkci T_1 má nekonečně mnoho řešení (ω^2) lišících se indexy m a n , může zřejmě ve vlnovodu existovat ω^2 samostatných elektromagnetických vln, které se budou vzájemně lišit. Každému jednotlivému řešení budeme říkat *vid elektromagnetické vlny*. Je zřejmé, že jednotlivé vlny se budou lišit mezní vlnovou délkou, poměrným posunem i prostorovým rozložením elektromagnetického pole. V zápisu budeme označovat jednotlivé vlny takto:

$$TM_{mn} \text{ popř. } E_{mn}$$

což značí *vlnu příčně magnetickou vidu* m , n . Z rovnice (3.8) vyplývá, že nejnižší indexy u vln příčně magnetických mohou být $m = 1$ a $n = 1$, které značí vlnu TM_{11} . Vid TM_{11} má ze všech příčně magnetických vidů největší mezní vlnovou délku, tj. ze všech příčně magnetických vidů potřebuje ke svému šíření nejmenší rozměry vlnovodu.

3.1.2. Vlny příčně elektrické (TE, H) ve vlnovodu obdélníkového průřezu

U vln příčně elektrických musí být splněna okrajová podmínka, že na pláštích vlnovodu je

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$$

Obecné řešení pro funkci T_1 je podle (3.7)

$$T_1 = (C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x) (C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y)$$

Normála k pláštům vlnovodu může být buď ve směru osy x (na tužších stranách

vlnovodu, tj. při $x = 0$ a $x = a$), nebo ve směru osy y (na širších stranách vlnovodu, tj. při $y = 0$ a $y = b$). Můžeme tedy psát

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \xi(C_1 \cos \xi x - C_2 \sin \xi x)(C_3 \sin \eta y + C_4 \cos \eta y)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \eta(C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x)(C_3 \cos \eta y - C_4 \sin \eta y)$$

Aby platilo $\partial T_1 / \partial x = 0$ pro $x = 0$ při jakékoliv souřadnici y , musí zřejmě být $C_1 = 0$.

Aby platilo $\partial T_1 / \partial x = 0$ pro $x = a$ při jakékoliv souřadnici y , musí být $\sin \xi a = 0$; to bude splněno např. tehdy, je-li $\xi a = m\pi$ (kde m je libovolné celé číslo). Z toho vyplývá

$$\xi = \frac{m\pi}{a}$$

Aby platilo $\partial T_1 / \partial y = 0$ pro $y = 0$ při jakékoliv souřadnici x , musí být $C_3 = 0$.

Aby platilo $\partial T_1 / \partial y = 0$ pro $y = b$ při jakékoliv souřadnici x , musí být $\sin \eta b = 0$; to bude splněno např. tehdy, je-li $\eta b = n\pi$ (kde n je libovolné celé číslo). Z toho vyplývá

$$\eta = \frac{n\pi}{b}$$

Pro funkci příčných souřadnic T_1 dostaneme tedy s dosazením okrajových podmínek

$$T_1 = C \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (3.15)$$

kde $C = C_2 C_4$.

Pro konstantu Γ dostaneme na základě vztahu (3.6) stejný výraz jako u vln TM

$$\Gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

takže výrazy pro mezní vlnovou délku a pro poměrný posun budou rovněž stejné jako u vln příčně magnetických, tj. jako (3.10) až (3.12).

Protože známe výraz pro funkci příčných souřadnic T_1 [rovnice (3.15)], můžeme podobně jako u vln TM určit výraz pro Hertzův vektor (pro postupnou vlnu ve tvaru

$$\Pi_z^m = C \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\omega z} \quad (3.16)$$

kde konstanta C zahrnuje jak konstanty funkce T_1 , tak konstantu funkce T_2 . Tato výsledná konstanta určuje amplitudu elektromagnetického pole ve vlnovodu (má rozměr A · m) a její velikost závisí na buzení elektromagnetické vlny.

Známe-li Hertzův vektor, můžeme určit složky intenzity elektrického a magnetického pole z rovnic (1.66) a (1.67)

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \operatorname{rot} \Pi_z^m = -j\omega\mu(\operatorname{grad} \Pi_z^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_z^m$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole jsou

$$\begin{aligned} E_x &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = -j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial y} = j\omega\mu C \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\omega z} \\ E_y &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial x} = -j\omega\mu C \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\omega z} \\ E_z &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$H_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial x \partial z} = j\omega C \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\omega z}$$

$$H_y = \mathbf{H} \cdot \mathbf{y} = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial y \partial z} = j\omega C \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\omega z}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2} = \Gamma^2 C \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\omega z}$$

Je zřejmé, že (podobně jako u příčně magnetických vln) může ve vlnovodu existovat též ∞^2 samostatných elektromagnetických vln neboli vidů příčně elektrických. Tyto vidy budeme označovat

$$\text{TE}_{mn} \quad \text{popř.} \quad \text{H}_{mn}$$

což značí *vlnu příčně elektrickou vidu m, n* .

Z rovnice (3.15) vyplývá, že nejnižší indexy u vln příčně elektrických mohou být $m = 1, n = 0$, popř. $m = 0, n = 1$, což značí vlnu TE_{10} , popř. TE_{01} . Mezní vlnové délky příslušející těmto vidům určíme podle (3.10) pro vid TE_{10}

$$\lambda_m = 2a$$

a pro vid TE_{01}

$$\lambda_m = 2b$$

Protože se v praxi používají vlnovody, u nichž je $a > b$, je zřejmé, že vid TE_{10} má ze všech vidů největší mezní vlnovou délku. Můžeme též říci, že ze všech příčně elektrických vidů potřebuje ke svému šíření nejmenší rozměry vlnovodu. Porovnáme-li mezní vlnovou délku vidu TE_{10} s vlnovou délkou nejnižšího vidu příčně magnetického TM_{11} , je vidět, že mezní vlnová délka vidu TE_{10} je podstatně větší. Z toho vyplývá, že vid TE_{10} potřebuje ke svému šíření nejmenší rozměry vlnovodu ze všech vidů TE i TM . Z toho důvodu bývá nazýváno *videm dominantním*. Přehled charakteristických vlastností vlnovodů s vlnami TE a TM je uveden v tab. 2.

Tab. 2. Charakteristické vlastnosti vlnovodů obdélníkového průřezu

Označení vlnovodu	R 32	R 48	R 70	R 100	R 140	R 220	R 320
vnitřní rozměr a (mm)	72,14	47,55	34,85	22,86	15,80	10,67	7,11
vnitřní rozměr b (mm)	34,04	22,16	15,80	10,16	7,90	4,32	3,55
doporučený rozsah vlnových délek (cm)	11,75 7,60	7,61 5,13	5,13 3,66	3,66 2,42	2,42 1,67	1,67 1,13	1,13 0,75
jmenovitá vlnová délka (cm)	10,20	6,7	4,9	3,2	2,2	1,5	1,0
charakteristická impedance Z (Ω)	530	530	530	530	530	530	530
maximální přenášený výkon P (kW)	10 350	4 380	2 290	990	530	194	107
poměrný útlum vlnovodu při jmenovité vlnové délce (povrch Ag) (dB \cdot m $^{-1}$)	0,02	0,035	0,06	0,12	0,18	0,39	0,6
mezní frekvence vidu TE ₁₀ (GHz)	2,078	3,155	4,286	6,55	9,49	14,06	21,08
mezní frekvence vidu TE ₂₀ (GHz)	4,155	6,309	8,571	13,10	18,98	28,11	42,15
mezní frekvence vidu TE ₁₁ (GHz)	4,876	7,474	10,363	16,103	21,22	37,47	47,13
mezní frekvence vidu TE ₂₁ (GHz)	6,061	9,256	12,744	19,698	26,48	44,67	59,61
mezní frekvence vidu TE ₂₂ (GHz)	9,959	14,92	20,83	32,29	42,43	74,87	94,39

Vlnovod obdélníkového průřezu s vlnou TE₁₀

Všimneme si nyní blíže dominantního vidu v obdélníkovém vlnovodu a jeho vlastností se zřetelím k tomu, že se tento vid šíří ve vlnovodové technice nejvíce používá. Víme již, že mezní vlnová délka tohoto vidu je určena pouze šířkou vlnovodu, tj.

$$\lambda_m = 2a$$

Je zajímavé určit mezní vlnové délky nejbližší vyšších vidů. Z tabulky 2 je vidět, že rozměry normalizovaných vlnovodů jsou takové, že platí $a > 2b$. To znamená, že nejbližším vyšším videm je vid TE₂₀ s mezní vlnovou délkou $\lambda_m = a$, dalším v pořadí je vid TE₀₁ s mezní vlnovou délkou $\lambda_m = 2b$, potom TE₁₁ atd.

Chceme-li, aby se vlnovodem šířila pouze elektromagnetická vlna s videm TE₁₀, musí její vlnová délka vyhovovat podmínce

$$a < \lambda < 2a$$

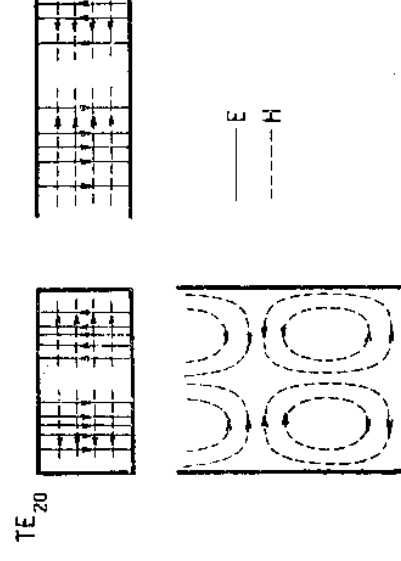
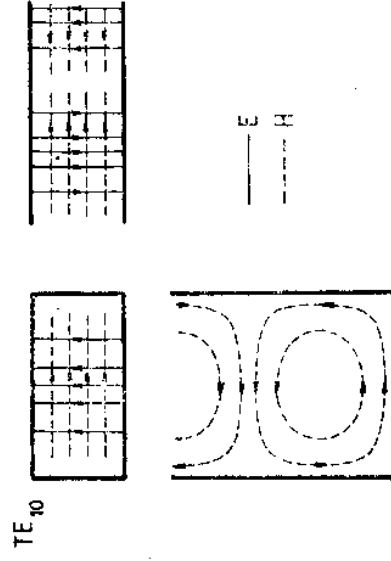
Když by bylo $\lambda < a$, mohl by se vlnovodem šířit současně i vid TE₂₀, popř. vidy vyšší. Při $\lambda \geq 2a$ se přestává vlnovodem šířit i vid TE₁₀.

Z uvedeného výkladu je zřejmé, že poměr největší možné vlnové délky k nejkratší vlnové délce, při kterých je zaručeno šíření pouze vidu TE₁₀, je 2 : 1. Jestliže označíme největší možnou vlnovou délku $\lambda_1 = 2a$, nejkratší vlnovou délku $\lambda_2 = a$ (pro zachování vidu TE₁₀), můžeme určit střední vlnovou délku vlnovodu výrazem (3.18)

$$\lambda_{st} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = a\sqrt{2}$$

Vzhledem k tomu, že mezní vlnová délka vidu TE₁₀ závisí pouze na šířce vlnovodu, dostáváme jednoduché výrazy pro fázovou i skupinovou rychlost, pro délku vlny ve vlnovodu i pro charakteristickou impedanci

Prostorové rozložení elektromagnetického pole ve vlnovodu obdélníkového průřezu s vlnou TE₁₀

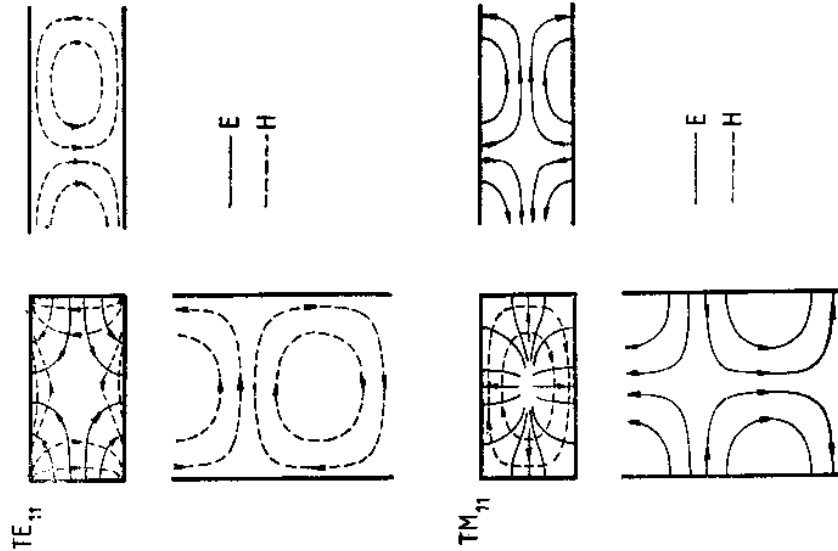


Obr. 3.2. Rozložení elektromagnetického pole vidů TE₁₀ a TE₂₀ u vlnovodů obdélníkového průřezu

Pro vid $TE_{1,0}$ (tj. pro $m = 1, n = 0$) vyplývá z rovnice (3.17)

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 \\
 E_y &= -j\omega\mu C \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jxz} \\
 H_x &= jx C \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jxz} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= C \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jxz}
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Rozložení elektromagnetického pole vidu $TE_{1,0}$ je znázorněno na obr. 3.2. Pro porovnání je na téměř obrázku znázorněno také elektromagnetické pole vidu $TE_{2,0}$. Elektromagnetické pole vidů $TE_{1,1}$ a $TM_{1,1}$ je znázorněno na obr. 3.3. Pro lepší



Obr. 3.3. Rozložení elektromagnetického pole vidů $TE_{1,1}$ a $TM_{1,1}$ u vlnovodu obdélníkového průřezu

přehlednost obrázků je v podélných řezech vlnovodu zakreslena pouze jedna složka elektromagnetického pole. Zobrazovací rovnice síločar získáme ze vztahů uvedených v příloze H.

Znalost rozložení elektromagnetického pole ve vlnovodu je v praxi velmi důležitá. Z tohoto rozložení můžeme např. určit, která místa na vedení jsou nejvíce ohrožena průrazem dielektrika při přenášení velkých výkonů. Znalost rozložení elektromagnetického pole nám také umožní provést takové konstrukční zásahy do vedení, které účinně potlačí šíření nežádoucích vidů, popř. podpoří šíření požadovaného vidu apod.

Z rozložení magnetického pole můžeme určit směr a velikost vysokofrekvenčních povrchových proudů na vnitřní straně stěn vlnovodu. Tyto povrchové proudy jsou vždy kolmé k tečným složkám intenzity magnetického pole. Znalost rozložení povrchových proudů je důležitá i pro různé technické aplikace. Například při konstrukci tzv. měřicích vedení, která slouží k indikaci stojatých vln na vedení, musí mít vedení podélnou šterbinu, v níž se posouvá pohyblivá sonda. Aby taková šterbina co nejméně porušovala vlastnosti vedení a aby co nejméně vyzářovala energii elektromagnetického pole do okolního prostoru, nesmí přetínat dráhu povrchových proudů. Z obr. 3.2 je např. zřejmé, že u vidu $TE_{1,0}$ může být podélná šterbina pouze uprostřed širší strany vlnovodu. Jak poznáme později, u vlnovodu kruhového průřezu mohou existovat některé vidy šíření, které mají povrchové proudy pouze v příčném směru, takže pro ně není možné zkonstruovat měřicí vedení s podélnou šterbinou.

V některých aplikacích naopak úmyslně umísťujeme do vlnovodu šterbiny takovým způsobem, aby co nejvíce narušovaly dráhu povrchových proudů. Je to zejména při konstrukci tzv. šterbinových antén, vytvořených z vlnovodu, do jehož povrchu jsou vyřiznuty šterbiny tak, aby vyzářovaly elektromagnetickou energii.

Výkon přenášený vlnovodem obdélníkového průřezu s vlnou $TE_{1,0}$

Pro výkon přenášený vlnovodem jsme odvodili u příčně elektrických vln výraz (2.37)

$$P = \frac{1}{2} C^2 \omega^2 \mu^2 \frac{1}{Z} F^2 \int T_1^2 dz$$

Konstantu C můžeme vyjádřit např. pomocí intenzity elektrického pole. Z rovnice (3.19) vyplývá, že platí

$$|E_y|_{\max} = \omega\mu C \frac{\pi}{a} \tag{3.20}$$

takže

$$C = \frac{|E_y|_{\max}}{\omega\mu \frac{\pi}{a}}$$

Protože pro vid TE_{10} platí $\Gamma^2 = (\pi/a)^2$, můžeme napsat výraz pro přenášený výkon po úpravě ve tvaru

$$P = \frac{1}{2} \frac{|E_y|_{\max}^2}{Z} \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} x \, dx \, dy \quad (3.21)$$

takže po integraci dostaneme

$$P = \frac{1}{4} ab \frac{|E_y|_{\max}^2}{Z}$$

Dosadíme-li za $|E_y|_{\max}$ maximální přípustnou dielektrickou pevnost, dostaneme maximálně možný výkon přenášený vlnovodem. Hodnoty maximálně možných výkonů pro dielektrickou pevnost vzduchu $E = 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ jsou uvedeny v tab. 2.

Poměrný útlum vlnovodů obdélníkového průřezu s vlnou TE_{10}

Poměrný útlum vidů přičně elektrických určíme výrazem (2.66)

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_{\text{vř}}}{Z_0} \left[\int_s \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds \sqrt{1-v^2} + \int_s T_1^2 ds \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} \right]$$

Pro vlny TE_{10} platí

$$T_1 = \cos \frac{\pi}{a} x; \quad \Gamma = \frac{\pi}{a}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} = -\frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x.$$

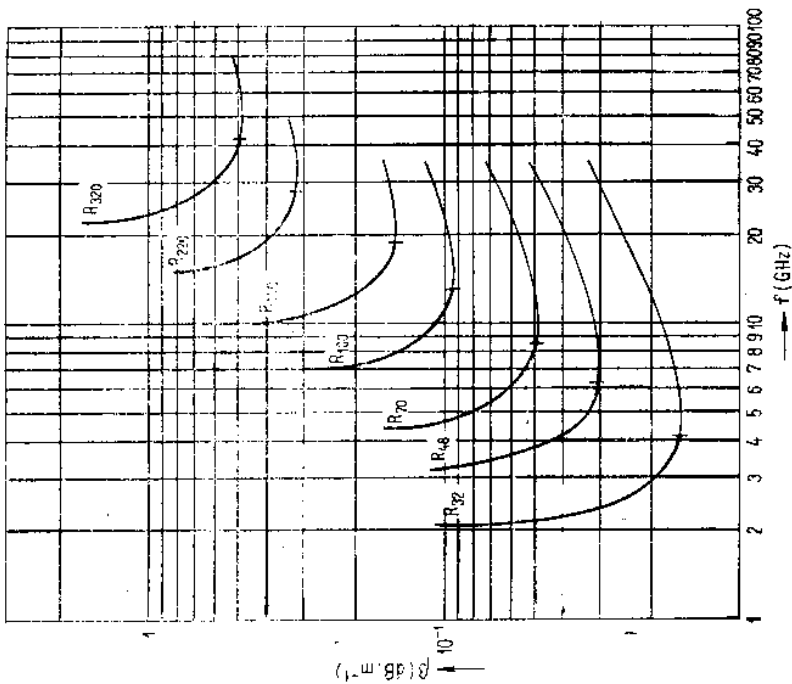
takže dostaneme

$$\begin{aligned} \int_s \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds &= 2 \int_0^a \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x \, dx = a \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \\ \int_s T_1^2 ds &= 2 \left(\int_0^a \cos^2 \frac{\pi}{a} x \, dx + \int_0^b dy \right) = a + 2b \\ \int_s T_1^2 ds &= \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} x \, dx \, dy = \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice pro poměrný útlum můžeme po úpravě psát

$$\beta = \frac{\rho_{\text{vř}}}{Z_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\lambda^2}{b} + \frac{2a^3}{2a^3} \right) \quad (\text{m}^{-1}) \quad (3.22)$$

Hodnoty poměrného útlumu pro vid TE_{10} jsou uvedeny v tab. 2. Průběhy poměrného útlumu normalizovaných vlnovodů v závislosti na frekvenci signálu jsou na obr. 3.4 (oblast jednovidového přenosu je zakreslena tlustší čarou).



Obr. 3.4. Frekvenční závislost poměrného útlumu vlnovodů obdélníkového průřezu.

3.2. VLNOVOD KRUHOVÉHO PRŮŘEZU A JEHO VLASTNOSTI

Tento typ vlnovodu se k přenosu elektromagnetické energie nepoužívá tak často jako vlnovod obdélníkového průřezu. Je to zejména proto, že šířka frekvenčního pásma jednovidového přenosu je u něj menší než u vlnovodu obdélníkového průřezu a kromě toho při přenosu dominantního vidu není na první pohled zřejmá rovina polarizace elektromagnetické vlny. Jak však poznamáme dále, v tomto vlnovodu se mohou šířit některé typy vln, které mají z hlediska aplikací velmi zajímavé vlastnosti.

Vlnovou rovnici

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0$$

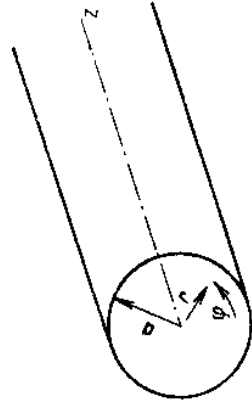
budeme řešit (se zřetelem ke snadnému splnění okrajových podmínek) ve válcových

souřadnicích. Ve válcových souřadnicích, pro něž platí (příloha A)

$$\Delta T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}$$

dostaneme (vzhledem k tomu, že T_1 je funkcí pouze příčných souřadnic r a φ) vlnovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + \Gamma^2 T_1 = 0 \quad (3.23)$$



Obr. 3.5. Vlnovod kruhového průřezu

Abychom mohli tuto rovnici řešit metodou separace proměnných, zavedeme opět předpoklad, že funkci T_1 lze vyjádřit součinem dvou funkcí

$$T_1 = R\Phi \quad (3.24)$$

kde R je funkcí pouze souřadnice r a Φ je funkcí pouze souřadnice φ , takže lze psát

$$\Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \Gamma^2 R\Phi = 0 \quad (3.25)$$

Vynásobíme-li tuto rovnici výrazem $r^2/R\Phi$, dostaneme po úpravě

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \Gamma^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (3.26)$$

Položíme-li

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2 \quad (3.27)$$

neboli

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (3.28)$$

můžeme psát pro funkci Φ řešení

$$\Phi = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi \quad (3.29)$$

Poznámka: Když bychom zvolili znaménko u konstanty m^2 tak, aby platilo $\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2 - m^2 \Phi = 0$, dostali bychom řešení rovnice pro funkci Φ ve tvaru $\Phi = C_1 e^{m\varphi} + C_2 e^{-m\varphi}$, které není periodické.

Rovnici (3.26) lze psát s použitím vztahu (3.27) ve tvaru

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \Gamma^2 r^2 - m^2 = 0$$

Vynásobíme-li tuto rovnici výrazem R/r^2 , dostaneme po úpravě Besselovu diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + R \left(\Gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \quad (3.30)$$

Řešení této rovnice, které je dáno součtem dvou partikulárních integrálů, můžeme vyjádřit pomocí Besselových funkcí prvního a druhého druhu, tj.

$$R = C_3 J_m(\Gamma r) + C_4 N_m(\Gamma r) \quad (3.31)$$

Vzhledem k singularitě funkce $N_m(\Gamma r)$ při $r = 0$ [pro $\Gamma r \rightarrow 0$ platí $N_m(\Gamma r) \rightarrow -\infty$] je zřejmé, že z obecného řešení přichází v úvahu pouze funkce $J_m(\Gamma r)$. Aby řešení mělo fyzikální smysl, položíme tedy $C_4 = 0$. Později poznáme, že u sousedních vlnovodů, kde poloměr nemůže nabýt hodnoty $r = 0$, je třeba do řešení zahrnout i funkci $N_m(\Gamma r)$. Pro funkci příčných souřadnic T_1 dostaneme tedy výraz

$$T_1 = C_3 J_m(\Gamma r) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) \quad (3.32)$$

3.2.1. Vlny příčně magnetické (TM, E) ve vlnovodu kruhového průřezu

U vln příčně magnetických musí být splněna okrajová podmínka, že na plášti vlnovodu je

$$T_1 = 0$$

U kruhového vlnovodu je plášť určen souřadnicí $r = a$. Má-li být výraz (3.32) roven nule při $r = a$ a při jakémkoliv souřadnici φ , je zřejmé, že musí platit

$$J_m(\Gamma a) = 0 \quad (3.33)$$

Tato transcendentní rovnice má pouze reálné kořeny, z nichž budeme brát v úvahu pouze kořeny kladné. Podle rostoucích hodnot je budeme označovat $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \alpha_{m3}, \dots$ [přehled nulových hodnot rovnice (3.33) je v tab. 3]. Protože platí

$$\Gamma a = \alpha_{mn}$$

můžeme vyjádřit konstantu příčného průřezu vlnovodu (neboli vlastní hodnotu) vztahem

$$\Gamma = \frac{\alpha_{mn}}{a} \quad (3.34)$$

Známe-li konstantu Γ , můžeme určit mezní vlnovou délku vlnovodu ze vztahu (2.15)

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{2\pi a}{\alpha_{mn}} \quad (3.35)$$

Tab. 3. Přehled nulových hodnot (kotření) α_{mn} a α'_{mn}

Pořadí	Vidí TM _{mn}		Vidí TE _{mn}	
	index	vid	index	vid
1	01	TM ₀₁	11	TE ₁₁
2				
3	11	TM ₁₁	21	TE ₂₁
4, 5			01	TE ₀₁
6	21	TM ₂₁	31	TE ₃₁
7				
8			41	TE ₄₁
9			12	TE ₁₂
10	02	TM ₀₂		
11	31	TM ₃₁		
12				
13			51	TE ₅₁
14, 15	12	TM ₁₂	22	TE ₂₂
16			02	TE ₀₂
17	41	TM ₄₁	61	TE ₆₁
18				
19	22	TM ₂₂	32	TE ₃₂
20				
21			13	TE ₁₃
22	03	TM ₀₃	71	TE ₇₁
23	51	TM ₅₁		
24				
25			42	TE ₄₂
26	32	TM ₃₂	81	TE ₈₁
27	61	TM ₆₁		
28				
29, 30	13	TM ₁₃	23	TE ₂₃
			03	TE ₀₃

popř. mezní frekvenci ze vztahu (2.16)

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha_{mn}}{\mu\epsilon}} \quad (3.36)$$

a poměrný posun α ze vztahu (2.12)

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2} \quad (3.37)$$

Protože známe výraz pro funkci příčných souřadnic T_1 , je možné napsat výraz pro Hertzův vektor ve tvaru (pro vlnu šířící se jedním směrem, tj. pro postupnou vlnu)

$$H_z^e = C_3 J_m(\Gamma r) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) e^{-j\alpha z} \quad (3.38)$$

Z uvedeného výkladu je zřejmé, že i ve vlnovodu kruhového průřezu může existovat

a průběhem elektromagnetického pole, budeme rozlišovat indexy m a n .

Z tabulky 3 je vidět, že nejmenší nulovou hodnotu α_{mn} ze všech příčně magnetických vidů má vid $m = 0, n = 1$, tj. TM_{01} , jemuž přísluší hodnota $\alpha_{01} \approx 2,4048$.

Z rovnice (3.32), popř. (3.29), vyplývá, že vlastní hodnotě Γ odpovídají dvě lineárně nezávislé vlastní funkce T_1 , a to

$$T_1 = C_1 C_3 J_m(\Gamma r) \cos m\varphi \quad (3.39)$$

$$T_1 = C_2 C_3 J_m(\Gamma r) \sin m\varphi \quad (3.40)$$

Jestliže $m \neq 0$, mohou ve vlnovodu existovat vždy dvě vlny, lišící se od sebe průběhem elektromagnetického pole ve směru souřadnice φ (v podstatě dvě pole pootočené o $\pi/2$). Tyto dvojice vln, příslušející jedné vlastní hodnotě Γ (řídka, že vlastní hodnota Γ je dvojnásobně degenerovaná), mají v ideálně symetrickém vlnovodu stejné součinitele přenosu. Má-li povrch vlnovodu malou deformaci, může se stát, že se součinitele přenosu jednotlivých vln budou lišit.

Známe-li Hertzův vektor, můžeme určit složky intenzit elektrického a magnetického pole ve vlnovodu podle rovnice (1.64) a (1.65)

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e$$

$$\mathbf{H} = j\omega \text{rot } \Pi_z^e = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^e \times \mathbf{z})$$

Platí tedy (pro postupnou vlnu)

$$E_r = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial r^2 \partial z} = -j\alpha \frac{\alpha_{mn}}{a} C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-j\alpha z}$$

$$E_\varphi = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{r \partial \varphi \partial z} = j\alpha \frac{m}{r} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-j\alpha z}$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^e + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2} = \Gamma^2 C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-j\alpha z} \quad (3.41)$$

$$H_r = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{r \partial \varphi} = -j\omega \epsilon \frac{m}{r} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-j\alpha z}$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r} = -j\omega \epsilon C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-j\alpha z}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = 0$$

V těchto výrazech jsme zvolili za funkci příčných souřadnic T_1 řešení dané vztahem (3.39), přičemž výsledná konstanta C zahrnuje konstanty příčné funkce T_1 i konstantu podélné funkce T_2 (rozměr konstanty C je V · m).

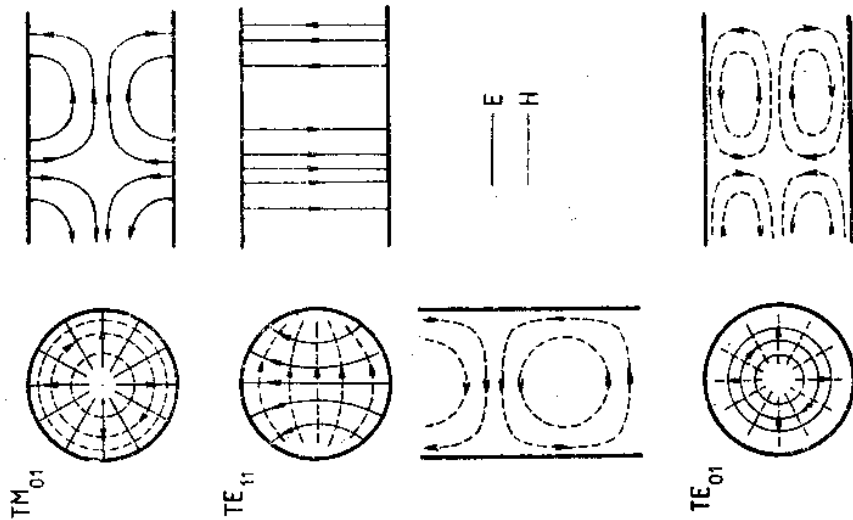
Vlnovod kruhového průřezu s vlnou TM_{01}

Všimneme si nyní blíže vlastností vidu TM_{01} , který vyžaduje ke svému šíření nejmenší poloměr vlnovodu ze všech příčně magnetických vidů, neboť hodnota α_{01} je ze všech hodnot α_{mn} nejmenší. Z rovnice (3.41) pro $m = 0, n = 1$ dostaneme pro

složky intenzity elektrického a magnetického pole výrazy ($J_0(r) = -J_1(ur)$)

$$\begin{aligned} E_r &= j\omega C J_1(ur) e^{-j\omega z}; & E_\phi &= 0 \\ E_z &= \Gamma^2 C J_0(ur) e^{-j\omega z}; & H_r &= 0 \\ H_\phi &= j\omega \Gamma C J_1(ur) e^{-j\omega z}; & H_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Prostorové rozložení elektromagnetického pole vidu TM_{01} ve vlnovodu kruhového průřezu je velmi jednoduché a je znázorněno v horní části obr. 3.6 (v podélném řezu není zakresleno magnetické pole).



Obr. 3.6. Rozložení elektromagnetického pole vidu TM_{01} , TE_{11} a TE_{01} u vlnovodu s kruhovým průřezem

Povrchové proudy u všech příčně magnetických vidů mají pouze podélný směr, neboť magnetické pole má složky pouze v příčné rovině, kolmé ke směru osy vlnovodu.

Pro poměrní útlum vidu TM_{01} jsme odvodili výraz (3.39)

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_{\text{ef}}}{Z_0} \frac{\oint \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds}{\int T_1^2 dS} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Protože u vlnovodu kruhového průřezu můžeme vyjádřit funkci příčných souřadnic např. výrazem (3.39)

$$T_1 = C J_m(\Gamma r) \cos m\phi$$

platí pro vid TM_{01}

$$T_1 = C J_0(\Gamma r)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial r} = \Gamma C J_0'(\Gamma r) = -\Gamma C J_1(\Gamma r)$$

Protože ve výrazu pro útlum je s obrysová křivka vlnovodu a S je plocha průřezu vlnovodu, je

$$ds = a d\phi; \quad dS = r d\phi dr$$

a jednotlivé integrály můžeme vyjádřit takto

$$\oint \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds = \int_0^{2\pi} C^2 \Gamma^2 J_1^2(\Gamma a) a d\phi = 2\pi a C^2 \Gamma^2 J_1^2(\Gamma a)$$

$$\int T_1^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a C^2 J_0^2(\Gamma r) r d\phi dr = 2\pi C^2 \int_0^a r J_0^2(\Gamma r) dr$$

což je tzv. Lommelův integrál (viz přílohu B), po jehož integraci dostaneme

$$\int T_1^2 dS = \pi a^2 C^2 J_0^2(\Gamma a) = \pi a^2 C^2 J_1^2(\Gamma a)$$

S použitím uvedených vztahů dostaneme po úpravě pro poměrní útlum výraz

$$\beta = \frac{\rho_{\text{ef}}}{Z_0} \frac{1}{a \sqrt{1-v^2}} \quad (\text{m}^{-1}) \quad (3.43)$$

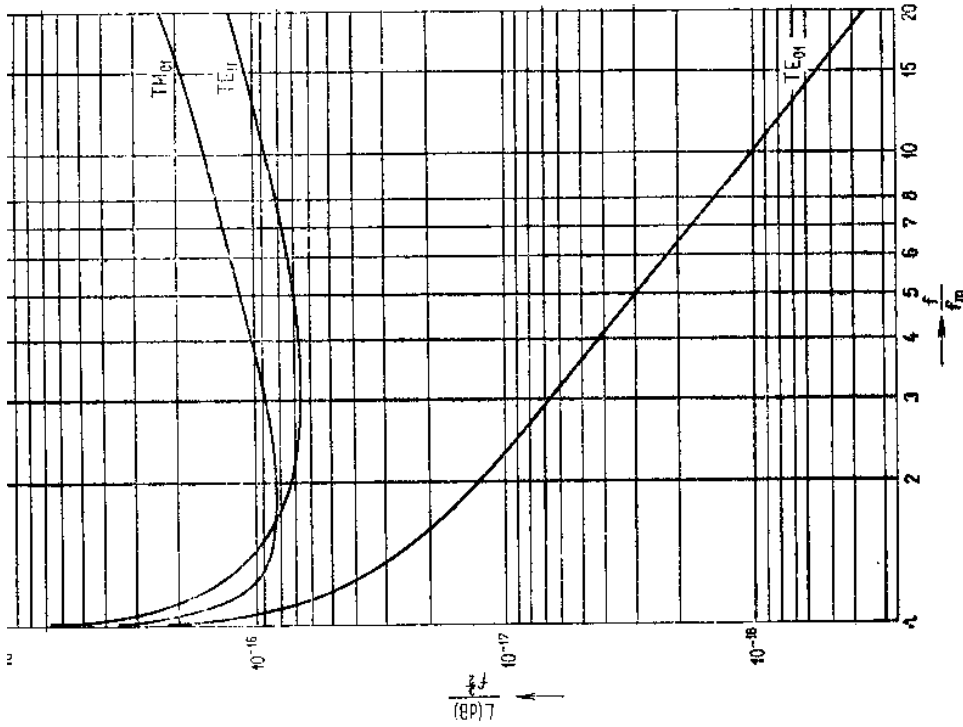
Použijeme-li vztahy

$$\Gamma a = \alpha_{01}; \quad \Gamma = \frac{2\pi}{c} f_m; \quad f = \frac{f_m}{v}$$

a vyjádříme-li útlum v decibelech, můžeme napsat výraz pro poměrní útlum ve tvaru

$$\frac{\beta}{f_m^{3/2}} \approx 8,68 \sqrt{\frac{\pi \mu}{\sigma}} \frac{1}{60c} \frac{1}{\alpha_{01} \sqrt{v(1-v^2)}} \quad (\text{dB} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-3/2})$$

jehož graf je na obr. 3.7.



Obr. 3.7. Porovnání frekvenční závislosti poměrného útlumu vidů TM_{01} , TE_{11} a TE_{01} u vlnovodu kruhového průřezu (závisle proměnnou na svislé ose je L (dB)/ $f_m^{3/2}$)

3.2.2. Vlny příčně elektrické (TE, H) ve vlnovodu kruhového průřezu

U vln příčně elektrických musí být splněna okrajová podmínka, že na plášti vlnovodu je

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$$

Plášť vlnovodu je určen souřadnicí $r = a$. Normála k plášti vlnovodu má směr

radiální, takže platí

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial r}$$

Funkce T_1 je dána vztahem (3.32), takže můžeme psát

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = \Gamma J'_m(\Gamma r) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi)$$

Má-li být tento výraz roven nule při $r = a$ při jakémkoliv souřadnici φ , je zřejmé, že musí platit

$$J'_m(\Gamma a) = 0 \quad (3.44)$$

Tato transcendentní rovnice má nekonečně mnoho nulových hodnot, z nichž budeme brát v úvahu kladné hodnoty a budeme je označovat α'_{mn} (podle rostoucích hodnot jsou seřazeny v tab. 3).

Protože platí

$$\Gamma a = \alpha'_{mn}$$

můžeme vyjádřit konstantu příčného průřezu vlnovodu (neboli vlastní hodnotu) vztahem

$$\Gamma = \frac{\alpha'_{mn}}{a} \quad (3.45)$$

Známe-li konstantu Γ , můžeme určit mezní vlnovou délku vlnovodu, mezní frekvenci a poměrný posun týmiž vztahy jako u vln TM, pouze místo nulových hodnot α_{mn} dosazujeme hodnoty α'_{mn} . Platí tedy

$$\lambda_m = \frac{2\pi a}{\alpha'_{mn}} \quad (3.46)$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\alpha'_{mn}}{a} \quad (3.47)$$

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{mn}}{a}\right)^2} \quad (3.48)$$

Protože známe výraz pro funkci příčných souřadnic T_1 , můžeme napsat výraz pro Hertzův vektor ve tvaru (pro postupnou vlnu)

$$H^m = C_3 J_m(\Gamma r) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) e^{-j\alpha z} \quad (3.49)$$

Z předcházejícího výkladu vyplývá, že ve vlnovodu kruhového průřezu může existovat též nekonečně mnoho (∞^2) příčně elektrických vidů šíření. Z tabulky 3 je vidět, že největší mezní vlnovou délku ze všech vidů má vid $m = 1, n = 1$, tj. vid TE_{11} , jemuž přísluší hodnota $\alpha'_{11} \approx 1,841$. Vzhledem k tomu, že tato hodnota kořene je menší než u příčně magnetického vidu TM_{01} , je vid TE_{11} *dominantním videm vlnovodu kruhového průřezu*.

Podobně jako vlny příčně magnetické jsou i vlny příčně elektrické dvojnásobně degenerované pro $m \neq 0$.

Známe-li výraz pro Hertzův vektor, můžeme určit složky intenzit elektrického a magnetického pole ve vlnovodu podle rovnic (1.66) a (1.67)

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \operatorname{rot} \Pi_z^m = -j\omega\mu(\operatorname{grad} \Pi_z^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_z^m$$

takže platí

$$E_r = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{r \partial \varphi} = j\omega\mu \frac{m}{r} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$E_\varphi = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} = j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r} = j\omega\mu C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-jz}$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = 0$$

$$H_r = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = -j\alpha \Gamma C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-jz} \quad (3.50)$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{r \partial \varphi \partial z} = j\alpha \frac{m}{r} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2} = \Gamma^2 C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-jz}$$

Z dvojnásobné závislosti na souřadnici φ jsme zvolili $C_1 \cos m\varphi$, přičemž výsledná konstanta C zahrnuje jak konstanty funkce příčných souřadnic T_1 , tak konstantu funkce podélné souřadnice T_2 (rozměr konstanty C je Am).

Vlnovod kruhového průřezu s vlnou TE₁₁

Vid TE₁₁ je dominantním videm ve vlnovodu kruhového průřezu a má mezní vlnovou délku

$$\lambda_m = \frac{2\pi a}{1,841} \doteq 1,7d$$

kde d je průměr vlnovodu. Nejbližší vyšší vid je příčně magnetický vid TM₀₁ s mezní vlnovou délkou

$$\lambda_m = \frac{2\pi a}{2,4048} \doteq 1,3d$$

Aby se vlnovodem kruhového průřezu šířil pouze dominantní vid, musí jeho vlnová délka vyhovovat podmínce

$$1,3d < \lambda < 1,7d$$

Z porovnání s vlastnostmi dominantního vidu TE₁₀ v obdélníkovém vlnovodu (odst. 3.1.2) je vidět, že vlnovod kruhového průřezu má malý rozsah jednovídnosti

(tj. malý rozsah vlnových délek nebo frekvencí, při nichž se nemůže vlnovodem šířit jiný vid než dominantní).

Pro vid TE₁₁ platí $m = 1$, takže z rovnic (3.50) dostaneme pro složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$E_r = j\omega\mu \frac{1}{r} C J_1(\Gamma r) \sin \varphi e^{-jz}$$

$$E_\varphi = j\omega\mu \Gamma C J_1'(\Gamma r) \cos \varphi e^{-jz}$$

$$E_z = 0 \quad (3.51)$$

$$H_r = -j\alpha \Gamma C J_1(\Gamma r) \cos \varphi e^{-jz}$$

$$H_\varphi = j\alpha \frac{1}{r} C J_1(\Gamma r) \sin \varphi e^{-jz}$$

$$H_z = \Gamma^2 C J_1(\Gamma r) \cos \varphi e^{-jz}$$

Průběh elektrického a magnetického pole vidu TE₁₁ ve vlnovodu kruhového průřezu je znázorněn na obr. 3.6 (střední část obrázku, v podélných řezech je pro přehlednost zakreslována pouze jedna složka elektromagnetického pole). Je patrné, že vid TE₁₁ ve vlnovodu kruhového průřezu je určitou analogií vidu TE₁₀ ve vlnovodu obdélníkového průřezu.

Výkon přenášený vlnovodem lze určit u vln příčně elektrických výrazem (2.37)

$$P = \frac{1}{2} C^2 \omega^2 \mu^2 \frac{1}{Z} \Gamma^2 \int_S T_1^2 dS$$

Dosadíme-li za funkci T_1 výraz (3.39)

$$T_1 = J_1(\Gamma r) \cos \varphi$$

můžeme psát

$$\int_S T_1^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a J_1^2(\Gamma r) \cos^2 \varphi r d\varphi dr$$

takže po částečné integraci dostaneme

$$\int_S T_1^2 dS = \pi \int_0^a r J_1^2(\Gamma r) dr$$

což je tzv. Lommelův integrál (viz přílohu B). Podle vztahů uvedených v příloze dostaneme po úpravě

$$\pi \int_0^a r J_1^2(\Gamma r) dr = \frac{\pi}{2} a^2 J_1^2(\Gamma a) \left[1 - \frac{1}{(\Gamma a)^2} \right]$$

takže přenášený výkon můžeme vyjádřit výrazem

$$P = \frac{1}{4} \pi a^2 C^2 \omega^2 \mu^2 \frac{1}{Z} \Gamma^2 J_1^2(\Gamma a) \left[1 - \frac{1}{(\Gamma a)^2} \right] \quad (3.52)$$

Konstantu C vyjádříme pomocí maximální intenzity elektrického pole. Vzhledem

k tomu, že vid $TE_{1,1}$ má dvě příčné složky intenzity elektrického pole, E_r a E_φ , je vektor výsledné intenzity pole

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{r} + E_\varphi \boldsymbol{\varphi}$$

Velikost výsledné intenzity elektrického pole je dána odmocninou ze součtu druhých mocnin velikostí složek, takže platí

$$|E| = \sqrt{|E_r|^2 + |E_\varphi|^2}$$

neboli

$$|E| = C\omega\mu \sqrt{\frac{1}{r^2} J_1^2(\Gamma r) \sin^2 \varphi + \Gamma^2 J_0^2(\Gamma r) \cos^2 \varphi}$$

Kdybychom stanovili maximum tohoto výrazu, přesvědčili bychom se o tom, že maximum je při $\varphi = \pi/2$ a $r = 0$. Tytéž závěry můžeme učinit na základě obr. 3.6, který znázorňuje okamžitě rozložení elektromagnetického pole ve vlnovodu s videm $TE_{1,1}$. Pro $\varphi = \pi/2$ a $r = 0$ dostaneme

$$|E|_{\max} = C\omega\mu \frac{\Gamma}{2}$$

(neboť pro $x \rightarrow 0$ je $J_m(x) \rightarrow x^m/(2^m m!)$, viz přílohu B). Pro konstantu C tedy platí

$$C = \frac{2|E|_{\max}}{\omega\mu\Gamma}$$

takže pro předášený výkon dostaneme po úpravě výraz

$$P = \pi a^2 \frac{|E|_{\max}^2}{Z} J_1^2(\Gamma a) \left[1 - \frac{1}{(\Gamma a)^2} \right] \quad (3.53)$$

Protože $\Gamma a = \alpha'_{11} \doteq 1,841$, lze po vyčíslení psát

$$P \doteq 0,2\pi a^2 \frac{|E|_{\max}^2}{Z} \quad (3.54)$$

Dosadíme-li za $|E|_{\max}$ elektrickou pevnost dielektrika, dostaneme maximálně možný výkon předášený vlnovodem.

Pro poměrný útlum vln příčné elektrických jsme odvodili vztah (2.66)

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_{\text{v}}}{Z_0} \left[\frac{\oint \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds}{\Gamma^2 \int T_1^2 dS} \sqrt{1 - v^2} + \int T_1^2 dS \frac{\oint T_1^2 ds}{\int T_1^2 dS} \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \right]$$

Funkci T_1 můžeme u vlnovodu kruhového průřezu vyjádřit výrazem

$$T_1 = J_m(\Gamma r) \cos m\varphi$$

a pro element oblouku obrysově křivky vlnovodu a element plochy platí

$$ds = a d\varphi; \quad dS = r d\varphi dr$$

takže jednotlivé výrazy ve vzorci pro poměrný útlum můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} = -\frac{m}{a} J_m(\Gamma a) \sin m\varphi$$

$$\oint \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{m}{a} \right)^2 J_m^2(\Gamma a) \sin^2 m\varphi a d\varphi = \pi m^2 \frac{1}{a} J_m^2(\Gamma a)$$

$$\oint T_1^2 ds = \int_0^{2\pi} a J_m^2(\Gamma a) \cos^2 m\varphi a d\varphi = \pi a J_m^2(\Gamma a)$$

$$\int T_1^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a J_m^2(\Gamma r) \cos^2 m\varphi r d\varphi dr = \frac{1}{2} \pi a^2 J_m^2(\Gamma a) \left[1 - \left(\frac{m}{\Gamma a} \right)^2 \right] \quad (3.55)$$

S použitím těchto vztahů lze po úpravě psát

$$\beta = \frac{\rho_{\text{v}}}{Z_0} \frac{1}{a \sqrt{1 - v_{\text{mn}}^2}} \left(\frac{m^2}{\alpha'_{11}{}^2 - m^2} + v_{\text{mn}}^2 \right) \quad (\text{m}^{-1}) \quad (3.56)$$

a pro vidy $TE_{1,1}$ dostaneme

$$\beta = \frac{\rho_{\text{v}}}{Z_0} \frac{1}{a \sqrt{1 - v_{11}^2}} \left(\frac{1}{\alpha'_{11}{}^2 - 1} + v_{11}^2 \right) \quad (\text{m}^{-1}) \quad (3.57)$$

kde

$$v_{11} = \frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{\alpha'_{11} \lambda}{\pi a}; \quad \alpha'_{11} \doteq 1,841$$

Použijeme-li vztahy

$$\alpha'_{11} = \Gamma a; \quad \Gamma = \frac{2\pi}{c} f_m; \quad f = \frac{f_m}{v}$$

a vyjádříme-li útlum v decibelech, dostaneme vztah

$$\frac{\beta}{f_m^{3/2}} \doteq 8,68 \sqrt{\frac{\pi\mu}{\sigma}} \frac{1}{60c} \frac{1}{\alpha'_{11} \sqrt{v(1 - v^2)}} \left(\frac{1}{\alpha'_{11} - 1} + v^2 \right) \quad (\text{dB} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-3/2})$$

jehož graf je na obr. 3.7.

Vlnovod kruhového průřezu s vlnou $TE_{0,1}$

Z hlediska aplikací je též zajímavý vid $TE_{0,1}$, jehož mezni vlnová délka je

$$\lambda_m = \frac{2\pi a}{\alpha'_{01}} \doteq \frac{2\pi a}{3,832}$$

neboli

$$\lambda_m \doteq 0,82d$$

Podle vztahů (3.50) můžeme určit složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -j\omega\mu C J_1(\Gamma r) e^{-j\kappa z}; & E_r &= 0 \\ H_r &= j\alpha C J_1(\Gamma r) e^{-j\kappa z}; & E_z &= 0 \\ H_z &= \Gamma^2 C J_0(\Gamma r) e^{-j\kappa z}; & H_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Rozložení elektromagnetického pole vidu TE_{01} ve vlnovodu kruhového průřezu je znázorněno na obr. 3.6 (spodní část obrázku, v podélném řezu není zakresleno elektrické pole). Na plášti vlnovodu je pouze podélná tečná složka intenzity magnetického pole, a proto mají vysokofrekvenční povrchové proudy pouze příčný směr. Proto i u vlnovodu s nedokonalou vodivým pláštěm existuje čistý vid příčně elektrický (tečná složka intenzity elektrického pole na plášti vlnovodu má i zde pouze příčný směr).

Vid TE_{01} má velmi zajímavý průběh poměrného útlumu v závislosti na frekvenci. Protože $m = 0$, můžeme vyjádřit podle vztahu (3.55) poměrný útlum výrazem

$$\beta = \frac{\rho_{\text{vf}}}{Z_0} \frac{v_{01}^2}{a\sqrt{1 - v_{01}^2}} \quad (\text{m}^{-1}) \quad (3.58)$$

takže za použití vztahů

$$\alpha'_{01} = \Gamma a; \quad \Gamma = \frac{2\pi}{c} f_m; \quad f = \frac{f_m}{v_{01}}$$

a při vyjádření útlumu v decibelech můžeme napsat výraz pro poměrný útlum ve tvaru

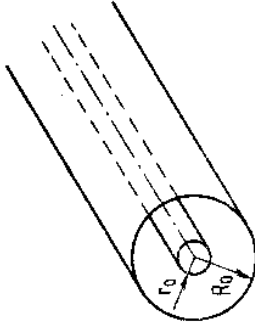
$$\frac{\beta}{f_m^{3/2}} = 8,68 \sqrt{\frac{\pi\mu}{\sigma}} \frac{\sqrt{v_{01}^3}}{60c \alpha'_{01} \sqrt{1 - v_{01}^2}} \quad (\text{dB} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-3/2})$$

Graf tohoto vztahu je na obr. 3.7. Je zřejmé, že se poměrný útlum vidů TE_{01} monotónně zmenšuje s rostoucí frekvencí (obr. 3.7). Pokles útlumu u vidů TE_{01} je způsoben tím, že ztráty v plášti vlnovodu jsou závislé pouze na tečné složce intenzity magnetického pole H_z (při $m = 0$ je $H_\varphi = 0$).

Z uvedených vztahů i z obr. 3.7. je zřejmé, že útlum vidu TE_{01} může být podstatně zmenšen použitím vlnovodu, jehož poloměr je mnohem větší než minimální poloměr potřebný pro přenos tohoto vidu. Použití takových vlnovodů umožňuje přenos mikrovlnné energie na velké vzdálenosti s malými ztrátami. Je ovšem třeba si uvědomit, že se ve vlnovodu s rozměrem a podstatně větším, než je nutné k přenosu vidu TE_{01} , může současně šířit mnoho jiných vidů, které nemají tak malý útlum jako vid TE_{01} , a které proto mohou zhoršit účinnost přenosu. V praxi je však možné šíření nežádoucích vidů účinně potlačit.

3.3. KOAXIÁLNÍ (SOUOSÉ) VEDENÍ

Toto vedení je jedním z nejčastěji používaných. Jeho průřez je tvořen dvěma kovovými sousými válci s poloměry R_0 a r_0 (válec poloměru r_0 může být plný vodič), mezi nimiž se šíří elektromagnetická vlna (obr. 3.8).



Obr. 3.8. Souosé (koaxiální) vedení

Rovnici $\Delta T_1 = 0$ budeme řešit ve válcových souřadnicích. Obecně platí

$$\Delta T_1 = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}$$

Vzhledem k tomu, že T_1 je funkci pouze příčných souřadnic a že plášť je při $z = \text{konst}$ ekvipotenciálou, platí

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} = 0$$

Laplaceova rovnice se tedy zjednoduší na rovnici

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} = 0 \quad (3.59)$$

kteřá má řešení

$$T_1 = C_1 \ln r + C_2 \quad (3.60)$$

Pro postupnou vlnu je možné vyjádřit funkci podélné souřadnice T_2 výrazem

$$T_2 = C e^{-j\kappa z}$$

takže platí

$$\Pi_z^2 = (C_1 \ln r + C_2) C e^{-j\kappa z} \quad (3.61)$$

Složky elektromagnetického pole určíme ze vztahů (2.73), (2.74)

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi_z^2$$

$$\mathbf{H} = j\omega \text{rot } \Pi_z^2 = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^2 \times \mathbf{z})$$

takže lze psát

$$E_r = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial^2 \Pi_z^2}{\partial r \partial z} = -jkC \frac{1}{r} e^{-j\kappa z}$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^2}{\partial r} = -j\omega \epsilon C \frac{1}{r} e^{-j\kappa z} \quad (3.62)$$

$$E_\varphi = 0; \quad H_r = 0$$

kde konstanta C zahrnuje jak konstantu funkce T_1 , tak konstantu funkce T_2 ; velikost této výsledné konstanty závisí na buzení elektromagnetické vlny a určuje amplitudu elektromagnetického pole ve vedení.

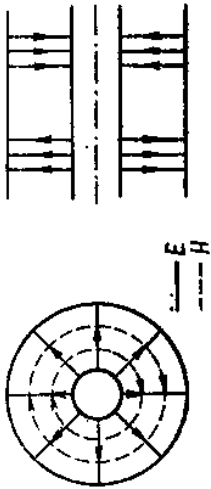
Rozložení elektromagnetického pole je velmi jednoduché, a je zřejmé z obr. 3.9. Vysokofrekvenční proud na povrchu vodičů má pouze podélný směr.

Vlnovou impedanci určíme jako poměr napětí a proudu

$$Z_0 = \frac{U}{I}$$

kde napětí mezi vodiči je

$$U = \int_{r_0}^{R_0} E_r dr = -jkC e^{-jkz} \int_{r_0}^{R_0} \frac{dr}{r} = -jkC \ln \frac{R_0}{r_0} e^{-jkz}$$



Obr. 3.9. Rozložení elektromagnetického pole v koaxiálním vedení

a proud ve vnějším vodiči je

$$I = \oint_{\Sigma} H \cdot ds = \int_0^{2\pi} H_{\phi} R_0 d\phi = -j2\pi\omega\epsilon C e^{-jkz}$$

takže po úpravě dostaneme

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{R_0}{r_0}$$

Je-li $\mu = \mu_0$, platí

$$Z_0 \doteq \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{R_0}{r_0} \quad (3.64)$$

popř.

$$Z_0 \doteq \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{R_0}{r_0} \quad (3.65)$$

neboť

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \doteq 120\pi \Omega; \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Charakteristická impedance vyjádřená pomocí složek intenzity elektrického a magnetického pole je $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ jako u všech vedení s vlnou TEM.

Výkon přenášený koaxiálním vedením můžeme určit pomocí vztahu (2.91)

$$P = \frac{1}{2} \frac{UU^*}{Z_0}$$

takže po úpravě dostaneme

$$P = \frac{\pi k^2 C^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \ln \frac{R_0}{r_0} \quad (3.66)$$

Konstantu C můžeme vyjádřit např. pomocí maximální hodnoty intenzity elektrického pole. Protože platí

$$E_r = -jkC \frac{1}{r} e^{-jkz}$$

je zřejmé, že maximální hodnota intenzity elektrického pole bude pro $r = r_0$. Lze tedy psát

$$|E_r|_{\max} = kC \frac{1}{r_0}$$

takže

$$C = \frac{|E_r|_{\max} r_0}{k}$$

a výraz (3.66) můžeme upravit na tvar

$$P = \frac{\pi r_0^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} |E_r|_{\max}^2 \ln \frac{R_0}{r_0} \quad (3.67)$$

Vyšetřme, při jaké hodnotě vlnové impedance je možné přenášet koaxiálním vedením se vzduchovým dielektrikem maximální výkon. Předpokládáme-li, že vnější poloměr koaxiálního vedení R_0 je daná konstantní veličina, potom lze psát

$$P = Kr_0^2 \ln \frac{R_0}{r_0}$$

kde podle (3.67) je

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} |E_r|_{\max}^2$$

Položíme-li

$$\frac{dP}{dr_0} = K \left(2r_0 \ln \frac{R_0}{r_0} - r_0 \right) = 0$$

je zřejmé, že maximum přenášeného výkonu bude při $\ln(R_0/r_0) = 0,5$, tj. při vlnové impedanci $Z_0 = 30 \Omega$.

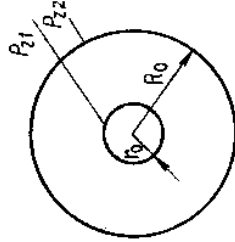
Poměrný útlum koaxiálního vedení určíme ze vztahu (2.62)

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P}$$

kde ztracený výkon P_z vyjádříme jako součet dvou dílčích výkonů P_{z1} a P_{z2} ,

ztracených ve vnějším a vnitřním vodiči, $R_z = R_{z1} + R_{z2}$ (obr. 3.10). Ztracený výkon můžeme vyjádřit pomocí vf odporu vodiče a vf proudu vztahem (2.94)

$$P_z = \frac{1}{2} R_{vf1} |I|^2 + \frac{1}{2} R_{vf2} |I|^2$$



Obr. 3.10.

přičemž pro vf odpor vodiče R_{vf} platí vztah (2.56)

$$R_{vf} = \rho_{vf} \frac{l}{t}$$

kde ρ_{vf} je poměrný vf odpor vodiče, l délka vodiče, t šířka vodiče.

Vzhledem k tomu, že výkon přenášený vedením můžeme vyjádřit pomocí vztahu (2.92)

$$P = \frac{1}{2} Z_0 |I|^2$$

je možné určit poměrný útlum výrazem

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_{vf} \left(\frac{1}{2\pi R_0} + \frac{1}{2\pi r_0} \right) |I|^2}{\frac{1}{2} Z_0 |I|^2}$$

nebo po úpravě

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_{vf}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \frac{1}{R_0} \frac{R_0 + r_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \quad (\text{m}^{-1}) \quad (3.68)$$

Vyšetřme nyní optimální hodnotu vlnové impedance koaxiálního vedení se vzduchovým dielektrikem z hlediska minimálního útlumu. Protože vlnová impedance je funkcí poměru $R_0/r_0 = x$, můžeme při konstantním poloměru R_0 psát

$$\beta = K \frac{x + 1}{\ln x}$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{\rho_{vf}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \frac{1}{R_0}$$

Položíme-li

$$\frac{d\beta}{dx} = K \frac{\ln x - (x + 1) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 0$$

zjistíme, že minimum poměrného útlumu nastává pro $\ln x = 1 + 1/x$. Řešením této rovnice určíme $x \approx 3,6$ a poměru $R_0/r_0 = 3,6$ odpovídá velikost vlnové impedance $Z_0 \approx 77 \Omega$.

Je zřejmé, že různá hlediska (maximální přenášený výkon a minimální útlum) vyžadují různé poměry poloměrů R_0/r_0 , a tím i různé hodnoty vlnové impedance koaxiálního vedení. Ukazuje se však, že volba poměru R_0/r_0 není příliš kritická.

Z hlediska konstrukčního provedení by bylo nejvýhodnější takové vedení, u kterého by nepřesnosti rozměrů měly co nejmenší vliv na odchylky vlnové impedance. Tento požadavek se nejsnadněji splní u vedení, která mají co největší rozměry R_0 a r_0 . Poznáme však, že pokud nechceme v koaxiálním vedení připustit možnost vybuzení i jiných vidů než TEM, není možné libovolně zvětšovat jeho rozměry.

3.3.1. Vlnododové vidy v koaxiálním vedení

V koaxiálním vedení se za určitých podmínek mohou šířit kromě základní vlny TEM i vlny TM nebo TE. Tyto vlny mají, na rozdíl od základní vlny TEM, mezní frekvence závislé na velikosti příčných rozměrů vedení. Pro přenos elektromagnetické energie nemají zvláštní význam, je však třeba si uvědomit, že za jistých podmínek mohou ve vedení vzniknout. V praxi se snažíme jejich možnému šíření zabránit vhodnou volbou rozměrů koaxiálních vedení.

Rovnici pro funkci příčných souřadnic T_1 jsme ve válcových souřadnicích dostali ve tvaru

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + \Gamma^2 T_1 = 0$$

Substitucí $T_1 = R\Phi$ jsme po separaci proměnných dostali dvě diferenciální rovnice (3.30) a (3.28)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + R \left(\Gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

s řešením

$$R = C_3 J_m(\Gamma r) + C_4 N_m(\Gamma r)$$

$$\Phi = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi$$

U vlnovodu kruhového průřezu jsme z tohoto obecného řešení vypustili funkci $N_m(\Gamma r)$ vzhledem k její singularitě při $\Gamma r = 0$. U koaxiálního vedení se středním vodičem nemůže být nikdy $\Gamma r = 0$, takže se musí počítat s řešením včetně Neumannovy funkce $N_m(\Gamma r)$

$$T_1 = (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) [C_3 J_m(\Gamma r) + C_4 N_m(\Gamma r)] \quad (3.69)$$

Neznámou konstantu Γ určíme z okrajových podmínek.

Vlny příčně magnetické v koaxiálním vedení

Pro vlny příčně magnetické lze vyjádřit okrajovou podmínku vztahem, že na plášti vlnovodu je $T_1 = 0$. Vzhledem k tomu, že plášť koaxiálního vedení je určen souřadnicemi $r = r_0$ a $r = R_0$, vyplývají podle (3.69) z okrajových podmínek vztahy

$$C_3 J_m(\Gamma r_0) + C_4 N_m(\Gamma r_0) = 0 \quad (3.70)$$

$$C_3 J_m(\Gamma R_0) + C_4 N_m(\Gamma R_0) = 0$$

Netriviální řešení této soustavy rovnic dostaneme tehdy, jestliže se její determinant bude rovnat nule, tj.

$$J_m(\Gamma r_0) N_m(\Gamma R_0) - J_m(\Gamma R_0) N_m(\Gamma r_0) = 0$$

Dosadíme-li $\Gamma r_0 = x$, $R_0/r_0 = \chi$, lze psát

$$J_m(x) N_m(x\chi) - J_m(x\chi) N_m(x) = 0 \quad (3.71)$$

Tato rovnice je splněna při hodnotách koefice χ_{mn} , kde m je řád Besselových funkcí J_m a N_m a n určuje pořadí koefice. Poměr x je při daných rozměrech koaxiálního vedení konstanta. Nulové hodnoty rovnice (3.71) jsou uvedeny v tab. 4.

Tab. 4. Nulové hodnoty rovnice $J_m(x) N_m(x\chi) - J_m(x\chi) N_m(x) = 0$

$x = R_0/r_0$	χ_{01}	χ_{11}	χ_{21}	χ_{02}	χ_{12}
1,2	15,70	15,73	15,81	31,41	31,42
1,5	6,27	6,32	6,47	12,56	12,59
2,0	3,12	3,20	3,41	6,27	6,31
2,5	2,07	2,16	2,39	4,18	4,22
3,0	1,55	1,64	1,87	3,13	3,18
4,0	1,02	1,11	1,33	2,08	2,13

Mezmi délku vlny vyjádříme vztahem

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{2\pi r_0}{\chi_{mn}} \quad (3.72)$$

Kdybychom vyjádřili v závislosti na poměru x místo hodnot χ_{mn} , hodnoty $(x-1)\chi_{mn}$, zjistili bychom, že se výraz $(x-1)\chi_{mn}$ blíží násobkům čísla π , konverguje-li x k jedné. Velikost výrazu $(x-1)\chi_{mn}$ nezávisí na řádu Besselových funkcí, ale pouze na pořadí koefice (na číslu n). Platí

$$(x-1)\chi_{mn} \approx n\pi \quad (3.73)$$

Rozšíříme-li vztah (3.72) na tvar

$$\lambda_m = \frac{2\pi r_0(x-1)}{\chi_{mn}(x-1)}$$

je možné za použití vztahu (3.73) psát

$$\lambda_m \approx \frac{2\pi r_0(x-1)}{n\pi} = \frac{2}{n}(R_0 - r_0) \quad (3.74)$$

kde $n = 1, 2, 3, \dots$

Hertzův vektor pro postupnou vlnu určíme podle rovnice (3.69)

$$\Pi_z^e = (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) [C_3 J_m(\Gamma r) + C_4 N_m(\Gamma r)] C e^{-jz} \quad (3.75)$$

Podobně jako u vlnovodu kruhového průřezu mohou existovat při nenulových hodnotách m dvě elektromagnetická pole, vzájemně posunutá ve směru souřadnice φ o 90° . Vyjádříme-li vztah mezi konstantami C_3 a C_4 pomocí (3.70), je možné po úpravě napsat výraz pro Hertzův vektor ve tvaru

$$\Pi_z^e = C [J_m(\Gamma r) N_m(\Gamma R_0) - J_m(\Gamma R_0) N_m(\Gamma r)] \cos m\varphi e^{-jz}$$

kde závislost na souřadnici φ jsme vyjádřili funkcí $\cos m\varphi$ a do výsledné konstanty C jsme zahrnuli dílčí konstanty od funkcí T_1 , T_2 i výraz $1/N_m(\Gamma R_0)$.

Označíme-li dále pro jednoduchost zápisu

$$J_m(\Gamma r) N_m(\Gamma R_0) - J_m(\Gamma R_0) N_m(\Gamma r) = Z_m(\Gamma r, \Gamma R_0)$$

lze psát

$$\Pi_z^e = C Z_m(\Gamma r, \Gamma R_0) \cos m\varphi e^{-jz} \quad (3.76)$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole vyjádříme z rovnice (1.64) a (1.65)

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e$$

$$\mathbf{H} = j\omega \varepsilon \text{rot } \Pi_z^e = j\omega \varepsilon (\text{grad } \Pi_z^e \times \mathbf{z})$$

takže

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial r \partial z} = -j\alpha \Gamma C Z_m(\Gamma r, \Gamma R_0) \cos m\varphi e^{-jz}$$

$$E_\varphi = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{r \partial \varphi \partial z} = j\alpha \frac{m}{r} C Z_m(\Gamma r, \Gamma R_0) \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$E_z = k^2 \Pi_z^* + \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial z^2} = \Gamma^2 C Z_m(\Gamma r, \Gamma R_0) \cos m\varphi e^{-j\alpha z} \quad (3.77)$$

$$H_r = j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^*}{r \partial \varphi} = -j\omega \epsilon \frac{m}{r} C Z_m(\Gamma r, \Gamma R_0) \sin m\varphi e^{-j\alpha z}$$

$$H_\varphi = -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial r} = -j\omega \epsilon \Gamma C Z_m'(\Gamma r, \Gamma R_0) \cos m\varphi e^{-j\alpha z}$$

$$H_z = 0$$

Vlny příčně elektrické v koaxiálním vedení

Pro vlny příčně elektrické je možné vyjádřit okrajovou podmínku vztahem, že na povrchu vodičů je $\partial T_{z,1} / \partial n = 0$. Podle (3.69) vyplývají z okrajových podmínek rovnice

$$\begin{aligned} C_3 J_m'(\Gamma R_0) + C_4 N_m'(\Gamma R_0) &= 0 \\ C_3 J_m(\Gamma R_0) + C_4 N_m(\Gamma R_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Netriviální řešení této soustavy rovnic dostaneme pro nulový determinant soustavy

$$J_m'(\Gamma R_0) N_m(\Gamma R_0) - J_m(\Gamma R_0) N_m'(\Gamma R_0) = 0$$

Zavedeme-li vztahy $\Gamma R_0 = \chi'$ a $R_0/r_0 = x$, dostaneme rovnici

$$J_m'(\chi') N_m(x\chi') - J_m(x\chi') N_m'(\chi') = 0 \quad (3.79)$$

Tato rovnice je splněna při hodnotách kořene χ'_m , kde m je řád Besselových funkcí J_m' a N_m' a n je pořadí nulové hodnoty. Nulové hodnoty (kořeny) rovnice (3.79) jsou uvedeny v tab. 5.

Tab. 5. Nulové hodnoty rovnice $J_m'(\chi') N_m(x\chi') - J_m(x\chi') N_m'(\chi') = 0$

$x = R_0/r_0$	χ_{11}	χ_{21}	χ_{31}	χ_{02}	χ_{12}
1,2	0,91	1,82	2,73	15,73	15,75
1,5	0,80	1,61	2,41	6,32	6,38
2,0	0,68	1,34	1,98	3,20	3,28
2,5	0,58	1,14	1,64	2,16	2,26
3,0	0,51	0,98	1,39	1,64	1,76
4,0	0,41	0,75	1,05	1,11	1,25

Mezní délku vlny vyjádříme opět podle vztahu (2.15)

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{2\pi r_0}{\chi'_m} \quad (3.80)$$

Kdybychom vyjádřili v závislosti na poměru x místo hodnot χ'_m hodnoty $(x + 1) \chi'_{mn}$ pro $n = 1$ a hodnoty $(x - 1) \chi'_{mn}$ pro $n > 1$, zjistili bychom, že přibližně

platí

$$(x + 1) \chi'_{m1} \approx 2m \quad (3.81)$$

$$(x - 1) \chi'_{mn} \approx (n - 1) \pi \quad (\text{pro } n > 1)$$

Úpravou vztahu (3.80) pro $n = 1$ dostaneme

$$\lambda_m = \frac{2\pi r_0(x + 1)}{(x + 1) \chi'_{m1}} \approx \frac{2\pi r_0(x + 1)}{2m}$$

neboli

$$\lambda_m \approx \frac{2\pi}{m} \frac{R_0 + r_0}{2} \quad (3.82)$$

a pro $n > 1$ můžeme psát

$$\lambda_m = \frac{2\pi r_0(x - 1)}{(x - 1) \chi'_{mn}} \approx \frac{2\pi r_0(x - 1)}{(n - 1) \pi}$$

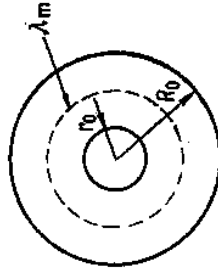
neboli (s použitím 3.81)

$$\lambda_m \approx \frac{2(R_0 - r_0)}{n - 1} \quad (3.83)$$

Porovnáme-li výrazy pro mezní vlnové délky vidů TM a TE, je zřejmé, že největší mezní vlnovou délku má vid $TE_{1,1}$, pro který platí

$$\lambda_m \approx 2\pi \frac{R_0 + r_0}{2} \quad (3.84)$$

Mezní vlnová délka tohoto hlavního vlnovodového vidu v koaxiálním vedení je rovna obvodu kružnice, jejíž poloměr je dán střední hodnotou velkého a malého poloměru (obr. 3.11).



Obr. 3.11. Určení mezní vlnové délky vidu $TE_{1,1}$ v koaxiálním vedení

Jestliže tedy chceme mít zaručeno, že se v koaxiálním vedení nebude šířit jiný vid než TEM, musí být vlnová délka přenášené vlny větší než mezní vlnová délka vidu $TE_{1,1}$.

Hertzův vektor pro postupnou vlnu určíme podobně jako u vln TM výrazem

$$H_z^m = (C_3 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) [C_3 J_m(\Gamma r) + C_4 N_m(\Gamma r)] C e^{-j\alpha z}$$

Vztah mezi konstantami C_3 a C_4 můžeme vyjádřit pomocí rovnice (3.78)

$$C_4 = -C_3 \frac{J_m'(\Gamma R_0)}{N_m'(\Gamma R_0)}$$

takže po úpravě lze vyjádřit Hertzův vektor výrazem

$$\mathbf{H}_m^m = C [J_m(\Gamma r) N_m'(\Gamma r_0) - J_m'(\Gamma r_0) N_m(\Gamma r)] \cos m\varphi e^{-jz}$$

přičemž závislost na souřadnici φ jsme vyjádřili funkcí $\cos m\varphi$ a do výsledné konstanty C jsme zahrnuli dílčí konstanty funkcí T_1, T_2 i výraz $1/N_m'(\Gamma r_0)$.

Použijeme-li zkrácený zápis

$$Z_m(\Gamma r, \Gamma r_0) = J_m(\Gamma r) N_m'(\Gamma r_0) - J_m'(\Gamma r_0) N_m(\Gamma r)$$

dostaneme

$$\mathbf{H}_m^m = C Z_m(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos m\varphi e^{-jz} \quad (3.85)$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole stanovíme z rovnic

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \mathbf{H}_m^m = -j\omega\mu (\text{grad } \Pi_z^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \text{grad } \text{div } \Pi_z^m$$

takže

$$E_r = -j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{r \partial \varphi} = j\omega\mu \frac{m}{r} C Z_m(\Gamma r, \Gamma r_0) \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$E_\varphi = j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r} = j\omega\mu C Z_m'(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos m\varphi e^{-jz}$$

$$E_z = 0$$

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial r \partial z} = -j\alpha \Gamma C Z_m'(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos m\varphi e^{-jz}$$

$$H_\varphi = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{r \partial \varphi \partial z} = j\alpha \frac{m}{r} C Z_m(\Gamma r, \Gamma r_0) \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$H_z = \Gamma^2 \Pi_z^m = \Gamma^2 C Z_m(\Gamma r, \Gamma r_0) \cos m\varphi e^{-jz}$$

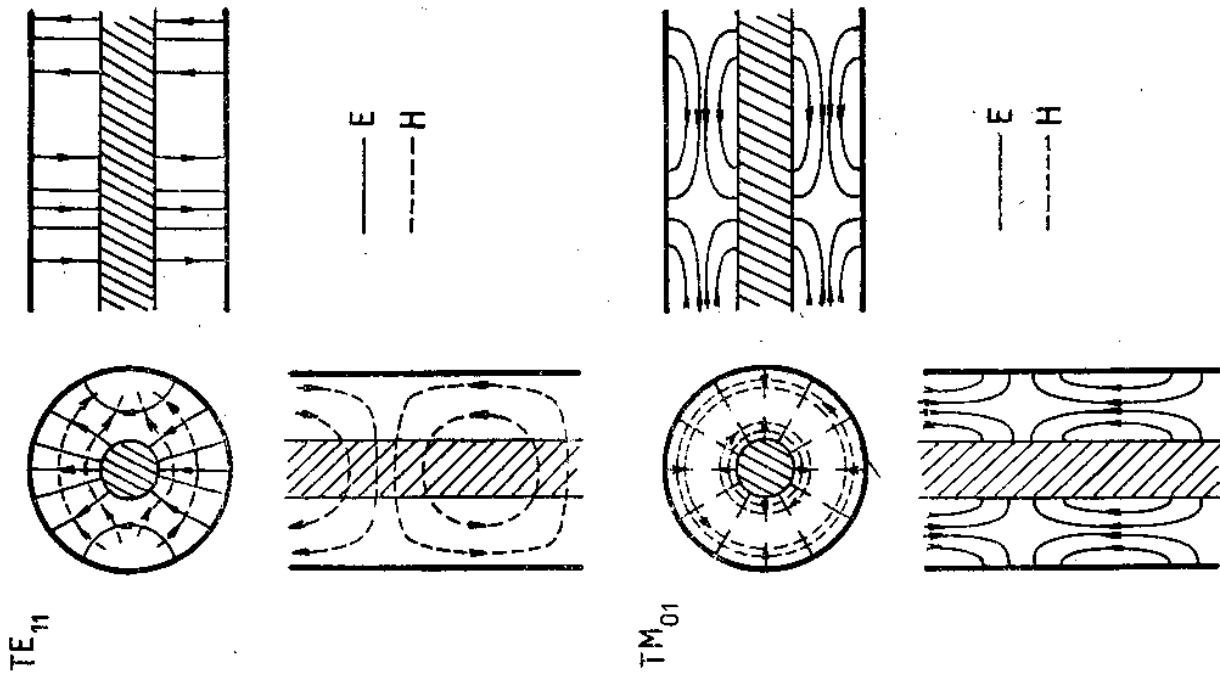
Rozložení elektromagnetického pole vidu TE_{11} v koaxiálním vedení je znázorněno na obr. 3.12. Na tomto obrázku je pro porovnání znázorněno i elektromagnetické pole vidu TM_{01} . Pro přehlednost je v podélných řezech zakreslena vždy pouze jedna složka intenzity pole.

Pro praktické aplikace má v koaxiálním vedení význam vid TEM. Použití vlnodvodových vidů v koaxiálním vedení není výhodné, neboť současně s kterýmkoliv vlnodvodovým videm se šíří i vid TEM. Protože mezní vlnové délky jednotlivých vyšších vidů jsou velmi blízké, je jejich oddělení obtížné.

3.4. DESKOVÉ VEDENÍ SE STŘEDNÍM VODIČEM

V měřicí technice se často používá *deskové vedení* [3], jehož průřez je schematicky znázorněn na obr. 3.13. Toto vedení můžeme považovat za zvláštní případ koaxiálního vedení, jehož průřez je převeden z komplexní roviny (w) pomocí konformního zobrazení do komplexní roviny (z) zprostředkující funkcí

$$w = \text{tg } z$$



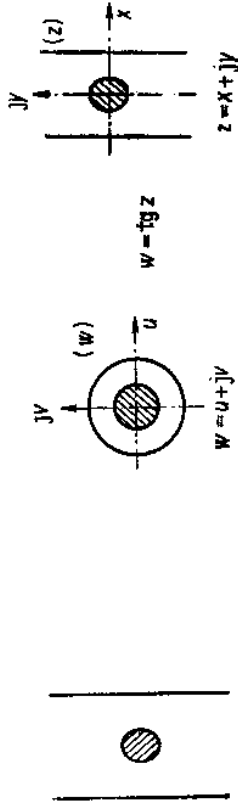
Obr. 3.12. Rozložení elektromagnetického pole vidů TE_{11} a TM_{01} v koaxiálním vedení

3.14), takže můžeme psát

$$u + jv = \operatorname{tg}(x + jy)$$

neboli

$$u + jv = \frac{\operatorname{tg} x + j \operatorname{tgh} y}{1 - j \operatorname{tg} x \operatorname{tgh} y}$$



Obr. 3.13. Průřez deskovým vedením

Oddělením reálné a imaginární části dostaneme

$$u = \frac{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tgh}^2 y)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tgh}^2 y}; \quad v = \frac{\operatorname{tgh} y(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tgh}^2 y} \quad (3.87)$$

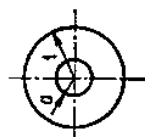
Ekvipotenciály v rovině (w) jsou určeny rovnicí kružnice

$$r^2 = u^2 + v^2$$

takže za použití vztahů (3.87) lze po úpravě psát

$$r^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tgh}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tgh}^2 y}$$

Předpokládáme, že vnější vodič koaxiálního vedení má poloměr $r = 1$, vnitřní vodič má poloměr $r = a$ (obr. 3.15) a vyšetřeme, jak se zobrazí toto vedení v rovině (z). Při poloměru $r = 1$ vychází z rovnice (3.87):



Obr. 3.15.

Pro bod $u = \pm 1, v = 0$ platí $\operatorname{tg} x = \pm 1, \operatorname{tgh} y = 0$ nebo

$$x = \pm \frac{\pi}{4}; \quad y = 0 \quad (3.88)$$

a podobně pro bod $u = 0, v = \pm 1$ platí $\operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tgh} y = \pm 1$

neboli

$$x = 0; \quad y = \pm \infty \quad (3.89)$$

Při poloměru $r = a$ dostaneme analogicky:

Pro bod $u = \pm a, v = 0$ platí $\operatorname{tg} x = \pm a, \operatorname{tgh} y = 0$ nebo

$$x = \pm \operatorname{arctg} a; \quad y = 0 \quad (3.90)$$

a podobně pro bod $u = 0, v = \pm a$ platí $\operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tgh} y = \pm a$ nebo

$$x = 0; \quad y = \pm \operatorname{argtgh} a \quad (3.91)$$

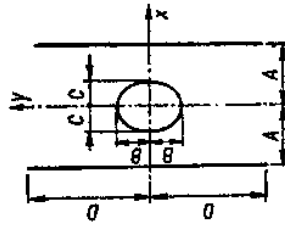
Označíme-li rozměry deskového vedení podle obr. 3.16

$$A = \frac{\pi}{4}$$

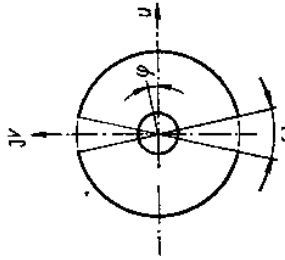
$$B = \operatorname{argtgh} a = \left(a + \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 + \dots \right) \quad (3.92)$$

$$C = \operatorname{arctg} a = \left(a - \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 - \dots \right) \quad (3.93)$$

je zřejmé, že podle rovnice (3.89) by měl být rozměr D nekonečně velký. Poznáme však, že použití konečného rozměru má stejné následky jako zavedení podélné štěrbiny do koaxiálního vedení; šířka štěrbiny je závislá na poměru D/A . Z rovnice (3.92) a (3.93) vyplývá, že při malých hodnotách a je průřez vnitřního vodiče téměř kruhový, obecně však je eliptický.



Obr. 3.16. Rozměry deskového vedení



Obr. 3.17. Štěrbina v koaxiálním vedení

Předpokládejme nyní, že v koaxiálním vedení jsou štěrbiny s úhlovou šířkou ω (obr. 3.17). Úhel φ můžeme vyjádřit vztahem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u} = \frac{\operatorname{tgh} y(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tgh}^2 y)}$$

popř. za použití vztahů

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sin 2x}; \quad 1 - \operatorname{tgh}^2 y = \frac{2 \operatorname{tgh} y}{\sinh 2y}$$

dostaneme po úpravě

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sinh 2y}{\sin 2x}$$

Dosadíme-li $y = \pm D$, $x = \pm \pi/4$, můžeme psát

$$\operatorname{tg} \varphi = \sinh 2D$$

Jestliže budeme počítat úhel φ až ke štěrbíně, potom platí

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

takže

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \right) = \sinh 2D \quad (3.94)$$

Protože platí

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$$

můžeme při malém úhlu ω dosadit $\operatorname{tg}(\omega/2) \approx \omega/2$ a vztah (3.94) přejde do tvaru

$$\frac{2}{\omega} = \sinh 2D$$

takže

$$D = \frac{1}{2} \operatorname{argsinh} \frac{2}{\omega}$$

Upravíme-li tento výraz na tvar

$$\frac{D}{A} = \frac{1}{2A} \operatorname{argsinh} \frac{2}{\omega}$$

(kde $A = \pi/4$), můžeme po úpravě psát

$$\frac{\pi D}{2A} = \operatorname{argsinh} \frac{2}{\omega}$$

takže

$$\omega = \frac{2}{\sinh \frac{\pi D}{2A}} \quad (3.95)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že již malý poměr D/A je ekvivalentní velmi úzké štěrbíně v koaxiálním vedení. Zvolíme-li např. $D/A = 3$, odpovídá to úhlu štěrbiny v koaxiálním vedení $\omega \approx 2^\circ$ a je zřejmé, že její vliv na vlastnosti vedení lze zanedbat. Vzhledem k těmto výhodným vlastnostem se deskové vedení používá jako měřicí vedení. Sonda měřicího vedení je v takovém případě umístěna na posuvném vozíku, kterým se posouvá po horním okraji desek.

Pro určení vlnové impedance deskového vedení vyjeme ze vztahu

$$Z_0 = \frac{U}{I}$$

a použijeme vztah, který jsme získali pro koaxiální vedení, tj.

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{R_0}{r_0}$$

a v našem případě ($R_0 = 1$, $r_0 = a$)

$$Z_0 = 60 \ln \frac{1}{a}$$

přičemž za a dosadíme z rovnice (3.92) nebo (3.93) vztahy

$$a = \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} \left(\frac{C}{A} \frac{\pi}{4} \right)$$

popř.

$$a = \operatorname{tgh} B = \operatorname{tgh} \left(\frac{B}{A} \frac{\pi}{4} \right)$$

neboť platí $A = \pi/4$.

Vlnovou impedanci můžeme tedy vyjádřit výrazy

$$Z_0 = -60 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{C}{A} \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.96)$$

nebo

$$Z_0 = -60 \ln \operatorname{tgh} \left(\frac{B}{A} \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.97)$$

Jestliže naopak chceme vědět, jaké musí být rozměry tohoto vedení pro danou hodnotu vlnové impedance, můžeme na základě rovnic (3.96) a (3.97) psát

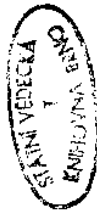
$$\operatorname{tg} \left(\frac{C}{A} \frac{\pi}{4} \right) = e^{-Z_0/60}; \quad \operatorname{tgh} \left(\frac{B}{A} \frac{\pi}{4} \right) = e^{-Z_0/60}$$

takže po úpravě dostaneme

$$\frac{C}{A} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{-Z_0/60} \quad (3.98)$$

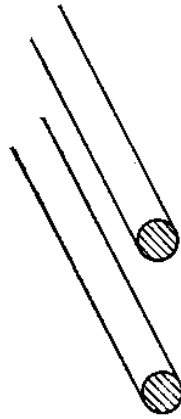
$$\frac{B}{A} = \frac{4}{\pi} \operatorname{argtgh} e^{-Z_0/60} \quad (3.99)$$

Z výrobních důvodů se někdy používá místo vodiče eliptického průřezu vodič kruhového průřezu. Velikost vlnové impedance je pak mezi hodnotami určenými rovnicemi (3.96) a (3.97). Kruhovému vodiči v deskovém vedení odpovídá eliptický střední vodič v koaxiálním vedení.



3.5. DVOUDRÁTOVÉ VEDENÍ

Ke studiu vlastností vedení tvořeného dvěma paralelními nesousými vodiči kruhového průřezu (obr. 3.18) je možné použít různé metody. Principiálně je možné postupovat stejně jako u kteréhokoliv jiného typu vedení, tj. zavést vhodnou ortogonální souřadnicovou soustavu (která by umožnila vyjádřit jednoduchými vztahy okrajovou podmínku) a řešit Laplaceovu rovnici $\Delta T_1 = 0$ v této souřadnicové soustavě.



Obr. 3.18. Dvoudrátové vedení

Protože však již známe výsledky řešení jiného typu dvou vodičového vedení, tj. sousosého vedení, ukážeme, že tyto výsledky je možné použít i k určení vlastností nesousosého vedení. Převod z vedení sousosého na vedení nesousosé provedeme pomocí konformního zobrazení [2]. Předpokládáme v komplexní rovině (z_3) kružnici s poloměrem ϱ_3 a se souřadnicemi středu $x_3 = m_3, y_3 = 0$. Rovnici této kružnice můžeme napsat v komplexním tvaru (viz přílohu G) takto

$$z_3 z_3^* - z_3 m_3 - z_3^* m_3 + m_3^2 - \varrho_3^2 = 0 \quad (3.100)$$

Převědeme-li tuto kružnici konformním zobrazením do roviny (z_2) pomocí vztahu

$$z_3 = \frac{1}{z_2} \quad (3.101)$$

dostaneme po úpravě rovnici

$$z_2 z_2^* - z_2 \frac{m_3}{m_3^2 - \varrho_3^2} - z_2^* \frac{m_3}{m_3^2 - \varrho_3^2} + \frac{1}{m_3^2 - \varrho_3^2} = 0 \quad (3.102)$$

což je rovnice kružnice se souřadnicemi středu

$$m_2 = \frac{m_3}{m_3^2 - \varrho_3^2}; \quad n_2 = 0 \quad (3.103)$$

jejíž poloměr ϱ_2 určíme ze vztahu

$$m_2^2 - \varrho_2^2 = \frac{1}{m_3^2 - \varrho_3^2} \quad (3.104)$$

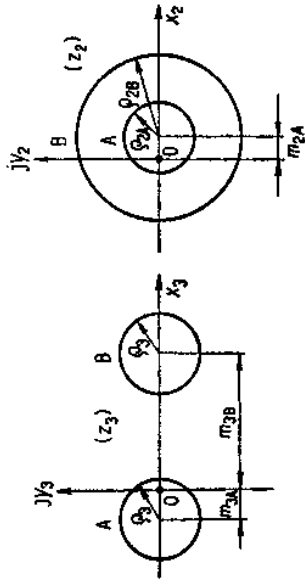
takže za použití (3.103) dostaneme

$$\varrho_2 = \varrho_3 \frac{1}{|m_3^2 - \varrho_3^2|} \quad (3.105)$$

Z toho vyplývá, že poloměr kružnice v rovině (z_2) závisí nejen na poloměru ϱ_3

kružnice v rovině (z_3) , ale též na poloze středu této kružnice, tj. na m_3 . Ukážeme, že je možné zobrazit dvě kružnice s různými polohami středů v rovině (z_3) na dvě kružnice s různými poloměry, ale se společným středem v rovině (z_2) .

Vzhledem k tomu, že dvě soustředné kružnice různých poloměrů představují průřez koaxiálního vedení a dvě kružnice s různými polohami středů představují průřez tzv. dvoudrátového vedení, můžeme ze známých vlastností koaxiálního vedení usuzovat na vlastnosti dvoudrátového vedení.



Obr. 3.19.

Z požadavku shodné polohy středů obou kružnic v rovině (z_2) dostaneme po úpravě na základě (3.103) podmínku

$$\varrho_3^2 = -m_{3A} m_{3B} \quad (3.106)$$

takže je zřejmé, že v rovině (z_3) musí být střed jedné z kružnic umístěn na záporné poloze x (viz obr. 3.19).

Jelikož budeme předpokládat, že poloměry obou vodičů v rovině (z_3) jsou stejné, tj. $\varrho_{3A} = \varrho_{3B}$, dostaneme z rovnice (3.105) a (3.106) podmínku

$$\frac{\varrho_{2A}}{\varrho_{2B}} = \sqrt{\frac{m_{3B}}{m_{3A}}} \quad (3.107)$$

Abychom dostali střed souosých kružnic do počátku, zobrazíme rovinu (z_2) do roviny (z_1) pomocí vztahu

$$z_2 = z_1 + d \quad (3.108)$$

Dosadíme-li tento zobrazovací vztah do rovnice (3.102), dostaneme po úpravě

$$z_1 z_1^* - z_1(m_2 - d) - z_1^*(m_2 - d) + d^2 - 2dm_2 + \frac{1}{m_3^2 - \varrho_3^2} = 0 \quad (3.109)$$

Mají-li mít kružnice zobrazené rovnicí (3.109) střed v počátku souřadnic, musí platit $m_2 = d$. Poloměr kružnic určíme z rovnice (3.109) s použitím vztahu (3.103)

$$\varrho_1 = \varrho_3 \frac{1}{|m_3^2 - \varrho_3^2|} \quad (3.110)$$

což je výraz shodný s výrazem (3.105).

Je-li $m_2 = d$, lze podle (3.103) psát

$$d = \frac{m_3}{m_3^2 - \epsilon_3^2}$$

a pro kružnice A, B dostaneme

$$d = \frac{m_{3A}}{m_{3A}^2 - \epsilon_3^2}; \quad d = \frac{m_{3B}}{m_{3B}^2 - \epsilon_3^2}$$

takže platí

$$d^2 = \frac{m_{3A}m_{3B}}{(m_{3A}^2 - \epsilon_3^2)(m_{3B}^2 - \epsilon_3^2)}$$

neboli za použití rovnice (3.106) a (3.110)

$$d^2 = \epsilon_{1A}\epsilon_{1B} \quad (3.111)$$

Vzdálenost mezi středy kružnic v rovině (z_3) určíme ze vztahu

$$2D = |m_{3A}| + |m_{3B}|$$

Za použití rovnice (3.103), (3.105), (3.107) a (3.111) dostaneme po úpravě

$$2D = \epsilon_3 \sqrt{\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} + 1} \sqrt{\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B}} \quad (3.112)$$

Označíme-li $\sqrt{\epsilon_A/\epsilon_B} = R$, lze psát

$$2D = \epsilon_3 \frac{R^2 + 1}{R}$$

takže řešením této rovnice dostaneme

$$R = \frac{D}{\epsilon_3} + \sqrt{\left(\frac{D}{\epsilon_3}\right)^2 - 1} \quad (3.113)$$

U sousého vedení je vlnová impedance dána výrazem (3.65)

$$Z_0 = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B}$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu $\epsilon_A/\epsilon_B = R^2$, je $Z_0 = (276/\sqrt{\epsilon_r}) \log R$, takže za použití vztahu (3.113) můžeme vyjádřit vlnovou impedanci dvouvodičového vedení výrazem

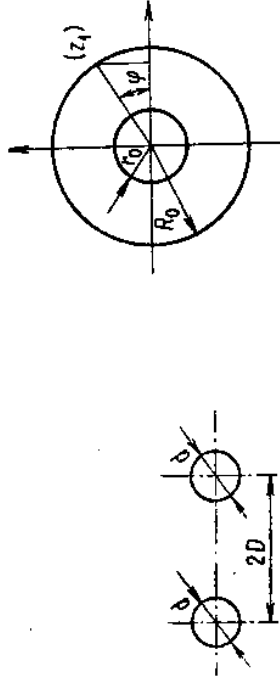
$$Z_0 = \frac{276}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \left[\frac{2D}{d} + \sqrt{\left(\frac{2D}{d}\right)^2 - 1} \right] \quad (3.114)$$

kde $2D$ je vzdálenost mezi osami obou vodičů,
 d průměr vodiče.

Jestliže platí $2D/d \gg 1$, lze použít přibližný vztah

$$Z_0 \approx \frac{276}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{4D}{d} \quad (3.115)$$

Rozložení elektromagnetického pole v sousém vedení je určeno rovnicemi (3.62). Elektrické pole je radiální, magnetické pole má kruhové siločáry (obr. 3.9). Vyšetřeme, jaké bude rozložení elektromagnetického pole v nesousém dvoudrátovém vedení.



Obr. 3.20. Rozměry dvoudrátového vedení

Elektrické pole v rovině (z_1) v sousém vedení je pole radiální, takže pro určitou siločáru platí podle obr. 3.21

$$\text{tg } \varphi = \frac{y_1}{x_1} = \text{konst} = B$$

Podle vztahů uvedených v příloze G lze psát

$$x_1 = \frac{1}{2}(z + z^*); \quad y_1 = \frac{1}{2j}(z - z^*)$$

takže rovnici siločáry elektrického pole můžeme napsat ve tvaru

$$jB = \frac{z_1 - z_1^*}{z_1 + z_1^*} \quad (3.116)$$

Vzhledem k tomu, že sousé vedení v rovině (z_1) je možné převést ve vedení ne-sousé v rovině (z_3) pomocí vztahů

$$z_1 = z_2 - d; \quad z_2 = \frac{1}{z_3}$$

neboli

$$z_1 = \frac{1}{z_3} - d$$

je možné upravit rovnici (3.116) do tvaru

$$z_3 z_3^* - z_3 \left(\frac{1}{2d} - j \frac{1}{2Bd} \right) - z_3^* \left(\frac{1}{2d} + j \frac{1}{2Bd} \right) = 0 \quad (3.117)$$

Porovnáme-li tuto rovnici s obecnou rovnicí kružnice s poloměrem ϱ a se souřadnicemi středu m, n (viz přílohu G)

$$z_3^* - z(m - jn) - z^*(m + jn) + m^2 + n^2 - \varrho^2 = 0$$

je zřejmé, že rovnice (3.117) je rovnicí kružnice se souřadnicemi středu

$$m = \frac{1}{2d}; \quad n = \frac{1}{2Bd}$$

a s poloměrem

$$\varrho = \frac{1}{2d} \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}}$$

akže za použití rovnice (3.111) dostaneme

$$m = \frac{1}{2\sqrt{R_0 r_0}}; \quad n = \frac{1}{2B\sqrt{R_0 r_0}} \quad (3.118)$$

$$\varrho = \frac{1}{2\sqrt{R_0 r_0}} \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}} \quad (3.119)$$

Magnetické pole v rovině (z_1) u sousého vedení má kružnicové siločáry, přičemž kružnici poloměru ϱ_1 , můžeme vyjádřit rovnicí

$$z_1 z_1^* = \varrho_1^2 \quad (3.120)$$

Za použití vztahů

$$z_1 = z_2 - d; \quad z_2 = \frac{1}{z_3}$$

ze psát po úpravě rovnici (3.120) ve tvaru

$$z_3 z_3^* - z_3 \frac{d}{d^2 - \varrho_1^2} - z_3^* \frac{d}{d^2 - \varrho_1^2} + \frac{1}{d^2 - \varrho_1^2} = 0$$

Porovnáním této rovnice s obecnou rovnicí kružnice dostaneme

$$m = \frac{d}{d^2 - \varrho_1^2}; \quad n = 0$$

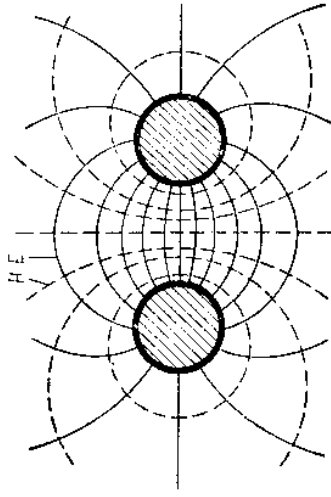
$$\varrho = \frac{\varrho_1}{|d^2 - \varrho_1^2|}$$

a po dosazení vztahu (3.111)

$$m = \frac{\sqrt{R_0 r_0}}{R_0 r_0 - \varrho_1^2}; \quad n = 0 \quad (3.121)$$

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{|R_0 r_0 - \varrho_1^2|} \quad (3.122)$$

Z toho vyplývá, že siločáry elektrického a siločáry magnetického pole u ne-sousého dvouvodivového vedení vytvářejí soustavu ortogonálních kružnic. Příklad rozložení tohoto pole je na obr. 3.22.



Obr. 3.22. Rozložení elektromagnetického pole v dvoudrátovém vedení

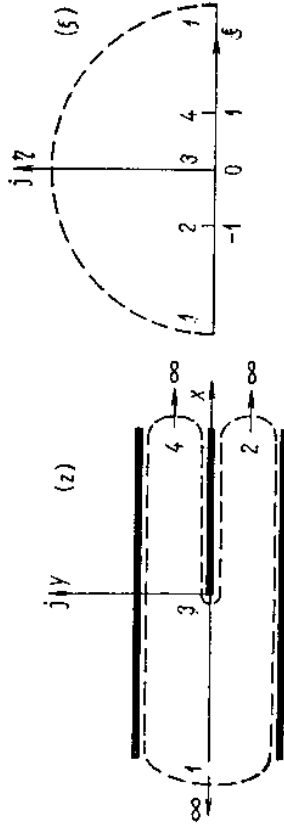
3.6. SYMETRICKÉ PÁSKOVÉ VEDENÍ

Symetrickým páskovým vedením budeme nazývat vedení tvořené tenkým páskem, umístěným mezi dvěma rovnoběžnými širšími vodivými pásy (obr. 3.23). Toto vedení vzniklo z požadavku, aby elektromagnetické pole bylo co nejvíce uzavřeno v prostoru mezi pásy. Vinovou impedanci a rozložení elektromagnetického pole určíme metodou konformního zobrazení, přičemž k získání potřebných transformačních vztahů použijeme Schwarzovo - Christoffelovo zobrazení (viz přílohu D).



Obr. 3.23. Symetrické páskové vedení

Předpokládáme zpočátku, že šířka vedení je v jednom směru nekonečně velká a že tloušťka vnitřního pásku je nulová. Takto upravené vedení umístíme do komplexní roviny (z) tak, jak je v příčném řezu naznačeno na obr. 3.24. Vnitřek polygonální oblasti, vyznačené na obr. 3.24 přerušovanou čarou, zobrazíme pomocí



Obr. 3.24. Zobrazení vnitřku polygonální oblasti roviny (z) na horní polorovinu roviny (\bar{z})

Schwarzova – Christoffelova zobrazení na horní polovinu pomocné komplexní roviny (ζ) a tuto oblast převedeme dalším zobrazením na jinou polygonální oblast v komplexní rovině (w). Polygon v komplexní rovině (w) pak bude mít při konečných příčných rozměrech páskového vedení vlastnosti ideálního kondenzátoru, u něhož je snadné určit kapacitu i rozložení pole.

Zobrazení vnitřku polygonální oblasti v rovině (z) na horní polovinu komplexní roviny (ζ) provedeme zobrazovacím vztahem

$$\frac{dz}{d\zeta} = A_1 (\zeta - \zeta_1)^{\alpha_1/\pi-1} (\zeta - \zeta_2)^{\alpha_2/\pi-1} (\zeta - \zeta_3)^{\alpha_3/\pi-1} (\zeta - \zeta_4)^{\alpha_4/\pi-1} \quad (3.123)$$

kde A_1 je nenulová konstanta,

ζ_1 až ζ_4 jsou předpokládané obrazy vrcholů 1 až 4 polygonu umístěné na reálné ose ζ roviny (ζ),

α_1 až α_4 úhly při jednotlivých vrcholech polygonu.

Z vlastností Schwarzova – Christoffelova zobrazení vyplývá, že můžeme libovolně zvolit tři body na reálné ose ζ roviny (ζ). V našem případě je výhodné využít geometrické symetrie vedení. Okraj vnitřního pásku 3 na obr. 3.24 jsme umístili v rovině (z) do počátku souřadnic, a proto bude výhodné umístit i jeho obraz v rovině (ζ) do počátku souřadnic, tj. položit $\zeta_3 = 0$. Další body na reálné ose v rovině (ζ) zvolíme tak, aby výsledný zobrazovací vztah byl pokud možno jednoduchý, tj. např. $\zeta_1 = \infty$, $\zeta_2 = -1$. Podle principu symetrie můžeme předpokládat, že obraz bodu 4 bude $\zeta_4 = 1$. Pro přehlednost sestavme nyní velikosti úhlů α_k při jednotlivých vrcholech zobrazovacího polygonu v rovině (z) a obrazy ζ_k vrcholů daného polygonu do tabulky

bod	úhel α_k	ζ_k
1	0	∞
2	0	-1
3	2π	0
4	0	1

Zobrazovací vztah (3.123) můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= A_1 (\zeta + 1)^{-1} \zeta (\zeta - 1)^{-1} = A_1 \frac{\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)} = \\ &= -A_1 \frac{\zeta}{(1 + \zeta)(1 - \zeta)} \end{aligned}$$

takže pak platí

$$z = -A_1 \int_0^{\zeta} \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} d\zeta + A_2$$

kde se v integrálu integruje po libovolné cestě spojující bod 0 s bodem ζ a ležící v horní polorovině roviny (ζ). Číslo A_2 je aditivní konstanta, jejíž hodnota se určí z podmínky, že obrazem bodu $z_3 = 0$ je bod $\zeta_3 = 0$, z toho plyne $A_2 = 0$.

Po výpočtu integrálu dostaneme

$$z = \frac{A_1}{2} \ln(1 - \zeta^2) \quad (3.124)$$

kde znakem ln označujeme hlavní hodnotu logaritmu.

Hodnotu koeficientu A_1 určíme na základě této úvahy: Předpokládejme, že v horní polorovině (ζ) opišeme kolem bodu $\zeta_2 = -1$ polokružnici c_r s poloměrem $r \rightarrow 0$, přičemž vektor $\zeta + 1 = r e^{i\varphi}$ se pootočí tak, že se argument φ změní z hodnoty π do 0. Potom odpovídající bod z musí přejít z přímky spojující body z_1, z_2 na polopřímku, která spojuje body z_2 a z_3 . V důsledku toho se funkce (3.124) změní o přírůstek

$$\Delta z = jd + O(r) \quad (3.125)$$

kde kladné číslo d značí vzdálenost středního pásku od krajního pásku a veličina $O(r) \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow 0$. Přírůstek funkce Δz můžeme též vyjádřit tak, že v integrálu

$$z = -A_1 \int \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} d\zeta$$

použijeme vztah

$$\zeta + 1 = r e^{i\varphi} \quad (\pi > \varphi > 0)$$

a integraci provedeme po polokružnici c_r . Potom platí

$$\Delta z = -A_1 \int_{c_r} \frac{j r e^{i\varphi} (r e^{i\varphi} - 1)}{r e^{i\varphi} (2 - r e^{i\varphi})} d\varphi$$

takže při $r \rightarrow 0$ je

$$\Delta z = j \frac{A_1}{2} \int_{\pi}^0 d\varphi = -j\pi \frac{A_1}{2} \quad (3.126)$$

Porovnáme-li obě vyjádření přírůstku Δz podle vzorců (3.125) a (3.126) a přejdeme-li k limitě pro $r \rightarrow 0$, kdy $O(r) \rightarrow 0$, dostaneme

$$-j\pi \frac{A_1}{2} = jd$$

z něhož stanovíme konstantu A_1

$$A_1 = -\frac{2d}{\pi} \quad (3.127)$$

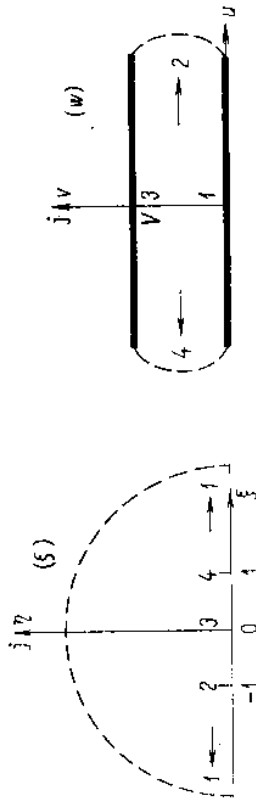
takže po dosazení do vzorce (3.124) dostaneme zobrazovací funkci

$$z = -\frac{d}{\pi} \ln(1 - \zeta^2) \quad (3.128)$$

Zobrazme dále horní polorovinu roviny (ζ) na pás roviny (w) podle obr. 3.25. K tomu použijeme vyjádření derivace $dw/d\zeta$ zobrazovací funkce $w = w(\zeta)$ ve tvaru

$$\frac{dw}{d\zeta} = B_1 (\zeta - \zeta_1)^{\beta_1/\pi-1} (\zeta - \zeta_2)^{\beta_2/\pi-1} (\zeta - \zeta_3)^{\beta_3/\pi-1} (\zeta - \zeta_4)^{\beta_4/\pi-1} \quad (3.129)$$

příčměž za body ζ_1 až ζ_4 vezmeme již dříve použité body na reálné ose roviny (ζ),
 $\zeta_1 = \infty$, $\zeta_2 = -1$, $\zeta_3 = 0$ a $\zeta_4 = 1$.



Obr. 3.25. Zobrazení horní polov roviny (ζ) na pás v rovině (w)

V rovině (w) orientujeme polygón tak, jak je vyznačeno na obr. 3.25. Sestavíme opět pro přehlednost velikosti úhlů β_k při jednotlivých vrcholech polygónu v rovině (w) a hodnoty ζ_k odpovídající v rovině (ζ) vrcholům polygónu do tabulky

bod	úhel β_k	ζ_k
1	π	∞
2	0	-1
3	π	0
4	0	1

Potom můžeme vztah (3.129) napsat ve tvaru

$$\frac{dw}{d\zeta} = B_1(\zeta + 1)^{-1}(\zeta - 1)^{-1} = \frac{B_1}{\zeta^2 - 1}$$

odkud plyne

$$w = B_1 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2 - 1} + B_2$$

kde se integruje po libovolné cestě ležící v horní polovině (ζ) a spojující bod 0 s bodem ζ . Po provedení naznačené integrace dostaneme

$$w = \frac{B_1}{2} \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + B_2 \quad (3.130)$$

kde znakem ln označujeme hlavní hodnotu logaritmu.

Aditivní konstantu B_2 určíme z podmínky, že bodu $w_3 = jV$ odpovídá bod $\zeta_3 = 0$. Platí tedy

$$jV = \frac{B_1}{2} \ln(-1) + B_2$$

neboli

$$jV = j \frac{B_1}{2} \pi + B_2$$

odkud plyne

$$B_2 = j \left(V - \pi \frac{B_1}{2} \right)$$

Vztah (3.130) pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$w = \frac{B_1}{2} \left(\ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - j\pi \right) + jV \quad (3.131)$$

Činitel B_1 lze určit ze vztahu

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w(\zeta) = 0$$

odkud plyne podmínka

$$0 = \frac{B_1}{2} [\ln(1) - j\pi] + jV$$

z níž dostaneme

$$B_1 = \frac{2V}{\pi}$$

Zobrazovací vztah pak nabude tvaru

$$w = \frac{V}{\pi} \left(\ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - j\pi \right) + jV \quad (3.132)$$

neboli

$$w = \frac{V}{\pi} \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

odkud plyne dále

$$\frac{\pi w}{V} = \ln \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} + j\pi \quad (3.133)$$

Označíme-li

$$w_1 = \frac{\pi w}{V} - j\pi$$

lze vztah (3.133) zjednodušit na tvar

$$w_1 = \ln \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

odkud plyne

$$e^{w_1} = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \quad (3.134)$$

a dále

$$1 - \zeta = \frac{2e^{w_1}}{e^{w_1} + 1}; \quad 1 + \zeta = \frac{2}{e^{w_1} + 1}$$

takže

$$(1 - \zeta)(1 + \zeta) = \frac{4e^{w_1}}{(e^{w_1} + 1)^2} = \frac{1}{\cosh^2 \frac{w_1}{2}} \quad (3.135)$$

Použitím tohoto vztahu a rovnice (3.128) dostaneme po úpravě

$$\frac{\pi z}{2d} = \ln \cosh \frac{w_1}{2} \quad (3.136)$$

Zavedeme-li substituci $w_1/2 = -jw_2$, dostaneme dále

$$\frac{\pi z}{2d} = \ln \cos w_2 \quad (3.137)$$

odkud plyne

$$e^{\pi z/2d} = \cos w_2 \quad (3.138)$$

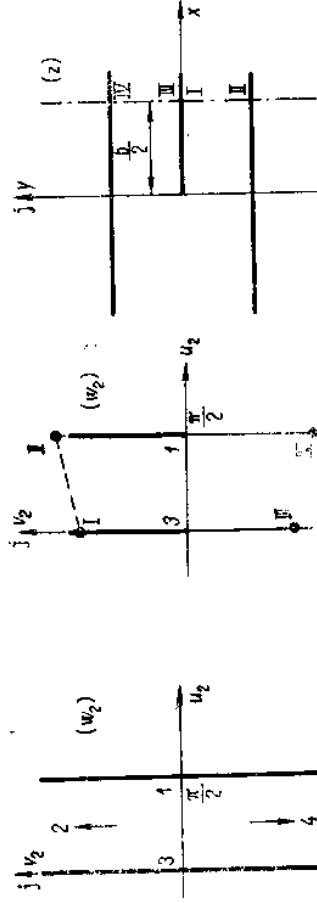
Rovnice (3.137) a (3.138) jsou již transformační vztahy mezi komplexní rovinou (z), do které jsme umístili páskové vedení, a komplexní rovinou (w₂). Protože proměnné w₂ a w jsou vázány vztahem

$$w_2 = j \frac{w_1}{2} = \frac{j}{2} \left(\frac{\pi w}{V} - j\pi \right)$$

neboli

$$w_2 = u_2 + jv_2 = \frac{\pi}{2} + j \frac{\pi w}{2V}$$

vidíme, že se zobrazením (3.137) a (3.138) polygon ve tvaru vodorovného pásu v rovině (w) zobrazuje do roviny (w₂) na polygon tvaru svislého pásu šířky π/2 (obr. 3.26).



Obr. 3.26.

Vztah (3.138) je tedy zobrazením, kterým se zobrazuje část symetrického páskového vedení v rovině (z), na ideální kondenzátor v rovině (w₂).

K určení vlnové impedance je třeba znát kapacitu vedení. Předpokládejme, že šířka vnitřního pásu je b a vyššíme kapacitu vedení symetrického podle svislé

roviny, umístěné ve vzdálenosti $x = b/2$ (obr. 3.27). Toto vedení zobrazíme vztahem (3.138) do roviny (w₂), určíme příslušnou kapacitu a z té pak velikost vlnové impedance.

Zapišeme-li z a w₂ ve složkovém tvaru

$$z = x + jy; \quad w_2 = u_2 + jv_2$$

a dosadíme-li do (3.138), dostaneme

$$e^{\pi(x+jy)/2d} = \cos(u_2 + jv_2)$$

neboli

$$e^{\pi x/2d} \left(\cos \frac{\pi y}{2d} + j \sin \frac{\pi y}{2d} \right) = \cos u_2 \cosh v_2 - j \sin u_2 \sinh v_2$$

odkud pak oddělením reálné a imaginární části vyplývá

$$e^{\pi x/2d} \cos \frac{\pi y}{2d} = \cos u_2 \cosh v_2 \quad (3.139)$$

$$e^{\pi x/2d} \sin \frac{\pi y}{2d} = -\sin u_2 \sinh v_2 \quad (3.140)$$

Po umocnění na druhou a sečtení obou posledních rovnic dostaneme vztah

$$e^{\pi x/d} = \cos^2 u_2 \cosh^2 v_2 + \sin^2 u_2 \sinh^2 v_2$$

ze kterého určíme pro danou šířku pásu $x = b/2$ odpovídající velikost v₂, jednak pro u₂ = 0, jednak pro u₂ = π/2.

Pro u₂ = 0 platí

$$e^{\pi b/2d} = \cosh^2 v_2(b) \quad (3.141)$$

takže

$$|v_2(b)| = \operatorname{argcosh} e^{\pi b/4d}$$

Pro u₂ = π/2 platí analogicky

$$e^{\pi b/2d} = \sinh^2 v_2(b) \quad (3.142)$$

takže

$$|v_2(b)| = \operatorname{argsinh} e^{\pi b/4d}$$

Protože při stejné hodnotě argumentu vždy platí

$$\operatorname{argsinh} e^{\pi b/4d} > \operatorname{argcosh} e^{\pi b/4d}$$

je zřejmé, že pro pásek konečné šířky b nedostaneme v rovině (w₂) pásky stejné výšky |v₂(b)|, rozdíl však rychle klesá s rostoucí hodnotou poměru b/d. Protože odchylka hodnot |v₂(b)| je ve skutečnosti malá, můžeme hodnotu |v₂(b)| velmi dobře aproximovat aritmetickým průměrem hodnot daných vztahy (3.141) a (3.142), takže

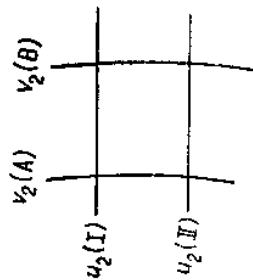
$$|v_2(b)| = \frac{1}{2} (\operatorname{argsinh} e^{\pi b/4d} + \operatorname{argcosh} e^{\pi b/4d}) \quad (3.143)$$

Jestliže čáry u₂ = konst jsou ekvipotenciály a čáry v₂ = konst jsou siločáry, pak

kapacitu kondenzátoru v rovině (w_2) určíme podle obr. 3.28 ze vztahu

$$C = \epsilon \frac{v_2(A) - v_2(B)}{u_2(I) - u_2(II)}$$

kde ϵ je permitivita prostředí.



Obr. 3.28. Siločáry v_2 a ekvipotenciály u_2

V našem případě platí pro kapacitu jedné čtvrtiny průřezu vedení

$$C_{1/4} = \frac{|v_2(b)|}{\frac{\pi}{2}}$$

takže pak pro celý průřez vedení dostaneme po dosazení ze vztahu (3.143)

$$C = \frac{4\epsilon}{\pi} (\operatorname{argsinh} e^{ab/4d} + \operatorname{argcosh} e^{ab/4d}) \quad (3.144)$$

Pro vlnovou impedanci vedení s vlnou TEM jsme v kap. 2. odvodili vztah (2.85)

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{C}$$

kde C je kapacita na jednotku délky vedení, takže podle (3.144) lze vyjádřit vlnovou impedanci symetrického páskového vedení

$$Z_0 = \frac{\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\operatorname{argsinh} e^{ab/4d} + \operatorname{argcosh} e^{ab/4d}} \quad (3.145)$$

Protože hyperbolometrické funkce reálné proměnné x můžeme vyjádřit výrazy

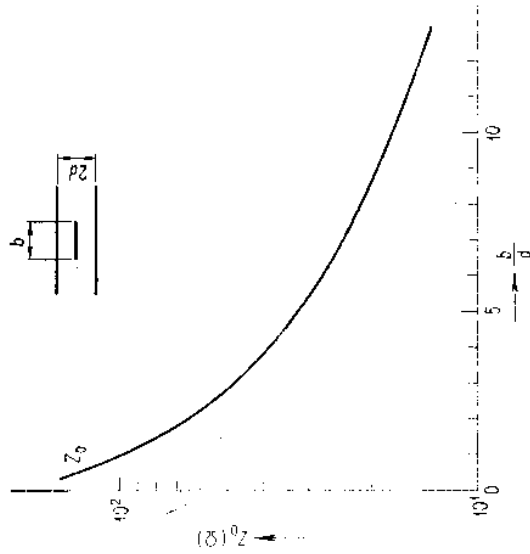
$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); & x \in (-\infty, +\infty) \\ \operatorname{argcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); & x \geq 1 \end{aligned}$$

dostaneme jejich použitím po úpravě přibližný vzorec pro vlnovou impedanci

$$Z_0 \approx \frac{30\pi^2}{\ln(4e^{ab/2d})} \quad (3.146)$$

kteřý vyjadruje vlnovou impedanci Z_0 jako funkci poměru b/d . Graf této funkce je na obr. 3.29.

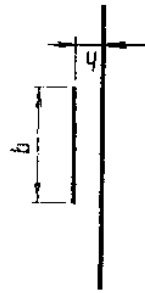
Vzorec (3.146) je použitelný s dostatečnou přesností (s chybou menší než 1 %) pro hodnoty $b/d > 1$. Při hodnotách $b/d < 1$ jeho chyba vzrůstá.



Obr. 3.29. Závislost vlnové impedance na poměru b/d

3.7. NESYMETRICKÉ PÁSKOVÉ VEDENÍ

Předpokládejme páskové vedení podle obr. 3.30. Jestliže je dolní pásek mnohem širší než pásek horní, magnetické pole se uzavírá pouze kolem užšího horního pásku. To je z konstrukčního hlediska velmi výhodné, neboť vedení lze položit na jakoukoliv podložku bez nebezpečí, že se naruší jeho vlastnosti.



Obr. 3.30. Nesymetrické páskové vedení

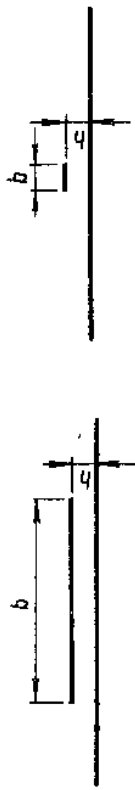
Toto vedení se obvykle vyrábí technologií plošných spojů, takže mezi páskovými vodiči je pevné dielektrikum (substrát) s malými ztrátami. Protože šířka horního pásku je obvykle porovnatelná s tloušťkou dielektrického substrátu, nelze zanedbat rozptylové pole na okrajích horního pásku, které prochází jak dielektrickým substrátem, tak vzduchovým prostředím. Vedení má ve svém příčném průřezu dvě různá dielektrická prostředí, takže je příčně nehomogenní. Proto v něm nemůže

trického a magnetického pole i v podélném směru (o možnosti šíření takových vln bude pojednáno v čl. 4.3 a 5.2). Protože však příčný rozměr těchto vedení je mnohem menší než vlnová délka, jsou podélné složky intenzit pole v porovnání s příčnými složkami zanedbatelně malé. Vlnu, která se na vedení šíří, považujeme přibližně za vlnu TEM, přičemž přibližnost vyjadřujeme tím, že hovoříme o šíření vlny kvazi-TEM.

Vlastnosti nesymetrického páskového vedení je možné analyzovat metodami, na které jsou uvedeny odkazy v kap. 11. Pro praktické použití zcela vyhovuje analýza pomocí přiblížení kvazi-TEM. U širokých pásků, kdy platí $b/h \gg 1$, je vliv rozptylového pole na kapacitu zanedbatelný, takže vlnová impedance, jejíž velikost závisí na kapacitě vedení podle vztahu (2.85), se blíží hodnotě

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{b} \quad (3.147)$$

kde b je šířka horního pásku, h vzdálenost pásků.



Obr. 3.31. Široké a úzké páskové vedení

V případě, že je horní pásek úzký, tj. $b/h \leq 1$, rozptylové pole naopak převládá a má podobný průběh jako pole vodiče kruhového průřezu, umístěného nad vlnovou rovinou plochou. Experimentálně bylo zjištěno, že kapacita vedení s úzkým páskem zanedbatelně tloušťky a vedení s vodičem kruhového průřezu jsou stejné, jestliže je splněn vztah

$$b \approx 2d$$

kde b je šířka pásku,

d průměr vodiče kruhového průřezu.

K přibližnému vyjádření vlnové impedance úzkého páskového vedení můžeme tedy použít upravený vzorec (3.115), odvozený v čl. 3.5 pro vlnovou impedanci



Obr. 3.32. Vedení ekvivalentních vlnových impedancí

dvourátového vedení. Protože vlnová impedance vedení s vodičem kruhového průřezu, umístěným nad vlnovou rovinou, je poloviční (vedení má v porovnání s dvourátovým vedením dvojnásobnou kapacitu), lze psát

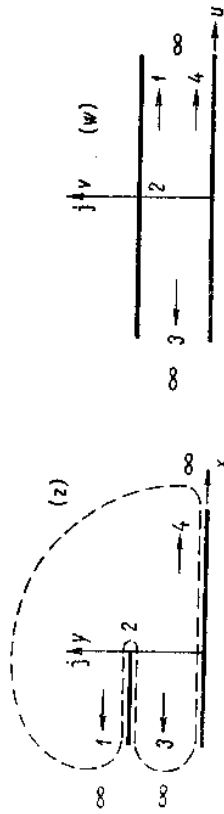
$$Z_0 \approx 138 \log \frac{4D}{d}; \quad (D \gg d)$$

takže pro páskové vedení se šířkou pásku b dostaneme přibližný vztah

$$Z_0 \approx 138 \log \frac{8h}{b} \quad (3.148)$$

přičemž předpokládáme, že $D = h$.

K odvození přesnějších výrazů pro vlnové impedance než jsou rovnice (3.147) a (3.148) a k určení průběhu elektromagnetického pole vedení lze použít konformní zobrazení analogicky jako u symetrického páskového vedení, přičemž základním problémem je nalezení vhodného transformčního vztahu, který by umožnil popsat vlastnosti vedení pomocí jednoduchých funkcí.



Obr. 3.33. Převod polygonální oblasti z roviny (z) na pás do roviny (w)

Pro široké pásky, kde $b/h \gg 1$, můžeme použít k určení průběhu pole v okolí okraje horního pásku zobrazení uvedené na obr. 3.33. Funkci, zobrazující rovinu průřezu nesymetrického vedení do pásu mezi elektrodami ideálního kondenzátoru lze odvodit ve tvaru [2], [5]

$$z = \frac{h}{\pi} (e^w + 1) \quad (3.149)$$

Z rovnice (3.149) můžeme vyjádřit parametrické vztahy pro určení průběhu elektrického pole i pro ekvipotenciální čáry. Vlnovou impedanci určíme pak analogicky jako u symetrického vedení z kapacity C na jednotku délky vedení. Protože polygon, použitý k odvození vztahu (3.149), předpokládá nekonečnou šířku pásků (obr. 3.33), je při konečné šířce pásků výsledek zatížen chybou, která vzrůstá s klesajícím poměrem b/h .

Použití dokonalejšího modelu zobrazení, které respektuje konečnou šířku pásků, vede na eliptické integrály, což je pro technické použití nepraktické. Mnoho

autorů se proto pokusilo najít takové zobrazení, které by vedlo na jevnou funkci závislosti při dostatečně přesných výsledcích. Blížeji podrobnosti k této problematice jsou uvedeny v kap. 11 a v příslušné literatuře.

Literatura ke kapitole 3

- [1] Kraus, B.: Theoretické základy techniky centimetrových vln. Praha, SNTL 1957.
- [2] Grivet, R.: The Physics of Transmission Lines at High and Very High Frequencies. London, Academic Press 1970.
- [3] W'holey, W. B. — Eldred, W. N.: A New Type of Slotted Line Section. Proc. IRE 1950, č. 3, str. 244 až 248.
- [4] Fuks, B. A. — Šabat, B. V.: Funkce komplexní proměnné (překlad z ruštiny). Praha, Přírodovědecké vydavatelství 1953.
- [5] Tysl, V.: Obvody a technika velmi vysokých kmitočtů I. Skriptum. Praha, Ediční středisko ČVUT 1982.
- [6] Angeot, A.: Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry (překlad z francouzštiny). Praha, SNTL 1960.
- [7] Růžička, V. — Puncóchář, J.: Teorie obvodů V. Skriptum FE VUT. Praha, SNTL 1974.
- [8] Milotanov, O. S. — Šobenin, N. P.: Technika sverchvysokých častot. Moskva, Atomizdat 1980.

4. Nehomogenní vedení

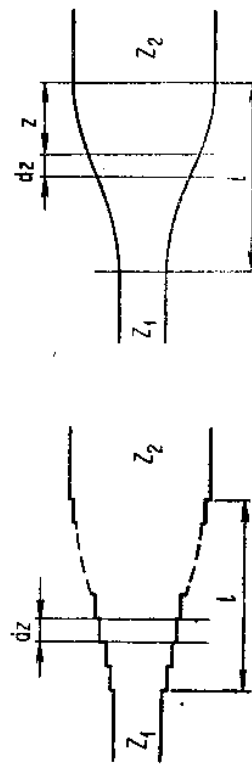
Nehomogenní vedení je charakterizováno tím, že se buď jeho vlnová impedance mění se vzdáleností, nebo že parametry prostředí nejsou v celém průřezu vedení stejné. Podle charakteru nehomogenit rozlišujeme pak vedení podélné nebo příčně nehomogenní. Úseky podélně nehomogenních vedení se často používají jako přechody spojující dvě vedení s různými vlnovými impedancemi, příčně nehomogenní vedení se používají k dosažení určitých zvláštních vlastností vedení (k dosažení určité fázové rychlosti šíření, ke konstrukci posouváče fáze apod.). V této kapitole naznačíme metodiku řešení podélně nehomogenních vedení a na příkladu vlnovodu obdélníkového průřezu uvedeme řešení příčně nehomogenního vedení. V závěru kapitoly uvedeme vlastnosti radiálního vedení.

4.1. PODÉLNĚ SPOJITĚ NEHOMOGENNÍ VEDENÍ

Předpokládáme úsek vedení s obecným spojitým průběhem změny impedance $Z(z)$ a nahradíme tento spojitý průběh nespojitým, stupňovitým průběhem nekonečně malých úseků délky dz [1]. Předpokládáme současně, že se vlnová impedance na jednotlivých úsecích mění o dZ .

Změna impedance o dZ vyvolá diferenciální změnu činitele odrazu $d\varrho$ podle vztahu (2.126)

$$d\varrho = \frac{(Zz) + dZ(z) - Z(z)}{Z(z) + dZ(z) + Z(z)} \approx \frac{dZ(z)}{2Z(z)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} [\ln Z(z)] \quad (4.1)$$



Obr. 4.1. Náhrada spojitého přechodu stupňovitým přechodem

Předpokládáme-li podle obr. 4.1 kladný smysl souřadnice z směrem od zátěže Z_2 , můžeme vyjádřit výsledný činitel odrazu integrací výrazu (4.1) po celé délce l úseku

vedení

$$\varrho = \frac{1}{2} \int_0^l e^{-j2\alpha z} \frac{d}{dz} [\ln Z(z)] dz \quad (4.2)$$

neboli

$$\varrho = \frac{1}{2} \int_0^l P(z) e^{-j2\alpha z} dz; \quad P(z) = \frac{d}{dz} [\ln Z(z)] \quad (4.3)$$

Tato rovnice je v podstatě Fourierova transformace funkce $P(z)$, která je nulová mimo interval $0 \leq z \leq l$. Její pomocí můžeme řešit problém analýzy daného úseku vedení, tj. můžeme ke známému průběhu vlnové impedance $Z(z)$ určit činitel odrazu. Složitější je problém syntézy, kdy k požadované hodnotě činitele odrazu máme určit průběh vlnové impedance úseku nehomogenního vedení.

4.1.1. Vedení s exponenciální změnou impedance

U exponenciálního průběhu impedance platí

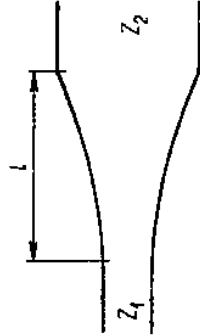
$$Z(z) = Z_2 e^{-\alpha z} \quad (4.4)$$

takže pro $z = l$ (na začátku vedení, viz obr. 4.2) je

$$Z_1 = Z_2 e^{-\alpha l}$$

odkud

$$a = \frac{1}{l} \ln \frac{Z_2}{Z_1} \quad (4.5)$$



Obr. 4.2. Exponenciální přechod mezi vedeními

Ze vztahu (4.3) a (4.4) vyplývá

$$P(z) = \frac{d}{dz} \ln Z(z) = \frac{d}{dz} (\ln Z_2 - \alpha z)$$

neboli

$$P(z) = -\alpha$$

Použitím výrazu (4.3) dostaneme

$$\varrho = -\frac{1}{2} \alpha \int_0^l e^{-j2\alpha z} dz = -\frac{1}{2} \alpha \frac{j}{2\alpha} (e^{-j2\alpha l} - 1)$$

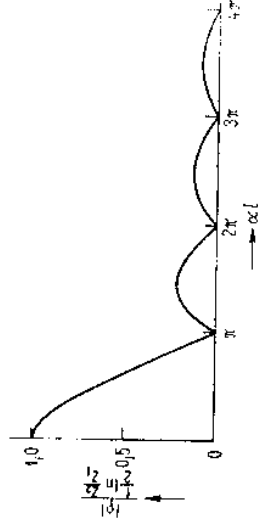
takže po úpravě lze vyjádřit činitel odrazu výrazem

$$\varrho = -\frac{1}{2} \ln \frac{Z_2 \sin \alpha l}{Z_1 \alpha l} e^{-j\alpha l} \quad (4.6)$$

popř.

$$|\varrho| = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_2}{Z_1} \frac{|\sin \alpha l|}{\alpha l} \quad (4.7)$$

Je zřejmé, že činitel odrazu bude nulový při hodnotě argumentu $\alpha l = \nu \pi$, tj. při délce vedení $l = \nu \lambda / 2$ (kde $\nu = 1, 2, 3, \dots$), viz obr. 4.3.

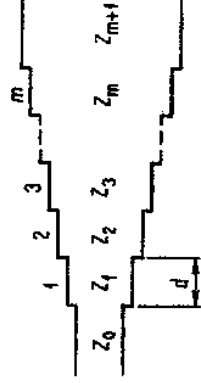


Obr. 4.3. Modul činitele odrazu u exponenciálního přechodu

4.2. PODÉLNĚ NEHOMOGENNÍ VEDENÍ SE STUPŇOVITOU ZMĚNOU IMPEDANCE

Když ve stupňovém vedení (čl. 4.1) nekonečně malé přírůstky dz nahradíme n stupni konečné délky d (obr. 4.4), z nichž každý zavádí fázový posun $\Theta = \alpha d$, potom činitel odrazu na vstupu vedení nemůžeme vyjádřit integrálem (4.3), ale součtem [1]

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m P_n(z) e^{-j2n\Theta} d \quad (4.8)$$



Obr. 4.4. Stupňový přechod mezi vedeními

Ve funkci $P_n(z)$ musíme nahradit diferenciály konečnými přírůstky, takže

$$P_n(z) = \frac{\Delta \ln Z_n}{\Delta z} = \frac{\ln Z_{n+1} - \ln Z_n}{d}$$

neboli

$$P_n(z) = \frac{1}{d} \ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \quad (4.9)$$

a činitel odrazu ϱ lze vyjádřit přibližným výrazem

$$\varrho \approx \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m \ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} e^{-j2n\theta} \quad (4.10)$$

kteří je použitelný s výhovující přesností v mezích $0,5 < Z_{n+1}/Z_n < 2$, jak se můžeme přesvědčit porovnáním se vztahem (2.126).

Funkce $P_n(z)$, určené vztahem (4.9), mohou mít různé rozložení, které však vždy bývá symetrické. Velmi často se používají úseky vedení, kde rozložení funkce $P_n(z)$ je úměrné binomickým koeficientům nebo Čebyševovým polynomům.

4.2.1. Vedení se stupňovou změnou impedance podle binomického rozložení

Jestliže budeme předpokládat vedení s m stupni, je možné vyjádřit koeficienty binomického rozložení vztahem

$$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

kde m je celkový počet stupňů, n pořadí stupně.

Přitom zřejmě platí

$$\begin{aligned} C_n^m &= C_{m-n}^m \\ C_0^m &= C_m^m = 1 \\ C_1^m &= C_{m-1}^m = m \end{aligned}$$

Předpokládejme, že

$$P_n(z) = C_n^m \zeta \quad (4.11)$$

takže platí

$$\begin{aligned} P_0(z) &= C_0^m \zeta = \zeta \\ P_1(z) &= C_1^m \zeta = \zeta m \\ &\vdots \\ P_n(z) &= C_n^m \zeta = \zeta \frac{m!}{(m-n)!n!} \\ &\vdots \\ P_{m-1}(z) &= C_{m-1}^m \zeta = \zeta m \\ P_m(z) &= C_m^m \zeta = \zeta \end{aligned}$$

Provedeme-li součet na obou stranách těchto rovnic, dostaneme

$$\sum_{n=0}^m P_n(z) = \zeta 2^m$$

takže

$$\zeta = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m P_n(z)$$

a s použitím (4.9) lze psát

$$\zeta = \frac{1}{2^m d} \left(\ln \frac{Z_1}{Z_0} + \ln \frac{Z_2}{Z_1} + \dots + \ln \frac{Z_{m+1}}{Z_m} \right)$$

neboli

$$\zeta = \frac{1}{2^m d} \ln \frac{Z_{m+1}}{Z_0} \quad (4.12)$$

kde Z_0 je vlnová impedance na vstupní straně, Z_{m+1} vlnová impedance na výstupní straně.

Vyjádříme-li činitel odrazu na vstupní straně výrazem (4.8) s použitím (4.11), dostaneme

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m C_n^m \zeta e^{-j2n\theta} \cdot d$$

neboli

$$\varrho = \frac{1}{2} \left[\zeta + \zeta m e^{-j2\theta} + \dots + \zeta \frac{m!}{(m-n)!n!} e^{-j2n\theta} + \dots + \zeta e^{-j2m\theta} \right] d$$

takže s použitím (4.12) a po úpravě je

$$\varrho = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{Z_{m+1}}{Z_0} \right) \frac{(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^m}{2^{m/2}} e^{-jm\theta}$$

nebo

$$\varrho = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{Z_{m+1}}{Z_0} \right) \cos^m \theta e^{-jm\theta} \quad (4.13)$$

a modul činitele odrazu je

$$|\varrho| = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{Z_{m+1}}{Z_0} \right) |\cos \theta|^m \quad (4.14)$$

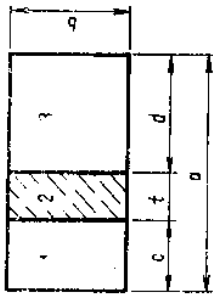
Je zřejmé, že činitel odrazu bude nulový při hodnotě argumentu $\theta = \pi/2$, tj. při délce jednoho stupně vedení $d = \lambda/4$. I při odchylce od této hodnoty, dané např. změnou frekvence přenášené vlny, vykazují přechody s binomickým rozdělením impedance v poměrně širokém rozsahu frekvencí malou hodnotu činitele odrazu a mají velmi plochou frekvenční závislost činitele odrazu.

4.3. PŘÍČNĚ NEHOMOGENNÍ VEDENÍ

V technické praxi se často setkáme s případem, že průřez vedení je částečně vyplněn dielektrikem s malými ztrátami. Metodiku řešení ukážeme na příkladu vlnovodu obdélníkového průřezu.

4.3.1. Vlnovod obdélníkového průřezu s vloženou dielektrickou deskou

Předpokládáme, že vlnovod obdélníkového průřezu je částečně vyplněn dielektrikem podle obr 4.5. Předpokládáme dále, že se v prázdném vlnovodu může šířit vlna TE₁₀ a vyššířme vliv vložené dielektrické desky na vlastnosti elektromagnetické vlny.



Obr. 4.5. Vlnovod s vloženou dielektrickou deskou (v obecné poloze)

Při řešení rozdělíme průřez vlnovodu na tři oblasti, v nichž určíme složky intenzity elektrického a magnetického pole. Z podmínek spojitosti tečných složek intenzity pole na rozhraní různých dielektrik vyloučíme konstanty úměrné amplitudám a po úpravě dostaneme transcendentní rovnici, ze které lze určit součinitel přenosu. Abychom mohli bez potíží splnit okrajové podmínky na rozhraní dielektrických prostředí, je vhodné volit orientaci Hertzových vektorů tak, aby byly kolmé k rozhraní dielektrických prostředí, tj. v našem případě zvolíme vektor Π_x . Avšak v tomto zvláštním případě, kde předpokládáme šíření základního vlnu TE₁₀, který má elektrické pole orientováno ve směru rovnoběžném s rovinou rozhraní dielektrik, by bylo možné použít i Hertzův vektor Π_z . Pro ukázkou jiného postupu řešení použijeme však Hertzův vektor Π_x orientovaný takto

$$\Pi^m = (\Pi_x^m, 0, 0)$$

Vektory intenzity elektrického a magnetického pole vyjádříme podle rovnic (1.62) a (1.63)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega\mu \text{rot } \Pi_x^m = -j\omega\mu(\text{grad } \Pi_x^m \times \mathbf{x}) \\ \mathbf{H} &= k^2 \Pi_x^m + \text{grad div } \Pi_x^m \end{aligned}$$

takže pro složky těchto vektorů platí

$$\begin{aligned} E_x &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = 0 \\ E_y &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = -j\omega\mu \frac{\partial \Pi_x^m}{\partial z} \\ E_z &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = j\omega\mu \frac{\partial \Pi_x^m}{\partial y} \\ H_x &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = k^2 \Pi_x^m + \frac{\partial^2 \Pi_x^m}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} H_y &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{y} = \frac{\partial \Pi_x^m}{\partial x \partial y} \\ H_z &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = \frac{\partial^2 \Pi_x^m}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

Hertzův vektor Π_x^m vyhovuje vlnové rovnici

$$\Delta \Pi_x^m + k^2 \Pi_x^m = 0$$

Zavedeme-li podobně jako u Hertzova vektoru Π_z předpoklad, že Hertzův vektor Π_x lze vyjádřit součinem dvou funkcí $T_1(x, y)$ a $T_2(z)$, dostaneme po úpravě rovnice

$$\begin{aligned} \Delta T_1 + F^2 T_1 &= 0 \\ \frac{d^2 T_2}{dz^2} - \gamma^2 T_2 &= 0 \end{aligned}$$

pro které můžeme napsat řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} T_1 &= (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \\ T_2 &= C_1 e^{j\gamma z} + C_2 e^{-j\gamma z}; \quad (\gamma = j\alpha) \end{aligned} \quad (4.16)$$

přičemž platí

$$F^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.17)$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole stanovíme z rovnic (4.15)

$$\begin{aligned} E_y &= -j\omega\mu(A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) e^{-j\gamma z} \\ E_z &= -j\omega\mu k_x(A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \sin k_y y - D \cos k_y y) e^{-j\gamma z} \\ H_x &= (k^2 + k_x^2)(A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) e^{-j\gamma z} \\ H_y &= k_x k_y(A \sin k_x x - B \cos k_x x)(C \sin k_y y - D \cos k_y y) e^{-j\gamma z} \\ H_z &= j\alpha k_x(A \sin k_x x - B \cos k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) e^{-j\gamma z} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Jednotlivá prostředí budeme při tom rozlišovat horními indexy (1), (2) a (3) ve shodě s obr. 4.5.

Z rovnosti tečných složek intenzit pole \mathbf{E} a \mathbf{H} na rozhraní dielektrických prostředí vyplývá totožnost konstant k_y ve všech třech oblastech.

Z okrajových podmínek na plášti vlnovodu

$$E_z^{(1)} \Big|_{y=0} = E_z^{(2)} \Big|_{y=0} = E_z^{(3)} \Big|_{y=0} = 0$$

vyplývá

$$D^{(1)} = D^{(2)} = D^{(3)} = 0$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

kde n je celé číslo. Z podmínek

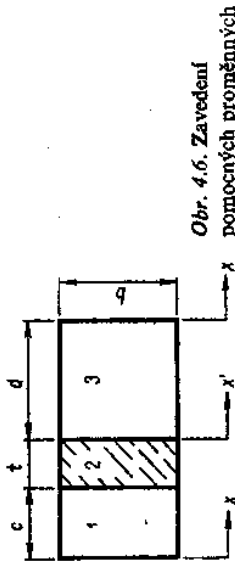
$$E_y^{(1)} \Big|_{x=0} = 0; \quad E_y^{(2)} \Big|_{x=a} = 0$$

plyne

$$A^{(1)} = A^{(3)} = 0$$

plášti vlnovodu. Protože předpokládáme nejjednodušší případ elektromagnetického pole, který odpovídá v prázdném vlnovodu vidu TE_{10} , položíme $n = 0$, a tedy $k_y = 0$. V důsledku toho budou nulové i složky E_z a H_y . Pro zjednodušení formule okrajových podmínek zavedeme pomocné proměnné x' a x'' (obr. 4.6), pro které platí

$$\begin{aligned} x' &= x - (c + t) \\ x'' &= x - a \end{aligned}$$



Obr. 4.6. Zavedení pomocných proměnných

Z rovnice (4.18) dostaneme: Pro oblast (1)

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= -\omega\mu\alpha B^{(1)} \sin k_x^{(1)} x e^{-j\alpha z} \\ H_z^{(1)} &= -j\alpha k_x^{(1)} B^{(1)} \sin k_x^{(1)} x e^{-j\alpha z} \end{aligned} \quad (4.19)$$

pro oblast (2)

$$\begin{aligned} E_y^{(2)} &= -\omega\mu\alpha(A^{(2)} \cos k_x^{(2)} x + B^{(2)} \sin k_x^{(2)} x) e^{-j\alpha z} \\ H_z^{(2)} &= j\alpha k_x^{(2)}(A^{(2)} \sin k_x^{(2)} x - B^{(2)} \cos k_x^{(2)} x) e^{-j\alpha z} \end{aligned} \quad (4.20)$$

a pro oblast (3) (kde předpokládáme $k^{(3)} = k^{(1)}$, neboť v oblastech (1) a (3) jsou stejná prostředí)

$$\begin{aligned} E_y^{(3)} &= -\omega\mu\alpha B^{(3)} \sin k_x^{(1)} x e^{-j\alpha z} \\ H_z^{(3)} &= -j\alpha k_x^{(1)} B^{(3)} \cos k_x^{(1)} x e^{-j\alpha z} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Z podmínek rovnosti tečných složek na rozhraní dvou dielektrických prostředí vyplývá

$$\begin{aligned} E_y^{(1)}|_{x=c} &= E_y^{(2)}|_{x=-t}; & E_y^{(2)}|_{x=0} &= E_y^{(3)}|_{x=-d} \\ H_z^{(1)}|_{x=c} &= H_z^{(2)}|_{x=-t}; & H_z^{(2)}|_{x=0} &= H_z^{(3)}|_{x=-d} \end{aligned}$$

takže s použitím vztahů (4.19) až (4.21) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} B^{(1)} \sin k_x^{(1)} c &= A^{(2)} \cos k_x^{(2)} t - B^{(2)} \sin k_x^{(2)} t \\ k_x^{(1)} B^{(1)} \cos k_x^{(1)} c &= k_x^{(2)}(A^{(2)} \sin k_x^{(2)} t + B^{(2)} \cos k_x^{(2)} t) \\ A^{(2)} &= -B^{(2)} \sin k_x^{(1)} t \\ k_x^{(2)} B^{(2)} &= k_x^{(1)} B^{(3)} \cos k_x^{(1)} d \end{aligned} \quad (4.22)$$

jejichž řešení musíme pu vyjádřit konstantu a po úpravě napsat ve tvaru

$$\operatorname{tg} k_x^{(2)} t = \frac{k_x^{(2)}}{k_x^{(1)}} \frac{\operatorname{tg} k_x^{(1)} c + \operatorname{tg} k_x^{(1)} d}{\left(\frac{k_x^{(2)}}{k_x^{(1)}}\right)^2 \operatorname{tg} k_x^{(1)} c \operatorname{tg} k_x^{(1)} d - 1} \quad (4.23)$$

příčměž platí

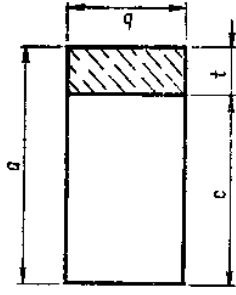
$$\begin{aligned} k_x^{(1)} &= \sqrt{\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - \alpha^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{r1} - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_v}\right)^2} \\ k_x^{(2)} &= \sqrt{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 - \alpha^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{r2} - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_v}\right)^2} \end{aligned}$$

kde $\mu_1, \epsilon_1, \epsilon_{r1}$ jsou parametry prostředí v oblasti (1), $\mu_2, \epsilon_2, \epsilon_{r2}$ parametry prostředí v oblasti (2), λ_0 je vlnová délka ve volném prostoru, λ_v vlnová délka ve vlnovodu s vloženou dielektrickou deskou.

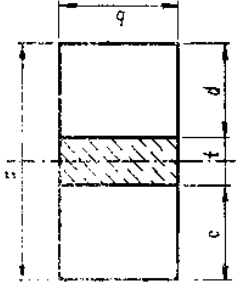
Řešením rovnice (4.23) můžeme určit při daných rozměrech a vlastnostech dielektrické desky poměrný posun α , popř. délku vlny ve vlnovodu λ_v .

Umístíme-li dielektrickou desku ke kraji vlnovodu, bude např. $d = 0$ (obr. 4.7) a rovnice (4.23) se zjednoduší na tvar

$$-\operatorname{tg} k_x^{(2)} t = \frac{k_x^{(2)}}{k_x^{(1)}} \operatorname{tg} k_x^{(1)} c \quad (4.24)$$



Obr. 4.7. Dielektrická deska u kraje vlnovodu



Obr. 4.8. Dielektrická deska uprostřed vlnovodu

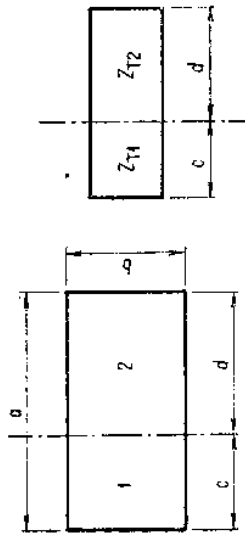
Umístíme-li dielektrickou desku do středu vlnovodu potom podle obr. 4.8 platí $c = d = (a - t)/2$ a rovnici (4.23) můžeme upravit na tvar

$$\operatorname{cotg} \left(k_x^{(2)} \frac{t}{2} \right) = \frac{k_x^{(2)}}{k_x^{(1)}} \operatorname{tg} \left(k_x^{(1)} \frac{a - t}{2} \right) \quad (4.25)$$

příčměž jsme použili vztah

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi - 1}{2 \operatorname{cotg} \varphi}$$

Při řešení příčné nehomogenních vedení není vždy nutné postupovat tak, jak bylo ukázáno v předcházejícím odstavci. Přenosové vlastnosti vedení, obsahující ve svém průřezu dvě různá dielektrická prostředí, můžeme určit v mnohých případech rychleji zavedením pojmu *příčná rezonance* a *příčná impedance* [5]. Rezonanční frekvence příčné rezonance vedení je taková frekvence, při níž je rovna nule výsledná admittance v kterékoliv rovině náhradního obvodu odpovídajícího příčnému průřezu. Z podmínky příčné rezonance určíme pak délku vlny ve vedení.



Obr. 4.9. Použití metody příčné rezonance u vlnovodu obdélníkového průřezu

Pro ukázkou této metody použijeme ji nejprve na případ nám již dobře známý, a to na vlnovod obdélníkového průřezu vyplněný homogenním dielektrikem. Průřez vlnovodu rozdělíme referenční rovinou na dvě části. Podle náhradního schématu na obr. 4.9 určíme k poloze referenční roviny vstupní impedance vedení nakrátko délky *d* a vedení nakrátko délky *c*. Poměrný posun α nahradíme konstantou příčného průřezu Γ , takže pro vstupní impedance úseků vedení nakrátko podle obr. 4.9 dostaneme

$$Z_1 = \frac{1}{Y_1} = jZ_{T1} \operatorname{tg} \Gamma_1 c$$

$$Z_2 = \frac{1}{Y_2} = jZ_{T2} \operatorname{tg} \Gamma_2 d$$

$$Z_T = \frac{\omega \mu}{\Gamma} \tag{4.26}$$

kde $Z_{T1,2}$ jsou tzv. příčné impedance vedení, pro které zavedeme vztah

$$Y_1 + Y_2 = 0 \tag{4.27}$$

neboli

$$\frac{1}{Z_{T1} \operatorname{tg} \Gamma_1 c} + \frac{1}{Z_{T2} \operatorname{tg} \Gamma_2 d} = 0$$

dostaneme po úpravě (při $\Gamma_1 = \Gamma_2$ a $Z_{T1} = Z_{T2}$)

$$\operatorname{cotg} \Gamma_1 c + \operatorname{cotg} \Gamma_1 d = \frac{\sin \Gamma_1 (c + d)}{\sin \Gamma_1 c \sin \Gamma_1 d} = 0$$

neboli

$$\sin \Gamma_1 a = 0$$

(neboť $c + d = a$), a tedy musí platit

$$\Gamma_1 a = m\pi$$

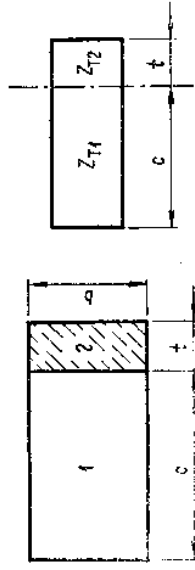
což je známý vztah, který jsme odvodili již dříve. S použitím vztahu $\Gamma_1 = 2\pi/\lambda_{m1}$ můžeme pak určit délku vlny ve vlnovodu, neboť při $\epsilon_r = 1$ je

$$\Gamma_1 = \frac{2\pi}{\lambda_{m1}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_v}\right)^2}$$

takže

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (\lambda_m = 2a)$$

což je výraz, který jsme odvodili již dříve jiným způsobem (čl. 2.1, tab. I).



Obr. 4.10. Použití metody příčné rezonance (dielektrická deska u kraje vlnovodu)

Použijeme-li stejný postup i pro vlnovod, částečně vyplněný dielektrikem, potom např. pro desku umístěnou podle obr. 4.10 zvolíme referenční rovinu na rozhraní obou dielektrických prostředí a z rezonanční podmínky (4.27) dostaneme transcendentní rovnici

$$-\operatorname{tg} \Gamma_2 t = \frac{Z_{T1}}{Z_{T2}} \operatorname{tg} \Gamma_1 c$$

a při $\Gamma_1 = k_x^{(1)}$ a $\Gamma_2 = k_x^{(2)}$ bude

$$-\operatorname{tg} k_x^{(2)} t = \frac{k_x^{(2)}}{k_x^{(1)}} \operatorname{tg} k_x^{(1)} c$$

což je vztah shodný se vztahem (4.24).

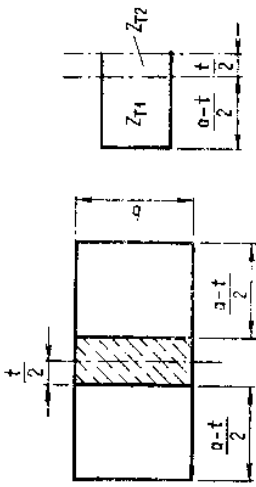
Pro dielektrickou desku, umístěnou uprostřed vlnovodu, zvolíme referenční rovinu tak, aby procházela rozhraním obou dielektrických prostředí (obr. 4.11).

Impedance dílčích vedení v referenční rovině jsou:
U vedení nakrátko

$$Z_1 = jZ_{T1} \operatorname{tg} \left(k_x^{(1)} \frac{a-t}{2} \right)$$

a u vedení naprázdno

$$Z_2 = -jZ_{T2} \operatorname{cotg} \left(k_x^{(2)} \frac{t}{2} \right)$$



Obr. 4.11. Použití metody přičné rezonance (dielektrická deska uprostřed vlnovodu)

Rezonanční podmínku opět vyjádříme vztahem (4.27)

$$Y_k + Y_2 = 0$$

takže po dosazení a úpravě dostaneme transcendentní rovnici

$$\operatorname{cotg} \left(k_x^{(2)} \frac{t}{2} \right) = \frac{Z_{T1}}{Z_{T2}} \operatorname{tg} \left(k_x^{(1)} \frac{a-t}{2} \right)$$

neboli

$$\operatorname{cotg} \left(k_x^{(2)} \frac{t}{2} \right) = \frac{k_x^{(2)}}{k_x^{(1)}} \operatorname{tg} \left(k_x^{(1)} \frac{a-t}{2} \right)$$

což je opět vztah shodný se vztahem (4.25).

Je zřejmé, že metodou přičné rezonance získáme konečné výsledky podstatně rychleji než klasickým postupem.

4.4. RADIÁLNÍ VEDENÍ

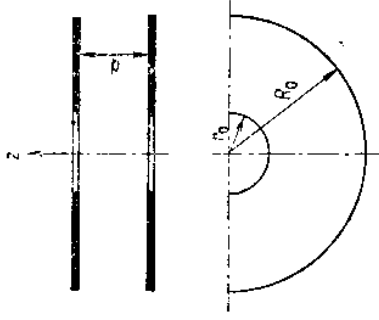
Zvláštním typem nehomogenního vedení je tzv. *radiální vedení* ([3], [5]) tvořené dvěma rovnoběžnými vodivými deskami kruhového tvaru (obr. 4.12). Vyšetříme případ šíření elektromagnetické vlny radiálním směrem mezi deskami. Budeme při tom předpokládat základní nejjednodušší vid, při němž je směr intenzity elektrického pole kolmý k rovině desek a elektrické pole je nezávislé na vzdálenosti desek. Elektromagnetické pole budeme považovat za osově souměrné. Toto uspořádání pole, které má pro praktické aplikace největší význam, odpovídá v podstatě vidu TEM (elektrické i magnetické pole je kolmé ke směru šíření vlny (obr. 4.13).

Protože je dán kruhový tvar desek, budeme hledat řešení Maxwellových rovnic ve válcových souřadnicích. Složky elektromagnetického pole určíme z Hertzova elektrického vektoru Π_z^e , který vyhovuje vlnové rovnici

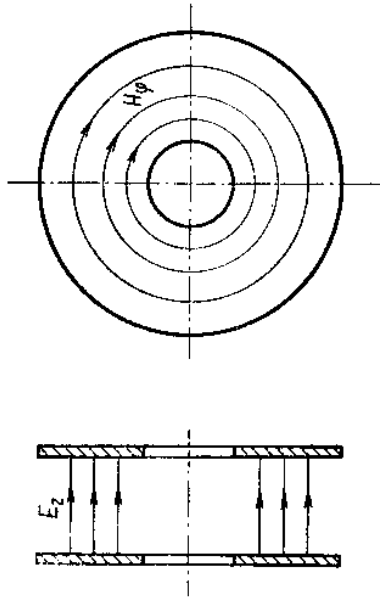
$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0$$

neboli ve válcových souřadnicích

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^e = 0$$



Obr. 4.12. Radiální vedení



Obr. 4.13. Rozložení elektromagnetického pole základního vidu v radiálním vedení

Protože předpokládáme elektromagnetické pole nezávislé na souřadnici φ i na souřadnici z , zjednoduší se vlnová rovnice na tvar

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial r^2} + \frac{\partial \Pi_z^e}{r \partial r} + k^2 \Pi_z^e = 0$$

což je Besselova diferenciální rovnice pro $m = 0$, jejíž řešením jsou partikulární integrály s Besselovými funkcemi

$$\Pi_z^e = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr) \quad (4.28)$$

Jednotlivé složky intenzity elektrického a magnetického pole určíme z rovnic

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e$$

$$\mathbf{H} = j\omega \text{rot } \Pi_z^e = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^e \times \mathbf{z})$$

Protože předpokládáme, že Π_z^e nezávisí na souřadnici z , platí $\text{div } \Pi_z^e = 0$ a elektromagnetické pole bude mít složky

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^e = k^2 [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (4.29)$$

$$H_\phi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\phi} = -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r} = -j\omega \epsilon k [C_1 J_0'(kr) + C_2 N_0'(kr)] \quad (4.30)$$

Jiné složky elektromagnetického pole v tomto případě nevzniknou. Směr šíření elektromagnetické vlny je určen Poyntingovým vektorem odpovídajícím složkám E_z a H_ϕ a je radiální.

Určíme dále průběh proudu procházejícího deskami a průběh napětí mezi deskami. Poznáme, že závislost proudu a napětí na poloměru r je podobná závislosti proudu a napětí u homogenního vedení. Zásadní rozdíl však je v tom, že u radiálního vedení je vlnová impedance funkcí poloměru r .

Napětí v obecné vzdálenosti r je dáno integrálem

$$U = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^d E_z dz = E_z d$$

neboť intenzita elektrického pole je ve směru z konstantní. Je tedy

$$U = k^2 d [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (4.31)$$

kde U je napětí mezi deskami ve vzdálenosti r ,
 d vzdálenost mezi deskami.

Proud procházející deskami ve vzdálenosti r určíme ze vztahu

$$I = \oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

Protože cirkulaci provádíme po kružnici poloměru r a intenzita magnetického pole není funkcí úhlu ϕ , platí

$$I = 2\pi r H_\phi$$

a s použitím rovnice (4.30) dostaneme

$$I = -j\omega \epsilon 2\pi r k [C_1 J_0'(kr) + C_2 N_0'(kr)]$$

neboli

$$I = j\omega \epsilon 2\pi r k [C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr)] \quad (4.32)$$

neboť platí

$$J_0'(x) = -J_1(x); \quad N_0'(x) = -N_1(x)$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 vyjádříme pomocí napětí a proudu na konci vedení, tj. na maximálním poloměru R_0 . Označíme-li napětí a proud na konci vedení jako U_k a I_k , lze psát

$$\frac{U_k}{k^2 d} = C_1 J_0(kR_0) + C_2 N_0(kR_0)$$

$$\frac{I_k}{j\omega \epsilon 2\pi R_0 k} = C_1 J_1(kR_0) + C_2 N_1(kR_0)$$

Z těchto dvou rovnic určíme konstanty C_1 a C_2

$$C_1 = \frac{\frac{U_k}{k^2 d} N_1(kR_0) - \frac{I_k}{j\omega \epsilon 2\pi R_0 k} N_0(kR_0)}{J_0(kR_0) N_1(kR_0) - N_0(kR_0) J_1(kR_0)} \quad (4.33)$$

$$C_2 = \frac{\frac{I_k}{j\omega \epsilon 2\pi R_0 k} J_0(kR_0) - \frac{U_k}{k^2 d} J_1(kR_0)}{J_0(kR_0) N_1(kR_0) - N_0(kR_0) J_1(kR_0)} \quad (4.34)$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$N_{n-1}(x) J_n(x) - N_n(x) J_{n-1}(x) = \frac{2}{\pi x}$$

lze psát

$$J_0(kR_0) N_1(kR_0) - N_0(kR_0) J_1(kR_0) = -\frac{2}{\pi k R_0} \quad (4.35)$$

a s použitím vztahů (4.33) až (4.35) můžeme po úpravě vyjádřit napětí a proud ve vzdálenosti r v symbolické formě takto

$$U = U_k \text{Cs}(kr, kR_0) + j I_k \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{sn}(kr, kR_0) \quad (4.36)$$

$$\frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} I = j U_k \text{Sn}(kr, kR_0) + \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} I_k \text{cs}(kr, kR_0) \quad (4.37)$$

kde $\text{Cs}(kr, kR_0)$ značí velký radiální kosinus

$$\text{Cs}(kr, kR_0) = \frac{J_1(kR_0) N_0(kr) - N_1(kR_0) J_0(kr)}{2} \frac{\pi k R_0}{\pi k R_0} \quad (4.38)$$

$\text{sn}(kr, kR_0)$ značí malý radiální sinus

$$\text{sn}(kr, kR_0) = \frac{J_0(kR_0) N_0(kr) - N_0(kR_0) J_0(kr)}{2} \frac{\pi k R_0}{\pi k R_0} \quad (4.39)$$

$\text{Sn}(kr, kR_0)$ značí velký radiální sinus

$$\text{Sn}(kr, kR_0) = \frac{J_1(kR_0) N_1(kr) - N_1(kR_0) J_1(kr)}{2} \frac{\pi k R_0}{\pi k R_0} \quad (4.40)$$

a $\text{cs}(kr, kR_0)$ značí malý radiální kosinus

$$\text{cs}(kr, kR_0) = \frac{N_0(kR_0) J_1(kr) - J_0(kR_0) N_1(kr)}{2} \frac{\pi k R_0}{\pi k R_0} \quad (4.41)$$

Rovnice (4.36) a (4.37), které udávají vztah mezi napětím a proudem na dvou paralelních deskách ve tvaru mezikruží v obecné vzdálenosti r , a napětím a proudem na konci vedení, tj. ve vzdálenosti $r = R_0$, jsou obdobou vztahů získaných řešením telegrafních rovnic pro homogenní vedení.

Všimněme si blíže zvláštních případů zakončení radiálního vedení. Je-li např. radiální vedení zakončeno nakrátko, je napětí na konci vedení nulové, tj. $U_k = 0$. Napětí a proud ve vzdálenosti r vyjádříme potom vztahy

$$U = jI_k \frac{d}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{sn}(kr, kR_0)$$

$$I = \frac{r}{R_0} I_k \operatorname{cs}(kr, kR_0)$$

Impedanci takto zakončeného radiálního vedení ve vzdálenosti r vyjádříme poměrem napětí a proudu

$$Z = \frac{U}{I} = j \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{tn}(kr, kR_0) \quad (4.42)$$

kde výraz $\operatorname{tn}(kr, kR_0)$ značí *malý radiální tangens*

$$\operatorname{tn}(kr, kR_0) = \frac{J_0(kR_0) N_0(kr) - N_0(kR_0) J_0(kr)}{N_0(kR_0) J_1(kr) - J_0(kR_0) N_1(kr)} \quad (4.43)$$

Je-li radiální vedení zakončeno naprázdno, je proud na konci vedení nulový, tj. $I_k = 0$. Napětí a proud ve vzdálenosti r vyjádříme pak vztahy

$$U = U_k \operatorname{Cs}(kr, kR_0)$$

$$I = j \frac{2\pi r}{d} \frac{U_k}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \operatorname{Sn}(kr, kR_0)$$

Impedanci takto zakončeného radiálního vedení ve vzdálenosti r vyjádříme opět poměrem napětí a proudu

$$Z = \frac{U}{I} = -j \frac{d}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{ct}(kr, kR_0) \quad (4.44)$$

kde výraz $\operatorname{ct}(kr, kR_0)$ značí *velký radiální kotangens*

$$\operatorname{ct}(kr, kR_0) = \frac{J_1(kR_0) N_0(kr) - N_1(kR_0) J_0(kr)}{J_1(kR_0) N_1(kr) - N_1(kR_0) J_1(kr)} \quad (4.45)$$

Výrazy $(d/\pi r) \sqrt{\mu/\epsilon}$ v rovnicích (4.42) a (4.44) jsou ekvivalentní vlnové impedanci radiálního vedení ve vzdálenosti r . Protože tato ekvivalentní vlnová impedance je funkcí poloměru r , je radiální vedení nehomogenní.

Při praktických aplikacích je někdy třeba zavést další funkce: *malý radiální kotangens*

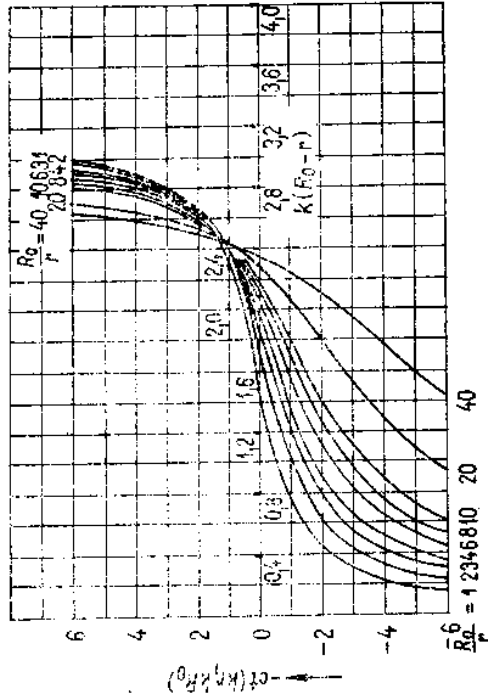
$$\operatorname{ct}(kr, kR_0) = \frac{1}{\operatorname{tn}(kr, kR_0)} \quad (4.46)$$

velký radiální tangens

$$\operatorname{Tn}(kr, kR_0) = \frac{1}{\operatorname{ct}(kr, kR_0)} \quad (4.47)$$

Na obr. 4.14. je průběh funkce $\operatorname{ct}(kr, kR_0)$.

Radiální vedení se často používají ke konstrukci rotačních spojek, vřtů, dutinových rezonátorů apod.



Obr. 4.14. Průběh radiální funkce $\operatorname{ct}(kr, kR_0)$ [5]

Literatura ke kapitole 4

- [1] *Sovětop, N. M.*: Technika sverchvysokých častot. Moskva, Izd. Vysšaja škola 1976.
- [2] *Ghose, R. N.*: Microwave Circuit Theory and Analysis. New York, Mc Graw - Hill 1963.
- [3] *Keasli, B.*: Theoretické základy techniky centimetrových vln. Praha, SNTL 1957.
- [4] *Collin, R. E.*: Foundations for Microwave Engineering. New York, Mc Graw - Hill 1966.
- [5] *Montgomery, C. G. - Dicke, R. H. - Purcell, E. M.*: Principles of Microwave Circuits. New York, Mc Graw - Hill 1948.

5. Dielektrické vlnovody

V předcházejících kapitolách jsme řešili taková mikrovlnná vedení, u nichž se elektromagnetická vlna šířila buď uvnitř kovového vlnovodu (vlny TM a TE), nebo mezi dvěma, popř. více vodiči různých tvarů (vlny TEM). V této kapitole ukážeme, že mohou existovat *mikrovlnná vedení dielektrická*, u nichž šíření elektromagnetické energie není vázáno na přítomnost kovových stěn nebo vodičů. Tato vedení se v poslední době používají i v oblasti frekvencí podstatně vyšších, než je oblast mikrovln, a to zejména v oblasti infračervené a světelné, kde jsou známa jako tzv. *planární popř. vláknové světlovody*. V dalším též ukážeme možnost šíření elektromagnetické vlny podél vodiče potaženého dielektrickou vrstvou.

5.1. ZPOMALENÍ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

U kovových vlnovodů, které měly parametry dielektrického prostředí μ a ε , byla fázová rychlost šíření vždy vyšší než rychlost šíření elektromagnetické vlny ve volném prostoru se stejnými parametry μ a ε .

Pro příčnou konstantu vedení Γ podle (2.11) platí

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

přičemž

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon (1 - v^2) = \frac{\omega^2}{v_f^2}$$

kde v je rychlost šíření elektromagnetické vlny ve volném prostoru s parametry

$$\mu \text{ a } \varepsilon \text{ (pro } \mu = \mu_0 \text{ a } \varepsilon = \varepsilon_0 \text{ platí } v = c),$$

v_f fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu vyplněném prostředím s parametry μ a ε .

Z toho vyplývá, že u dosud probíraných typů vlnovodů s vlnami TM nebo TE (vlny TEM nebereme v úvahu, neboť u nich je $\alpha = k$, takže $\Gamma = 0$) vždy platí

$$v_f > v$$

a tedy

$$\Gamma = \omega \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_f^2}} \quad (5.1)$$

Je zřejmé, že konstanta Γ je reálná, a to i v případě, že je vlnovod vyplněn dielektrickým prostředím s relativní permitivitou $\varepsilon_r > 1$, které snižuje rychlost šíření. Mohou však existovat vedení, u nichž je

$$v_f < v$$

V takovém případě platí podle (5.1)

$$\Gamma = j\omega \sqrt{\frac{1}{v_f^2} - \frac{1}{v^2}} = jg \quad (5.2)$$

Případ, že konstanta Γ je ryze imaginární, je charakteristický pro tzv. *zpomalené elektromagnetické vlny*. Typickými zpomalovacími vedeními, která umožňují podstatně snížení fázové rychlosti šíření, se budeme zabývat v další kapitole. V této kapitole vyšetříme jednodušší případy možnosti vzniku zpomalených vln, které však svými důsledky mají velký význam pro praktické aplikace.

5.1.1. Šíření elektromagnetické vlny podél zpomalujícího prostředí

Jestliže podle (5.2) platí

$$\Gamma = jg$$

potom rovnice pro funkci příčných souřadnic (2.5) dostane tvar

$$\Delta T_1 - g^2 T_1 = 0 \quad (5.3)$$

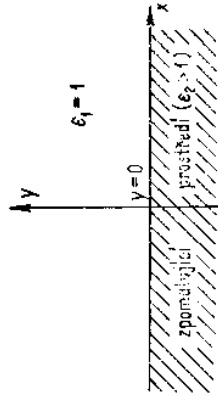
Předpokládejme nejprve případ, že funkce T_1 závisí pouze na souřadnici y , takže dostaneme rovnici

$$\frac{d^2 T_1}{dy^2} - g^2 T_1 = 0 \quad (5.4)$$

která má obecné řešení

$$T_1 = A e^{gy} + B e^{-gy} \quad (5.5)$$

kde A a B jsou konstanty.



Obr. 5.1. Rozívrání dvou prostředí

Mejme dve prostředí (pro jednoduchosti ideami dielektrika), jejichž rozhraní je při $y = 0$ (obr. 5.1). Předpokládáme, že pro relativní permittivity těchto prostředí platí

$$\epsilon_2 > \epsilon_1$$

Představme si, že se oběma prostředími šíří ve směru osy z společná elektromagnetická vlna s poměrným posunem α a s fázovou rychlostí v_t . Je zřejmé, že pro fázovou rychlost v_t společné elektromagnetické vlny, šířící se podél rozhraní obou těchto prostředí, musí platit

$$\begin{aligned} \text{pro } y > 0 & \text{ je } v_t < v_1 \\ \text{pro } y < 0 & \text{ je } v_t > v_2 \end{aligned}$$

kde v_1 je fázová rychlost elektromagnetické vlny v prostoru zcela vyplněném prostředím s relativní permittivitou ϵ_1 ,
 v_2 fázová rychlost elektromagnetické vlny v prostoru zcela vyplněném prostředím s relativní permittivitou ϵ_2 .

Určeme nyní vztahy pro společný poměrný posun α a pro funkci T_1 v obou prostředích:

Oblast $y > 0$, oblast zpomalené elektromagnetické vlny ($v_t < v_1$)

Protože při $v_t < v_1$ platí podle (5.2)

$$F = jg$$

má funkce T_1 obecné řešení podle (5.5). Aby toto řešení odpovídalo fyzikální předstávě (pro $y \rightarrow \infty$ musí být $T_1 \rightarrow 0$), položíme $A = 0$, takže dostaneme

$$T_1 = B e^{-ky} \quad (5.6)$$

Je zřejmé, že pro $y > 0$ funkce T_1 , a tím i příslušné elektromagnetické pole klesá podle exponenciálního průběhu. Pro poměrný posun α platí vztah (2.11)

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= k^2 - \Gamma^2 \\ \text{takže pro } \Gamma &= jg \text{ a } k = k_1 \text{ dostaneme} \\ \alpha^2 &= k_1^2 + g^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Oblast $y < 0$, oblast zpomalujícího prostředí ($v_t > v_2$)

V oblasti $y < 0$ předpokládáme, že $v_t > v_2$ takže příčná konstanta Γ je reálná a rovnici (2.5) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{d^2 T_1}{dy^2} + \Gamma^2 T_1 = 0 \quad (5.8)$$

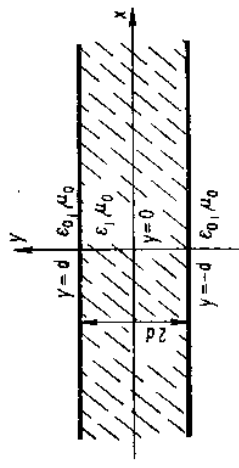
$$T_1 = C \cos \Gamma y + D \sin \Gamma y \quad (5.9)$$

Pro poměrný posun α platí

$$\alpha^2 = k^2 - \Gamma^2 \quad (5.10)$$

5.2. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY PODÉL NEOHRANIČENÉ DIELEKTRICKÉ DESKY

Vyšetřme nyní případ šíření vlny podél dielektrické desky (obr. 5.2). Deska s tloušťkou $2d$ a s relativní permittivitou $\epsilon_r > 1$ je obklopena vzduchovým prostředím s relativní permittivitou $\epsilon_r = 1$. Permeabilita vně i uvnitř desky je μ_0 .



Obr. 5.2. Neohraničená dielektrická deska

Podle úvah, provedených v předcházejícím odstavci, lze psát:

$$\text{Pro } |y| > d \text{ platí } v_t < v_1 \quad (v_1 \approx c)$$

přičemž řešení pro funkci T_1 budeme předpokládat ve tvaru (5.6)

$$T_1 = B e^{-ky}$$

$$\text{Pro } -d < y < d \text{ platí } v_t > v_2$$

přičemž řešení pro funkci T_1 budeme předpokládat ve tvaru (5.9)

$$T_1 = C \cos \Gamma y + D \sin \Gamma y$$

5.2.1. Šíření vlny TM podél dielektrické desky

Hertzův vektor pro vlny TM můžeme vyjádřit na základě uvedených vztahů takto (předpokládáme postupnou vlnu):

$$\text{Pro } -d < y < d \quad \Pi_z^* = (C^* \cos \Gamma y + D^* \sin \Gamma y) e^{-j\alpha z} \quad (5.11)$$

$$\text{Pro } |y| > d \quad \Pi_z^* = B^* e^{-ky} e^{-j\alpha z} \quad (5.12)$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole určíme podle vztahů (1.64) a (1.65)

$$E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \text{grad div } \Pi_z^e \cdot \mathbf{x} = \frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$E_y = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \text{grad div } \Pi_z^e \cdot \mathbf{y} = \frac{\partial T_1}{\partial y} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = (k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e) \cdot \mathbf{z} = (k^2 - \alpha^2) T_1 T_2 \quad (5.13)$$

$$H_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^e \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = j\omega \epsilon \frac{\partial T_1}{\partial y} T_2$$

$$H_y = \mathbf{H} \cdot \mathbf{y} = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^e \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} = -j\omega \epsilon \frac{\partial T_1}{\partial x} T_2$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = 0$$

Pro $-d < y < d$ (dielektrikum) tedy platí

$$E_y = -j\alpha \Gamma (-C^e \sin \Gamma y + D^e \cos \Gamma y) e^{-jz}$$

$$E_z = (k^2 - \alpha^2) (C^e \cos \Gamma y + D^e \sin \Gamma y) e^{-jz}$$

$$H_x = j\omega \epsilon \Gamma (-C^e \sin \Gamma y + D^e \cos \Gamma y) e^{-jz} \quad (5.14)$$

$$E_x = H_y = H_z = 0$$

Z charakteru funkce T_1 a Hertzova vektoru je zřejmé, že elektromagnetické pole má v dielektrické desce dvoji symetrii vzhledem k rovině $y = 0$ a že je můžeme rozdělit na dvě složky. Elektromagnetická vlna, jejíž příčné složky intenzit pole E_y a H_x jsou sudými funkcemi souřadnice y , bývá nazývána *sudou vlnou* a elektromagnetická vlna, jejíž příčné složky intenzit pole E_x a H_y jsou lichými funkcemi souřadnice y , bývá nazývána *lichou vlnou*.

Pro $|y| > d$ (vzduchové prostředí) platí

$$E_y = jg\alpha B^e e^{-\beta y} e^{-jz}$$

$$E_z = (k_0^2 - \alpha^2) B^e e^{-\beta y} e^{-jz} \quad (5.15)$$

$$H_x = -j\omega \epsilon_0 g B^e e^{-\beta y} e^{-jz}$$

$$E_x = H_y = H_z = 0$$

Na povrchu dielektrické vrstvy musí být shodné tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole v obou prostředích, takže pro $|y| = d$ platí:

Pro liché vlny na základě shodnosti složek E_z

$$(k^2 - \alpha^2) C^e \cos \Gamma d = (k_0^2 - \alpha^2) B^e e^{-\beta d} \quad (5.16)$$

a na základě shodnosti složek H_x

$$-j\omega \epsilon \Gamma C^e \sin \Gamma d = -j\omega \epsilon_0 g B^e e^{-\beta d} \quad (5.17)$$

Pro sudé vlny na základě shodnosti složek E_z

$$(k^2 - \alpha^2) D^e \sin \Gamma d = (k_0^2 - \alpha^2) B^e e^{-\beta d} \quad (5.18)$$

a na základě shodnosti složek H_x

$$j\omega \epsilon \Gamma D^e \cos \Gamma d = -j\omega \epsilon_0 g B^e e^{-\beta d} \quad (5.19)$$

Použijeme-li vztahy (5.10) a (5.1)

$$k^2 - \alpha^2 = \Gamma^2 \quad k_0^2 - \alpha^2 = -g^2$$

můžeme po úpravě získat z rovnic (5.16) až (5.19) vztahy, které umožňují určit fázovou rychlost vln šířících se podél dielektrické desky.

Pro liché vlny platí

$$-\frac{1}{\epsilon_r} \Gamma d \cotg \Gamma d = gd \quad (5.20)$$

Pro sudé vlny platí

$$\frac{1}{\epsilon_r} \Gamma d \text{tg } \Gamma d = gd \quad (5.21)$$

Vztahy (5.20) a (5.21) je výhodné zobrazit graficky (pro konkrétní hodnotu ϵ_r).

5.2.2. Šíření vlny TE podél dielektrické desky

Hertzův vektor pro vlny TE můžeme vyjádřit takto:

$$\text{Pro } -d < y < d$$

$$\Pi_z^m = (C^m \cos \Gamma y + D^m \sin \Gamma y) e^{-jz} \quad (5.22)$$

a pro $|y| > d$

$$\Pi_z^m = B^m e^{-\beta y} e^{-jz} \quad (5.23)$$

Složky intenzity elektrického a magnetického pole určíme podle vztahů (1.66) a (1.67)

$$E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = -j\omega \mu (\text{grad } \Pi_z^m \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = -j\omega \mu \frac{\partial T_1}{\partial y} T_2$$

$$E_y = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = -j\omega \mu (\text{grad } \Pi_z^m \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} = j\omega \mu \frac{\partial T_1}{\partial x} T_2$$

$$H_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = \text{grad div } \Pi_z^m \cdot \mathbf{x} = \frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad (5.24)$$

$$H_y = \mathbf{H} \cdot \mathbf{y} = \text{grad div } \Pi_z^m \cdot \mathbf{y} = \frac{\partial T_1}{\partial y} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = (k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m) \cdot \mathbf{z} = (k^2 - \alpha^2) T_1 T_2$$

$$E_z = 0$$

Pro $-d < y < d$ (dielektrikum) tedy platí

$$E_x = -j\omega \mu_0 \Gamma (-C^m \sin \Gamma y + D^m \cos \Gamma y) e^{-jz}$$

$$H_y = -j\alpha \Gamma (-C^m \sin \Gamma y + D^m \cos \Gamma y) e^{-jz}$$

$$H_z = (k^2 - \alpha^2) (C^m \cos \Gamma y + D^m \sin \Gamma y) e^{-jz}$$

$$E_y = H_x = E_z = 0 \quad (5.25)$$

a pro $|y| > d$ (vzduchové prostředí) platí

$$\begin{aligned} E_x &= j\omega\mu_0 g B^m e^{-\alpha y} e^{-jz} \\ H_y &= j\alpha g B^m e^{-\alpha y} e^{-jz} \\ H_z &= (k_0^2 - \alpha^2) B^m e^{-\alpha y} e^{-jz} \\ E_y &= H_x = E_z = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Na povrchu dielektrika musí být shodné tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole, takže při $|y| = d$ platí:

Pro liché vlny na základě shodnosti složek E_x

$$\Gamma C^m \sin \Gamma d = g B^m e^{-\alpha d} \quad (5.27)$$

a na základě shodnosti složek H_z

$$(k^2 - \alpha^2) C^m \cos \Gamma d = (k_0^2 - \alpha^2) B^m e^{-\alpha d} \quad (5.28)$$

Pro sudé vlny na základě shodnosti složek E_x

$$-\Gamma D^m \cos \Gamma d = g B^m e^{-\alpha d} \quad (5.29)$$

a na základě shodnosti složek H_z

$$(k^2 - \alpha^2) D^m \sin \Gamma d = (k_0^2 - \alpha^2) B^m e^{-\alpha d} \quad (5.30)$$

Za použití vztahů (5.7) a (5.10)

$$k^2 - \alpha^2 = \Gamma^2 \quad k_0^2 - \alpha^2 = -g^2$$

můžeme získat po úpravě z rovnic (5.27) až (5.30) vztahy, které umožňují určit fázovou rychlost vln šířících se podél dielektrické desky.

Pro liché vlny platí

$$-\Gamma d \cot g \Gamma d = g d \quad (5.31)$$

a pro sudé vlny platí

$$\Gamma d \operatorname{tg} \Gamma d = g d \quad (5.32)$$

Jednotlivá řešení rovnic (5.31) a (5.32) odpovídají různým vidům šíření, přičemž pro praktické aplikace je výhodné zobrazit tyto vztahy graficky (obr. 5.3). Při řešení konkrétního případu šíření zakreslíme do grafů na obr. 5.3 ještě kružnici, jejíž průsečíky s jednotlivými křivkami určují různá možná řešení. Poloměr této kružnice určíme z této úvahy:

Podle vztahů (5.10) a (5.7) platí

$$\alpha^2 = k^2 - \Gamma^2; \quad \alpha^2 = k_0^2 + g^2$$

takže lze psát

$$k^2 - k_0^2 = \Gamma^2 + g^2$$

neboli

$$k_0^2(\epsilon_r - 1) = \Gamma^2 + g^2$$

popř. po vynásobení obou stran rovnice výrazem d^2

$$(\Gamma d)^2 + (g d)^2 = (k_0 d)^2 (\epsilon_r - 1) \quad (5.33)$$

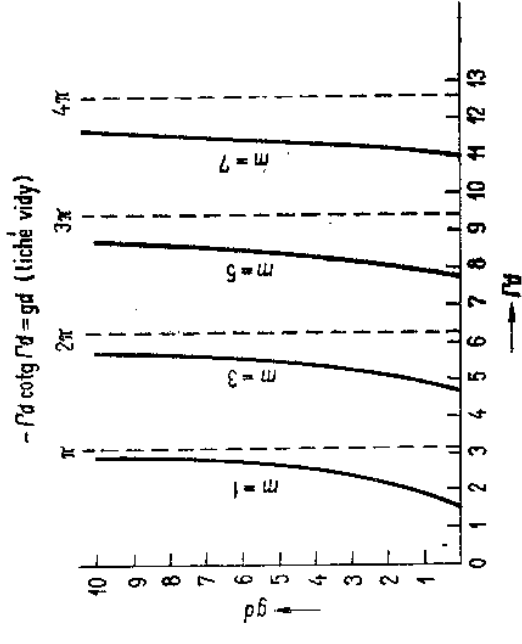
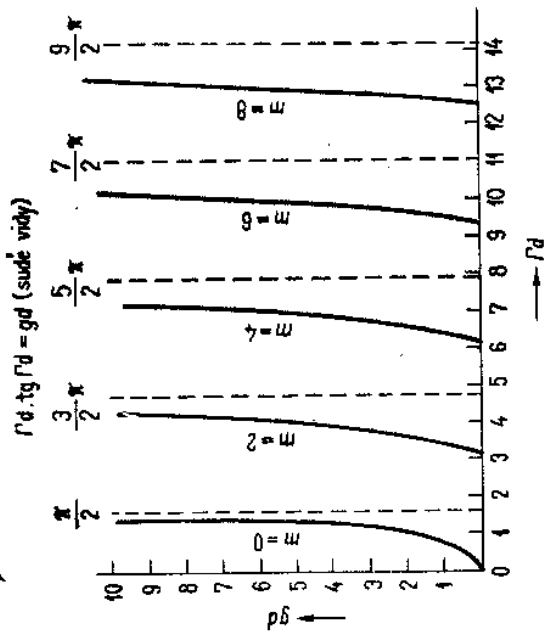
což je rovnice kružnice s poloměrem

$$R = k_0 d \sqrt{\epsilon_r - 1} \quad (5.34)$$

v souřadnicích Γd a $g d$.

Z jednotlivých průsečíků kružnice s různými křivkami určíme pro různé vidy hodnoty $g d$ a z těch pak poměrný posun podle vztahu (5.7)

$$\alpha = \sqrt{k_0^2 + g^2}$$



Obr. 5.3. Vlny TE v dielektrické desce

$$0 < R < \frac{\pi}{2}$$

dostaneme podle obr. 5.3 pouze jeden kořen a v dielektrické desce se může šířit jenom základní vlna, kterou označíme TE_0 . Při zvětšování poloměru R se může šířit více vidů, přičemž lze psát

$$R \geq n \frac{\pi}{2}$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Pro n lichá dostaneme liché vidy (TE_1, TE_3, \dots) a pro n sudá dostaneme sudé vidy (TE_0, TE_2, \dots).

Upravíme-li rovnice (5.7) a (5.10) do tvaru

$$\frac{\alpha^2 - k_0^2}{k^2 - \alpha^2} = \left(\frac{gd}{fd} \right)^2$$

je zřejmé, že pro dielektrickou desku s určitou tloušťkou a s určitou relativní permitivitou mohou nastat tyto mezní případy:

1. Při $gd \gg fd$ platí $\alpha \rightarrow k_0 \sqrt{\epsilon_r}$. V oblasti vně dielektrické desky nastává rychlý pokles elektromagnetického pole, vlna se šíří převážně v dielektriku. Tento případ nastane tehdy, je-li použitá frekvence podstatně vyšší, než kritická frekvence.

2. Při $gd \rightarrow 0$ platí $\alpha \rightarrow k_0$. Elektromagnetické pole zaujímá kolem dielektrické desky velký prostor. Tento případ nastává tehdy, když se frekvence blíží kritické frekvenci daného vidu.

Při *kritické frekvenci* je $g = 0$, takže pro poměrný posun platí $\alpha = k_0$. Elektromagnetická vlna se šíří podél dielektrické desky rychlostí světla, přičemž pole ve směru osy y je neomezené. Zde je třeba si uvědomit rozdíl v pojmání kritické frekvence oproti kovovým vlnovodům, ve kterých se vlna při kritické frekvenci přestává šířit.

Při určování možností šíření vidů TM je výhodné použít analogické grafy jako na obr. 5.3. Protože se však rovnice (5.20) a (5.21) liší od rovnic (5.31) a (5.32) činitelem $1/\epsilon_r$, budou mít tyto grafy poněkud odlišné průběhy, závislé na relativní permitivitě dielektrické desky. Podmínkou vzniku vln TM_n je též nerovnost

$$R \geq n \frac{\pi}{2}$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Pro n lichá dostaneme liché vidy (TM_1, TM_3, \dots) a pro n sudá dostaneme sudé vidy (TM_0, TM_2, \dots).

5.2.3. Rozklad elektromagnetického pole na rovinné vlny

V tomto odstavci ukážeme, že vznik elektromagnetické vlny v dielektrickém vlnovodu můžeme vysvětlit též superpozicí dílčích rovinných elektromagnetických vln šířících se mnohonásobnými odrazy od rozhraní dielektrického a vzdu-

chového prostředí. Výsledky, které získáme, jsou shodné s těmi, k nimž jsme dospěli v předcházejících odstavcích; zde pouze ukážeme jiné možnosti způsobu řešení.

Předpokládejme např. Hertzův vektor pro vlny TE lichých vidů. Podle (5.22) lze psát, že uvnitř dielektrické desky platí

$$H_z^m = C^m \cos \Gamma y e^{-jz}$$

Pomocí Eulerova vzorce můžeme napsat tento vztah ve tvaru

$$H_z^m = \frac{C^m}{2} [e^{j(\Gamma y - \alpha z)} + e^{j(-\Gamma y - \alpha z)}] \quad (5.35)$$

Podobným způsobem můžeme rozložit i složky intenzity elektrického a magnetického pole.

Protože podle (5.10) platí

$$k^2 = \Gamma^2 + \alpha^2$$

neboli

$$k_0^2 \epsilon_r = \Gamma^2 + \alpha^2$$

a současně též platí

$$k_0^2 \epsilon_r = k_0^2 \epsilon_r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

neboli

$$k_0^2 \epsilon_r = k_0^2 \epsilon_r \sin^2 \theta + k^2 \epsilon_r \cos^2 \theta$$

můžeme po porovnání předcházejících vztahů vyjádřit Γ a α výrazy

$$\Gamma = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta \quad (5.36)$$

$$\alpha = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta \quad (5.37)$$

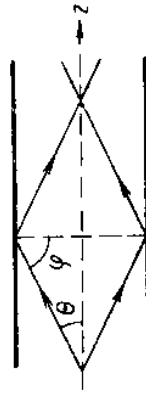
a můžeme výraz pro Hertzův vektor (5.35) napsat ve tvaru

$$H_z^m = \frac{C^m}{2} [e^{j(k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta y - k_0 \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta z)} + e^{j(-k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta y - k_0 \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta z)}] \quad (5.38)$$

Z toho je zřejmé, že Hertzův vektor uvnitř dielektrického vlnovodu lze rozložit do dvou složek, které svírají s osou z úhel $\pm \theta$. Protože veličiny elektromagnetického pole lze odvodit z Hertzova vektoru, můžeme toto pole vyjádřit superpozicí dvou rovinných vln, které se šíří vzhledem k ose z pod úhlem $\pm \theta$ (obr. 5.4).

Ze vztahů (5.36) a (5.37) vyplývá, že při $\theta \rightarrow 0$ je $\alpha \approx k_0 \sqrt{\epsilon_r}$, a $\Gamma \rightarrow 0$ a tedy s použitím (5.7) lze psát

$$g \approx k_0 \sqrt{\epsilon_r - 1}$$



Obr. 5.4. Dvě rovinné vlny v dielektrické desce

což je největší dosažitelná hodnota pro g . Při této hodnotě g je elektromagnetické pole převážně soustředěno uvnitř dielektrického vlnovodu.

Druhý mezní případ nastává pro $g \rightarrow 0$, kdy elektromagnetické pole ve vzduchovém prostředí slabne (ve směru osy y) velmi zvolna a podle (5.7) platí $\alpha \approx k_0$

Úhel Θ můžeme pak vyjádřit např. za použití (5.37) vztahem

$$\Theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (5.39)$$

Pokud se vlna dielektrickým vlnovodem šíří, je úhel Θ , určený vztahem (5.39), největším možným úhlem dílčí rovinné vlny. Pro různé hodnoty α určíme úhel Θ ze vztahu (5.37)

$$\Theta = \arccos \frac{\alpha}{k_0 \sqrt{\epsilon_r}} \quad (5.40)$$

přičemž

$$0 < \Theta < \arccos \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Úhel dopadu dílčí rovinné vlny na rozhraní dielektrický vlnovod – vzduchové prostředí můžeme vyjádřit podle obr. 5.4 též výrazem

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \Theta$$

takže platí

$$\alpha = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \cos \Theta = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi \quad (5.41)$$

Protože vlna, šířící se dielektrickým vlnovodem je vlnou zpomalenou, musí být podle (5.7)

$$\alpha > k_0$$

a tento vztah můžeme vyjádřit ve tvaru

$$k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi > k_0 \quad (5.42)$$

neboli

$$\sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi > 1$$

což je podmínka pro vznik totálního odrazu na rozhraní dielektrického a vzduchového prostředí.

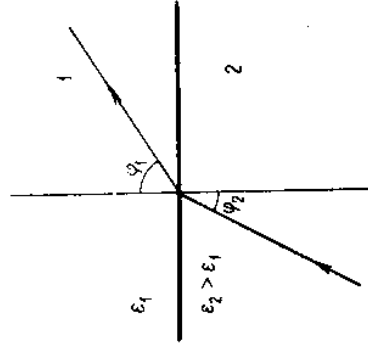
K představě o šíření elektromagnetické vlny uvnitř dielektrického vlnovodu mnohonásobnými totálními odrazy od rozhraní dielektrického a vzduchového prostředí můžeme dospět též pomocí geometrické optiky z následující jednoduché úvahy. Předpokládejme, že se směrem k rozhraní dvou dielektrik šíří rovinná elektromagnetická vlna pod úhlem dopadu φ_2 (obr. 5.5). Při průchodu do vzduchového prostředí se změni směr jejího šíření podle Snellova zákona, přičemž platí

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\epsilon_r}$$

Vyjádříme-li např. intenzitu elektrického pole této vlny v prostoru (1), lze psát

$$E_1 = KE_2 e^{ik_0 z}$$

kde K je konstanta závislá na relativní permivitivě, l vzdálenost ve směru šíření v prostředí (1).



Obr. 5.5. Šíření vlny

na rozhraní dvou dielektrik

Vzdálenost l můžeme složit ze dvou složek; jedné, která je kolmá k rozhraní obou dielektrik a druhé, která je s tímto rozhraním rovnoběžná – viz obr. 5.6. Podle obr. 5.6 platí

$$l = z \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1$$

takže

$$E_1 = KE_2 e^{ik_0(z \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1)}$$

Použijeme-li dále vztah

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}$$

a Snellův zákon

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi_2$$

dostaneme

$$E_1 = KE_2 e^{ik_0 z \sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi_2} e^{ik_0 y \sqrt{1 - \epsilon_r \sin^2 \varphi_2}}$$

V případě, že $\epsilon_r \sin^2 \varphi_2 > 1$, platí

$$E_1 = KE_2 e^{ik_0 z \sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi_2} - k_0 y \sqrt{\epsilon_r \sin^2 \varphi_2 - 1} \quad (5.43)$$

takže vlna je ve směru y exponenciálně tlumena a šíří se ve směru z s hodnotou poměrně posunu

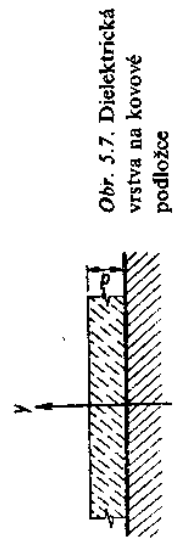
$$\alpha = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sin \varphi_2$$

což je ve shodě se vztahem (5.41).

Z toho je zřejmé, že šíření elektromagnetické vlny uvnitř dielektrického vlnovodu můžeme též vysvětlit pomocí mnohonásobného totálního odrazu dílčích elektromagnetických vln šířících se rychlostí $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$ pod úhlem θ k ose z . Při frekvencích, které jsou značně vyšší, než je kritická frekvence, je úhel θ malý. Při snižování frekvence se úhel θ zvětšuje až při kritické frekvenci má hodnotu danou vztahem (5.39).

5.3. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY PODÉL NEOHRANIČENÉ DIELEKTRICKÉ VRSTVY UMÍSTĚNÉ NA VODIVÉ PODLOŽCE

Neohraničená dielektrická deska s tloušťkou d je umístěna na dokonale vodivé podložce podle obr. 5.7. Na dokonale vodivé podložce musí být každá tečná složka intenzity elektrického pole nulová, takže při $y = 0$ musí být $E_x = E_z = 0$. Ze vztahů (5.14) a (5.25) vyplývá, že této hraniční podmínce vyhovují sudé vidy TM, tj. TM_0 , TM_2 , atd. a liché vidy TE, tj. TE_1 , TE_3 , TE_5 , atd.



Obr. 5.7. Dielektrická vrstva na kovové podložce

Všechny tyto vidy se mohou šířit v soustavě podle obr. 5.7 za těchto podmínek jako v dielektrické desce, probírané v předcházejícím odstavci. Vznik všech těchto vln můžeme opět považovat za výsledek superpozice rovinných vln šířících se uvnitř dielektrika a odražených se od vodivého rozhraní při $y = 0$ a od rozhraní dielektrikum – vzduch při $y = d$.

5.4. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY PODÉL DIELEKTRICKÉHO VÁLCE

Fyzikální princip šíření elektromagnetické vlny podél dielektrického válce se v podstatě neliší od případu šíření vlny v dielektrické desce. Dielektrický válec kruhového průřezu, podél něhož se šíří zpomalená elektromagnetická vlna, bývá nazýván *dielektrickým vlnovodem*. Vlny šířící se ve válci mají podobné vlastnosti jako mají vlny v dielektrické desce. Každý vid elektromagnetické vlny může vzniknout v dielektrickém válci pouze při frekvencích, které jsou vyšší než kritické frekvence. Výjimkou je pouze tzv. *základní vid*, který nemá kritickou (mezní) frekvenci a který se může šířit při jakémkoliv frekvenci. Rozložení elektromagnetického pole této vlny je nesymetrické a můžeme si je představit tak, že vzniklo

z rovinné vlny jako porucha způsobená dielektrickým válcem. Přítomnost dielektrika způsobí, že se rovinná vlna změní ve vlnu povrchovou, která má podélné složky elektrického a magnetického pole.

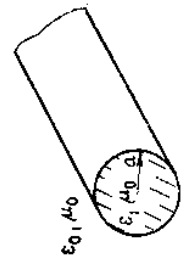
Dielektrické vlnovody se mohou používat ve speciálních aplikacích mikrovlánné techniky jako přenosová vedení, popř. ve zvláštní úpravě jako dielektrické antény. V infračervené a viditelné oblasti elektromagnetického spektra se používají v radio-technice a sdělovací technice jako tzv. *vláknové světlovody*.

Při vyšetřování průběhu elektromagnetického pole vyjdeme z vlnových rovnic pro Hertzovy vektory Π^e a Π^m , tj.

$$\Delta \Pi_z^e + k^2 \Pi_z^e = 0$$

$$\Delta \Pi_z^m + k^2 \Pi_z^m = 0$$

Vzhledem ke kruhovému průřezu vedení řešíme tyto rovnice ve válcových souřadnicích, což vede na Besselovu diferenciální rovnici.



Obr. 5.8. Dielektrický vlnovod kruhového průřezu

Na rozdíl od kovových vlnovodů, kde jsme mohli počítat oddělené vlny TM a TE, musíme u dielektrických vlnovodů, se zřetelem k jiným okrajovým podmínkám, vyjádřit elektromagnetické pole jako superpozici vln TM a TE (neboli E a H). Takové pole má v obecném případě ve směru šíření jak složku E_z , tak složku H_z a bývá označováno jako EH_{mn} nebo HE_{mn} , podle toho, která ze složek převládá. Pouze u elektromagnetických polí s kruhovou symetrií, tj. pro $m = 0$, mohou u dielektrickém vlnovodu existovat samostatně vlny TM_{0n} nebo TE_{0n} (viz dále). Hybridní vlny bývají někdy označovány jako HEM.

Při řešení kovových vlnovodů jsme vyjádřili partikulární integrály Besselovy rovnice Besselovými funkcemi prvního a druhého druhu, které vyhovovaly fyzikální předstávě. (Na základě fyzikální představy jsme u vlnovodů kruhového průřezu vyloučili z řešení funkci druhého druhu vzhledem k její singularitě při $r = 0$.) U dielektrických vlnovodů je třeba brát v úvahu šíření elektromagnetické vlny i vně dielektrického válce, přičemž vycházíme z představy, že elektromagnetické pole se vzrůstající vzdáleností od dielektrického vlnovodu monotónně slabne. Této fyzikální předstávě musí odpovídat i matematický popis a je proto zřejmé, že v prostředí vně dielektrického vlnovodu nelze popsat elektromagnetické pole Besselovými funkcemi prvního nebo druhého druhu. Této předstávě vyhovují tzv. modifikované Besselovy funkce druhého druhu $K_m(gr)$, které dostaneme jako řešení rovnice (3.30) pro případ, že platí

$$r = jy$$

V článku 3.2 jsme zjistili, že pro funkci příčných souřadnic T_1 dostaneme vzhledem k azimutální souřadnici φ dvě lineárně nezávislá řešení. Pro další úvahy zvolíme funkční závislosti na souřadnici φ u Hertzových vektorů tak, aby složky intenzity elektrického a magnetického pole, určené pomocí Hertzových vektorů Π_z^m a Π_z^e , měly ve směru φ stejnou závislost. Uvnitř dielektrického vlnovodu předpokládáme proto řešení vlnových rovnic pro Hertzovy vektory ve tvaru

$$\Pi_z^e = A^e J_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-jz} \quad (5.44)$$

$$\Pi_z^m = A^m J_m(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-jz} \quad (5.45)$$

přičemž platí

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

Vně dielektrického vlnovodu předpokládáme řešení ve tvaru

$$\Pi_z^e = B^e K_m(\Gamma a) \sin m\varphi e^{-jz} \quad (5.46)$$

$$\Pi_z^m = B^m K_m(\Gamma a) \cos m\varphi e^{-jz} \quad (5.47)$$

přičemž platí

$$g = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$$

Poměrný posun α je stejný pro vnější i vnitřní prostředí.

Veličiny elektromagnetického pole určíme ze vztahů (1.62a) a (1.63a)

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^e + \text{grad div } \Pi_z^e - j\omega \mu \text{rot } \Pi_z^e$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m + j\omega \epsilon \text{rot } \Pi_z^e$$

takže pro azimutální a podélné složky intenzit pole platí vztahy (radiální složky pro větší přehlednost nevyjadřujeme)

$$E_\varphi = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial \varphi \partial z} + j\omega \mu_0 \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r}$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^e + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2}$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial \varphi \partial z} - j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2}$$

Pro $r < a$ (tj. uvnitř dielektrického vlnovodu) jsou tedy složky

$$E_\varphi = -j \left[\frac{\alpha m}{r} A^e J_m(\Gamma r) - \omega \mu_0 \Gamma A^m J_m'(\Gamma r) \right] \cos m\varphi e^{-jz}$$

$$E_z = (k^2 - \alpha^2) A^e J_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$H_\varphi = j \left[\frac{\alpha m}{r} A^m J_m(\Gamma r) - \omega \epsilon \Gamma A^e J_m'(\Gamma r) \right] \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$H_z = (k^2 - \alpha^2) A^m J_m(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-jz} \quad (5.48)$$

a pro $r > a$ (vně dielektrického vlnovodu) jsou složky

$$E_\varphi = -j \left[\frac{\alpha m}{r} B^e K_m(\Gamma r) - \omega \mu_0 g B^m K_m'(g a) \right] \cos m\varphi e^{-jz}$$

$$E_z = (k_0^2 - \alpha^2) B^e K_m(\Gamma r) \sin m\varphi e^{-jz} \quad (5.49)$$

$$H_\varphi = j \left[\frac{\alpha m}{r} B^m K_m(\Gamma r) - \omega \epsilon_0 g B^e K_m'(g a) \right] \sin m\varphi e^{-jz}$$

$$H_z = (k_0^2 - \alpha^2) B^m K_m(\Gamma r) \cos m\varphi e^{-jz}$$

Při poloměru $r = a$ musí být tečné složky elektromagnetického pole stejné, takže platí:

Na základě rovnosti složek E_φ

$$\frac{\alpha m}{a} A^e J_m(\Gamma a) - \omega \mu_0 \Gamma A^m J_m'(\Gamma a) = \frac{\alpha m}{a} B^e K_m(g a) - \omega \mu_0 g B^m K_m'(g a) \quad (5.50)$$

a na základě rovnosti složek E_z

$$\Gamma^2 A^e J_m(\Gamma a) = -g^2 B^e K_m(g a) \quad (5.51)$$

Na základě rovnosti složek H_φ

$$\frac{\alpha m}{a} A^m J_m(\Gamma a) - \omega \epsilon \Gamma A^e J_m'(\Gamma a) = \frac{\alpha m}{a} B^m K_m(g a) - \omega \epsilon_0 g B^e K_m'(g a) \quad (5.52)$$

a na základě rovnosti složek H_z

$$\Gamma^2 A^m J_m(\Gamma a) = -g^2 B^m K_m(g a) \quad (5.53)$$

Z rovnic (5.51) a (5.53) vyjádříme konstanty B^e a B^m pomocí konstant A^e a A^m a příslušné výrazy dosadíme do rovnic (5.50) a (5.52). Po úpravě těchto vztahů můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\alpha m}{a} \frac{g^2 + \Gamma^2}{g^2} A^e - \omega \mu_0 \Gamma^2 a \left[\frac{1}{\Gamma a} \frac{J_m'(\Gamma a)}{J_m(\Gamma a)} + \frac{1}{g a} \frac{K_m'(g a)}{K_m(g a)} \right] A^m &= 0 \\ -\omega \epsilon_0 \Gamma^2 a \left[\frac{g_r}{\Gamma a} \frac{J_m'(\Gamma a)}{J_m(\Gamma a)} + \frac{1}{g a} \frac{K_m'(g a)}{K_m(g a)} \right] A^e + \frac{\alpha m}{a} \frac{g^2 + \Gamma^2}{g^2} A^m &= 0 \end{aligned}$$

Zavedme označení

$$\frac{1}{\Gamma a} \frac{J_m'(\Gamma a)}{J_m(\Gamma a)} = X_m; \quad \frac{1}{g a} \frac{K_m'(g a)}{K_m(g a)} = -Y_m \quad (5.54)$$

takže předcházející vztahy lze psát ve tvaru

$$\frac{\alpha m}{a} \frac{g^2 + \Gamma^2}{g^2} A^e - \omega \mu_0 \Gamma^2 a (X_m - Y_m) A^m = 0 \quad (5.55)$$

$$-\omega \epsilon_0 \Gamma^2 a (e X_m - Y_m) A^e + \frac{\alpha m}{a} \frac{g^2 + \Gamma^2}{g^2} A^m = 0 \quad (5.56)$$

Tyto dvě homogenní rovnice s neznámými konstantami A^e a A^m mají řešení, rovná-li se jejich determinant nule. Musí tedy platit

$$\left(\frac{\alpha m}{a}\right)^2 \left(\frac{g^2 + \Gamma^2}{g^2}\right)^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \Gamma^4 a^2 (\varepsilon_r X_m - Y_m)(X_m - Y_m) \quad (5.57)$$

Použijeme-li vztahy

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = k_0^2; \quad \alpha^2 = k_0^2 + g^2; \quad \alpha^2 = k^2 - \Gamma^2$$

a tedy

$$g^2 + \Gamma^2 = k_0^2 (\varepsilon_r - 1)$$

popř.

$$\alpha^2 = \frac{g^2 \varepsilon_r + \Gamma^2}{\varepsilon_r - 1}$$

můžeme upravit rovnici (5.57) do tvaru

$$m^2 \left(\frac{\varepsilon_r}{\Gamma^2 a^2} + \frac{1}{g^2 a^2} \right) \left(\frac{1}{\Gamma^2 a^2} + \frac{1}{g^2 a^2} \right) = (\varepsilon_r X_m - Y_m)(X_m - Y_m) \quad (5.58)$$

Tato disperzní rovnice je analogická rovnicím, které jsme získali při řešení problémů šíření elektromagnetické vlny podél dielektrické desky.

Pro řešení rovnice (5.58) počítáme je vhodné upravit ji tak, aby se ve jmenovateli výrazu X_m nevyškytovala funkce $J_m(\Gamma a)$. Vynásobíme-li celou rovnici výrazem $J_m(\Gamma a)$, můžeme ji upravit do tvaru

$$F^2 - F_1 F_2 = 0 \quad (5.59)$$

kde

$$F^2 = m^2 J_m^2(x) \left(\frac{\varepsilon_r}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \quad (5.59a)$$

$$F_1 = \frac{\varepsilon_r}{x} J_m'(x) + \frac{K_m'(y)}{K_m(y)} J_m(x) \quad (5.59b)$$

$$F_2 = \frac{1}{x} J_m'(x) + \frac{K_m'(y)}{K_m(y)} J_m(x) \quad (5.59c)$$

kde $x = \Gamma a$, $y = ga$ a kde závislost mezi veličinami x a y můžeme vyjádřit pomocí vztahů (5.7) a (5.10) ve tvaru

$$y = \sqrt{(k_0 a)^2 (\varepsilon_r - 1) - x^2} \quad (5.60)$$

Rovnice (5.59) je splněna při daných hodnotách m , $k_0 a$ a ε_r pro řadu diskretních hodnot $x = \Gamma a$. Ze vztahu (5.60) je přitom zřejmé, že maximální hodnota argumentu musí vyhovovat nerovnosti

$$x \leq k_0 a \sqrt{\varepsilon_r - 1}$$

neboť pouze tehdy je hodnota $y = ga$ reálná a elektromagnetické pole ve vnějším prostředí monotónně klesá.

Provedme nyní podrobnější analýzu možnosti šíření různých vidů. S použitím vztahů v příloze B lze psát

$$\frac{J_m'(x)}{x J_m(x)} = \frac{J_{m-1}(x)}{x J_m(x)} - \frac{m}{x^2}; \quad -\frac{K_m'(y)}{y K_m(y)} = \frac{K_{m-1}(y)}{y K_m(y)} + \frac{m}{y^2}$$

Označíme-li

$$\xi_m = \frac{J_{m-1}(x)}{x J_m(x)}; \quad \eta_m = \frac{K_{m-1}(y)}{y K_m(y)}$$

platí

$$X_m = \xi_m - \frac{m}{x^2}; \quad Y_m = \eta_m + \frac{m}{y^2}$$

a rovnici (5.58) můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} m^2 \left(\frac{\varepsilon_r}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) &= \\ &= \left[\varepsilon_r \left(\xi_m - \frac{m}{x^2} \right) - \eta_m - \frac{m}{y^2} \right] \left[\xi_m - \frac{m}{x^2} - \eta_m - \frac{m}{y^2} \right] \end{aligned} \quad (5.61)$$

který další úpravou převedeme na kvadratickou rovnici

$$\xi_m^2 - \xi_m \left[x \eta_m + m \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x}{y^2} \right) \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \eta_m^2 + \eta_m m \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{2}{y^2} \right) \right] = 0 \quad (5.61)$$

jejíž řešení je

$$\begin{aligned} \xi_{m(1,2)} &= \frac{1}{2} \left\{ x \eta_m + m \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x}{y^2} \right) \pm \right. \\ &\left. \pm \sqrt{\left[x \eta_m + m \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x}{y^2} \right) \right]^2 - 4 \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \eta_m^2 + \eta_m m \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{2}{y^2} \right) \right]} \right\} \end{aligned} \quad (5.62)$$

kde $x = (\varepsilon_r + 1)/\varepsilon_r$.

Při mezní frekvenci jednotlivých vidů platí $y = 0$. Vyšetřme, jaké tomu odpovídají hodnoty ξ_m a jaký je charakter příslušných vidů šíření.

Při $y \rightarrow 0$ můžeme rovnici (5.62) napsat ve tvaru

$$\xi_{m(1,2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{m x}{y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{m x}{y^2} \right)^2 - \frac{8 m}{\varepsilon_r y^2} \eta_m} \right]$$

takže po úpravě

$$\xi_{m(1,2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{m x}{y^2} \pm \frac{m x}{y^2} \sqrt{1 - \frac{8 y^2}{m x^2 \varepsilon_r} \eta_m} \right]$$

neholi

$$\xi_{m(1,2)} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{m x}{y^2} \pm \frac{m x}{y^2} \left(1 - \frac{4 y^2}{m x^2 \varepsilon_r} \eta_m \right) \right]$$

$$\zeta_{m(1)} \approx \frac{m\kappa}{y^2} \rightarrow \infty \quad (5.63)$$

$$\zeta_{m(2)} \approx \frac{2}{\kappa \epsilon_r} \eta_m \quad (5.64)$$

Protože platí

$$\zeta_m = \frac{J_{m-1}(x)}{x J_m(x)}$$

je zřejmé, že pro splnění rovnice (5.63) musí být

$$J_m(x) = 0 \quad (5.63a)$$

a pro splnění rovnice (5.64) musí být

$$\frac{J_{m-1}(x)}{x J_m(x)} = \frac{2}{\kappa \epsilon_r} \frac{1}{2(m-1)} = \frac{1}{(\epsilon_r + 1)(m-1)} \quad (5.64a)$$

(přičemž jsme použili vztah $\lim_{y \rightarrow 0} \eta_m = 1/2(m-1)$, viz přílohu B).

Protože platí

$$\frac{2m}{x} J_m(x) = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)$$

platí též

$$\frac{2(m-1) J_{m-1}(x)}{x} = J_{m-2}(x) + J_m(x)$$

takže

$$m-1 = \frac{x}{2} \left[\frac{J_{m-2}(x)}{J_m(x)} + 1 \right] \frac{J_m(x)}{J_{m-1}(x)}$$

a po dosazení do (5.64a) dostaneme po úpravě

$$\frac{J_{m-2}(x)}{J_m(x)} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \quad (5.64b)$$

Při $m = 1$ musíme použít jiný limitní vztah pro η_1 , a to (viz přílohu B)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \eta_1 = -\ln 0,89y$$

takže rovnice (5.64) bude mít tvar

$$\zeta_1 = -\frac{2}{\kappa \epsilon_r} \ln 0,89y \rightarrow \infty \quad (5.64c)$$

což je splněno při

$$J_1(x) = 0 \quad (5.64d)$$

Druhý krajní případ předpokládáme při $y \rightarrow \infty$, tj. při frekvenci mnohonásobně vyšší, než je mezní frekvence. V takovém případě se rovnice (5.62) zjednoduže na

ivai

$$\zeta_{m(1,2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m}{x^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2m}{x^2} \right)^2} \right]$$

takže

$$\zeta_{m(1)} = \frac{2m}{x^2} \quad (5.65)$$

$$\zeta_{m(2)} = 0 \quad (5.66)$$

Protože platí

$$\zeta_m = \frac{J_{m-1}(x)}{x J_m(x)}$$

můžeme rovnici (5.65) napsat ve tvaru

$$\frac{J_{m-1}(x)}{J_m(x)} = \frac{2m}{x} \quad (5.65a)$$

nebo s použitím vztahu $[2m J_m(x)]/x = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)$

$$\frac{J_{m+1}(x)}{J_m(x)} = 0$$

a tedy

$$J_{m+1}(x) = 0 \quad (5.65b)$$

Podobně rovnici (5.66) lze napsat ve tvaru

$$J_{m-1}(x) = 0 \quad (5.66a)$$

Z uvedeného je zřejmé, že při limitních hodnotách y jsou příslušné hodnoty x určeny nulovými hodnotami Besselových funkcí. Tato skutečnost se blíže osvětlí při grafické interpretaci vidů šíření v odst. 5.4.5 a je zřejmá i z obr. 5.9.

5.4.2. Vlny HE_{mn} a EH_{mn} v dielektrickém váleci

Zda je daný vid videm HE nebo EH, to posoudíme z poměru konstant A^e a A^m , které vyjadřují amplitudy modulů Hertzových vektorů v rovnicích (5.44) a (5.45). Protože konstanta A^e má rozměr $V \cdot m$ a konstanta A^m má rozměr $A \cdot m$, musí mít jejich poměr rozměr Ω . Upravme rovnice (5.55) a (5.56) do tvaru [rovnici (5.56) vynásobíme výrazem $\omega \mu_0 / \alpha$, aby byla rozměrově shodná s rovnicí (5.55)]

$$\left(\frac{m}{y^2} + \frac{m}{x^2} \right) A^e = \frac{\omega \mu_0}{\alpha} (X_m - Y_m) A^m$$

$$\frac{k^2}{\alpha^2} (\epsilon_r X_m - Y_m) A^e = \frac{\omega \mu_0}{\alpha} \left(\frac{m}{x^2} + \frac{m}{y^2} \right) A^m$$

Sečteme-li levé a pravé strany těchto rovnic, dostaneme po úpravě pro poměr

$$A^c = \frac{\omega \mu_0}{A^m} \frac{\xi_m - \eta_m}{\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 (\epsilon_r \xi_m - \eta_m) - \left[\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 \epsilon_r - 1\right] \left(\frac{m}{x^2} - \frac{m}{y^2}\right)} \quad (5.67)$$

kde jsme použili vztahy

$$X_m = \xi_m - \frac{m}{x^2}; \quad Y_m = \eta_m + \frac{m}{y^2}$$

Dosadíme-li do (5.67) za ξ_m hodnoty z rovnice (5.63) až (5.66), je zřejmé, že rovnice (5.63) a (5.65) odpovídají vidům EH, rovnice (5.64) a (5.66) vidům HE. Z toho vyplývá, že kladné znaménko v rovnici (5.62) vede na vidy EH, záporné znaménko na vidy HE.

5.4.3. Vlny HE₁₁ v dielektrickém válci

Zvláštní místo ve spektru vidů má vid HE₁₁, pro který platí limitní vztahy (5.64d) a (5.66a).

Při $y \rightarrow \infty$ platí podle (5.66a)

$$J_0(x) = 0$$

(což je splněno při hodnotě argumentu $x = 2,4048$) a při $y \rightarrow 0$ platí podle (5.64d)

$$J_1(x) = 0$$

Protože očekáváme, že při $y \rightarrow 0$ by měla být hodnota argumentu x menší než při $y \rightarrow \infty$, vyšetřme, zda $x = 0$ je možné řešení [další nulová hodnota rovnice $J_1(x) = 0$ je při $x = 3,8318$]. Použijeme-li vztah

$$\xi_m = \frac{J_{m-1}(x)}{x J_m(x)}$$

dostaneme pro $m = 1$ a $x \rightarrow 0$ přibližný vztah (s použitím limitních výrazů z dodatku B)

$$\xi_1 = \frac{J_0(x)}{x J_1(x)} \approx \frac{2}{-x^2}$$

takže po dosazení do rovnice (5.64c) dostaneme

$$\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x \epsilon_r} \ln 0,89 y$$

a po úpravě

$$y = \frac{1}{0,89} e^{-(\epsilon_r + 1)/x^2}$$

Je zřejmé, že $y \rightarrow 0$ při $x \rightarrow 0$. Protože platí

$$\omega_m = \frac{f}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{x}{a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

magnetické vlny šíří se v dielektrickém vlnovodu. Příčné složky elektromagnetického pole tohoto vidu mají podobný průběh jako u dominantního vidu TE₁₁ v kovovém vlnovodu, vid HE₁₁ je však videm hybridním.

5.4.4. Vlny TM_{0n} a TE_{0n} v dielektrickém válci

Vidy s kruhovou symetrií elektromagnetického pole (při $m = 0$) nejsou hybridní, neboť levá strana rovnice (5.58) je nulová a její řešení se redukuje na dva dílčí vztahy

$$\epsilon_r X_0 - Y_0 = 0 \quad (5.68)$$

$$X_0 - Y_0 = 0 \quad (5.69)$$

kteří můžeme s použitím (5.54) napsat ve tvarech

$$-x \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = y \frac{K_0(y)}{K_1(y)} \epsilon_r \quad (5.68a)$$

$$-x \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = y \frac{K_0(y)}{K_1(y)} \quad (5.69a)$$

Elektromagnetická vlna, pro kterou je splněna rovnice (5.68) má podle (5.56) nulovou konstantu A^m , takže je vlnou TM_{0n}. Naopak vlna, pro kterou je splněna rovnice (5.69), má podle (5.55) nulovou hodnotu A^e a je tedy vlnou TE_{0n}. Mezní frekvence těchto vidů určíme z rovnic (5.68a) a (5.69a) nebo z limitních výrazů uvedených v odst. 5.4.1.

5.4.5. Grafická interpretace vidů šíření v dielektrickém válci

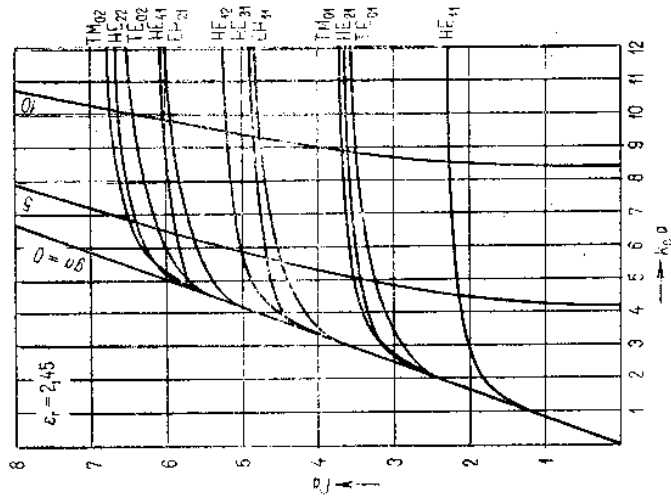
Přehled možnosti šíření jednotlivých vidů elektromagnetického pole v dielektrickém vlnovodu kruhového průřezu získáme grafickým zobrazením řešení rovnice (5.58), kterou pro řešení na počítači upravíme do tvaru (5.59). Při konstantních hodnotách m , $k_0 a$ a ϵ_r je tato rovnice splněna při různých diskrétních hodnotách $x = f a$. Pro polystyrénový vlnovod s relativní permitivitou $\epsilon_r = 2,45$ je řešení zobrazeno na obr. 5.9. Přřazení vidů HE a EH bylo provedeno podle kritéria (5.67). Pro každou dvojici hodnot $k_0 a$ a $x = f a$, která vyhovuje rovnici (5.59), můžeme určit poměrný posun α pomocí vztahu

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \Gamma^2} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_r - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

a hodnotu g , která určuje pokles elektromagnetického pole ve vnějším prostředí, pomocí vztahu (5.60)

$$g = \sqrt{(\epsilon_r - 1) k_0^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

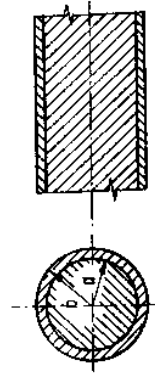
ГТТ вектор потенциал g je rovinec електричномагнетическо поле в цилиндричском змечен
 velmi rychly, při malých hodnotách g je pokles pozvolný.



Obr. 5.9. Vidy šíření
 v dielektrickém vlnovodu

5.5. ŠÍŘENÍ VLNY PODÉL VODIČE POTAŽENÉHO DIELEKTRICKOU VRSTVOU

Podobně jako existuje analogie mezi šířením elektromagnetické vlny v dielektrické desce a v dielektrické tyči, je i analogie mezi šířením v dielektrické vrstvě na vodivé podložce a šířením podél vodiče potaženého dielektrickou vrstvou (obr. 5.10).



Obr. 5.10. Vodič
 s dielektrickou vrstvou

Jako příklad zvolíme šíření kruhově symetrické vlny TM_{01} . Řešení tohoto případu je analogické s případem šíření vlny v dielektrické tyči (vlnovodu). Opět předpokládáme zpomalenou vlnu, takže v prostředí, kde $r > b$, musí platit

$$\Pi_z^c = B^c K_0(gr) e^{-jgz}$$

v dielektrické vrstvě, tj. pro $a < r < b$, musíme příslušný Hertzův vektor vyjádřit lineární kombinací Besselových funkcí prvního a druhého druhu, takže platí

$$\Pi_z^c = [A_1^c J_0(\Gamma r) + A_2^c N_0(\Gamma r)] e^{-jgz}$$

Protože složky intenzity elektrického a magnetického pole můžeme vyjádřit ze vztahů (1.64) a (1.65)

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi_z^c + \text{grad div } \Pi_z^c$$

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \text{rot } \Pi_z^c = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^c \times \mathbf{z})$$

lze psát:

Pro $r > b$

$$E_\varphi = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial^2 \Pi_z^c}{\partial \varphi \partial z} = 0$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_z^c = (k_0^2 - \alpha^2) B^c K_0(gr) e^{-jgz}$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z^c}{\partial r} = -j\omega \epsilon_0 g B^c K_0'(gr) e^{-jgz}$$

a pro $a < r < b$

$$E_\varphi = 0$$

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = (k^2 - \alpha^2) [A_1^c J_0(\Gamma r) + A_2^c N_0(\Gamma r)] e^{-jgz}$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -j\omega \epsilon \Gamma [A_1^c J_0'(\Gamma r) + A_2^c N_0'(\Gamma r)] e^{-jgz}$$

Při $r = a$ musí být každá tečná složka intenzity elektrického pole nulová, takže

$$E_z = 0$$

neboli

$$A_1^c J_0(\Gamma a) + A_2^c N_0(\Gamma a) = 0$$

a tedy platí

$$A_2^c = -A_1^c \frac{J_0(\Gamma a)}{N_0(\Gamma a)} \quad (5.70)$$

Na rozhraní dielektrických prostředí musí být spojité tečné složky intenzit polí, takže pro $r = b$ platí:

Na základě spojitosti složek E_z

$$(k_0^2 - \alpha^2) B^c K_0(gb) = (k^2 - \alpha^2) A_1^c \left[J_0(\Gamma b) - N_0(\Gamma b) \frac{J_0(\Gamma a)}{N_0(\Gamma a)} \right] \quad (5.71)$$

a na základě spojitosti složek H_φ

$$\epsilon_0 g B^c K_0'(gb) = \epsilon \Gamma A_1^c \left[J_0'(\Gamma b) - N_0'(\Gamma b) \frac{J_0(\Gamma a)}{N_0(\Gamma a)} \right] \quad (5.72)$$

Použijeme-li vztahy

$$\alpha^2 = k^2 - \Gamma^2; \quad \alpha^2 = k_0^2 + g^2$$

$$K_0'(gb) = -K_1(gb)$$

dostaneme po vydělení rovnice (5.72) a (5.71) a po úpravě

$$\frac{K_1(gb)}{K_0(gb)} = \frac{g}{\Gamma} \frac{J_0(\Gamma b) N_0(\Gamma a) - N_0'(\Gamma b) J_0(\Gamma a)}{J_0(\Gamma b) N_0(\Gamma a) - N_0'(\Gamma b) J_0(\Gamma a)} \quad (5.73)$$

Řešení této rovnice můžeme provést grafickou metodou, podobně jako při řešení dielektrického vlnovodu.

V případě, že platí

$$b - a = t \ll a$$

můžeme rozvést Besselovy funkce obsahující argument Γb v Taylorovou řadu v okolí Γa , takže lze psát

$$J_0(\Gamma b) \approx J_0(\Gamma a) + \frac{d J_0(\Gamma b)}{d(\Gamma b)} \Gamma(b - a)$$

$$N_0(\Gamma b) \approx N_0(\Gamma a) + \frac{d N_0(\Gamma b)}{d(\Gamma b)} \Gamma(b - a)$$

neboli

$$J_0(\Gamma b) = J_0(\Gamma a) + J_0'(\Gamma b) \Gamma t$$

$$N_0(\Gamma b) = N_0(\Gamma a) + N_0'(\Gamma b) \Gamma t$$

Předpokládáme-li dále, že $a \ll \lambda$, je výraz gb při malých hodnotách t velmi malý. V takovém případě platí přibližné vztahy (viz přílohu B)

$$K_0(gb) \approx -\ln(0,89 gb)$$

$$K_1(gb) \approx \frac{1}{gb}$$

Vztah (5.73) můžeme pak vyjádřit v podstatně jednodušším tvaru

$$-g^2 b \ln(0,89 gb) = \frac{\Gamma^2 t}{\epsilon_r} \quad (5.74)$$

a za použití vztahů

$$\Gamma^2 = k_0^2(\epsilon_r - 1) - g^2$$

$$g^2 \ll k_0^2$$

lze po úpravě psát

$$(0,89)^2 (gb)^2 \ln(0,89 gb) = -(0,89)^2 b \frac{1}{\epsilon_r} (\epsilon_r - 1) k_0^2 t \quad (5.75)$$

Řešením této rovnice určíme g , což nám dále umožní vypočítat hodnotu α .

- [1] Vajnsštejn, L. A.: Elektromagnitnyje volny. Moskva, Sovětskoje radio 1957.
- [2] Ghose, R. N.: Microwave Circuit Theory and Analysis. New York, Mc Graw-Hill 1963.
- [3] Collin, R. E.: Foundations for Microwave Engineering. New York, Mc Graw-Hill 1966.
- [4] Arnaut, J. A.: Beam and Fiber Optics. New York, Academic Press 1976.
- [5] Kajfez, D.: Basic Principles Give Understanding of Dielectric Waveguides and Resonators. MSN, Vol. 13, 1983, No 5, str. 152 až 160.
- 6) Schrüfer, J. — Novomý, K.: Optické vlnovody. Praha, SNITL/ALFA 1986.

6. PERIODICKÉ STRUKTURY

Zvláštním druhem vedení jsou tzv. *periodické struktury*, v nichž se vlna může šířit fázovou rychlostí i menší, než je rychlost světla. Bývají též nazývány *zpomalovacími vedeními*. Periodické struktury našly velmi rozsáhlé uplatnění v mikrovině technice jako součásti elektroněk s postupnou vlnou, součástí elektroněk se zpětnou vlnou (karcinotronů) a součástí lineárních urychlovačů k dosažení účinné interakce vlny se svazkem elektronů. Tato interakce může nastat jediné tehdy, jsou-li rychlosti elektronů a vlny vzájemně blízké. V anténní technice se tyto struktury uplatníly při konstrukci směrových antén v decimetřovém a metrovém pásmu vln.

Některé typy těchto struktur jsou znázorněny na obr. 6.1a, b, c, d. Na obr. 6.1a je tzv. *šroubovicové vedení*¹⁾. Kruhový vlnovod s periodicky se opakujícími clonami bývá nazýván též *hřebinkovou strukturou* (obr. 6.1b). *Plochá hřebinková struktura* je na obr. 6.1c. *Interdigitální struktura* je na obr. 6.1d. Název těchto struktur má svůj původ v tom, že se zářezy nebo clony periodicky opakují podél vedení se vzdáleností L zvanou *perioda struktury*. U šroubovicového vedení nazýváme periodou stoupání šroubovice.

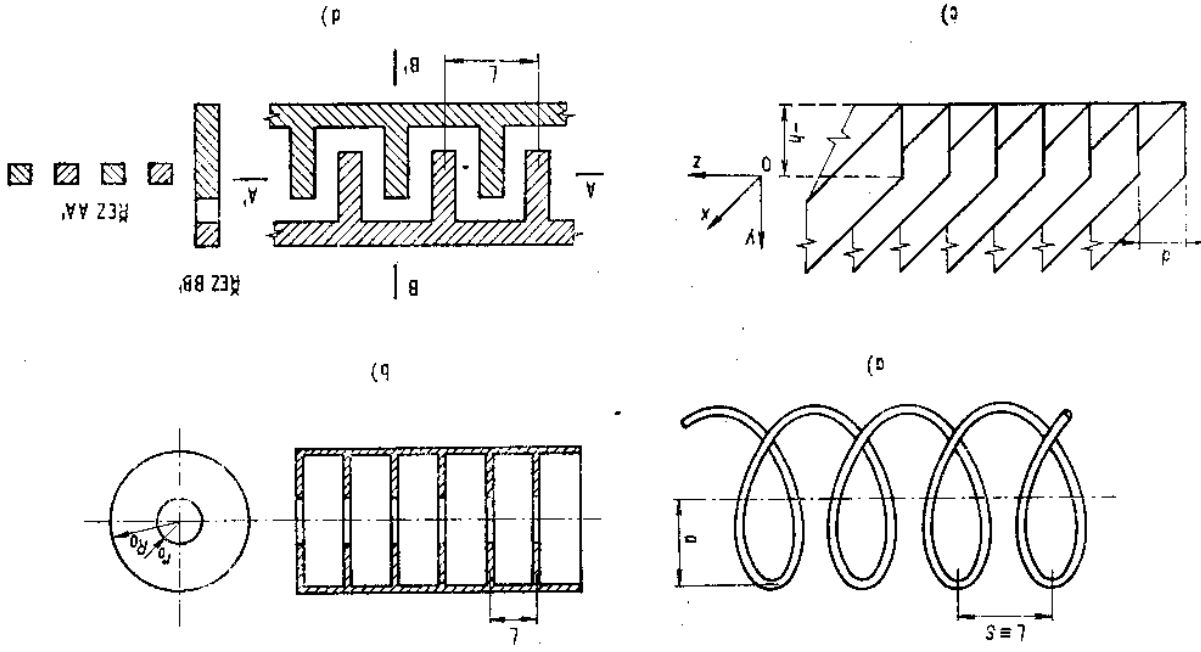
6.1. OBECNÉ ZÁKONITOSTI V PERIODICKÝCH STRUKTURÁCH

6.1.1. Pomalé elektromagnetické vlny

Z kapitoly 2 víme, že zpomalení elektromagnetické vlny lze dosáhnout zvýšením permittivity a permeability prostředí, v němž se šíří vlna. Snížení fázové rychlosti je v tomto případě nepřímo úměrné hodnotě $\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. Tento způsob se používá ke zpoždování vf impulsů. V této kapitole ukážeme, že zpomalení vlny podél vedení lze dosáhnout i tak, že nahradíme hladké stěny vlnovodu povrchem složitějšího tvaru nebo (matematicky řečeno) zavedením zvláštních okrajových podmínek. Jak uvidíme dále, tyto zvláštní okrajové podmínky existují právě v periodických strukturách, připomeneme si poznatek z čl. 5.1, že pole zpomalené vlny je převážně soustředěno v těsné blízkosti vedení. Pomalé vlny v periodické struktuře mají tedy charakter tzv. *povrchových vln*.

¹⁾ Tento typ bývá v mikrovině technice všeobecně, ale nevhodně označován jako „spirálové vedení“, i když spirála znamená rovinovou křivku (Archimedova spirála, logaritmická spirála apod.).

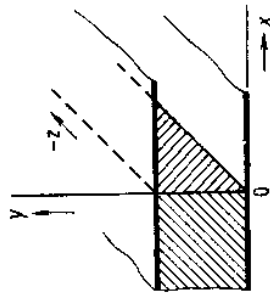
Obr. 6.1. Typy periodických struktur
a) šroubovicové vedení, b) kruhový vlnovod s hřebinkovou strukturou,
c) plochá hřebinková struktura, d) interdigitální struktura



6.1.2. Povrchové vlny

Předpokládejme paralelní vodivé desky částečně zaplněné dielektrikem (obr. 6.2). Součinitel přenosu ve směru z nechť je $\gamma = j\alpha$. Pak pro modul Hertzova vektoru elektrického nebo magnetického typu lze psát

$$H_z = T_1 e^{-j\alpha z} \quad (6.1)$$



Obr. 6.2.

Příčná funkce $T_1(x, y)$ musí vyhovovat dílčí vlnové rovnici

$$\Delta T_1 + \Gamma^2 T_1 = 0 \quad (6.2)$$

přičemž pro konstanty platí (2.11), tedy

$$\Gamma^2 = k^2 - \alpha^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_t^2} \right) \quad (6.3)$$

V bezstrátovém vlnovodu se vzduchovým dielektrikem je konstanta Γ reálná, protože $\alpha^2 < k^2$ a $v_t > c$. V případě pomalých vln ($v_t < c$, prostředí je částečně zaplněno dielektrikem) je $\alpha^2 > k^2$. Rozdíl zlomků ve vzorci (6.3) je záporný, takže Γ je ryze imaginární

$$\Gamma = j\beta \quad (6.4)$$

Dílčí vlnová rovnice (6.2) tedy bude mít tvar

$$\Delta T_1 - \beta^2 T_1 = 0 \quad (6.5)$$

Předpokládejme dále, že pole nezávisí na souřadnici y , takže rovnice

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \beta^2 T_1 = 0 \quad (6.5)$$

má řešení ve tvaru

$$T_1 = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} \quad (6.6)$$

Bude-li prostředí ve směru x neomezené, musí být $C_1 = 0$ (neboť pro $x \rightarrow \infty$ musí být $T_1 = 0$), takže

$$T_1 = C e^{-\beta x}$$

Protože v místě $x \leq 0$ je zpomalující prostředí, vidíme že funkce T_1 , a tedy

i intenzita pole pomalé vlny exponenciálně klesá s rostoucí vzdáleností od povrchu $x = 0$.

Provedeme nyní analogické řešení ve válcových souřadnicích pro případ zpomalovací struktury kruhového průřezu. Položíme-li

$$T_1 = R(r)\Phi(\varphi) \quad (6.8)$$

přejde rovnice (6.5) na tvar

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} - g^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (6.9)$$

Řešení pravé strany je

$$\Phi = C \cos n\varphi \quad (6.10)$$

a pro funkci R dostaneme modifikovanou Besselovu diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(g^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (6.11)$$

Obecný integrál této rovnice lze vyjádřit pomocí modifikovaných Besselových funkcí (viz matematickou přílohu, část B) ve tvaru

$$R = C_1 I_n(g r) + C_2 K_n(g r) \quad (6.12)$$

Výsledné řešení pro funkci T_1 bude po sdružení konstant

$$T_1 = [C' I_n(g r) + C'' K_n(g r)] \cos n\varphi \quad (6.13)$$

Z průběhů modifikovaných Besselových funkcí nultého a prvního řádu (obr. B.2, příloha B) je zřejmé, že při vzrůstajícím argumentu funkce $I_n(x)$ monotónně vzrůstá a funkce $K_n(x)$ monotónně klesá. Je-li povrch zpomalovací struktury v místě $r = a$, pak nad povrchem, tj. v intervalu $a < r < \infty$, bude funkce T_1 dána vztahem

$$T_1 = C'' K_n(g r) \cos n\varphi \quad (6.14)$$

neboť pro $r \rightarrow \infty$ musí být $T_1 \rightarrow 0$, a tedy $C' = 0$. Protože funkce T_1 se vzrůstajícím poloměrem r monotónně klesá, je energie pomalé vlny převážně soustředěna v těsné blízkosti povrchu zpomalovací struktury jako v předcházejícím případě. Vlny s takovým charakterem rozložení pole se nazývají *povrchovými vlnami*.

6.1.3. Prostorové harmonické

Vlivem složitosti povrchu zpomalovací struktury není okamžitě rozložení pole podél struktury harmonické, ale je deformováno. Prostorové rozložení pole je ve všech zářezech zcela identické a liší se pouze fází (obr. 6.3).

Pro intenzitu elektrického pole ve dvou sousedních zářezech musí platit

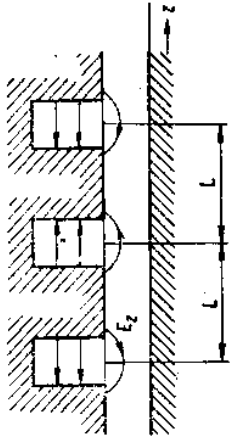
$$\mathbf{E}(x, y, z + L) = \mathbf{E}(x, y, z) e^{-\gamma_0 L} \quad (6.15)$$

kde $\gamma_0 = \beta_0 + j\alpha_0 = \beta_0 + j2\pi/\lambda_{v,0}$ je součinitel šíření a $\lambda_{v,0}$ je vlnová délka zpomalené vlny ve struktuře.

Protože se zářezy opakují periodicky podél souřadné osy z , je okamžité prostorové rozložení pole periodickou funkcí souřadnice z s periodou rovnou periodě struktury L . Vynecháme-li časový činitel $e^{j\omega t}$, můžeme vyjádřit intenzitu elektrického pole postupné vlny v periodické struktuře podle Floquetovy věty jako součin dvou periodických funkcí

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p(x, y, z) e^{-j\gamma_0 z} \quad (6.16)$$

Podrobněji o Floquetově větě viz např. [4], [6].



Obr. 6.3.

Protože $\mathbf{E}_p(x, y, z)$ je periodickou funkcí z s prostorovou periodou L , je

$$\mathbf{E}_p(x, y, z + nL) = \mathbf{E}_p(x, y, z) \quad (6.17)$$

a lze ji rozvinout ve Fourierovu řadu. Tedy

$$\mathbf{E}_p(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{pn}(x, y) e^{-j2\pi n z/L} \quad (6.18)$$

kde vektorová funkce proměnných x a y

$$\mathbf{E}_{pn}(x, y) = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{E}_p(x, y, z) e^{j2\pi n z/L} dz \quad (6.19)$$

Dosadíme-li (6.18) do (6.16), dostaneme intenzitu elektrického pole postupné vlny jako součet příspěvků nekonečné řady dílčích postupných vln

$$\mathbf{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{pn}(x, y) e^{-(\gamma_0 + j2\pi n/L)z} \quad (6.20)$$

s amplitudami $\mathbf{E}_{pn}(x, y)$ a se součiniteli šíření

$$\gamma_n = \gamma_0 + j \frac{2\pi n}{L} \quad (6.21)$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dílčí postupná vlna s amplitudou $\mathbf{E}_{pn}(x, y)$ má název *n-tá prostorová harmonická* (někdy též Hartreeova harmonická), zatímco výsledná vlna daná součtem (v určitém okamžiku $t = konst$) všech prostorových harmonických má název *polyharmonická*.

Délka vlny n -té harmonické v periodické struktuře je

$$\lambda_{pn} = \frac{2\pi}{|\alpha_n|} = \frac{2\pi}{\left| \alpha_0 + \frac{2\pi n}{L} \right|} \quad (6.22)$$

Fázová rychlost polyharmonické vlny nemůže být určena zcela jednoznačně, protože pro n -tou prostorovou harmonickou platí

$$(v_r)_n = \frac{\omega}{\alpha_n} = \frac{\omega}{\alpha_0 + \frac{2\pi}{L}n} \quad (6.23)$$

Není proto zcela jasné, kterou z těchto rychlostí je třeba brát v úvahu. Tato skutečnost je pochopitelná, protože vlnu ve struktuře nelze vyjádřit pomocí jednoduché harmonické funkce. Z rovnice (6.23) také vyplývá, že při zvyšování čísla prostorové harmonické se její rychlost zmenšuje a v souhlasu s tím se zkracuje i její vlnová délka. Při tom však všechny harmonické jsou charakterizovány jednou a toutéž frekvencí.

Fázové rychlosti jednotlivých prostorových harmonických mohou být vzhledem ke skupinové rychlosti kladné nebo záporné. Je-li $n > 0$, má fázová i skupinová rychlost směr stejný, v případě $n < 0$ mohou mít směry opačné (vlny zpětné), je-li $n < -L/\lambda_0$, jak plyne ze vztahu (6.22). Dílčí vlna odpovídající $n = 0$ je *základní prostorová harmonická*. Skupinová rychlost je však na čísla n nezávislá. Protože $\omega = konst$ pro všechna n , je

$$v_{sk} = \left(\frac{dz_0}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{d\alpha_1}{d\omega} \right)^{-1} = \dots = \left(\frac{d\alpha_n}{d\omega} \right)^{-1} \quad (6.24)$$

Na závěr je třeba dodat, že jednotlivé prostorové harmonické nemohou existovat samostatně, protože jako jednotlivé vlny nespĺňují složité okrajové podmínky. Poměry velikostí amplitud dílčích harmonických vln závisí na geometrickém tvaru periodické struktury. Popsané prostorové harmonické nesouvisejí tedy nijak s různými vlny (např. TE_{10} , TE_{11} , TM_{11}), které se v běžném vlnovodu mohou zcela samostatně nejen vybudit, ale i šířit. V elektronkách s postupnou vlnou však může být k dosažení zesilovacího jevu využita kterákoliv prostorová harmonická. Obvykle se volí ta, která má největší amplitudu a nejmenší fázovou rychlost.

6.2. ŠÍŘENÍ VLN PODÉL PERIODICKÝCH STRUKTUR

Zde budeme vyšetřovat některé zvláštnosti šíření vln v nejpoužívanějších typech periodických struktur. Cíl rozboru struktury závisí na její aplikaci. Při všech aplikacích, at již jde o mikrovlnné elektronky, urychlovače nebo spirálové antény, je třeba zjistit disperzní charakteristiku, tj. závislost fázové rychlosti na frekvenci. Vyšetříme tedy nejprve vlnovou strukturu a pak plochou periodickou strukturu.

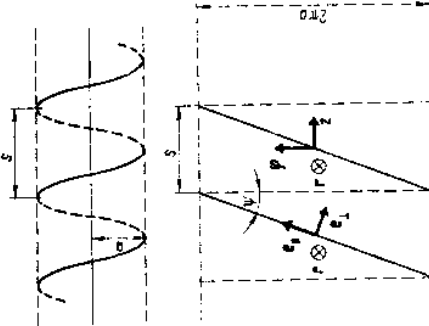
6.2.1. Šroubovicové vedení

Šroubovicové vedení je znázorněno na obr. 6.1a. Vlastnosti tohoto vedení vyšetříme pomocí matematického modelu, v němž je vlnitý šroubovice nahrazeno anizotropně vodivým válcem. Válec je vodivý pouze ve směru vlnití, v ostatních

směrem je vodivost nulová. Tento model neumožňuje respektovat vln přímou vodiče šroubovice. V praktické aplikaci bývá šroubovice upevněna keramickými izolátory, které také ovlivňují uspořádání pole. Zmíněný matematický model tuto okolnost rovněž nerespektuje.

Okrajové podmínky

Vnitřní prostor anizotropně vodivého válce není zcela oddělen od vnějšího prostoru. Okrajové podmínky na plášti takového válce musí být proto zcela jiné než u obyčejného válcového vlnovodu. U obyčejného vlnovodu musela být tečná složka elektrického pole na plášti nulová. Na šroubovici musí být tečné složky intenzity elektrického vnitřního pole $E_{\parallel}^{(e)}$ a vnějšího pole $E_{\parallel}^{(e)}$ nulové pouze ve směru vodiče a v místě vodiče ($r = a$). Mezi závitů musí být při přechodu z vnitřního do vnějšího prostředí elektrické pole spojitě. Dále je nutné, aby obě magnetická pole vnitřní $H^{(i)}$ a vnější $H^{(e)}$ byla spojitá ve směru průchodu proudu, tj. šroubovice. Vyjádříme nyní tyto podmínky analyticky. Zavedeme novou soustavu jednotkových vektorů e_{\perp} e_{\parallel} podle obr. 6.4, který znázorňuje šroubovici rozvinutou do roviny.



Obr. 6.4. Model šroubovicového vedení

Stoupání šroubovice je $S = 2\pi a \operatorname{tg} \psi$. Nové jednotkové vektory jsou pak s jednotkovými vektory válcových souřadnic r , φ a z vázány vztahy

$$r \times e_{\parallel} = e_{\perp}; \quad e_{\parallel} = z \sin \psi + \varphi \cos \psi; \quad e_{\perp} = z \cos \psi - \varphi \sin \psi \quad (6.25)$$

Uvedené okrajové podmínky můžeme pro $r = a$ vyjádřit vztahy

$$E_{\parallel}^{(i)} = E_{\parallel}^{(e)} = 0; \quad E_{\perp}^{(i)} = E_{\perp}^{(e)}; \quad H_{\parallel}^{(i)} = H_{\parallel}^{(e)} \quad (6.26)$$

kde horní index (i) označuje vnitřní prostředí $0 \leq r \leq a$ a horní index (e) označuje vnější prostředí $a = r \leq \infty$.

Uvážíme-li, že vektor elektrického pole E můžeme vyjádřit složkami ve směru pomocných jednotkových vektorů a také ve válcových souřadnicích jako

$$E = rE_r + e_{\parallel}E_{\parallel} + e_{\perp}E_{\perp}; \quad E = rE_r + \varphi E_{\varphi} + zE_z$$

převědeme snadno okrajové podmínky (6.26) pomocí (6.25) na tvar

$$E_z^{(i)} \sin \psi + E_{\varphi}^{(i)} \cos \psi = 0 \quad (6.27)$$

$$E_z^{(e)} \sin \psi + E_{\varphi}^{(e)} \cos \psi = 0 \quad (6.28)$$

$$E_z^{(i)} = E_z^{(e)} \quad (6.29)$$

$$H_z^{(i)} \sin \psi + H_{\varphi}^{(i)} \cos \psi = H_z^{(e)} \sin \psi + H_{\varphi}^{(e)} \cos \psi$$

Získané okrajové podmínky pro šroubovicové vedení použijeme k řešení vlnové rovnice a k určení konstant γ a g .

Symetrická vlna ve šroubovicovém vedení

Vlnovou rovnici budeme řešit ve válcových souřadnicích jako u kruhového vlnovodu s tím rozdílem, že okrajové podmínky nemohou být splněny zvlášť pro vidy TM a vidy TE. V kruhovém vlnovodu je v ideálním případě vodivost stěn nekonečná. U šroubovice tomu tak není, takže okrajové podmínky je možné splnit pouze superpozicí vln TE a TM. Vlna ve šroubovici obecně není ani typu TM ani TE a má vždy složky E_z a H_z . Známe-li oba Hertzovy vektory Π_z^m, Π_r^m , bude obecné řešení dáno známými vztahy (1.62) a (1.63), kde oba vektory vyhovují vlnovým rovnicím (index z vynecháme)

$$\Delta \Pi^m + k^2 \Pi^m = 0; \quad \Delta \Pi^m + k^2 \Pi^m = 0 \quad (6.30)$$

Předpokládáme, že Hertzův vektor je dán součinem dvou funkcí a že se vlna šíří pouze jedním směrem. Pak

$$\Pi^m = T_1^m(r, \varphi) e^{-\gamma z}; \quad \Pi^m = T_1^m(r, \varphi) e^{-\gamma z} \quad (6.31)$$

kde γ je součinitel šíření ve směru osy šroubovice z. Funkce T_1^m a T_1^m vyhovují dřívejším vlnovým rovnicím

$$\Delta T_1^m + \Gamma'^2 T_1^m = 0; \quad \Delta T_1^m + \Gamma'^2 T_1^m = 0 \quad (6.32)$$

Separáční konstanty γ a Γ' jsou s vlnovým číslem k vázány vztahem $\Gamma'^2 = k^2 - \gamma^2$. Protože u bezeztrátové struktury je $\gamma = j\alpha$, přejde tento vztah na tvar

$$\Gamma'^2 = k^2 - \alpha^2 \quad (6.33)$$

Konstanta Γ' může být v případě anizotropního válce obecně komplexní, protože musíme brát v úvahu pole jak uvnitř válce, tak i vně válce. Fázová rychlost vně válce musí být menší nebo nanejvýše rovna rychlosti světla $v_r \leq c$. Pak musí být $\alpha \geq k$ a rozdíl v (6.33) je záporný. Zanedbáme-li ztráty, bude konstanta Γ' ryze imaginární

$$\Gamma' = jg \quad (6.34)$$

$$\Delta T_1^e - g^2 T_1^e = 0; \quad \Delta T_1^m - g^2 T_1^m = 0 \quad (6.35)$$

Předpokládáme pole pouze osově symetrické, které nezávisí na souřadnici φ . Pak $T_1^e = T_1^e(r)$ a $T_1^m = T_1^m(r)$. Ve válcových souřadnicích budou mít dílčí vlnové rovnice tvar

$$\frac{d^2 T_1^e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1^e}{dr} - g^2 T_1^e = 0; \quad \frac{d^2 T_1^m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1^m}{dr} - g^2 T_1^m = 0 \quad (6.36)$$

Obecné integrály obou rovnic budou stejné až na integrační konstanty

$$T_1^e = C_1^e I_0(gr) + C_2^e K_0(gr); \quad T_1^m = C_1^m I_0(gr) + C_2^m K_0(gr) \quad (6.37)$$

Celý prostor, v němž provádíme řešení, rozdělíme na dva dílčí prostory; prostor vnitřní $0 \leq r \leq a$ a prostor vnější $a \leq r \leq \infty$.

Uvnitř válce musí mít Hertzův vektor hodnotu konečnou a pro $r \rightarrow \infty$ musí být Hertzův vektor nulový. Z průběhů modifikovaných Besselových funkcí (viz matematickou přílohu, část B) zjistíme, že pro fyzikálně možné řešení je nutné, aby v intervalu $0 \leq r \leq a$ bylo $C_2^e = C_2^m = 0$. Naopak v intervalu $a \leq r \leq \infty$ musí $C_1^e = C_1^m = 0$. Hertzovy vektory pak budou

$$\begin{aligned} \Pi^{e(0)} &= C_1^{e(0)} I_0(gr) e^{-\gamma z} & \text{pro } 0 \leq r \leq a \\ \Pi^{m(0)} &= C_1^{m(0)} I_0(gr) e^{-\gamma z} & \text{pro } 0 \leq r \leq a \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{e(e)} &= C_2^{e(e)} K_0(gr) e^{-\gamma z} \\ \Pi^{m(e)} &= C_2^{m(e)} K_0(gr) e^{-\gamma z} & \text{pro } a \leq r \leq \infty \end{aligned} \quad (6.39)$$

Pro zjednodušení psaní položíme $C_1^{e(0)} = A$; $C_2^{e(e)} = B$; $C_2^{m(e)} = C$; $C_2^{m(e)} = D$. Dosazením získaných vztahů pro Hertzovy vektory do (1.62) a (1.63) vypočítáme složky intenzity elektrického a magnetického pole ve směru souřadných os.

Uvnitř válce

$$\begin{aligned} E_r^{(0)} &= -\gamma A g I_1(gr) e^{-\gamma z} \\ E_\varphi^{(0)} &= j\omega \mu B g I_1(gr) e^{-\gamma z} \\ E_z^{(0)} &= -A g^2 I_0(gr) e^{-\gamma z} \\ H_r^{(0)} &= -\gamma B g I_1(gr) e^{-\gamma z} \\ H_\varphi^{(0)} &= -j\omega \epsilon A g I_1(gr) e^{-\gamma z} \\ H_z^{(0)} &= -B g^2 I_0(gr) e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Vně válce

$$\begin{aligned} E_r^{(e)} &= \gamma C g K_1(gr) e^{-\gamma z} \\ E_\varphi^{(e)} &= -j\omega \mu D g K_1(gr) e^{-\gamma z} \\ E_z^{(e)} &= -C g^2 K_0(gr) e^{-\gamma z} \\ H_r^{(e)} &= \gamma D g K_1(gr) e^{-\gamma z} \\ H_\varphi^{(e)} &= j\omega \epsilon C g K_1(gr) e^{-\gamma z} \\ H_z^{(e)} &= -D g^2 K_0(gr) e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Pro výpočet složek byla zanechána vlnovost prostředí ($\sigma = 0$) a byly využity vztahy (B.12) až (B.19) matematického dodatku. Získaná řešení (6.40) a (6.41) musí vyhovovat okrajovým podmínkám (6.27) a (6.29)

$$A g I_0(ga) = j\omega \mu B I_1(ga) \cotg \psi \quad (6.42)$$

$$j\omega \mu D K_1(ga) \cotg \psi = C g K_0(ga) \quad (6.43)$$

$$C K_0(ga) = A I_0(ga) \quad (6.44)$$

$$-B g I_0(ga) - j\omega \epsilon A I_1(ga) \cotg \psi = -D g K_0(ga) + j\omega \epsilon C K_1(ga) \cotg \psi \quad (6.45)$$

Z těchto rovnic určíme neznámé integrační konstanty, příčnou konstantu g a nakonec součinitel šíření. K tomu vyjádříme z (6.42) až (6.44) všechny konstanty pomocí jedné z nich (např. A) a dosadíme do (6.45)

$$C = A \frac{I_0(ga)}{K_0(ga)}; \quad B = -j \frac{A g I_0(ga)}{\omega \mu I_1(ga) \cotg \psi}; \quad (6.46)$$

$$D = \frac{A g I_0(ga)}{\omega \mu K_1(ga) \cotg \psi}$$

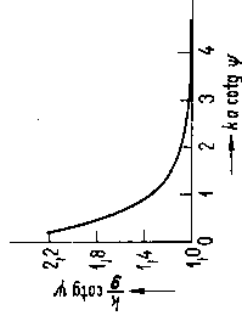
Po dosazení konstant do (6.45) dostaneme rovnici bez integračních konstant

$$\begin{aligned} g^2 I_0^2(ga) K_1^2(ga) - \omega^2 \mu \epsilon I_1^2(ga) K_1(ga) K_0(ga) \cotg^2 \psi &= \\ = \omega^2 \mu \epsilon K_1^2(ga) I_1(ga) \frac{I_0(ga)}{K_0(ga)} \cotg^2 \psi - I_0(ga) K_0(ga) I_1(ga) g^2 & \end{aligned} \quad (6.47)$$

kterou již snadno upravíme, je-li $\omega^2 \mu \epsilon = k^2$, na tvar

$$(ka)^2 \cotg^2 \psi = (ga)^2 \frac{K_0(ga) I_0(ga)}{K_1(ga) I_1(ga)}$$

kde $\cotg \psi = 2\pi a/S$. Řešení rovnice (6.47) je možné provést graficky nebo přibližně. Grafické řešení podle Pierce ([2], str. 23) je na obr. 6.5.



Obr. 6.5.

Přibližné řešení můžeme provést pro velké hodnoty argumentů modifikovaných Besselových funkcí. Pro velké hodnoty argumentu ga totiž platí

$$\frac{K_0(ga) I_0(ga)}{K_1(ga) I_1(ga)} \approx 1$$

$$g \approx k \cotg \psi \quad (6.48)$$

Známe-li g , určíme rychlost zpomalené vlny. Protože $\alpha = \sqrt{k^2 - \Gamma'^2}$, kde $\Gamma' = j\omega \epsilon_0 \cotg \psi$, bude $\alpha = k/\sin \psi$ a odtud

$$v_T = \frac{\omega}{\alpha} \approx c \sin \psi \quad (6.49)$$

Z obr. 6.5 je zřejmé, že pro $ka \cotg \psi > 4$ dává přibližné řešení dobré výsledky. Jako příklad vypočítáme rychlost šíření vlny ve zpomalovací struktuře elektroniky s postupnou vlnou (EPV). Šroubovice EPV pro pásmo 6 cm je navinuta z drátu průměru 0,3 mm, má střední průměr $2a = 2,8$ mm a stoupání $S = 0,7$ mm. Máme vypočítat rychlost zpomalené vlny a potřebné urychlovací napětí elektronů k dosažení účinné interakce elektronového svazku se zpomalenou vlnou. Vypočítáme nejdivů úhel ψ a pak z (6.49) dostaneme $v_T = 0,24 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$. Urychlovací napětí je dáno známým vztahem

$$eU = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

kde m_0 je klidová hmotnost elektronu ($m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg), e náboj elektronu ($e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C), $v \approx v_T$ rychlost elektronů.

Dosažením $v \approx v_T = 0,24 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$ dostaneme $U = 1\,650$ V.

6.2.2. Hřebínkové vedení

Toto vedení je znázorněno na obr. 6.1c. Předpokládáme, že vedení je ve směru x neomezené. Výška velmi tenkých destiček upevněných na základní vodivé desce je h . Ukážeme, že podél takové struktury se mohou šířit pomalé vlny. Od vlnovodu s clonami (obr. 6.1b) se liší tím, že se jeví jako vedení „otevřené“, tj. pole může zaujímat neomezeně celý prostor ve směru y . Řešení provedeme zvlášť pro pole mezi deskami a zvlášť pro pole vně desek, určíme podmínky pro spojitý přechod obou polí a pak stanovíme disperzní charakteristiku.

Pro praktické aplikace nás zajímá vlna TM (interakce elektronů s vlnou nastává prostřednictvím složky intenzity pole E_z). Předpokládáme tedy, že ve větším prostoru ($y > 0$) je velikost Hertzova vektoru dána vztahem

$$\Pi_z^e = T_1 e^{-\gamma z} \quad (6.50)$$

přičemž příčná funkce vyhovuje rovnici

$$\Delta T_1 - g^2 T_1 = 0 \quad (6.51)$$

Nezávislí-li pole na souřadnici x , bude řešení této rovnice

$$T_1 = C e^{-\gamma y}$$

v řešení být nemůže. Hertzův vektor pak je

$$\Pi_z^e = C e^{-\gamma y} e^{-i\omega t} \quad (6.52)$$

a složky intenzity elektrického a magnetického pole jsou

$$\begin{aligned} E_y &= \gamma g C e^{-\gamma y} e^{-i\omega t} \\ E_z &= -g^2 C e^{-\gamma y} e^{-i\omega t} \\ H_x &= -j\omega g C e^{-\gamma y} e^{-i\omega t} \\ E_x &= H_y = H_z = 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

Nyní vyřešíme pole v prostoru pro $y < 0$. Předpokládáme, že se fáze vlny ve směru z podél jedné periody mění velmi málo, takže platí

$$\gamma d \ll 1 \quad (6.54)$$

což znamená v prvním přiblížení, že destičky ovlivňují charakter vlny velmi málo. Je-li splněna tato podmínka, pak pole mezi dvěma sousedními deskami nezávisí na souřadnici z . Protože pro vnější prostor jsme předpokládali, že pole nezávisí na x , musí pole mezi deskami být rovněž nezávislé na této souřadnici. Za těchto okolností můžeme předpokládat, že pole mezi dvěma sousedními deskami má charakter vlny TEM ve směru y . Tuto vlnu budeme považovat za zvláštní případ vlny TM, takže vlnová rovnice Hertzova vektoru má tvar

$$\frac{d^2 \Pi_z^e}{dy^2} + k^2 \Pi_z^e = 0$$

Jejím obecným řešením je

$$\Pi_z^e = C_1 \cos ky + C_2 \sin ky \quad (6.55)$$

Pro splnění okrajové podmínky $E_z = 0$ na vodivé stěně $y = -h$ musí být $\Pi_z^e = 0$ pro $y = -h$. Tedy

$$C_1 \cos kh - C_2 \sin kh = 0$$

a odtud

$$C_1 = C_2 \frac{\sin kh}{\cos kh}$$

Položíme-li $C_2/\cos kh = B$, dostaneme pro Hertzův vektor

$$\Pi_z^e = B \sin k(y + h) \quad (6.56)$$

Známe-li Hertzův vektor, určíme již snadno složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$\begin{aligned} E_z &= k^2 B \sin k(y + h) \\ H_x &= j\omega g B \cos k(y + h) \end{aligned} \quad (6.57)$$

Z obou vztahů je zřejmé, že závislost elektrického a magnetického pole mezi deskami na souřadnici y souhlasí s rozložením napětí a proudů stojaté vlny na

složek polí v místě styku obou oblastí ($y < 0$ a $y > 0$), dostaneme

$$k^2 B \sin kh = -g^2 C e^{-\gamma z} \quad (6.58)$$

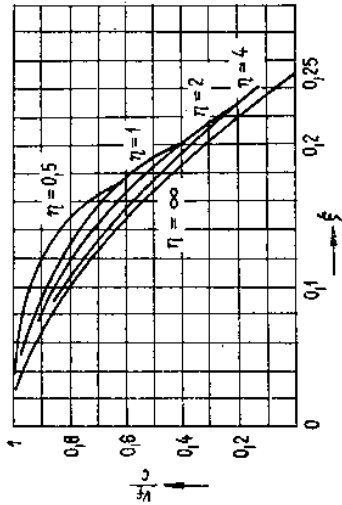
$$Bk \cos kh = -gC e^{-\gamma z}$$

Z podmínek pro netriviální řešení obou rovnic dostaneme charakteristickou rovnici

$$g = k \operatorname{tg} kh \quad (6.59)$$

Výsledek dosadíme do vzorce pro v_t a s pomocí (6.33) a (6.34) upravíme na tvar

$$v_t = c \cos kh \quad (6.60)$$



Obr. 6.6. Disperzní charakteristika hřebínkové struktury

Disperzní charakteristika vedení s hřebínkovou strukturou je na obr. 6.6. Podle vztahu (6.60) je vynesena křivka označená $\eta = \infty$. Na vodorovnou osu se nanáší bezrozměrná veličina

$$\xi = \frac{h}{\lambda} = \frac{kh}{2\pi} \quad (6.61)$$

úměrná frekvenci a na svislou osu poměr v_t/c .

Analýzujeme nyní získanou disperzní charakteristiku. Z obr. (6.6) vyplývá, že se povrchová vlna může podél vedení šířit pouze při splnění nerovnosti $0 < \xi < 0,25$, tj. pro délku destiček nepřevyšující čtvrtinu vlnové délky ve volném prostoru. Pro hodnoty $0,25 < \xi < 0,5$ povrchová vlna neexistuje, protože pravá část rovnice (6.59) je záporná. Pro hodnoty $\xi > 0,5$ má rovnice (6.59) také řešení, avšak tímto případem se nemůžeme pro omezený rozsah učebnice zabývat.

Při $\xi = 0,25$ nastává rezonance vedení tvořeného sousedními deskami (vedení na konci zkratované s délkou $h = \lambda/4$). Z toho vyplývá, že při frekvenci nižší, než je rezonanční frekvence hřebínkového vedení, nastává zpomalení a vzniká povrchová vlna. Pro frekvenci vyšší než je rezonanční, povrchová vlna neexistuje.

Pomocí vztahů (6.59) a (6.60) snadno zjistíme, že pro $\xi \rightarrow 0$ bude $g \rightarrow 0$ a $v_t/c \rightarrow 1$. Pak je $\gamma = jk$ a podél osy z se šíří v tomto mezním případě rovinná vlna TEM s rychlostí c . Hodnotu $\xi \rightarrow 0$ lze získat i tak, že položíme $h \rightarrow 0$, čímž přejde

hřebínkové vedení na vedení s hladkým povrchem. Jiná možnost je pro $\lambda \rightarrow \infty$, což znamená, že dostatečně dlouhé vlny se šíří podél vedení stejně jako podél hladké stěny. Povrch vedení nemá v tomto případě žádný vliv na šíření vlny.

Všechny předcházející vztahy pro disperzi hřebínkového vedení jsou správné pouze tehdy, je-li splněna podmínka (6.54); proto také ve všech vztazích nevystupuje perioda struktury d . V případě $\xi \rightarrow 0,25$ je $v_t/c \rightarrow 0$. Protože $v_t = \omega/\alpha$, bude $\alpha \rightarrow \infty$ a podmínka (6.54) nebude splněna pro konečnou hodnotu periody d . Z toho vyplývá, že pro malé hodnoty v_t/c je naše přibližné řešení nepoužitelné. Přesná teorie povrchových vln (viz např. [1]) tento závěr potvrzuje. Podle této teorie jsou na obr. 6.6 vyneseny výsledky výpočtu zpomalení v_t/c pro hřebínková vedení s různými poměry $\eta = h/d$, které charakterizují tvar hřebínkové struktury. Je zřejmé, že se vzrůstajícím η je hřebínková struktura „hustší“. Z grafu na obr. 6.6 je též vidět, že pomocí „řidkých“ hřebínkových struktur nelze podstatným způsobem vlnu zpomalit.

Literatura ke kapitole 6

- [1] Vajnszejn, L. A.: Elektromagnitnyje volny. Moskva, Sovětskoje radio 1957.
- [2] Pierce, J. R.: Lampa s begušejí volnoj (překl. z angl.). Moskva, Sovětskoje radio 1952.
- [3] Harvey, A. F.: Periodic and Guiding Structures at Microwave Frequencies. IRE Trans. MTT-8, 1960, č. 1.
- [4] Collin, R. E.: Field Theory of Guided Waves. New York, Mc Graw-Hill Comp. 1960.
- [5] Kleen, W. I.: Vvedenje v elektroniku sverchvysokich častot (překl. z rusk.). Moskva, Sovětskoje radio 1963.
- [6] Brillouin, L.-Parodi, M.: Rasprostranenje voln v periodičeskich strukturach, Moskva, Izd. inostr. lit. 1959.
- [7] Punčochář, J.-Rážižka, V.: Technika velmi krátkých vln. Skriptum FE VUT Brno. Praha, SNTL 1979.

7. Mikrovlnné rezonanční obvody

Mikrovlnné rezonanční obvody jsou charakteristické tím, že je většinou nelze vytvořit formou soustředěné kapacity a indukčnosti, jak to je obvyklé při nižších frekvencích. Podle konstrukce je můžeme rozdělit na několik skupin.

Především to jsou *obvody využívající rezonančních vlastností vedení s vlnou TEM, zakončeného naprázdno nebo nakrátko*. Do této skupiny můžeme zařadit též obvody vytvořené kombinací úseku těchto vedení a soustředěné kapacity. Použití takových rezonančních obvodů je typické pro oblast decimetrových vln a pro techniku mikrovlnných integrovaných obvodů.

Další skupinu rezonančních obvodů tvoří *dutinné rezonátory*. Dutinovým rezonátorem může být dielektrikum zcela obecného tvaru, je-li uzavřeno vodivým pláštěm. Z praktických důvodů se však téměř výhradně používají dutinnové rezonátory jednoduchých geometrických tvarů. Rezananční frekvence závisí na tvaru a rozměrech dielektrika (dutiny), na vlastnostech dielektrika a na vidu kmitání. Protože rezonanční vlnová délka je stejného řádu jako rozměry dutiny, jsou dutinné rezonátory používány nejvíce v oblasti centimetrových vln. Jejich výhodnou vlastností je velký číselný jakosti, který bývá v mezích $Q = 10^3$ až 10^5 (v závislosti na vidu kmitání).

Třetí skupina mikrovlnných rezonančních obvodů tvoří tzv. *otevřené rezonátory*. Jsou vytvořeny dielektrikem omezeným soustavou dvou rovinných, popř. zakřivených zrcadel (nejčastěji kovových nebo dielektrických desek). Mezi zrcadly vznikne stojaté vlnění s velkou frekvenční selektivitou. Protože rozměry zrcadel musí být mnohonásobně větší, než je použitá vlnová délka, jsou tyto rezonátory nejčastěji používány v oblasti vln milimetrových a submilimetrových (používají se též jako rezonanční obvody v laserech). Jejich číselný jakosti bývá velmi velký (řádově 10^4 až 10^6).

Do čtvrté skupiny můžeme zařadit rezonátory dielektrické a feritové. *Dielektrický rezonátor* je vytvořen dielektrikem jednoduchého geometrického tvaru a s velkou relativní permittivitou. Tvar a rozměry dielektrika jsou voleny tak, aby při jisté frekvenci vysokofrekvenčního elektromagnetického pole vyhovovaly rezonanční podmínce. *Feritový rezonátor* je vytvořen malým tělískem z feritu, zmagnetovaným vnějším statickým magnetickým polem. K interakci mezi feritem a vysokofrekvenčním elektromagnetickým polem dochází tehdy, je-li frekvence elektromagnetického pole shodná s frekvencí feromagnetické rezonance feritu nebo je jí blízká. I když je fyzikální princip funkce těchto dvou typů rezonátorů odlišný, jsou jejich společným znakem malé rozměry (v poměru k použité vlnové

dece). Vznikem a mělním rozdělením se tyto rezonátory obvykle umísťují přímo do vedení (vlnovodu, páskového vedení nebo jiných typů vedení), takže odpadá zvláštní vazební prvek. To umožňuje konstrukci poměrně jednoduchých zařízení, která mají navíc velmi vítanou vlastnost – malé rozměry.

7.1. REZONANČNÍ OBVODY S VLNAMÍ TEM

V článku 2.1 jsme poznali, že vlna příčně elektricko-magnetická (TEM) může vzniknout ve vedeních, která mají ve svém průřezu dva nebo více vodičů. Rychlost šíření vlny TEM nezávisí ani na rozměrech, ani na tvaru průřezu vedení, ale pouze na vlastnostech prostředí (tj. na permivitě a permeabilitě dielektrika). Poznáme, že z úseku takového vedení lze vytvořit jednoduchým způsobem rezonanční obvod (rezonátor). V dalších úvahách předpokládáme, že rezonanční obvod může být vytvořen z vedení libovolného typu, tj. např. z vedení koaxiálního, dvoudřívového (dvoudrátového) nebo páskového.

7.1.1. Rezonátor vytvořený z úseku vedení na jednom konci otevřeného a na druhém konci uzavřeného nakrátko

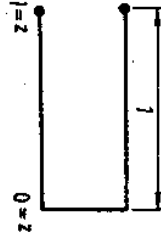
Elektromagnetické pole vidu TEM je možné vyjádřit podle čl. 2.5 rovnicemi (obr. 7.1)

$$E_T = \text{grad div } H_z^2 = \text{grad } T_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$H_T = j\omega \text{rot } H_z^2 = j\omega \text{grad}(T_1 \times z) T_2$$

přičemž pro funkci T_2 platí

$$T_2 = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz}$$



Obr. 7.1. Vedení nakrátko

V místě zkratu, tj. při $z = 0$, musí být $E = 0$ a protože platí

$$E = jk \text{grad } T_1 (C_1 e^{jkz} - C_2 e^{-jkz})$$

dostáváme z této podmíanky

$$0 = C_1 - C_2$$

neboli

$$C_1 = C_2 = C$$

(7.1)

$$T_2 = C(e^{jkz} + e^{-jkz}) = 2C \cos kz \quad (7.2)$$

Intenzitu elektrického a magnetického pole můžeme pak vyjádřit výrazy

$$\mathbf{E} = -2Ck \operatorname{grad} T_1 \sin kz \quad (7.3)$$

$$\mathbf{H} = 2jC\omega \operatorname{grad} T_1 \times \mathbf{z} \cos kz \quad (7.4)$$

Z uvedených rovnic je zřejmé, že intenzity pole \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou proti sobě fázově posunuty o 90° a mají dvojnásobnou amplitudu v porovnání s případem neomezeně dlouhého homogenního vedení.

Předpokládejme, že na otevřeném konci, tj. při $z = l$, je intenzita elektrického pole maximální. To může být splněno pouze tehdy, je-li

$$kl = (2p - 1) \frac{\pi}{2} \quad (7.5)$$

kde $p = 1, 2, 3, \dots$

Pro vlnové číslo k platí

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

popř.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

takže odpovídající délku vlny nebo frekvenci můžeme vyjádřit při použití vztahu (7.5) výrazy

$$\lambda = \frac{4l}{2p - 1} \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \quad (7.6)$$

popř.

$$f = \frac{2p - 1}{4l} \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad (7.7)$$

Vztahy (7.6) a (7.7) vyjadřují stav rezonance na vedení délky l , zakončeném nakrátko. Je zřejmé, že úsek vedení bude v rezonanci při diskretních hodnotách frekvence (vlnových délek), které přísluší různým indexům p . Základní rezonanční frekvence (vlnová délka) je určena indexem $p = 1$. V takovém případě je délka rezonančního úseku rovna čtvrtině délky vlny. Kdybychom vyjádřili vstupní impedanci takového úseku vedení, zjistili bychom, že je teoreticky nekonečně velká (pro bezztrátové vedení) – viz vztah (2.119).

7.1.2. Rezonátor vytvořený z úseku vedení na obou koncích uzavřeného nakrátko

Je zřejmé, že v místě zkratu, tj. při $z = 0$ a $z = l$ musí být intenzita elektrického pole nulová (obr. 7.2). Protože platí podle (7.1)

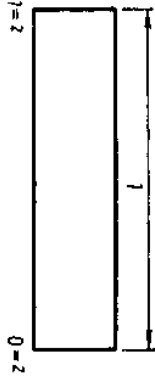
$$\mathbf{E} = jk \operatorname{grad} T_1 (C_1 e^{jkz} - C_2 e^{-jkz})$$

dostaneme z podmínky $E = 0$ pro $z = 0$

$$0 = C_1 - C_2$$

neboli

$$C_1 = C_2 = C$$



Obr. 7.2. Vedení oboustranně zkratované

a z podmínky $E = 0$ pro $z = l$

$$0 = e^{jkl} - e^{-jkl}$$

neboli

$$\sin kl = 0$$

Tato podmínka bude splněna vždy, je-li

$$kl = p\pi$$

$$k = \frac{p\pi}{l}$$

kde $p = 1, 2, 3, \dots$

Protože vlnové číslo k můžeme vyjádřit vztahy

$$k = \omega \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

nebo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

můžeme určit odpovídající délku vlny, popř. frekvenci výrazy

$$\lambda = \frac{2l \sqrt{\mu_r\epsilon_r}}{p} \quad (7.8)$$

$$f = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \frac{p}{2l} \quad (7.9)$$

Tyto vztahy vyjadřují stav rezonance na úseku vedení délky l , zakončeném na obou koncích nakrátko. Základní rezonanční vlnová délka (frekvence) je určena indexem $p = 1$. V takovém případě je délka rezonujícího úseku vedení rovna polovině délky vlny.

Protože platí $C_1 = C_2 = C$, je možné vyjádřit funkci T_2 výrazem

$$T_2 = C(e^{jkz} + e^{-jkz}) = 2C \cos kz$$

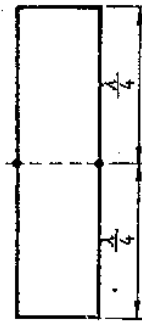
a intenzity elektrického a magnetického pole lze vyjádřit výrazy, které jsou shodné s (7.3) a (7.4)

$$\mathbf{E} = -2Ck \operatorname{grad} T_1 \sin kz$$

$$\mathbf{H} = 2jC\omega \epsilon (\operatorname{grad} T_1 \times \mathbf{z}) \cos kz$$

Intenzity elektrického a magnetického pole jsou proti sobě opět fázově posunuty o 90° , přičemž jejich amplitudy jsou dvakrát větší než v případě postupné vlny na dlouhém homogenním vedení.

Je zřejmé, že rezonanční obvod tohoto typu lze považovat za obvod složený ze dvou rezonančních obvodů popsaných v předcházejícím odstavci (obr. 7.3).



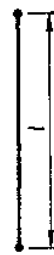
Obr. 7.3. Půlplnný rezonanční obvod

7.1.3. Rezonátor vytvořený z úseku vedení na obou koncích otevřeného

Předpokládáme, že na obou otevřených koncích je intenzita elektrického pole maximální. Při $z = 0$ a $z = l$ je tedy (obr. 7.4)

$$E = E_{\max}$$

$$z = 0 \quad z = l$$



Obr. 7.4. Vedení naprázdno

Protože při $z = 0$ platí [viz (7.1)]

$$E = jk \operatorname{grad} T_1 (C_1 - C_2)$$

musí zřejmě být

$$C_1 = -C_2 = C$$

takže funkci podélné souřadnice T_2 můžeme vyjádřit výrazem

$$T_2 = C(e^{jkz} - e^{-jkz}) = 2jC \sin kz \quad (7.10)$$

a při $z = l$ je

$$E = 2jkC \operatorname{grad} T_1 \cos kl$$

Aby byla intenzita elektrického pole při $z = l$ maximální, musí být

$$kl = p\pi$$

neboli

$$k = \frac{p\pi}{l}$$

kde $p = 1, 2, 3, \dots$

Odpovídající vlnovou délku a frekvenci určíme z tohoto vztahu a z výrazů pro vlnové číslo

$$\lambda = \frac{2l}{p} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (7.11)$$

$$f = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \frac{p}{2l} \quad (7.12)$$

Tyto vztahy opět vyjadřují stav rezonance na úseku vedení délky l , na obou koncích otevřeného.

Základní rezonanční vlnová délka (frekvence) je určena indexem $p = 1$. Délka rezonujícího úseku vedení je v takovém případě rovna polovině délky vlny.

Elektromagnetické pole vyjadříme vztahy (2.73) a (2.74), přičemž pro funkci podélné souřadnice T_2 platí vztah (7.10)

$$E = 2jkC \operatorname{grad} T_1 \cos kz \quad (7.13)$$

$$H = -2C\omega \epsilon \operatorname{grad} T_1 \sin kz \quad (7.14)$$

Intenzity elektrického a magnetického pole jsou proti sobě fázově posunuty o 90° a jejich amplitudy jsou dvojnásobné v porovnání s případem postupné vlny.

7.1.4. Rezonátor vytvořený z úseku vedení nakrátko a soustředěné kapacity

Kapacita C spolu s indukčností vedení nakrátko (obr. 7.5) tvoří paralelní rezonanční obvod, jehož rezonanční úhlovou frekvenci můžeme určit z Thomsonova vztahu

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Rezananční úhlovou frekvenci však můžeme určit též tak, že použijeme vztahy získané z řešení tzv. telegrafních rovnic vedení, odvozené v odst. 2.6.1.



Obr. 7.5. Vedení nakrátko s kapacitou na vstupu

Vstupní impedanci vedení můžeme vyjádřit podle (2.117) takto

$$Z = \frac{Z_k + Z_0 \operatorname{tg} hl}{1 + \frac{Z_k}{Z_0} \operatorname{tg} hl}$$

takže pro bezztrátové vedení zakončené nakrátko ($Z_k = 0$, $\gamma = jk$) platí

$$Z = jZ_0 \operatorname{tg} kl$$

Připojíme-li k takovému vedení na vstup kapacitor s kapacitou C , je při rezonanci výsledná admittance obvodu nulová (při zanedbání ztrát). To umožňujeme vyjádřit jednoduchým způsobem rezonanční podmínku

$$j\omega C + \frac{1}{jZ_0 \operatorname{tg} kl} = 0 \quad (7.15)$$

takže

$$f = \frac{1}{2\pi C Z_0 \operatorname{tg} kl} \quad (7.16)$$

popř.

$$\lambda = 2\pi c Z_0 \operatorname{tg} kl / \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (7.17)$$

kde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ je rychlost světla ve vakuu

Vztahy (7.16) a (7.17) můžeme upravit na tvar

$$\frac{\operatorname{cotg} kl}{kl} = \frac{c Z_0}{l} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (7.18)$$

kteřý můžeme řešit graficky nebo pomocí programovatelného kalkulátoru. Je zřejmé, že vztah (7.18) má smysl pouze pro některé hodnoty argumentu kl , a to pro

$$(p-1)\pi < kl < (2p-1)\frac{\pi}{2}$$

neboli

$$(p-1)\frac{\lambda}{2} < l < (2p-1)\frac{\lambda}{4}$$

kde $p = 1, 2, 3, \dots$

Pro praktické aplikace má význam základní vid kmitání ($p = 1$), při kterém je rezonanční frekvence nejnižší. Je však třeba si uvědomit, že obvod může být v rezonanci i při jiných, vyšších frekvencích (při $p > 1$).

7.1.5. Rezonátor vytvořený z úseku vedení naprázdno a soustředěné kapacity

Vstupní impedanci vedení naprázdno vyjádříme ze vztahu (2.117) pro $Z_k = \infty$ takže

$$Z = -jZ_0 \operatorname{cotg} kl$$

Připojíme-li k tomuto vedení na vstup kapacitor s kapacitou C (obr. 7.6), je při rezonanci výsledná admittance nulová (při zanedbání ztrát). Rezonanční podmínka je

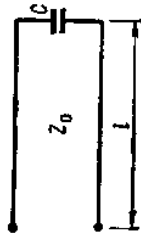
$$j\omega C - \frac{1}{jZ_0 \operatorname{cotg} kl} = 0 \quad (7.19)$$

takže

$$f = \frac{1}{-2\pi C Z_0 \operatorname{cotg} kl} \quad (7.20)$$

popř.

$$\lambda = -2\pi c Z_0 \operatorname{cotg} kl / \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (7.21)$$



Obr. 7.6. Vedení naprázdno s kapacitou na vstupu

Transcendentní rovnici (7.20) nebo (7.21) můžeme upravit do tvaru

$$-\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{c Z_0}{l} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (7.22)$$

který lze řešit graficky nebo pomocí programovatelného kalkulátoru. Je zřejmé, že vztah (7.22) má smysl pouze tehdy, je-li argument kl v intervalu

$$\frac{\pi}{2}(2p-1) < kl < p\pi$$

neboli

$$\frac{\lambda}{4}(2p-1) < l < p\frac{\lambda}{2}$$

kde $p = 1, 2, 3, \dots$

Pro praktické aplikace má největší význam opět základní vid kmitání ($p = 1$), při kterém je rezonanční frekvence nejnižší, obvod však může být v rezonanci i při vyšších frekvencích (při $p > 1$).

7.2. ČINITEL JAKOSTI REZONANČNÍHO OBVODU

Činitel jakosti jakéhokoliv rezonančního obvodu s úhlovou rezonanční frekvencí ω_0 je dán vztahem

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_z} \quad (7.23)$$

kde W je energie elektromagnetického pole v obvodu,

P_z ztracený výkon v obvodu.

Je-li možné určit indukčnost a vř odpor obvodu (např. u rezonančních obvodů tvořených úseky dvou vodičového vedení), lze vyjádřit v rezonanci energii a ztracený výkon výrazy

$$W = \frac{1}{2} L |I|^2$$

$$P_z = \frac{1}{2} R_{vf} |I|^2$$

kde I je komplexní amplituda v_f proudu procházejícího obvodem, R_{vf} v_f odpor vodičů,

takže pro činitel jakosti dostaneme po úpravě výraz

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_{vf}} \quad (7.24)$$

Činitel jakosti rezonančních obvodů vytvořených z úseku dvouvodičových vedení lze přibližně vyjádřit i jinými způsoby. Vyjdeme-li např. ze vztahu pro indukčnost na jednotku délky vedení (2.86).

$$L_0 = \frac{\mu}{Z} Z_0$$

dostaneme po dosazení do (7.24) a po úpravě výraz

$$Q = \frac{kl}{R_{vf}} Z_0 \quad (7.25)$$

kde k je vlnové číslo, l délka vedení.

Protože výkon ztracený v úseku vedení jednotkové délky je úměrný poměrnému útlumu, můžeme vyjádřit činitel jakosti i pomocí poměrného útlumu úseku vedení, z něhož je rezonanční obvod vytvořen. Podle (2.62) platí

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{P_z}{P}$$

takže

$$P_z = 2P\beta$$

Vyjádříme-li výkon přenášený vedením jako součin energie W elektromagnetického pole obsažené v úseku vedení jednotkové délky a rychlosti šíření v , platí (viz odst. 2.2.4)

$$P = Wv$$

a tedy

$$P_z = 2Wv\beta$$

Použijeme-li vztah (7.23), můžeme vyjádřit činitel jakosti po úpravě výrazem

$$Q = \frac{\pi}{\beta\lambda} \quad (7.26)$$

Při výpočtu činitele jakosti rezonančních obvodů vytvořených z úseku vedení nakrátko je však nutné respektovat i ztráty ve zkratech.

7.3.

DUTINOVÉ REZONATORY, OBECNE VLASTNOSTI

Jak již bylo řečeno, dutinovým rezonátorem může být dutina jakéhokoliv tvaru uzavřená vodivým pláštěm. Z čistě praktických důvodů používáme však téměř výhradně rezonátory jednoduchých geometrických tvarů. Na rezonátoru obecného tvaru však nejprve ukážeme některé vlastnosti, které jsou pro dutinové rezonátory společné.

Předpokládejme, že dutinový rezonátor je vytvořen dielektrickým prostorem s objemem V , který je obklopen vodivým pláštěm s plochou povrchu S . Protože předpokládáme zcela obecný tvar rezonátoru, nemůžeme zavést pro řešení elektromagnetického pole Hertzovy vektory, ale musíme řešit Maxwellovy rovnice přímo. Pro bezstrátové prostředí a harmonický časový průběh lze psát Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

Jestliže aplikujeme na druhou rovnici operátor rot, dostaneme za použití první rovnice

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = k^2\mathbf{E} \quad (7.27)$$

kde k je vlnové číslo.

Řešením rovnice (7.27) s okrajovou podmínkou, že na plášti je $E_t = 0$, bychom určili rozložení intenzity elektrického pole a pomocí druhé Maxwellovy rovnice by bylo možné určit rozložení magnetického pole. Pro intenzitu magnetického pole však můžeme dostat (analogickým způsobem jako v případě elektrického pole) rovnici

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = k^2\mathbf{H} \quad (7.28)$$

Podle Gaussovy věty platí

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

kde \mathbf{v} je libovolný vektor,

V objem,

S povrch uzavírající objem V .

Předpokládejme, že objem V je dán objemem dutinového rezonátoru a plocha S povrchem pláště téhož rezonátoru. Za vektor \mathbf{v} považujeme Poyntingův vektor $\mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$, takže lze psát

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}^*$$

a tedy

$$\int_V \mathbf{H}^* \cdot \text{rot } \mathbf{E} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}^* dV = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S}$$

Plošný integrál na pravé straně rovnice je úměrný výkonu vyzářenému do povrchu pláště rezonátoru.

Protože z Maxwellových rovnic vyplývá

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

dostaneme po úpravě

$$\int_V (\mathbf{H}^* \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV - \int_V (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}^*) dV = j\omega\epsilon \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor ve směru normály k ploše S . Použijeme-li dále vztah (7.28)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = k^2 \mathbf{H}$$

můžeme po úpravě psát

$$k^2 = \frac{\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}^*) dV}{\int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV} + j\omega\epsilon \frac{\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS}{\int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV} \quad (7.29)$$

Vztah (7.29) určuje vlnové číslo rezonátoru se ztrátovým povrchem pláště. Když bychom předpokládali dokonale vodivý povrch, musela by na něm být každá tečná složka intenzity elektrického pole nulová, takže ztráty by byly nulové. Pro vlnové číslo bychom pak dostali

$$k_0^2 = \frac{\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}^*) dV}{\int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV} \quad (7.30)$$

Dosaďme-li za $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ a $\operatorname{rot} \mathbf{H}^*$ z Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= j\omega_0 \epsilon \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^* &= -j\omega_0 \epsilon \mathbf{E}^* \end{aligned}$$

lze psát

$$k_0^2 = \omega_0^2 \mu \epsilon = \frac{\omega_0^2 \epsilon^2 \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV}{\int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV}$$

takže po úpravě dostaneme

$$\epsilon \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV = \mu \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV \quad (7.31)$$

Ze vztahu (7.31) vyplývá, že při rezonanci jsou střední hodnoty energie elektrického a magnetického pole v bezztrátovém dutinovém rezonátoru stejné velké. Protože celková energie elektromagnetického pole rezonátoru je dána součtem energií elektrického a magnetického pole, je možné ji vyjádřit pouze energií elektrického pole nebo pouze energií magnetického pole

$$W = W_e + W_m = 2W_e = 2W_m$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV = \frac{1}{2} \mu \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV \quad (7.32)$$

Dílejší výrazy rovnice (7.29) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS = 2P_z' = 2P_z(1 + j); \quad \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) dV = \frac{2W}{\mu}$$

kde P_z' je komplexní výkon vyzařený do pláště rezonátoru,

P_z reálná část komplexního výkonu,

W celková energie elektromagnetického pole v rezonátoru,

takže po dosazení do (7.29) dostaneme po úpravě

$$k^2 = k_0^2 + j\omega\mu\epsilon \frac{P_z'}{W}$$

neboli

$$\omega^2 \mu \epsilon = \omega_0^2 \mu \epsilon + j\omega\mu\epsilon(1 + j) \frac{P_z'}{W}$$

Protože platí

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_z'}$$

lze po úpravě psát

$$\omega^2 + \omega(1 - j) \frac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

Fyzikálně možné řešení této kvadratické rovnice můžeme napsat po úpravě ve tvaru

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) + j \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \quad (7.33)$$

Rovnice (7.33) udává tzv. *komplexní úhlovou frekvenci dutinového rezonátoru*. Vyplyvá z ní, že rezonanční úhlová frekvence dutinového rezonátoru se ztrátovými stěnami se liší od rezonanční úhlové frekvence bezztrátového rezonátoru činitelem $(1 - 1/2Q)$. Kromě toho je zřejmé, že ztrátové stěny rezonátoru způsobují tlumení knutů se součinitelem útlumu $\omega_0/2Q$. Vzhledem k tomu, že číselník jakosti bývá velmi velký ($Q = 10^3$ až 10^5), můžeme obvykle počítat úhlovou frekvenci podle zjednodušeného vztahu

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right) \quad (7.34)$$

7.4. DUTINOVÉ REZONÁTORY VLNOVODOVÉHO TYPU

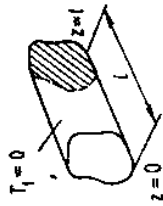
Dutinový rezonátor vlnododového typu je tvořen úsekem válcového vlnododu libovolného průřezu, který je uzavřen z obou stran vodivými stěnami. Příčné rozložení elektromagnetického pole je stejné jako u vlnododu a zvláštní

tvar má pouze funkce I_z , cennější podíle rozložení pole. Funkci T_2 určíme z okrajové podmínky, že na základních rezonátoru, které budeme nejprve považovat za dokonale vodivé, musí být každá tečná složka intenzity elektrického pole nulová.

7.4.1. Rezonátor s vlnou příčně magnetickou (TM, E)

Pro válcovou vlnodovovou část rezonátoru platí stejná okrajová podmínka jako u vlnodovu s vlnou TM, tj. $T_1 = 0$ na plášti (obr. 7.7). Intenzita elektrického pole je u vln TM určena vztahem (1.64)

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{H}_z^e + \text{grad div } \mathbf{H}_z^e$$



Obr. 7.7. Dutinový rezonátor vlnodovového typu (TM)

Na příčných stěnách (základnách) rezonátoru musí být tečná složka intenzity elektrického pole nulová. Příčnou složku intenzity elektrického pole můžeme zřejmě vyjádřit výrazem

$$\mathbf{E}_T = \text{grad}_T \text{div } \mathbf{H}_z^e$$

tj. za použití vztahu $\mathbf{H}_z^e = T_1 T_2$

$$\mathbf{E}_T = \text{grad}_T T_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Protože tento výraz musí být roven nule při $z = 0$ a $z = l$ při jakémkoliv příčné souřadnici (v oblasti průřezu vlnodovu, z něhož je rezonátor vytvořen), musí zřejmě platit, že při $z = 0$ a $z = l$ je

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = 0 \quad (7.35)$$

Pro funkci T_2 jsme již dříve dostali obecné řešení

$$T_2 = C_1 e^{j\alpha z} + C_2 e^{-j\alpha z}$$

takže

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = j\alpha(C_1 e^{j\alpha z} - C_2 e^{-j\alpha z})$$

Tento výraz musí být roven nule při $z = 0$ a $z = l$. Pro $z = 0$ platí

$$0 = C_1 - C_2$$

a z toho vyplývá

$$C_1 = C_2$$

takže je zřejmé, že funkci T_2 můžeme vyjádřit výrazem

$$T_2 = C_1(e^{j\alpha z} + e^{-j\alpha z})$$

nebo

$$T_2 = C \cos \alpha z \quad (7.36)$$

kde jsme označili

$$C = 2C_1$$

Při $z = l$ pak platí

$$0 = e^{j\alpha l} - e^{-j\alpha l}$$

tj.

$$\sin \alpha l = 0$$

Aby tento výraz byl vždy roven nule, musí být

$$\alpha l = p\pi$$

popř.

$$\alpha = \frac{p\pi}{l} \quad (7.37)$$

kde p je libovolné celé číslo.

Funkci T_2 můžeme tedy vyjádřit výrazem

$$T_2 = C \cos \frac{p\pi}{l} z \quad (7.38)$$

Z charakteru funkce T_2 vyplývá, že v dutinovém rezonátoru vznikne stojaté vlnění, které má oproti postupné vlně dvojnásobnou amplitudu. Činitel p udává počet půln stojatého vlnění v podélném směru.¹⁾

Známe-li funkci T_2 , můžeme napsat výraz i pro Hertzův vektor $\mathbf{H}_z^e = T_1 T_2$, neboť funkce T_1 je závislá pouze na průřezu použitého vlnodovu.

Složky intenzity elektrického a magnetického pole v rezonátoru určíme z rovnic (1.64) a (1.65)

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{H}_z^e + \text{grad div } \mathbf{H}_z^e = k^2 T_1 T_2 \mathbf{z} + \text{grad } T_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \text{rot } \mathbf{H}_z^e = j\omega \epsilon (\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

K určení rezonanční frekvence nebo rezonanční vlnové délky vlnodovových rezonátorů použijeme vztah (2.11) mezi konstantami k , Γ a α

$$k^2 = \Gamma^2 + \alpha^2$$

Protože pro vlnové číslo platí

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

¹⁾ Vzhledem k tomu, že funkce T_2 je nenulová i při $p = 0$ (při $p = 0$ je $T_2 = \text{konst}$), může být nejnižší součinitel p roven nule. V takovém případě má elektromagnetické pole v podélném směru konstantní rozložení (viz dále).

nebo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

lze psát

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (7.39)$$

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (7.40)$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že dutinový rezonátor má řadu diskrétních rezonančních frekvencí, z nichž každá přísluší jinému rozložení elektromagnetického pole. Tato rozložení pole, neboli vlny, jsou charakterizována indexy m , n a p . První dva indexy m a n určují přitom vlnové číslo elektromagnetické vlny ve vlnovodu, z něhož je rezonátor vytvořen, poslední index p určuje rozložení pole v podélném směru rezonátoru (tj. určuje počet půlvln stojatého vlnění v podélném směru dutiny).

Pro číselnou jakost rezonátoru platí

$$Q = \frac{\omega W}{P_z}$$

kde W je energie elektromagnetického pole v rezonátoru,

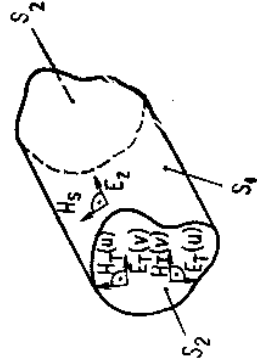
P_z výkon ztracený v rezonátoru.

Budeme-li předpokládat, že se výkon P_z ztrácí následkem nedokonalé vodivosti pláště rezonátoru, můžeme jej vyjádřit výrazem

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} \, dS + \operatorname{Re} \int_{S_2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

neboli

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} E_z H_z^* \, dS + \operatorname{Re} \int_{S_2} [E_T(u) H_T^*(v) - E_T^*(v) H_T(u)] \, dS$$



Obr. 7.8. Dutinový rezonátor s vlnou TM

kde podle obr. 7.8 jsou E_z , H_z , E_T a H_T tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole. Protože tečné složky intenzity elektrického pole můžeme určit pomocí okrajových podmínek z charakteristické impedance vodivého pláště a z tečných

složek intenzity magnetického pole podle vztahu (2.42)

$$E_T = Z_v H_T$$

kde E_T , H_T jsou tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole (vzájemně kolmé), neboť při $z = 0$ a $z = l$ je $E_T = E_z$ a $H_T = H_z$, Z_v charakteristická impedance vodivého pláště.

můžeme psát

$$E_z = Z_v H_z; \quad E_T(u) = Z_v H_T(v); \quad E_T^*(v) = -Z_v H_T(u)$$

a výkon ztracený ve stěných rezonátoru je tedy

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z_v] \int_{S_1} H_z H_z^* \, dS + \operatorname{Re} [Z_v] \int_{S_2} [H_T(v) H_T^*(v) + H_T(u) H_T^*(u)] \, dS$$

neboli

$$P_z = \frac{1}{2} \rho_{ef} \left[\int_{S_1} H_z H_z^* \, dS + 2 \int_{S_2} |H_T|^2 \, dS \right] \quad (7.41)$$

kde ρ_{ef} je tzv. poměrný vlnový odpor, pro který platí (viz odst. 2.3.1)

$$\rho_{ef} = \operatorname{Re} [Z_v] = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

Protože podle (1.65) je

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{rot} \Pi_z^* = \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \Pi_z^* \times \mathbf{z})$$

lze psát pro složku magnetického pole ve směru obrysové křivky pláště rezonátoru

$$H_s = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = \operatorname{grad} \Pi_z^* \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{z} \cdot \mathbf{s} = \operatorname{grad} \Pi_z^* \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{s})$$

neboli

$$H_s = \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \Pi_z^* \cdot \mathbf{n}) = \operatorname{grad} \frac{\partial T_1}{\partial n} T_2$$

(neboť platí $\mathbf{z} \times \mathbf{s} = \mathbf{n}$ a $\Pi_z^* = T_1 T_2$).

Pro funkci T_2 platí u vln TM vztah

$$T_2 = C \cos \frac{p\pi}{l} z$$

takže můžeme psát

$$\int_{S_1} H_s H_s^* \, dS = \oint_0^l |H_s|^2 \, ds \, dz = \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon^2 C^2 l \oint_0^l \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 \, ds \quad (\text{pro } p \neq 0)$$

$$\int_{S_2} H_s H_s^* \, dS = \omega^2 \epsilon^2 C^2 l \oint_0^l \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 \, ds \quad (\text{pro } p = 0)$$

kde s je obrysová křivka válcové části rezonátoru.

Obecnou příčnou složku magnetického pole H_T vyjádříme vztahem

$$\mathbf{H}_T = \operatorname{grad} (T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

$$\int_{S_z} |H_T|^2 dS = \omega^2 \epsilon^2 C^2 \int_{S_z} |\text{grad } T_1|^2 dS \quad (\text{pro } z = 0 \text{ a pro } z = l)$$

a celkový výkon ztracený ve stěnách rezonátoru můžeme proto vyjádřit výrazy: pro $p \neq 0$

$$P_z = \omega^2 \epsilon^2 C^2 \epsilon_{\text{vt}} \left[\frac{1}{4} l \oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds + \int_{S_z} |\text{grad } T_1|^2 dS \right] \quad (7.42)$$

$$\text{a pro } p = 0 \quad P_z = \omega^2 \epsilon^2 C^2 \epsilon_{\text{vt}} \left[\frac{1}{2} l \oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds + \int_{S_z} |\text{grad } T_1|^2 dS \right] \quad (7.43)$$

Energii elektromagnetického pole určíme z rovnice (7.32). Protože u vln TM má magnetické pole pouze příčné složky, je výhodné použít vzorec

$$W = \frac{1}{2} \mu \int (HH^*) dV$$

tj.

$$W = \frac{1}{2} \mu \int |H_T|^2 dV$$

S použitím (1.65) a (7.38) lze psát

$$|H_T|^2 = \omega^2 \epsilon^2 C^2 |\text{grad } T_1|^2 \cos^2 \frac{p\pi}{l} z$$

takže platí

$$W = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \epsilon^2 C^2 \int_{S_z} \int_0^l |\text{grad } T_1|^2 \cos^2 \frac{p\pi}{l} z dz$$

Po částečné integraci dostaneme pro energii elektromagnetického pole

$$W = \frac{1}{4} \omega^2 \epsilon^2 C^2 l \int_{S_z} |\text{grad } T_1|^2 dS \quad (\text{pro } p \neq 0) \quad (7.44)$$

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon^2 C^2 l \int_{S_z} |\text{grad } T_1|^2 dS \quad (\text{pro } p = 0) \quad (7.45)$$

Protože již známe výrazy pro ztracený výkon i pro celkovou energii, můžeme po úpravě napsat vzorec pro činitel jakosti: pro vlny TM_{mp}

$$Q = \frac{\omega \mu}{\epsilon_{\text{vt}}} \frac{\int_{S_z} T_1^2 dS}{\Gamma^{-2} \oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds + 4l^{-1} \int_{S_z} T_1^2 dS} \quad (7.46)$$

a pro vlny TM_{m0}

$$Q = \frac{\omega \mu}{\epsilon_{\text{vt}}} \frac{\int_{S_z} T_1^2 dS}{\Gamma^{-2} \oint_S \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds + 2l^{-1} \int_{S_z} T_1^2 dS} \quad (7.47)$$

přičemž jsme použili vztah (2.34)

$$\int_S |\text{grad } T_1|^2 dS = \Gamma^2 \int T_1^2 dS$$

7.4.2. Rezonátor s vlnou příčně elektrickou (TE, H)

Pro válcovou vlnodovou část rezonátoru platí stejná okrajová podmínka jako u vlnodou s vlnou TE, tj. na plášti je $\partial T_1 / \partial n = 0$ (obr. 7.9).

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = 0$$



Obr. 7.9. Dutinový rezonátor vlnodového typu (TE)

Intenzita elektrického pole je u vln TE dána výrazem

$$E \equiv E_T = -j\omega \mu \text{rot } H_z^m = -j\omega \mu (\text{grad } T_1 \times z) T_2$$

Na základnách rezonátoru musí být tečná složka intenzity elektrického pole nulová při jakémkoliv příčné souřadnici. Z toho je zřejmé, že pro funkci T_2 musí platit podmínka $T_2 = 0$ pro $z = 0$ a $z = l$.

Podle (2.13) platí

$$T_2 = C_1 e^{j\pi z} + C_2 e^{-j\pi z}$$

takže pro $z = 0$ je

$$0 = C_1 + C_2$$

a z toho

$$C_2 = -C_1$$

Funkci T_2 můžeme tedy vyjádřit výrazem

$$T_2 = C_1 (e^{j\pi z} - e^{-j\pi z})$$

neboli

$$T_2 = C \sin \pi z$$

kde jsme označili

$$C = 2j C_1$$

Pro $z = l$ pak platí

$$0 = e^{j\pi l} - e^{-j\pi l}$$

neboli

$$\sin \pi l = 0$$

(7.48)

$$\alpha l = p\pi$$

$$\alpha = \frac{p\pi}{l}$$

kde p je libovolné celé číslo.

Funkci T_2 můžeme tedy vyjádřit výrazem

$$T_2 = C \sin \frac{p\pi}{l} z \quad (7.49)$$

V dutinovém rezonátoru je stojaté vlnění, přičemž činitel p opět udává počet půlvln na délku rezonátoru. Je zřejmé, že nejnižší možný činitel může být $p = 1$.

Známe-li funkci T_2 , můžeme určit i Hertzův vektor $H_z^m = T_1 T_2$ neboť funkce příčných souřadnic T_1 je závislá pouze na průřezu použitého vlnovodu. Složky intenzity elektrického a magnetického pole v rezonátoru určíme pak z rovnice

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}_z^m = -j\omega\mu(\text{grad } T_1 \times z) T_2$$

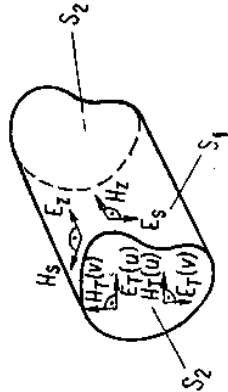
$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{H}_z^m + \text{grad div } \mathbf{H}_z^m = k^2 T_1 T_2 z + \text{grad } T_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Pro rezonanční frekvenci a vlnovou délku platí stejné vztahy jako u vln TM, neboť vztah (2.11) mezi konstantami k , Γ a α platí i pro vlny TE. Lze tedy psát podle (7.39) a (7.40)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

Při určování činitele jakosti je třeba si uvědomit, že na válcové části rezonátoru mohou existovat dvě složky magnetického pole, podélná a příčná (vzhledem k podélné ose rezonátoru). Příčná složka vyvolá v plášti podélný proud, což má při konečné vodivosti za následek vznik tečné složky intenzity elektrického pole. Tato složka pole je v praktických případech o několik řádů menší než příčná složka intenzity elektrického pole, takže ji při určování geometrického rozložení pole zanedbáváme. Při výpočtu ztrát v plášti ji však zanedbat nemůžeme.



Obr. 7.10. Dutinový rezonátor s vlnou TE

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S_1} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS + \text{Re} \int_{S_2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS$$

neboli podle obr. 7.10

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S_1} E_z H_z^* dS + \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S_1} E_z H_z^* dS +$$

$$+ \text{Re} \int_{S_2} [E_T(u) H_T^*(v) - E_T(v) H_T^*(u)] dS$$

S využitím okrajových podmínek (2.42) lze psát tento výraz ve tvaru

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re} [Z_v] \int_{S_1} H_z H_z^* dS + \frac{1}{2} \text{Re} [Z_v] \int_{S_2} |H_T|^2 dS$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{S_1} H_z H_z^* dS + \int_{S_1} H_z H_z^* dS + 2 \int_{S_2} |H_T|^2 dS \right] \quad (7.50)$$

neboli

Podle (1.67) můžeme vyjádřit intenzitu magnetického pole výrazem

$$\mathbf{H} = k^2 T_1 T_2 z + \text{grad } T_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

takže jednotlivé tečné složky intenzity magnetického pole jsou

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 T_1 T_2 + T_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}$$

$$H_r = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial T_1}{\partial s} \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$\mathbf{H}_T = \text{grad } T_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Funkce T_2 je u vln TE dána výrazem (7.49)

$$T_2 = C \sin \frac{p\pi}{l} z$$

takže po úpravě lze psát

$$H_z = \Gamma^2 T_1 C \sin \frac{p\pi}{l} z$$

[neboť podle (2.11) je $k^2 = \Gamma^2 + (p\pi/l)^2$]

$$H_r = \frac{p\pi}{l} C \frac{\partial T_1}{\partial s} \cos \frac{p\pi}{l} z$$

$$\mathbf{H}_T = \frac{p\pi}{l} C \text{grad } T_1 \cos \frac{p\pi}{l} z$$

S KRUHOVÝM PRŮŘEZEM

Tento typ dutinových rezonátorů (obr. 7.11) se v praxi velmi často používá pro snadnou výrobu i dobré elektrické vlastnosti. Rezonanční frekvenci při daných rozměrech určíme pomocí vztahu

$$k^2 = \Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$$

popř. graficko-početní metodou, která z tohoto vztahu vychází.



Obr. 7.11. Rezonátor z vlnovodu kruhového průřezu

7.5.1. Diagram vidů rezonátoru s kruhovým průřezem

Jestliže uvážíme, že platí

$$k^2 = 4\pi^2 f^2 \mu \epsilon; \quad \Gamma^2 = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 = \frac{4\alpha^2}{D^2}$$

kde D je průměr rezonátoru,

α kořen Besselových funkcí (u vln TM $\alpha = \alpha_{mn}$ a u vln TE $\alpha = \alpha'_{mn}$),
můžeme napsat vztah (2.11) po úpravě ve tvaru

$$(fD)^2 = \left(\frac{c}{\pi}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 p^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \quad (7.54)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu (a předpokládáme, že i ve vzduchovém prostředí). Označíme-li

$$y = (fD)^2; \quad x = \left(\frac{D}{l}\right)^2$$

$$A = \left(\frac{c}{\pi}\right)^2 \alpha^2; \quad B = \left(\frac{c}{2}\right)^2 p^2$$

můžeme napsat rovnici (7.54) ve tvaru

$$y = A + Bx$$

což je rovnice přímek se směrnici B , jejichž počátek je posunut o konstantu A . Protože velikost konstant A a B je závislá na vidu kmitání, přísluší každému vidu jedna přímka. Grafickým zobrazením rovnice (7.54) získáme tzv. *diagram vidů dutinového rezonátoru*, ze kterého můžeme určit při dané frekvenci rozměry rezonátoru nebo naopak z daných rozměrů můžeme určit rezonanční frekvenci. Diagram základních vidů je na obr. 7.12.

$$\int_{S_1} H_z H_z^* dS = \int_0^l \int_0^s H_z H_z^* ds dz = \frac{1}{2} \Gamma^4 C^2 l \int_0^l T_1^2 ds$$

$$\int_{S_1} H_s H_s^* dS = \int_0^l \int_0^s H_s H_s^* ds dz = \frac{1}{2} \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 C^2 l \int_0^l \left(\frac{\partial T_1}{\partial s}\right)^2 ds$$

$$\int_{S_2} |H_T|^2 dS = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 C^2 \int_{S_2} |\text{grad } T_1|^2 dS = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 C^2 \Gamma^2 \int_{S_2} T_1^2 dS$$

$(\alpha=0)$
 $(z=l)$

Celkový výkon zíracený v plášti rezonátoru je tedy

$$P_z = \frac{1}{4} \rho_{ef} C^2 l \Gamma^2 \left[\Gamma^2 \int_0^l T_1^2 ds + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \Gamma^{-2} \int_0^l \left(\frac{\partial T_1}{\partial s}\right)^2 ds + 4 \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \Gamma^{-1} \int_{S_2} T_1^2 dS \right] \quad (7.51)$$

Energii elektromagnetického pole můžeme vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV$$

Podle (1.66) platí

$$\mathbf{E} = -j\omega \mu \text{rot } \mathbf{H}_z^m = -j\omega \mu (\text{grad } T_1 \times \mathbf{z}) T_2$$

takže

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = |\mathbf{E}_T|^2 = \omega^2 \mu^2 |\text{grad } T_1|^2 T_2 T_2^*$$

kde

$$T_2 = C \sin \frac{p\pi}{l} z$$

Platí tedy

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 \mu^2 \epsilon C^2 \int_0^l \int_0^s |\text{grad } T_1|^2 \sin^2 \frac{p\pi}{l} z dS dz$$

takže po částečné integraci dostaneme pro celkovou energii

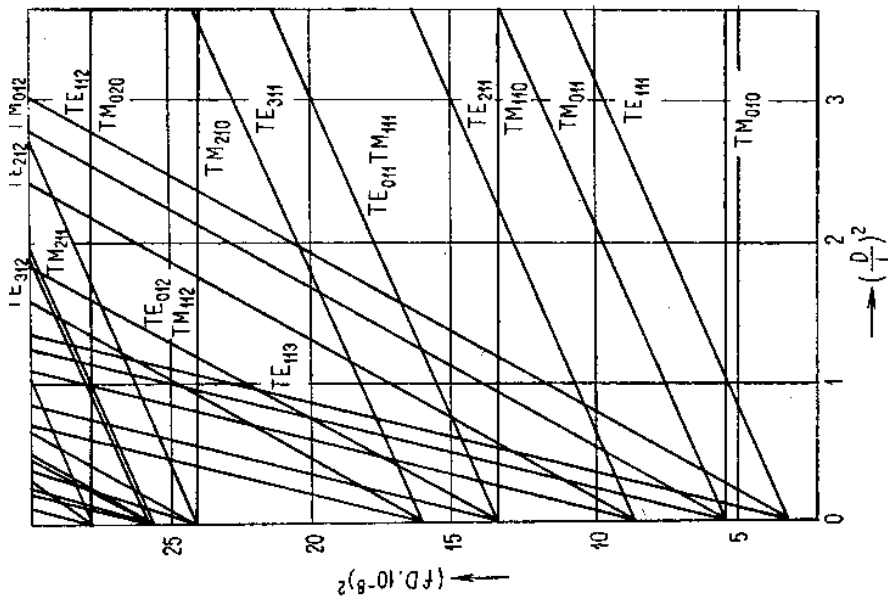
$$W = \frac{1}{4} \omega^2 \mu^2 \epsilon C^2 l \int_{S_2} |\text{grad } T_1|^2 dS \quad (7.52)$$

Činitel jakosti vyjádříme pak po úpravě výrazem

$$Q = \frac{\omega \mu}{\rho_{ef}} \frac{k^2 \int_{S_2} T_1^2 dS}{\Gamma^2 \int_0^l T_1^2 ds + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \Gamma^{-2} \int_0^l \left(\frac{\partial T_1}{\partial s}\right)^2 ds + 4 \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \Gamma^{-1} \int_{S_2} T_1^2 dS} \quad (7.53)$$

kde k je vlnové číslo a

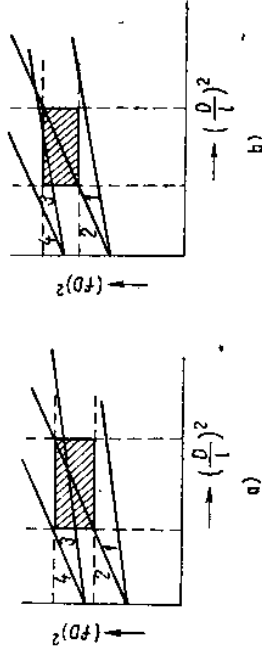
$$\int_{S_2} |\text{grad } T_1|^2 dS = \Gamma^2 \int_0^l T_1^2 ds$$



Obr. 7.12. Diagram vidů rezonátoru kruhového průřezu

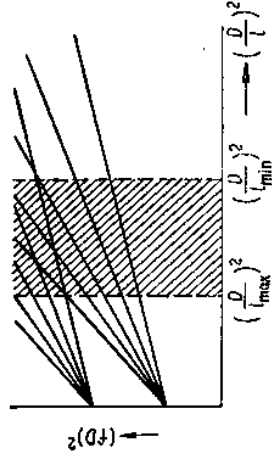
Tento diagram je zvláště významný při návrhu přeladitelných rezonátorů, protože poskytuje přehled o všech videch, které mohou v rezonátoru daných rozměrů při přeladování vzniknout. Jestliže označíme f_{\max} a f_{\min} krajní frekvence přeladitelného rezonátoru, potom hodnoty $(f_{\max} D)^2$, $(f_{\min} D)^2$ a jim příslušející hodnoty $(D/l)_{\min}^2$ a $(D/l)_{\max}^2$ vymezi v diagramu pro určitý vid tzv. *pracovní oblast rezonátoru*. Při volbě pracovní oblasti se snažíme o to, aby se přímka odpovídající tzv. *pracovnímu vidu* (tj. vidu, na kterém má rezonátor kmitat) neprotínala uvnitř této oblasti s některou jinou přímkou odpovídající jinému vidu kmitání. V takovém případě mohou vzniknout v rezonátoru určité rozměry při stejné frekvenci dva různé vidy kmitání, tzv. *degenerované kmity*, což má za následek zvětšení ztrát a pokles činitele jakosti. Příklad na nevhodně zvolenou pracovní oblast je uveden na obr. 7.13a, kde se přímky 2 a 3 protínají uvnitř pracovní oblasti rezonátoru. Z pracovní oblasti uvedené na obr. 7.13b je zřejmé, že se v daném frekvenčním rozsahu může

vyskytnout i jiný vid kmitání (přímka 3), avšak průsečík přímk 2 a 3 je mimo pracovní oblast. Možnost vybudování nežádoucího vidu (přímka 3) se obvykle dá omezit (vhodným způsobem buzení rezonátoru).



Obr. 7.13. Pracovní oblast přeladitelného rezonátoru

Obecně je nutné počítat s tím, že se v dutinovém rezonátoru mohou vybudit i jiné vidy než ty, které se vyskytují v tzv. pracovní oblasti. Teoreticky vzato, v každém dutinovém rezonátoru určitých rozměrů se může vybudit neomezený počet vidů kmitání, záleží na použité frekvenci a na způsobu vybudění. Rezonanční frekvence jednotlivých vidů určíme z rovnice (7.40) nebo z diagramu vidů 7.12 pro $D/l = \text{konst}$. Je-li rezonátor přeladitelný, je rozsah přeladitelnosti jednotlivých vidů určen polopásem mezi krajními hodnotami $(D/l)_{\min}^2$ a $(D/l)_{\max}^2$ (obr. 7.14).



Obr. 7.14. Vymezení přeladitelnosti rezonátoru

7.5.2. Elektromagnetické pole vidů TM_{mnp} ve vlnovodovém rezonátoru s kruhovým průřezem

Geometrické rozložení elektromagnetického pole určíme u vidů TM z rovnice (1.64) a (1.65)

$$E = k^2 \Pi_z^0 + \text{grad } d \text{ v } \Pi_z^0$$

$$H = j\omega \text{rot } \Pi_z^0 = j\omega \epsilon (\text{grad } \Pi_z^0 \times z)$$

V rezonátoru s kruhovou základnou mohou existovat složky intenzity elektrického

a magnetickeno pole

$$\begin{aligned} E_r &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial r \partial z} \\ E_\varphi &= \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial \varphi \partial z} \\ E_z &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^e + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2} \\ H_r &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = j\omega \varepsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{r \partial \varphi} \\ H_\varphi &= \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -j\omega \varepsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r} \end{aligned}$$

Hertzův vektor vyjádříme součinem funkcí T_1 a T_2 , přičemž k vyjádření funkce T_1 použijeme (stejně jako u vlnovodu kruhového průřezu) výraz (3.39)

$$T_1 = C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi$$

a pro funkci T_2 jsme odvodili výraz (7.36)

$$T_2 = C \cos \frac{p\pi}{l} z$$

Platí tedy

$$\Pi_z^e = C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi \cos \frac{p\pi}{l} z \quad (7.55)$$

kde C je konstanta, vzniklá sloučením konstant funkcí T_1 a T_2 .

Složky intenzity elektrického a magnetického pole vidů TM_{mp} můžeme pak vyjádřit s použitím rovnice (7.55).

$$\begin{aligned} E_r &= -\Gamma \frac{p\pi}{l} C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi \sin \frac{p\pi}{l} z \\ E_\varphi &= \frac{m}{r} \frac{p\pi}{l} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi \sin \frac{p\pi}{l} z \\ E_z &= \Gamma^2 C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi \cos \frac{p\pi}{l} z \\ H_r &= -j\omega \varepsilon \frac{m}{r} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi \cos \frac{p\pi}{l} z \\ H_\varphi &= -j\omega \varepsilon \Gamma C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi \cos \frac{p\pi}{l} z \end{aligned} \quad (7.56)$$

Je zřejmé, že výsledná konstanta C v rovnicích (7.56) má rozměr $\text{V} \cdot \text{m}$.

1.0.0. ДИКАЛОМАГНЕТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВИДУ TM_{mp} В СВИНОВОДОМ РЕЗОНАТОРЕ С КРУГОВЫМ ПРЯЖЕЗМ

Rozložení elektromagnetického pole určíme u vidů TE z rovnice (1.66) a (1.67)

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m = -j\omega\mu (\text{grad } \Pi_z^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m$$

V rezonátoru s kruhovým průřezem mohou existovat složky intenzit pole

$$E_r = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{r \partial \varphi}$$

$$E_\varphi = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} = j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r}$$

$$H_r = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial r \partial z}$$

$$H_\varphi = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial \varphi \partial z}$$

$$H_z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2}$$

Hertzův vektor vyjádříme součinem funkcí T_1 a T_2 , přičemž k vyjádření funkce T_1 použijeme výraz

$$T_1 = C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi$$

a pro funkci T_2 jsme již odvodili výraz (7.49)

$$T_2 = C \sin \frac{p\pi}{l} z$$

Pro Hertzův vektor tedy platí

$$\Pi_z^m = C J_m(\Gamma r) \cos m\varphi \sin \frac{p\pi}{l} z \quad (7.57)$$

kde konstanta C vznikla sloučením konstant funkcí T_1 a T_2 .

Složky intenzity elektrického a magnetického pole vidů TE_{mp} můžeme tedy vyjádřit s použitím rovnice (7.57)

$$\begin{aligned} E_r &= j\omega\mu \frac{m}{r} C J_m(\Gamma r) \sin m\varphi \sin \frac{p\pi}{l} z \\ E_\varphi &= j\omega\mu \Gamma C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi \sin \frac{p\pi}{l} z \\ H_r &= \Gamma \frac{p\pi}{l} C J_m'(\Gamma r) \cos m\varphi \cos \frac{p\pi}{l} z \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$H_\phi = -\frac{r}{l} C J_m(\Gamma r) \sin m\phi \cos \frac{z}{l} \quad (7.58)$$

$$H_z = \Gamma^2 C J_m(\Gamma r) \cos m\phi \sin \frac{z}{l}$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že konstanta C má rozměr $A \cdot m$.

7.5.4. Činitel jakosti vlnovodových rezonátorů kruhového průřezu s vlny TM_{mp}

Pro činitele jakosti vln TM_{mp} jsme odvodili výrazy (7.46) a (7.47). Protože rezonátor má kruhový průřez základny, vyjádříme funkci T_1 výrazem

$$T_1 = C J_m(\Gamma r) \cos m\phi$$

Pro element plochy dS a element oblouku obrysových křivky ds platí

$$dS = r d\phi dr; \quad ds = a d\phi$$

kde a je poloměr základny rezonátoru, takže jednotlivé integrály lze psát ve tvaru

$$\int_{S_2} T_1^2 dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} C^2 r J_m^2(\Gamma r) \cos^2 m\phi d\phi dr = \pi C^2 \int_0^a r J_m^2(\Gamma r) dr \quad (7.59)$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^2 ds = \int_0^{2\pi} C^2 \Gamma^2 J_m^2(\Gamma a) \cos^2 m\phi a d\phi = \pi a C^2 \Gamma^2 J_m^2(\Gamma a) \quad (7.60)$$

neboť

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial r} = C \Gamma J_m(\Gamma r) \cos m\phi$$

Integrál $\int_0^a r J_m^2(\Gamma r) dr$ je tzv. Lommelův integrál, pro který platí (viz přílohu B)

$$\int_0^a r J_m^2(\Gamma r) dr = \frac{1}{2} a^2 \left[J_m^2(\Gamma a) + \left(1 - \frac{m^2}{\Gamma^2 a^2} \right) J_m^2(\Gamma a) \right]$$

takže

$$\int_0^a r J_m^2(\Gamma r) dr = \frac{1}{2} a^2 J_m^2(\Gamma a) \quad (7.61)$$

[neboť u vln TM vyplývá z okrajové podmínky, že na plášti, tj. při $r = a$ musí být $J_m(\Gamma a) = 0$ – viz (3.33)]. S použitím vztahů (7.59), (7.60) a (7.61) dostaneme po úpravě pro činitel jakosti pro vlny TM_{mp}

$$Q = \frac{\omega \mu a}{2Q_{vr}} \frac{1}{1 + 2 \frac{a}{l}} \quad (7.62)$$

a pro vln TM_{mp0}

$$Q = \frac{\omega \mu a}{2Q_{vr}} \frac{1}{1 + \frac{a}{l}} \quad (7.63)$$

$$\omega \mu a = k \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} a = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\alpha_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2} \left(\frac{D}{l} \right)^2 \quad (7.64)$$

$$Q_{vr} = \sqrt{\frac{\pi \mu}{\sigma}} \quad (7.65)$$

pro vln TM_{mp} do tvaru

$$Q \sqrt{f} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi \epsilon}} \frac{\sqrt{\alpha_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2} \left(\frac{D}{l} \right)^2}{1 + \frac{D}{l}} \quad (7.66)$$

a pro vln TM_{mp0} do tvaru

$$Q \sqrt{f} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi \epsilon}} \frac{\alpha_{mn}}{1 + \frac{D}{l}} \quad (7.67)$$

Vztahy (7.66) a (7.67) jsou pro $\sigma = 6,1 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ (vodivost stříbra) znázorněny grafy na obr. 7.15.

7.5.5. Činitel jakosti vlnovodových rezonátorů kruhového průřezu s vlny TE_{mp}

Pro činitel jakosti dutinových rezonátorů s vlny TE_{mp} jsme odvodili výraz (7.53). Funkci T_1 můžeme opět vyjádřit výrazem

$$T_1 = C J_m(\Gamma r) \cos m\phi$$

a protože platí

$$dS = r d\phi dr \quad ds = a d\phi$$

lze vyjádřit jednotlivé integrály výrazy

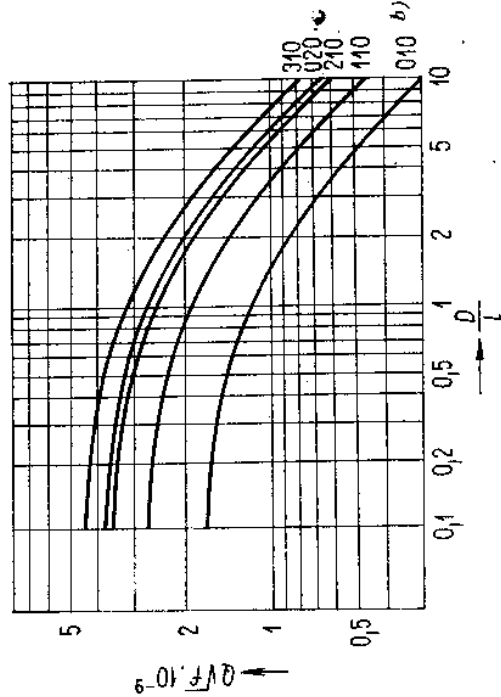
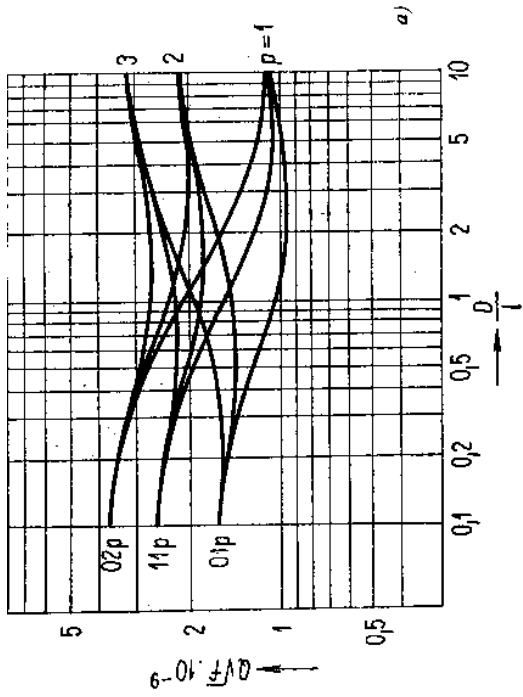
$$\int_{S_2} T_1^2 dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} C^2 J_m^2(\Gamma r) \cos^2 m\phi r d\phi dr = \pi C^2 \int_0^a r J_m^2(\Gamma r) dr \quad (7.68)$$

$$\int_0^{2\pi} T_1^2 ds = \int_0^{2\pi} C^2 J_m^2(\Gamma r) \cos^2 m\phi a d\phi = \pi a C^2 J_m^2(\Gamma a) \quad (7.69)$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial T_1}{\partial s} \right)^2 ds = \left(\frac{m}{a} \right)^2 \int_0^{2\pi} C^2 J_m^2(\Gamma a) \sin^2 m\phi a d\phi = \left(\frac{m}{a} \right)^2 \pi a C^2 J_m^2(\Gamma a) \quad (7.70)$$

neboť

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \phi}$$



Obr. 7.15. Činitel jakosti pro vlny TM u rezonátorů kruhového průřezu (obr. a) pro vlny TM_{mp}, obr. b) pro vlny TM_{m0}

Lommelův integrál ze vztahu (7.68) vyjádříme opět výrazem

$$\int_0^a r J_m^2(\Gamma r) dr = \frac{1}{2} a^2 \left[J_m^2(\Gamma a) + \left(1 - \frac{m^2}{\Gamma^2 a^2}\right) J_m^2(\Gamma a) \right] = \frac{1}{2} a^2 J_m^2(\Gamma a) \left[1 - \left(\frac{m}{\Gamma a}\right)^2 \right]$$

protože musí být $J'_m(\Gamma a) = 0$, což vyplývá z okrajové podmínky pro vlny TE – viz (3.44).

S použitím vztahů (7.68) až (7.70) a vztahu (7.53) dostaneme po úpravě po činitel jakosti

$$Q\sqrt{f} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi \epsilon}} \frac{\left[\alpha_{mm}'^2 + p^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \right]^{3/2} \left[1 - \left(\frac{m}{\alpha_{mm}'}\right)^2 \right]}{\alpha_{mm}'^2 + p^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\alpha_{mm}'^2} + p^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{m}{\alpha_{mm}'}\right)^2 \right]} \quad (7.71)$$

7.5.6. Vlnodvový rezonátor kruhového průřezu s videm TE_{01p}

Dutinové rezonátory s tímto videm kmitání se často používají jako vlnoměry, neboť mají velký činitel jakosti a jsou konstruktivně velmi jednoduché. Rozložení elektromagnetického pole v rezonátoru určíme z rovnic (7.58). Protože u vlny TE_{01p} je $m = 0$, jsou složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$E_r = 0$$

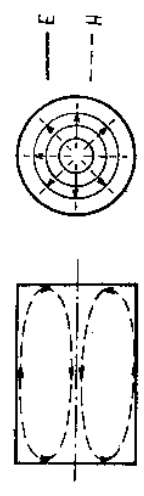
$$E_\phi = j\omega\mu C I J_0'(\Gamma r) \sin \frac{p\pi}{l} z = -j\omega\mu C I J_1(\Gamma r) \sin \frac{p\pi}{l} z$$

$$H_r = \frac{p\pi}{l} C I J_0'(\Gamma r) \cos \frac{p\pi}{l} z = -\frac{p\pi}{l} C I J_1(\Gamma r) \cos \frac{p\pi}{l} z$$

$$H_\phi = 0$$

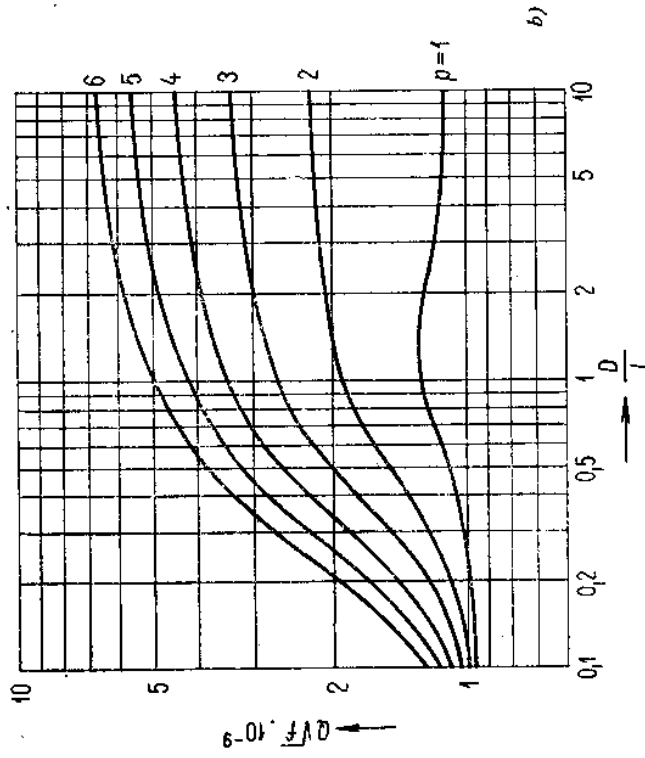
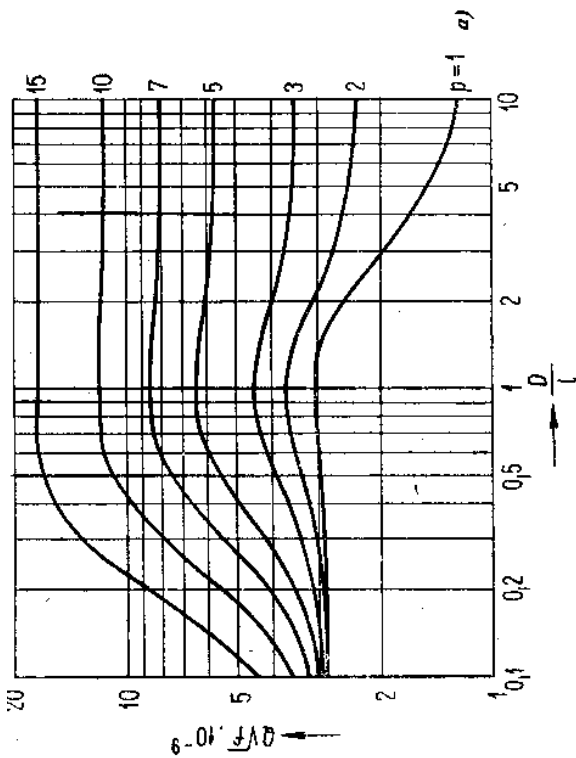
$$H_z = \Gamma^2 C J_0(\Gamma r) \sin \frac{p\pi}{l} z$$

Rozložení elektromagnetického pole vlny TE₀₁₁ je znázorněno na obr. 7.16.



Obr. 7.16. Rozložení elektromagnetického pole vlny TE₀₁₁ u rezonátorů kruhového průřezu

Protože azimutální složka intenzity magnetického pole je u těchto vln nulová ($H_\phi = 0$), mají povrchové proudy na plášti rezonátoru pouze příčný směr. Proto není nutné, aby základny rezonátoru měly s vlnovodu stěnou elektricky dokonalý styk. U předávacích rezonátorů je tedy možné použít při těchto vlnách kmitání bezkontaktní písty, což umožňuje velmi jakostní úpravu povrchu rezonátorů (zrcadlově vyleštěné plochy).



Obr. 7.17. Činitel jakosti u rezonátorů kruhového průřezu (obr. a) pro vidy TE_{01p} a obr. b) pro vidy TE_{11p}

Činitel jakosti určíme výrazem (7.71), z něhož pro $m = 0$ dostaneme

$$Q\sqrt{f} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi\epsilon}} \frac{\alpha'_{01} \left[1 + \left(\frac{p\pi}{2\alpha'_{01}} \right)^2 \left(\frac{D}{l} \right)^{2p/2} \right]}{1 + \left(\frac{p\pi}{2\alpha'_{01}} \right)^2 \left(\frac{D}{l} \right)^3} \quad (7.72)$$

Tento vztah je znázorněn grafem na obr. 7.17 (pro stříbrný povrch, $\sigma \approx 6,1 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$).

Ze vztahu (7.72) i z obr. 7.17 je vidět, že maximální hodnota činitele jakosti je při poměru $D/l = 1$. Velký činitel jakosti však obvykle není při návrhu rezonátoru jediným požadavkem. Pro praktické použití je důležité, aby u navrhovaného rezonátoru byla co nejmenší možnost výskytu nežádoucích vidů. Čím vyšší je vid, na kterém má rezonátor kmitat, tím větší je pravděpodobnost, že rezonátor bude v průběhu ladění kmitat i na jiných videch, než je požadovaný vid. Možnost výskytu nežádoucích vidů bude tím větší, čím větší bude při dané hodnotě činitele jakosti objem rezonátoru. Rozměry je tedy vhodné volit tak, aby rezonátor měl při dané hodnotě činitele jakosti minimální objem.

Při použití substituce [11]

$$\frac{p\pi}{2\alpha'_{01}} \frac{D}{l} = \text{tg } \varphi \quad (7.73)$$

a tedy

$$\frac{D}{l} = \frac{2\alpha'_{01}}{p\pi} \text{tg } \varphi$$

můžeme psát

$$Q\sqrt{f} = K \frac{\alpha'_{01}(1 + \text{tg}^2 \varphi)^{3/2}}{1 + \frac{2\alpha'_{01}}{p\pi} \text{tg}^3 \varphi}$$

kde $K = \sqrt{\sigma/\pi\epsilon}/2$. Protože platí

$$\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

můžeme tento vztah upravit do tvaru

$$Q\sqrt{f} = K \frac{\alpha'_{01}}{\cos^3 \varphi + \frac{2\alpha'_{01}}{p\pi} \sin^3 \varphi} \quad (7.74)$$

Pro vlnové číslo dutinového rezonátoru platí obecně

$$k^2 = \Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2$$

takže po úpravě

$$k = \frac{2\alpha'_{01}}{D} \sqrt{1 + \left(\frac{p\pi}{2\alpha'_{01}}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2}$$

kde $D = 2a$. Za použití substituce (7.73) dostaneme

$$k = \frac{2\alpha'_{01}}{D} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

neboli

$$k = \frac{2\alpha'_{01}}{D} \frac{1}{\cos \varphi}$$

popř.

$$\cos \varphi = \frac{2\alpha'_{01}}{kD} \quad (7.75)$$

Podobně s použitím (7.73) a (7.75) dostaneme

$$\sin \varphi = \frac{p\pi}{kl} \quad (7.76)$$

Objem dutinového rezonátoru je

$$V = \frac{\pi D^2}{4} l$$

a s použitím vztahů (7.75) a (7.76) dostaneme po úpravě

$$V = \frac{p\pi}{2\alpha'_{01}} \frac{2\pi\alpha'_{01}{}^3}{k^3 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi} \quad (7.77)$$

Podle výrazu pro činitel jakosti (7.74) lze psát

$$\frac{p\pi}{2\alpha'_{01}} = \frac{\sin^3 \varphi}{A - \cos^3 \varphi}; \quad A = \frac{K\alpha'_{01}}{Q\sqrt{f}} \quad (7.78)$$

Po dosazení do rovnice (7.77) dostaneme pro objem rezonátoru vztah

$$V = \frac{2\pi\alpha'_{01}{}^3}{k^3} \frac{\sin^2 \varphi}{A \cos^2 \varphi - \cos^5 \varphi} \quad (7.79)$$

Uřídíme-li minimum tohoto výrazu vzhledem k proměnné φ , dostaneme podmínku

$$5 \cos^3 \varphi - 3 \cos^5 \varphi = 2A \quad (7.80)$$

Objem rezonátoru bude tedy minimální, je-li splněna podmínka (7.80). Dosadíme-li podmínku (7.80) do vztahu (7.78), dostaneme po úpravě

$$\frac{p\pi}{2\alpha'_{01}} = \frac{2}{3} \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi}$$

a za použití výrazů (7.75) a (7.76) je možné upravit tento vztah do tvaru

$$6\alpha'_{01}{}^2 = k^2 D^2 \frac{D}{l}$$

nebo s použitím vztahu $k = \frac{2\pi f}{c} \alpha'_{01}$ do tvaru

$$(fD)^2 \frac{D}{l} = 1,5 \left(\frac{c}{\pi}\right)^2 \alpha'_{01}{}^2 \quad (7.81)$$

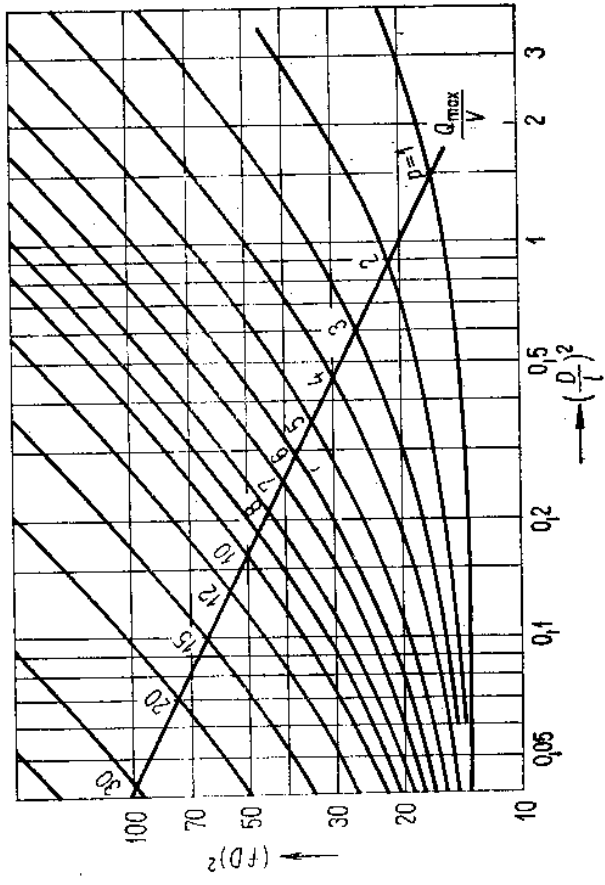
Jestliže dosadíme za $(fD)^2$ výraz (7.54), dostaneme po úpravě rovnici pro určení optimálního poměru D/l

$$\left(\frac{D}{l}\right)^3 + 4 \frac{\alpha'_{01}}{p^2 \pi^2} \frac{D}{l} - 6 \frac{\alpha'_{01}{}^2}{p^2 \pi^2} = 0 \quad (7.82)$$

která má řešení

$$\frac{D}{l} = \sqrt[3]{\frac{3\alpha'_{01}{}^2}{p^2 \pi^2} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + 0,263 \frac{\alpha'_{01}{}^2}{p^2 \pi^2}}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 + 0,263 \frac{\alpha'_{01}{}^2}{p^2 \pi^2}}} \right]} \quad (7.83)$$

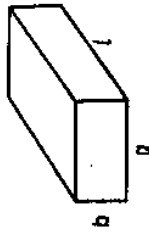
Uřídíme-li z této rovnice při daných hodnotách p a α'_{01} poměr D/l , má dutinový rezonátor při tomto poměru D/l maximální hodnotu poměru Q/V . Na obr. 7.18 je zobrazen diagram vidů TE_{01p} , ve kterém je zakreslena čára udávající optimální hodnotu D/l pro dosažení maximálního poměru Q/V . Závislost činitele jakosti na poměru D/l je podle vztahu (7.72) zobrazena na obr. 7.17 (pro konduktivitu stříbra $\sigma = 6,1 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$).



Obr. 7.18. Diagram vidů TE_{01p} u rezonátorů kruhového průřezu

S OBDÉLNÍKOVÝM PRŮŘEZEM

Protože vlnovody obdélníkového průřezu jsou v praxi nejrozšířenějším typem vlnovodu, používají se často i ke konstrukci dutinových rezonátorů (obr. 7.19).



Obr. 7.19. Rezonátor vytvořený z vlnovodu obdélníkového průřezu

7.6.1. Diagram vidů vlnovodového rezonátoru s obdélníkovým průřezem

Rezonanční frekvenci určíme pomocí vztahu

$$k^2 = \Gamma^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$$

Protože platí

$$\Gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2; \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

můžeme psát

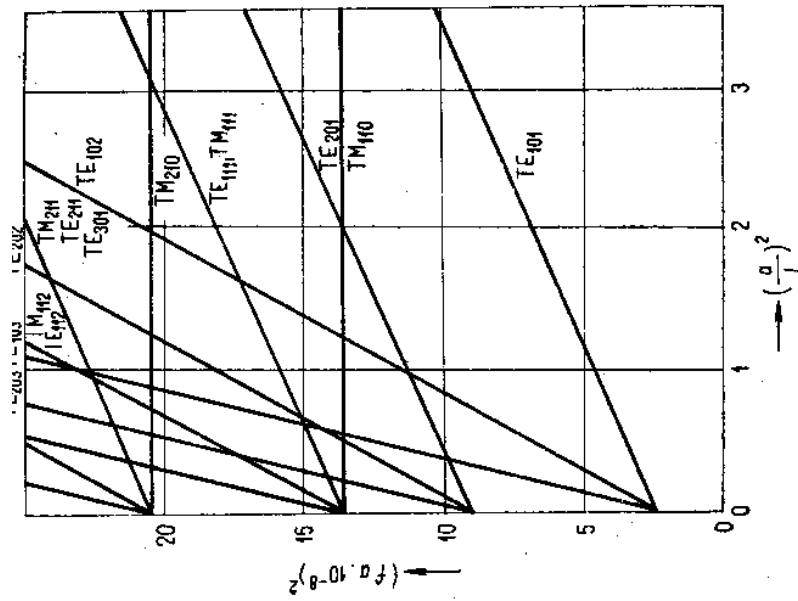
$$4\pi^2 f^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$$

popř.

$$(fa)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[m^2 + (xn)^2 + p^2 \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right] \quad (7.84)$$

kde $x = a/b$.

Rovnici (7.84) můžeme zobrazit grafem, analogicky jako u rezonátorů s kruhovým průřezem. Protože rozměry vlnovodů, normalizované pro jednotlivá frekvenční pásma, nejsou voleny tak, aby byl ve všech pásmech zachován stálý poměr $x = a/b$, je nutné sestřít zvláštní graf pro každý typ vlnovodu. Na obr. 7.20 je uveden graf pro vlnovod R 100. Pro použití tohoto grafu platí tytéž zásady, které byly uvedeny v odstavci 7.5.1. Z rovnice (7.84) i z grafu je zřejmé, že při shodných indexech m, n, p mají vidy TE_{mnp} a TM_{mnp} shodné rezonanční frekvence. Tyto vidy můžeme od sebe oddělit pouze způsobem vybuzení, a to tak, že budící prvek umožní vybuzení buď vidu TE_{mnp} nebo TM_{mnp} . Jinak vzniknou tzv. *degenerované kmity*, jejichž vybuzení má za následek pokles účinnosti jakosti.



Obr. 7.20. Diagram vidů rezonátorů vytvořených z vlnovodu R 100

7.6.2. Elektromagnetické pole vidů TE_{mnp} ve vlnovodovém rezonátoru s obdélníkovým průřezem

Rozložení elektromagnetického pole určíme u vidů TE z rovnice

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \text{rot } \Pi_z^m = -j\omega\mu (\text{grad } \Pi_z^m \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{H} = k^2 \Pi_z^m + \text{grad div } \Pi_z^m$$

V rezonátoru s obdélníkovým průřezem mohou existovat tyto složky intenzity elektrického a magnetického pole

$$E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = -j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial y}$$

$$E_y = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = j\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial x} \quad (7.85)$$

$$\begin{aligned} H_y &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{y} = \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial y \partial z} \\ H_z &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (7.85)$$

Hertzův vektor vyjádříme součinem funkcí T_1 a T_2 , přičemž použijeme vztahy (3.15) a (7.49)

$$\begin{aligned} T_1 &= C' \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ T_2 &= C'' \sin \frac{p\pi}{l} z \\ \Pi_z^m &= C \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z \end{aligned} \quad (7.86)$$

Platí tedy

kde C je konstanta vzniklá sloučením dílčích konstant funkcí T_1 a T_2 .
Složky intenzity elektrického a magnetického pole vidů TE_{mnp} můžeme vyjádřit z rovnic (7.85) a (7.86)

$$\begin{aligned} E_x &= j\omega\mu \frac{n\pi}{b} C \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z \\ E_y &= -j\omega\mu \frac{m\pi}{a} C \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z \\ H_x &= -\frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{l} C \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z \\ H_y &= -\frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{l} C \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z \\ H_z &= \Gamma^2 C \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z \end{aligned} \quad (7.87)$$

7.6.3. Činitel jakosti vlnododových rezonátorů obdélníkového průřezu s vidy TE_{mnp}

Pro činitel jakosti dutinových rezonátorů s vidy TE_{mnp} jsme odvodili výraz (7.53). Protože funkce T_1 je určena výrazem (3.15)

$$T_1 = C \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

můžeme vyjádřit dílčí integrály výrazu pro činitel jakosti takto

$$\int_{S_2} T_1^2 dS = C^2 \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \cos^2 \frac{n\pi}{b} y dx dy = \frac{1}{4} C^2 ab$$

$$\begin{aligned} \int_a^b T_1^2 ds &= \int_0^a T_1^2 dx + \int_0^b T_1^2 dy - \int_a^b T_1^2 dx - \int_0^a T_1^2 dy = C^2(a+b) \\ \int_a^b \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 ds &= \int_0^a \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^b \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)^2 dy - \int_0^a \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 dx - \\ &- \int_0^b \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)^2 dy = C^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 a + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 b \right] \end{aligned}$$

S použitím těchto vztahů dostaneme po úpravě pro činitel jakosti při vidu TE_{mnp}

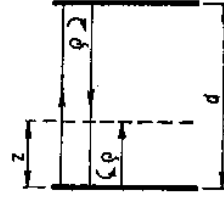
$$Q = \frac{\omega\mu}{4Q_{vr}} \frac{(mb)^2 + (na)^2 + (pab)^2}{[(mb)^2 + (na)^2] \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + (pab)^2 \left(\frac{m^2 b + n^2 a}{m^2 b^2 + n^2 a^2} + \frac{1}{l} \right)} \quad (7.88)$$

a při vidu TE_{10p}

$$Q = \frac{\omega\mu}{4Q_{vr}} \frac{1 + p^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2}{1 + \frac{a}{b} + p^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{l} \right)} \quad (7.89)$$

7.7. OTEVŘENÉ REZONÁTORY

Při výpočtu činitele jakosti dutinových rezonátorů jsme zjistili, že činitel jakosti klesá při vzrůstu frekvence s odmocninou z frekvence. V oblasti milimetrových a submilimetrových vln jsou navíc geometrické rozměry dutinových rezonátorů při základních videch kmitání příliš malé. Při použití vyšších vidů kmitání je sice možné činitel jakosti zvětšit, avšak takové řešení není vždy výhodné. Tyto potíže lze vyřešit použitím otevřeného rezonátoru, který je analogií a modifikací optického interferometru Fabryho-Perotova.



Obr. 7.21. Otevřený rezonátor

K vytvoření představy o základních vlastnostech otevřeného rezonátoru předpokládáme nejjednodušší, zidealizovaný rezonátor, vytvořený ze dvou neohraničených paralelních vodivých desek (zrcadel) ve vzdálenosti d od sebe (obr. 7.21).

Předpokládáme, že uvnitř mezi rozmerove neomezenými zrcady rezonátoru dochází k mnohonásobným odrazům rovinné vlny TEM. Intenzity elektrického a magnetického pole ve vzdálenosti z od levého zrcadla můžeme vyjádřit výrazy

$$E = E_1 e^{-jkz} + \rho E_1 e^{-jk(2d-z)} + \rho^2 E_1 e^{-jk(2d+z)} + \dots$$

$$H = H_1 e^{-jkz} - \rho H_1 e^{-jk(2d-z)} + \rho^2 H_1 e^{-jk(2d+z)} - \dots$$

neboli

$$E = E_1 \left[e^{-jkz} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n-1} e^{-jk(2nd-z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} e^{-jk(2nd+z)} \right]$$

$$H = H_1 \left[e^{-jkz} - \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n-1} e^{-jk(2nd-z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} e^{-jk(2nd+z)} \right]$$

kde E_1, H_1 jsou vzájemně kolmé intenzity polí v místě $z = 0$,
 ρ je činitel odrazu zrcadla,
 k vlnové číslo.

Po provedení součtu nekonečných řad dostaneme

$$E = E_1 \left(e^{-jkz} + e^{jkz} \frac{\rho e^{-j2kd}}{1 - \rho^2 e^{-j2kd}} + e^{-jkz} \frac{\rho^2 e^{-j2kd}}{1 - \rho^2 e^{-j2kd}} \right)$$

$$H = H_1 \left(e^{-jkz} - e^{jkz} \frac{\rho e^{-j2kd}}{1 - \rho^2 e^{-j2kd}} + e^{-jkz} \frac{\rho^2 e^{-j2kd}}{1 - \rho^2 e^{-j2kd}} \right)$$

Z těchto vztahů lze zjistit, že maximálních hodnot dosáhnou intenzity elektrického a magnetického pole v případě, že vzdálenost mezi deskami je rovna celistvému násobku půlvln ($d = p\lambda/2$). V tom případě je

$$E = E_1 e^{-jkz} \frac{1 + \rho e^{j2kz}}{1 - \rho^2} \quad (7.90)$$

$$H = H_1 e^{-jkz} \frac{1 - \rho e^{j2kz}}{1 - \rho^2} \quad (7.91)$$

Činitel jakosti rezonátoru určíme z obecného vztahu

$$Q = \frac{\omega W}{P_z}$$

přičemž platí

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \int_V |E|^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon \int_0^d \int_S |E|^2 dS dz$$

$$P_z = 2 \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \int_{(z=0)}^{(z=d)} EH^* dS$$

kde S je plocha odrazného zrcadla.

(při $\rho = |\rho|$)

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \frac{1 + |\rho|^2}{(1 - |\rho|^2)^2} d \int |E_1|^2 dS$$

$$P_z = \frac{1 - |\rho|^2}{(1 + |\rho|^2)^2} \int E_1 H_1^* dS$$

Dosazením $Z = E_1/H_1 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ dostaneme

$$P_z = \frac{1}{Z} \frac{1 - |\rho|^2}{(1 + |\rho|^2)^2} \int |E_1|^2 dS$$

takže činitel jakosti můžeme vyjádřit po úpravě výrazem

$$Q = \frac{kd}{2} \frac{1 + |\rho|^2}{1 - |\rho|^2}$$

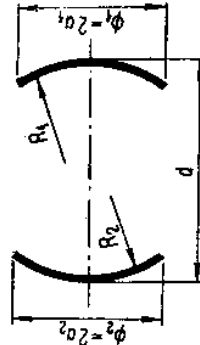
Protože činitel odrazu zrcadla je blízký hodnotě 1, $|\rho| \approx 1$, lze psát

$$Q \approx \frac{kd}{1 - |\rho|^2} \quad (7.92)$$

Skutečné provedení otevřeného rezonátoru Fabryho – Perotova typu má samozřejmě omezený rozměr zrcadel, přičemž rezonátor musí být určitým způsobem navázán na vedení. Konečný rozměr zrcadel způsobuje, že elektromagnetické pole má ve směru příčných souřadnic amplitudové změny a na hranách zrcadel je zanedbatelná intenzita pole. V takovém rezonátoru již není čistá vlna TEM a může v něm existovat velké množství vidů kmitání. Jsou-li však příčné rozměry zrcadel značně větší než vlnová délka, vidy kmitání jsou velmi blízké vidům TEM a bývají označovány jako vidy TEM_{mp}.

Rezonátory tohoto typu lze použít i v oblasti infračerveného a viditelného spektra. Nahradíme-li rovinná zrcadla sférickými zrcadly, soustředí se elektromagnetické pole do oblasti blízko osy rezonátoru a požadavky na nastavení zrcadel nejsou tak přísné jako u planparalelních zrcadel.

Teorie otevřených Fabryho – Perotových rezonátorů je podrobně popsána v literatuře [5], [6], [7] a [8]. Obecné řešení vychází obvykle z Huygensova – Kottlerova vzorce, přičemž se určují intenzity pole na jednom zrcadle jako součet příspěvků od elementárních ploch druhého zrcadla. Výsledná integrální rovnice se obvykle řeší numericky.



Obr. 7.22. Otevřený rezonátor se sférickými zrcadly

V následujícím textu uvedeme stručný přehled nejdůležitějších vlastností otevřených rezonátorů se sférickými zrcadly kruhového průřezu (obr. 7.22).

Při návrhu rezonátoru nás zajímá rezonanční podmínka, křivost a velikost zrcadel, jejich vzdálenost, stabilita kmitání a číselná jakost.

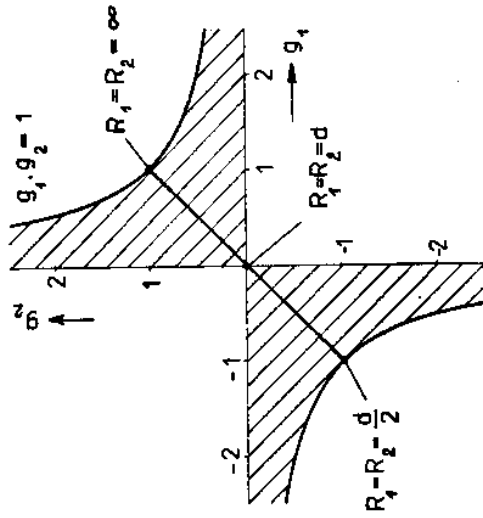
Každý rezonátor může být charakterizován třemi parametry, tj. stabilizačními faktory g_1, g_2 a Fresnelovým číslem N . Pro tyto parametry platí

$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1}; \quad g_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$$

$$N = \frac{a_1 a_2}{\lambda d}$$

Podmínka stability rezonátoru byla odvozena a formulována takto

$$0 < g_1 g_2 < 1$$



Obr. 7.23. Diagram stability otevřeného rezonátoru

Tato nerovnost je graficky interpretována na obr. 7.23. Stabilitní oblast je vyšrafována a je ohraničena osami $g_1 = 0, g_2 = 0$ a hyperbolami $g_1 g_2 = 1$. Ve stabilní oblasti je splněna podmínka, že poměry d/R_1 a d/R_2 musí být oba současně menší nebo větší než jedna. Přímka procházející body $(-1, -1)$ a $(1, 1)$ charakterizuje uspořádání zrcadel, která mají zrcadla se stejným poměrem křivosti R . Bodu $(-1, -1)$ odpovídá *koncentrický rezonátor*, pro který platí $R_1 = R_2 = d/2$ a který je na mezi stability. Dalším význačným bodem diagramu je bod $(1, 1)$, který představuje *planoparalelní rezonátor* vytvořený dvěma rovinnými zrcadly $R_1 = R_2 = \infty$. V počátku souřadnic je $g_1 = g_2 = 0$, neboli $R_1 = R_2 = d$. Takovému uspořádání říkáme *konfokální* a rezonátor má při něm nejmenší difrakční ztráty. Nevýhodou tohoto uspořádání je to, že leží na mezi stability a malá odchylka jej může převést do nestabilní oblasti. Pro praktické aplikace je výhodnější používat takové uspořádání, které leží ve stabilní oblasti. Z hlediska malých difrakčních

ztrát je zaocuci, aoy oyio $N > 1$ a nevyhovnější je uspořádání *konfokální*, pro které platí, že vzdálenost d je o málo větší nebo menší než poloměr křivosti zrcadel. Takové uspořádání zachovává výhodné vlastnosti konfokálního uspořádání a zároveň leží ve stabilní oblasti. Přímkou $g_1 = 1$ jsou popsány *hemisférické rezonátory*, které jsou vytvořeny jedním zrcadlem rovinným a jedním sférickým.

Rezonance nastává v případě, že se fázový posun elektromagnetické vlny změni při průchodu od jednoho zrcadla k druhému o celistvý násobek π . Resonanční podmínka pro rezonátor se zrcadly kruhového tvaru a pro vidy TEM_{mnp} má tvar:

Pro sférická zrcadla

$$\frac{2d}{\lambda} = p + \frac{1}{\pi}(2m + n + 1) \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)}$$

pro sférická zrcadla v konfokálním uspořádání ($R_1 = R_2 = d$)

$$\frac{4d}{\lambda} = 2p + 2m + n + 1$$

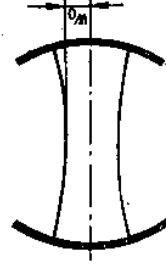
pro hemisférické uspořádání ($R_1 < \infty, R_2 = \infty$)

$$\frac{2d}{\lambda} = p + \frac{1}{\pi}(2m + n + 1) \arccos \sqrt{1 - \frac{d}{R_1}}$$

a pro planární uspořádání ($R_1 = R_2 = \infty$)

$$\frac{2d}{\lambda} = p$$

Maximum energie elektromagnetického pole je soustředěno v ose rezonátoru (pro základní vidy TEM_{00p}). Na sférických zrcadlech se ekvifázové plochy shodují s plochou zrcadla. U symetrických rezonátorů je ekvifázová plocha uprostřed rezonátoru rovinná a je tam též nejužší svazek elektromagnetické energie, jehož šířku definujeme jako vzdálenost od osy, ve které intenzita elektromagnetického pole klesne na $(1/e)$ násobek hodnoty, kterou má v ose rezonátoru (obr. 7.24).



Obr. 7.24. Šířka svazku elektromagnetické energie

Šířka svazku základního vidu TEM_{00p} je: uprostřed rezonátoru

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)}$$

a na zrcadlech

$$w^2 = \frac{\lambda R}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2 \frac{R}{d} - 1}}$$

Profil svazku v radiálním směru má přitom Gaussovo rozložení (intenzita pole klesne např. na 1/100 hodnoty, kterou má v ose rezonátoru, při poloměru $r = 2,15w$). Při zanedbatelně malých difrakčních ztrátách (tj. při dostatečně velkém poloměru zrcadel) můžeme určit činitel jakosti rezonátoru výrazem (7.92)

$$Q = \frac{kd}{1 - |e|^2}$$

přičemž výraz ve jmenovateli bývá označován jako *činitel reflexních ztrát* β_r . Vyjádříme-li činitel odrazu podle vztahu (2.126), lze pro kovová zrcadla psát

$$e = \frac{Z_v - Z_0}{Z_v + Z_0}$$

kde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ je charakteristická impedance vakua (a přibližně též vzduchu), Z_v charakteristická impedance vodivého zrcadla [viz (2.49)], takže po úpravě můžeme vyjádřit činitel reflexních ztrát výrazem

$$\beta_r = 2 \sqrt{\frac{2\omega\sigma}{\sigma}}$$

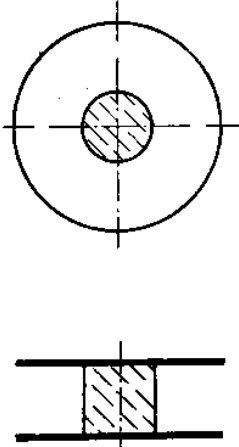
kde σ je konduktivita materiálu zrcadel. Reflexní ztráty jsou nezávislé na tvaru zrcadel.

7.8. DIELEKTRICKÉ REZONÁTORY

Dielektrické rezonátory byly vyvinuty na základě požadavku realizace rezonančního obvodu malých rozměrů a s činitelem jakosti $Q = 10^3$ až 10^4 , který by byl vhodný jako konstrukční prvek v mikrovlňné integrované technice. Použití rezonančních obvodů vytvořených např. z úseků vedení naprázdno je též možné, avšak pro řadu aplikací mají takové obvody příliš malý činitel jakosti.

Dielektrické rezonátory se vyrábějí z dielektrik s velkou relativní permitivitou ($\epsilon_r > 30$, $\text{tg } \delta = 1 \cdot 10^{-3}$ až $1 \cdot 10^{-4}$). V nejjednodušším provedení mají tvar nízkého válce, jehož délka je menší než průměr (záleží zde ovšem na použitém vidu elektromagnetického pole). V důsledku velké relativní permitivity jsou rozměry těchto rezonátorů v porovnání s dutinovými rezonátory velmi malé, přičemž jejich výrobní cena je nižší než cena rozměrnějších a výrobně náročnějších dutinových rezonátorů. I když mají dutinové rezonátory větší činitel jakosti, je mnoho aplikací, kde je mohou dielektrické rezonátory nahradit. Protože mají navíc velmi malé rozměry, je jejich netypičtější použití v mikrovlňné integrované technice při konstrukci mikrovlňných filtrů a stabilizovaných oscilátorů.

Analogicky, jako můžeme vytvořit rezonátor z úseku kovového vlnovodového vedení tím, že úsek vlnovodu délky $l = p\lambda_v/2$ zkrátíme kovovými stěnami, lze vytvořit i rezonátor z dielektrického vlnovodu (obr. 7.25). Protože elektromagnetické pole zasahuje i do prostoru vně dielektrické tyče, musí mít kovové desky,



Obr. 7.25. Dielektrický rezonátor s kovovými čelními stěnami

jimiž vedení zkrátíme, větší průměr, než je průměr dielektrické tyče. K vyjádření rezonanční podmínky můžeme použít stejný vztah (2.11) jako u jiných rezonátorů, vytvořených z úseku vedení

$$k^2 = \Gamma^2 + \alpha^2$$

Použijeme-li dále vztah

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_r; \quad \alpha^2 = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$$

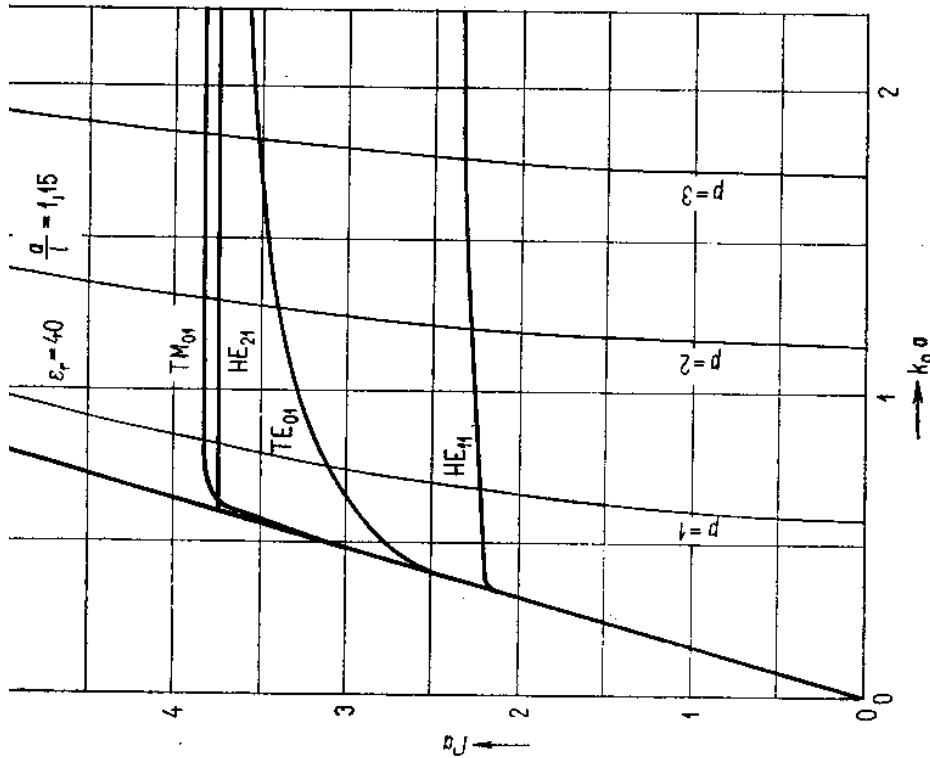
dostaneme po úpravě rezonanční podmínku

$$k_0 a \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{(\Gamma a)^2 + (p\pi)^2 \left(\frac{a}{l}\right)^2} \quad (7.93)$$

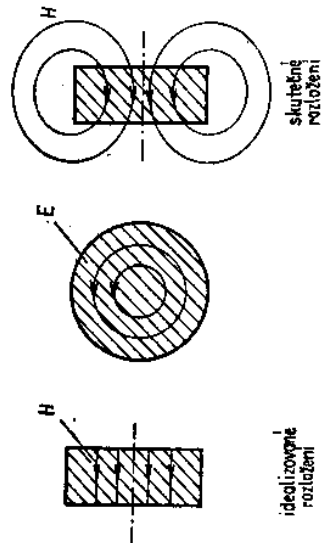
kde a je poloměr dielektrického vedení, l délka dielektrického vedení.

S použitím grafické interpretace řešení disperzní rovnice pro dielektrické vlnovody a vztahu (7.93) získáme pro konkrétní rozměry diagram vidů v dielektrickém rezonátoru omezeném na délce $l = p\lambda_v/2$ vodivými stěnami. Příklad takového diagramu pro $\epsilon_r = 40$ (keramika s malými ztrátami) a pro poměr $a/l = 1,15$ je uveden na obr. 7.26. Při použití jiného poměru a/l (při téže hodnotě relativní permitivity) by měly křivky, příslušející hodnotám $p = \text{konst}$ jiný průběh – určili bychom jej z rovnice (7.93).

V důsledku Joulových ztrát v kovových čelních stěnách, které se přičítají ke ztrátám dielektrickým, není toto uspořádání dielektrických rezonátorů výhodné se zřetelem k činiteli jakosti. Odejmutím kovových čelních stěn se činitel jakosti zvětší, avšak vlivem okrajových polí na koncích rezonátorů se zkomplikuje určení rezonanční frekvence. Přibližně můžeme určit rezonanční frekvenci za předpokladu, že na koncích dielektrického rezonátoru jsou místo vodivých stěn magnetické stěny ($\mu_r \rightarrow \infty$, $\epsilon_r = 1$). V takovém případě dostaneme pro určení rezonance stejnou rovnici jako (7.93), ale s tím rozdílem, že nejnižší index p může být roven nule.



Obr. 7.26. Orientační diagram vidů dielektrického rezonátoru



Obr. 7.27. Přibližné rozložení elektromagnetického pole v dielektrickém rezonátoru (TE₀₁₀)

a index p , který udává celistvý počet půlvln na délku rezonátoru, není již celé číslo. Proto bývá zvykem přidávat k indexu p malé číslo δ ($0 < \delta < 1$), takže jednotlivé vidy kmitání mají pak označení např. HE _{$m,n,p+\delta$} TE _{$m,n,p+\delta$} apod. Pro praktické aplikace má největší význam vid TE₀₁₀ (tj. pro $p = 0$). Rozdíl mezi geometrickým rozložением vidu TE₀₁₀ (což je fiktivní případ za předpokladu magnetické stěny) a skutečným videm TE₀₁₀ je naznačen na obr. 7.27.

Pro orientační určení rezonanční frekvence, popř. vidu kmitání, můžeme použít diagram na obr. 7.26, sestrojený pro případ, že rezonátor je omezen vodivými nebo magnetickými stěnami. K získání přesnějších výsledků pro izolované dielektrické rezonátory je třeba použít podstatně složitější aproximační metody.

7.9. FERITOVÉ REZONÁTORY

Feritové kuličky, vyrobené z monokrystalů typu yttriových granátů (označovaných YIG), mohou být využity v mikrovlnné technice jako rezonátory s velkým činitelem jakosti (řádově 10^3) a s možností snadného přeladění v širokém pásmu frekvencí. Průměry těchto vysoce leštěných kuliček bývají od několika desetin milimetru do několika milimetrů. Rezonanční úhlová frekvence je přímo úměrná intenzitě statického magnetického pole a je (u izotropní kuličky umístěné v homogenním magnetickém poli) dána vztahem (10.11)

$$\omega_0 = \mu_0 \gamma H_0$$

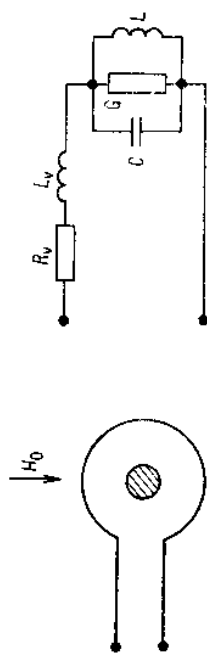
kde γ je tzv. gyromagnetický poměr,

H_0 intenzita statického magnetického pole.

V důsledku přímé úměrnosti rezonanční úhlové frekvence intenzitě magnetického pole, je možné dosáhnout při přeladování pomocí elektromagnetu lineární závislosti na proudu elektromagnetu.

Rezonnance v kuličce YIG nastane tehdy, jestliže úhlová frekvence precese elektronů souhlasí s úhlovou frekvencí vysokofrekvenčního magnetického pole superponovaného ke statickému magnetickému poli (viz odst. 10.2.1). Šířka rezonanční křivky je přímo úměrná tlumení precesního pohybu magnetických dipólů.

Na obr. 7.28 je schematicky zobrazeno navázání feritového rezonátoru na va-



Obr. 7.28. Schematické znázornění vazby feritového rezonátoru na vedení

8. Nespojivosti na vedeních

Nespojnost na vedení, podél něhož se šíří elektromagnetická vlna, způsobí deformaci jmenovitého rozložení pole, tj. takového rozložení, které by vzniklo bez této nespojivosti. Při praktickém použití vedení bývá někdy nutné takovou nespojnost na vedení vytvořit úmyslně buď k dosažení přízpusobení, nebo k jinému účelu. Ve vlnovodech a souosých vedeních to bývají různé clony, kolíky, dielektrické destičky apod. Předpokládáme, že na vedení se šíří pouze dominantní vlna. Kromě deformace pole vznikne nespojivosti na vedení ještě odražená vlna. Deformaci pole lze vysvětlit vznikem vyšších vidů, které se exponenciálně tlumí se vzrůstající vzdáleností od místa nespojivosti. Charakter nespojivosti můžeme popsat pomocí tří veličin: velikosti činitele odrazu $|\rho|$, jeho fázového úhlu φ a fázového úhlu ψ činitele přenosu τ . Velikost činitele přenosu je dána známým vztahem $\tau\tau^* = 1 - |\rho|^2$, který vyplývá z principu zachování energie. Nespojnost lze též vyjádřit ekvivalentním obvodem, který způsobí odraženou a přenesenou vlnu se stejnými hodnotami ρ a τ . Tento způsob popisu použijeme také v dalším textu.

K určení parametrů prvků schématu ekvivalentního obvodu nespojivosti bylo třeba znát přesná rozložení polí v místě nespojivosti. Přesné řešení Maxwellových rovnic popisujících pole v okolí nespojivosti je však velmi obtížné a ve většině případů i nedosažitelné. Deformované pole u nespojivosti vyjádříme analyticky pomocí vhodných nekonečných řad takových, že splňují Maxwellovy rovnice s příslušnými okrajovými podmínkami. Každý člen řady obvykle interpretujeme jako „vid“. Vybuzené vyšší vidy vytvářejí tak poruchu, která způsobuje fázové posuny v odražené i průchozí vlně a výsledkem je transformace impedance v místě nespojivosti. Z praktického hlediska má vlnovod nebo vedení přenášet energii. Ve větší vzdálenosti od nespojivosti tento přenos uskuteční šířící se vid. Stačilo by brát v úvahu pouze vliv nespojivosti na tento vid. Znalost rozložení vzdálenějšího pole je důležitá potud, pokud je potřeba určit parametry prvků ekvivalentního obvodu. Poznamenejme ještě, že pole v okolí nespojivosti má vliv i na pole vzdálenější.

K objasnění předcházejících úvah předpokládáme nespojnost vytvořenou náhlou změnou průměru vnějšího vodiče souosého vedení (obr. 8.1a). Označíme v bodě z vedení ekvivalentní napětí $U(z)$ a proud $I(z)$. Tyto ekvivalentní veličiny mohou být vyjádřeny vztahy

$$U(z) = U_0(z) + U'(z) = U_0(z) + \sum_n U_n(z)$$

$$I(z) = I_0(z) + I'(z) = I_0(z) + \sum_n I_n(z) \quad (8.1)$$

Statické magnetické pole je orientováno vždy kolmo ke směru vysokofrekvenčního magnetického pole, zaváděného smyčkou. V náhradním schématu vyjadřují prvky R_n a L_n impedanci vazební smyčky, prvky L , C a G jsou náhradní prvky vyjadřující parametry feritového rezonátoru.

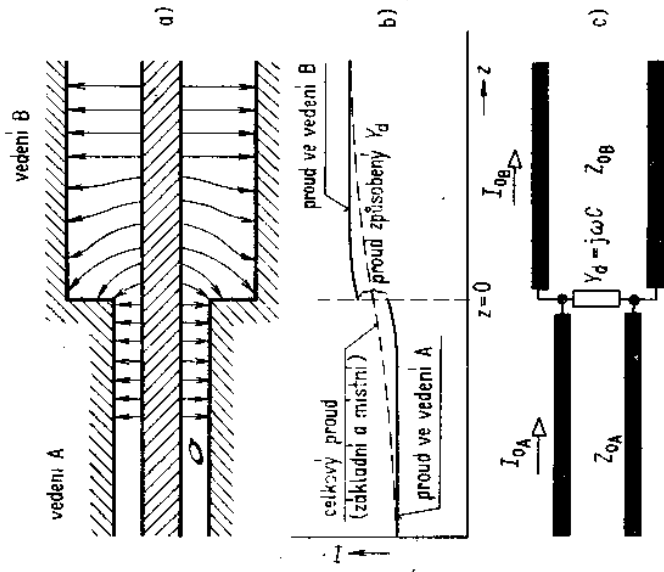
Pro své malé rozměry nalézají feritové rezonátory uplatnění hlavně v technice mikrovlnných integrovaných obvodů. Používají se zejména při konstrukci široce přeladitelných polovodičových oscilátorů a přeladitelných filtrů [3].

Literatura ke kapitole 7

- [1] *Knašil, B.*: Theoretické základy techniky centimetrových vln. Praha, SNTL 1957.
- [2] *Collin, R. E.*: Foundations for Microwave Engineering. New York, McGraw – Hill 1966.
- [3] *Heřzain, J.*: Passivnyje i aktivnyje cepi SVC (překlad z angl.). Moskva, Radio i svjaz 1981.
- [4] *Senčtov, N. M.*: Technika svěřchvysokich častot. Moskva, Izd. Vyššaja škola 1976.
- [5] *Knašil, B.*: Teorie otevřených rezonátorů. Praha, Academia 1971.
- [6] *Fox, A. G. – Li, T.*: Resonant Modes in a Maser Interferometer. Bell Syst. Journal 1961, č. 2, str. 453–488.
- [7] *Boyd, G. D. – Kogelnik, H.*: Generalized Confocal Resonator Theory. Bell Syst. Techn. Journal 1962, č. 4, str. 1347–1369.
- [8] *Valitov, R. A.*: Technika submilimetrových vln. Moskva, Sovětskoje radio 1969.
- [9] *Tysl, V.*: Obvody a technika velmi vysokých kmitočtů I. Skriptum. Praha, Ediční středisko ČVUT 1982.
- [10] *Stevčina, J.*: Mikrovlnná technika. Skriptum FE VUT. Praha, SNTL 1982.
- [11] *Kinzer, J. P. – Wilson, J. G.*: Some Results on Cylindrical Cavity Resonators. Radar Systems and Components (sborník). Bell Laboratories Staff, 1949, str. 985.

vyjadřují napětí a proud dominantního vidu. V místě spojení (nespojivosti) obou vedení musí být obě napětí U_{0A} a U_{0B} na vedení A a U_{0B} na vedení B spojitá. Příslušné proudy I_{0A} a I_{0B} jsou však nespojitě (obr. 8.1b). Je-li nespojitost v místě $z = 0$, pak

$$\begin{aligned} U_{0A} &= U_{0B} = U(0) \\ I_{0A} - I_{0B} &= -I_d \end{aligned} \quad (8.2)$$



Obr. 8.1. Skoková změna průměru vnějšího vodiče sousedního vedení
a) deformace elektrického pole v místě nespojitosti, b) průběhy proudu okolo nespojitosti, c) ekvivalentní schéma

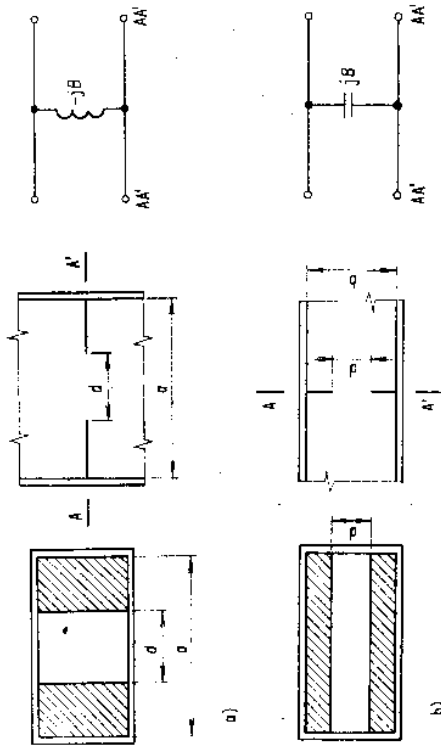
Podobná situace (napětí spojitě, proud nespojitě) může nastat jen tehdy, přijme-li v daném místě k homogennímu vedení paralelně admittanci. Ekvivalentní obvod takové nespojitosti může být proto reprezentován admittancí Y_d v místě $z = 0$

$$Y_d = -\frac{I_d}{U(0)} = j\omega C \quad (8.3)$$

Teoretickým rozбором bychom zjistili, že nespojitost má kapacitní charakter [4]. Z téhož rozboru vyplývá, že I_d lze vyjádřit pomocí nekonečné řady, jejíž členy, jak již bylo řečeno, interpretujeme jako vyšší vidy. Ze vztahu (8.3) je tedy zřejmé, že admittance nespojitosti pro dominantní vid závisí do jisté míry na střední hodnotě příspěvků vyšších vidů vzniklých v místě nespojitosti.

8.1. CLONY VE VLNOVODU

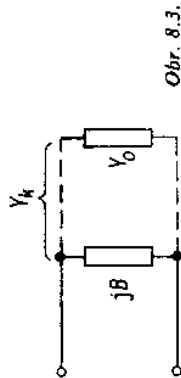
Nespojitost nejčastěji používanou pro impedanční přizpůsobování vlnovodu k zátěži je clona. Na obr. 8.2 jsou znázorněny dva základní typy clon – indukční a kapacitní. Clona je dokonale vodivá kovová přepážka, jejíž plocha je kolmá k ose vlnovodu. Při navrhování ji považujeme teoreticky za nekonečně tenkou. Z konstrukce clony je zřejmé, že její rozměry nemohou být proměnné, je tedy jako přizpůsobovací prvek neladitelná.



Obr. 8.2. Clony ve vlnovodu a jejich ekvivalentní schémata
a) indukční clona, b) kapacitní clona

Určit susceptanci nebo reaktanci clony v závislosti na jejich rozměrech je velmi obtížné. Metodám řešení nespojitosti ve vlnovodech je v literatuře věnováno velké množství prací, a to jak metodám analytickým, tak i metodám numerickým s použitím počítačů. Všechny metody jsou matematicky velmi náročné. Jmenujme z nich: řešení integrálními rovnicemi ([1], [2]), řešení jako variační úloha ([3], [4]), řešení pomocí konformního zobrazení [1], sešívání oblastí [5], metoda Wienerova – Hopfova ([5], [7]) a jiné. V dalším odstavci popíšeme metodu řešení nespojitosti – indukční clony – spočívající v řešení integrální rovnice. Tato metoda se v porovnání s ostatními vyznačuje větší fyzikální názorností.

Ekvivalentní obvod tenké clony ve vlnovodu je znázorněn na obr. 8.3. Předpokládáme přitom, že vlnovod napravo od nespojitosti je přizpůsoben. Je-li vlnová



Obr. 8.3.

admittance vlnovodu Y_0 a susceptance clony jB , pak podle (2.126) platí pro činitel odrazu (napětový)

$$\rho = \frac{Y_0 - Y_k}{Y_0 + Y_k} \quad (8.4)$$

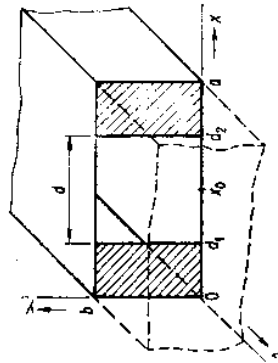
kde podle obr. 8.3 je $Y_k = jB + Y_0$. Zavedeme normované veličiny tak, že číselník a jmenovatel dělíme Y_0 . Je-li $jB/Y_0 = j\tilde{B}$, pak z (8.4) po úpravě vyplývá

$$j\tilde{B} = -\frac{2\rho}{1 + \rho} \quad (8.5)$$

Tím jsme vyjádřili závislost hledané susceptance na činiteli odrazu.

8.1.1. Indukční clona v obdélníkovém vlnovodu

V tomto odstavci provedeme podrobný rozbor clony v pravouhlém vlnovodu a ukážeme, že jsou-li hrany clony rovnoběžné s uží stěnou vlnovodu, je susceptance v ekvivalentním obvodu záporná – má tedy taková clona indukční charakter [1]. Rozměry a uspořádání clony ukazuje obr. 8.4. Označíme šířku štěrbin $d = d_2 - d_1$ a souřadnici středů otvoru v cloně $x_0 = (d_1 + d_2)/2$.



Obr. 8.4. Rozměry indukční clony

Předpokládejme, že vlnovod je jednovířový a že se v něm šíří dominantní vln s jednotkovou amplitudou. Pak pro elektrické pole dominantního vidu přímé vlny platí

$$E_y = \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jxz} \quad (8.6)$$

Tato vlna dopadá na clonu ze strany $z = -\infty$ a za clonou je v bodě $z = \infty$ vlnovod přizpůsobený. Po dopadu vlny se pole v místě clony deformuje, vzniklé vyšší vidy a dominantní vid se částečně odrazí a část jich projde za clonu. Intenzitu elektrického pole v otvoru clony neznáme, označíme ji $E(\pi x/a)$. Pro intenzitu elektrického pole před otvorem ($z < 0$) lze psát

$$E_y = (e^{-jxz} + \rho e^{jxz}) \sin \frac{\pi}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m e^{j\pi m z/a} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (8.7)$$

a pro intenzitu elektrického pole za otvorem ($z > 0$)

$$E_y = \tau e^{-jxz} \sin \frac{\pi}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m e^{-j\pi m z/a} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (8.8)$$

kde ρ je činitel odrazu,

τ činitel přenosu,

α poměrný fázový posun dominantního vidu podle (8.9),

α_m jsou konstanty vyšších vidů, které se ve vlnovodu nemohou šířit a pouze se exponenciálně tlumí, neboť α_m jsou čísla reálná [viz rozbor v čl. 2.1 a 2.7 a též vztah (8.10)].

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \Gamma^2} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (8.9)$$

$$\alpha_m = \sqrt{\Gamma_m^2 - \Gamma^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2} \quad (8.10)$$

Nyní je nutné splnit okrajové podmínky, čímž získáme vztahy mezi koeficienty rozvoje v (8.7) a (8.8).

Okrajové podmínky pro elektrické pole

Na kovové ploše clony v místě $z = 0$ musí být tečná složka elektrického pole nulová, v otvoru clony musí být spojitá a rovna $E_y(\pi x/a)$. Porovnáme (8.7) a (8.8) pro $z = 0$ zjistíme, že $\tau = 1 + \rho$ a $\rho_m = \tau_m$. Protože vztahy (8.7) a (8.8) tvoří v podstatě Fourierovu řadu¹⁾ pro funkci $E_y(\pi x/a)$, v níž jsou τ_m a ρ_m koeficienty rozvoje, můžeme tyto koeficienty vyjádřit vztahy známými z harmonické analýzy

$$1 + \rho = \tau = \frac{2}{a} \int_0^a E(\pi x'/a) \sin \frac{\pi x'}{a} dx' = \frac{2}{a} \int_{d_1}^{d_2} E(\pi x'/a) \sin \frac{\pi x'}{a} dx' \quad (8.11)$$

$$\rho_m = \tau_m = \frac{2}{a} \int_{d_1}^{d_2} E(\pi x'/a) \sin \frac{m\pi x'}{a} dx' \quad (8.12)$$

kde jsme integrační proměnnou označili x' pro odlišení od souřadnice x .

Okrajové podmínky pro magnetické pole

Dominantní vid má dvě složky intenzity magnetického pole H_x a H_z , které jsou vázány s elektrickým polem Maxwellovými rovnicemi

$$j\omega\mu H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad -j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

V otvoru clony musí být H_x spojitě. Splňme-li tuto podmínku pro H_x , bude tím současně splněna tato podmínka i pro H_z . Porovnáme-li obě složky H_x z obou

¹⁾ Viz např. [9], str. 29 nebo Arsenin, V. Ja.: *Matematičeskaja fizika*, Moskva, Izd. Nauka 1966.

stran otvoru ($z > 0, z < 0$) pro $z = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} -j\alpha(1 - \varrho) \sin \frac{\pi}{a} x + \sum_{\infty} \varrho_m \alpha_m \sin \frac{m\pi}{a} x = \\ = j\alpha x \sin \frac{\pi}{a} x - \sum_{\infty} \tau_m \alpha_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \text{pro } d_1 < x < d_2 \end{aligned} \quad (8.13)$$

Odbození integrální rovnice a její úprava

Dosadíme-li (8.12) do předcházejícího vztahu, vyloučíme tím koeficienty ϱ_m a τ_m , tedy

$$2\varrho \sin \frac{\pi}{a} x = 2j \sum_{\infty} \frac{\alpha_m}{\alpha} \sin \frac{m\pi}{a} x \int \frac{2}{a} E(\pi x/a) \sin \frac{\pi}{a} x' dx' \quad (8.14)$$

Dělíme-li obě strany rovnice (8.11) dvojitěm $(1 + \varrho)$, dostaneme na její levé straně jedničku, kterou vynásobíme levou stranu rovnice (8.14), a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2\varrho}{1 + \varrho} \sin \frac{\pi}{a} x \int E(\pi x'/a) \sin \frac{\pi}{a} x' dx' = \\ = 2j \sum_{\infty} \frac{\alpha_m}{\alpha} \sin \frac{m\pi}{a} x \int \frac{2}{a} E(\pi x'/a) \sin \frac{m\pi}{a} x' dx' \end{aligned} \quad (8.15)$$

Normovaná susceptance \mathcal{B} ve vlnovodu pro $z = 0$ je dána vztahem (8.5), takže po dosazení do (8.15) je

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \sin \frac{\pi}{a} x \int E(\pi x'/a) \sin \frac{\pi}{a} x' dx' = \\ = 2 \sum_{\infty} \frac{\alpha_m}{\alpha} \sin \frac{m\pi}{a} x \int E(\pi x'/a) \sin \frac{m\pi}{a} x' dx' \end{aligned} \quad (8.16)$$

Odvozená rovnice je v podstatě integrální rovnicí vzhledem k neznámé $E(\pi x'/a)$. Jejím vyřešením můžeme určit hledanou susceptanci clony \mathcal{B} . Předtím však musíme rovnici ještě upravit. Elektrické pole vyjádřené funkcí $E(\pi x'/a)$ má vzhledem k hranám clony $x = d_1$ a $x = d_2$ pouze tečný směr, a je tedy na těchto úsečkách nulové. Integrály v (8.16) budeme proto integrovat per partes a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{d_1}^{d_2} E(\pi x'/a) \sin \frac{\pi}{a} x' dx' = - \left[E(\pi x'/a) \frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi}{a} x' \right]_{d_1}^{d_2} + \\ + \frac{a}{\pi} \int E'(\pi x'/a) \cos \frac{\pi}{a} x' dx' \\ \int_{d_1}^{d_2} E(\pi x'/a) \sin \frac{m\pi}{a} x' dx' = - \left[E(\pi x'/a) \frac{a}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{a} x' \right]_{d_1}^{d_2} + \\ + \frac{a}{m\pi} \int E'(\pi x'/a) \cos \frac{m\pi}{a} x' dx' \end{aligned}$$

Výčíslení hranatých závorek dává zřejmě nulovou hodnotu. Položíme dále

$$\frac{\pi x'}{a} = \vartheta; \quad \frac{\pi x}{a} = \varphi; \quad \frac{\alpha_m a}{m\pi} = \sqrt{1 - \frac{k^2 a^2}{m^2 \pi^2}} = 1 - \delta_m \quad (8.17)$$

Dosadíme-li výsledky integrace per partes a tyto substituce do (8.16), přejde tato integrální rovnice na tvar

$$\frac{a\mathcal{B}}{\lambda} \sin \vartheta \int E'(\varphi) \cos \varphi d\varphi = - \sum_{\infty} \sin m\vartheta (1 - \delta_m) \int E'(\varphi) \cos m\varphi d\varphi \quad (8.18)$$

v níž se obě proměnné ϑ a φ mění v mezích od $\pi d_1/a$ do $\pi d_2/a$. Obtížnost řešení integrálních rovnic tohoto typu spočívá v tom, že vlastní funkce $\sin(m\pi x/a)$ jsou ortogonální²⁾ v oboru celého příčného průřezu vlnovodu, tj. v intervalu $<0, a>$, zatímco integrální rovnice (8.18) je definována jen v oboru apertury clony, tj. v intervalu $d_1 < x < d_2$. Při řešení tedy nelze ortogonálnosti vlastních funkcí využít. Tento rozpor překonal Schwinger³⁾ jednoduchou goniometrickou transformací proměnných tak, že ortogonální vlastnosti zůstanou zachovány i ve zmenšeném oboru apertury clony.

Schwingerova metoda řešení integrální rovnice

Zavedeme podle Schwingera [1] nové proměnné u a v , které se mění v mezích 0 až π . Pro danou clonu je

$$\cos \vartheta = c + s \cos u; \quad \cos \varphi = c + s \cos v \quad (8.19)$$

kde c a s jsou zvoleny tak, aby body 0 a π pro u a v odpovídaly bodům $\pi d_1/a$ a $\pi d_2/a$. Z rovnic platících pro rozměry clony dostaneme

$$d_1 = -\frac{1}{2}(d - 2x_0); \quad d_2 = \frac{1}{2}(d + 2x_0) \quad (8.20)$$

V transformačních rovnicích (8.19) musíme hodnoty c a s zvolit tak, jak bylo řečeno; pro $x = d_1$ musí být $u = 0$ a pro $x = d_2$ musí být $u = \pi$, takže

$$\cos \frac{\pi d_1}{a} = c + s \cos 0 = c + s$$

$$\cos \frac{\pi d_2}{a} = c + s \cos \pi = c - s$$

Do těchto rovnic dosadíme za d_1 a d_2 z (8.20) a dostaneme

$$\cos \left(\frac{\pi x_0}{a} - \frac{\pi d}{2a} \right) = c + s; \quad \cos \left(\frac{\pi x_0}{a} + \frac{\pi d}{2a} \right) = c - s$$

²⁾ Ortogonální vlastnosti vlastních funkcí vlnovodu jsou popsány v příloze F.
³⁾ Viz poznámku pod čarou *) v kap. 9.

Použitím známých goniometrických vzorců zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi x_0}{a} \cos \frac{\pi d}{2a} &= c \\ \sin \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi d}{2a} &= s \end{aligned} \quad (8.21)$$

Je-li clona symetrická, pak $x_0 = a/2$ a konstanta c je nulová. Kdybychom měli provést tuto transformaci proměnných v integrální rovnici (8.18) v jednotlivých členech řady, bylo by to těžkopádné. Použijeme proto výraz pro součet řady (viz [9] str. 189)

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos m\vartheta}{m} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \right| \quad (8.22)$$

Pomocí tohoto vzorce pro součet řady a goniometrických vzorců dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{\cos m\vartheta \cos m\varphi}{m} &= \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} [\cos m(\vartheta + \varphi) + \cos m(\vartheta - \varphi)] = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 |\cos \vartheta - \cos \varphi| \end{aligned} \quad (8.23)$$

Do tohoto vzorce můžeme již snadno dosadit transformační vztahy (8.19) a po úpravě

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos m\vartheta \cos m\varphi}{m} = -\frac{1}{2} \ln s + \sum_1^{\infty} \frac{\cos mu \cos mv}{m} \quad (8.24)$$

Tento důležitý vztah odvodil Schwinger. Vztah však není ještě upraven natolik, aby byl vhodný k dosazení do (8.18). V (8.18) jsou totiž na obou stranách součiny $\sin \vartheta \cos \varphi$, z čehož vyplývá, že podobné součiny musíme získat i v (8.24). To znamená, že obě strany (8.24) je nutné derivovat podle proměnné ϑ . Avšak proměnné ϑ a u jsou vázány jedním vztahem z (8.19), a proto není derivování jednoduché. Uvážíme-li tedy, že platí

$$\cos \vartheta = c + s \cos u \quad \text{pak} \quad \frac{d}{d\vartheta} = \frac{du}{d\vartheta} \frac{d}{du} \quad (8.25)$$

Z transformačního vzorce (8.19) je

$$u = \arccos \frac{\cos \vartheta - c}{s}$$

a

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \vartheta - c}{s}\right)^2}} = \frac{\sin \vartheta}{s \sin u}$$

Potom

$$\frac{du}{d\vartheta} \frac{d}{du} = \frac{\sin \vartheta}{s} \frac{d}{\sin u} \frac{d}{du}$$

a tento vztah použijeme k výpočtu derivace pravé strany (8.24), neboť derivace levé strany (8.24) je jednoduchá. Tedy

$$\begin{aligned} -\frac{\sin \vartheta}{s \sin u} \frac{d}{du} \left[-\frac{1}{2} \ln s + \sum_1^{\infty} \frac{\cos mu \cos mv}{m} \right] &= \\ = -\frac{\sin \vartheta}{s \sin u} \sum_1^{\infty} \sin mu \cos mv \end{aligned} \quad (8.26)$$

Porovnáním vypočítaných derivací levé a pravé strany (8.24) dostaneme

$$s \sin u \sum_1^{\infty} \sin m\vartheta \sin m\varphi = \sin \vartheta \sum_1^{\infty} \sin mu \cos mv \quad (8.26)$$

Než tento vztah dosadíme do (8.18), musíme jej upravit, protože (8.18) obsahuje řadu až od 2. členu. Je tedy po úpravě

$$\begin{aligned} \sum_2^{\infty} \sin m\vartheta \cos m\varphi &= \frac{\sin \vartheta \cos v}{s} - \sin \vartheta \cos \varphi + \\ &+ \frac{\sin \vartheta}{s \sin u} \sum_1^{\infty} \sin mu \cos mv \end{aligned} \quad (8.27)$$

a po jeho dosazení do (8.18) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{aB}{\lambda} \int E'(\varphi) \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi &= \\ = -\int E'(\varphi) \left[\frac{\sin \vartheta \cos v}{s} - \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{\sin \vartheta}{s \sin u} \sum_1^{\infty} \sin mu \cos mv \right] d\varphi + \\ + \int E'(\varphi) \sum_2^{\infty} \delta_m \sin m\vartheta \cos m\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (8.28)$$

Pro další úpravu položíme

$$E'(\varphi) d\varphi = E'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dv} \right) dv$$

a použijeme transformační vztah (8.19). Při konečné úpravě levé strany (8.28) vezmeme v úvahu, že

$$\int_{\frac{\pi d/2}{a}}^{\frac{\pi d/2}{a}} E'(\varphi) d\varphi = [E(\varphi)]_{\frac{\pi d/2}{a}}^{\frac{\pi d/2}{a}} = 0$$

Konečný tvar integrální rovnice po všech úpravách je tedy

$$\begin{aligned} -\frac{aB}{\lambda} s^2 \sin u \int_0^{\pi} E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos v dv &= \\ = \int_0^{\pi} E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} [(1-s^2) \sin u \cos v + \sum_2^{\infty} \sin mu \cos mv] dv - \\ - \frac{s \sin u}{\sin \vartheta} \int_0^{\pi} E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \sum_2^{\infty} \delta_m \sin m\vartheta \cos m\varphi dv \end{aligned} \quad (8.29)$$

přičemž je definována v apertuře clony, tj. $u, v \in <0, \pi>$.

Pravá strana integrální rovnice (8.29) obsahuje dvě nekonečné řady. Druhá řada obsahuje koeficient δ_m definovaný vztahem (8.17). Z tohoto vzorce vyplývá, že pro velká m je $\delta_m \rightarrow 0$. Můžeme proto chápat tuto řadu jako opravný člen zbyývající části rovnice. V tomto členu zůstaly také „staré“ proměnné ϑ a φ , protože se do jeho řady musí dosazovat transformační vztahy (8.19) postupně člen po členu. Rovnice bez tohoto opravného členu má kvazistatický charakter v tom smyslu, že v ní není vyjádřen vliv vyšších vidů. Zanedbáme-li v integrální rovnici tento opravný člen, dostaneme tedy tzv. kvazistatické přiblížení. Je-li potřeba dosáhnout větší přesnosti řešení, zvolíme aproximaci vyššího řádu, tj. v opravné řadě ponecháme jen několik členů. Je zřejmé, že se zvyšujícím se počtem opravných členů narůstá těžkopádnost řešení.

Zanedbáme-li všechny opravné členy v (8.29) na pravé straně, dostaneme

$$\begin{aligned}
 -\frac{a\vec{B}}{\lambda_v} s^2 \sin u \int_0^\pi E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos v \, dv &= \\
 = (1-s^2) \sin u \int_0^\pi E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos v \, dv + \int_0^\pi \left[E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \sum_2^\infty \sin mu \cos mv \right] dv &(8.30)
 \end{aligned}$$

Vyšetříme-li tuto rovnici podrobněji, zjistíme, že její pravou stranu tvoří Fourierova řada s proměnnou u v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Odtud vyplývá, že koeficienty u funkce $\sin mu$ se musí sobě na obou stranách rovnat. Z toho vyplývá

$$-\frac{a\vec{B}}{\lambda_v} s^2 = 1 - s^2 \quad (8.31)$$

$$\int_0^\pi E'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos mv \, dv = 0 \quad \text{pro } m > 1 \quad (8.32)$$

Z toho je zřejmé, že při kvazistatickém přiblížení nemusíme integrální rovnici vůbec řešit a z (8.31) dostaneme přímo

$$\vec{B} = \frac{\lambda_v}{a} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) \quad (8.33)$$

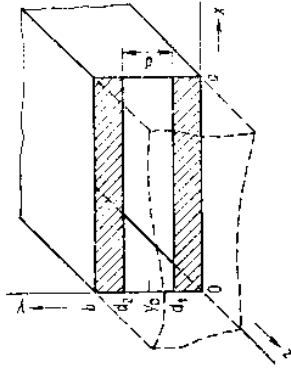
Po dosazení za s z (8.21) a algebraické úpravě dostaneme známý vzorec pro určení normované susceptance clony v závislosti na jejích rozměrech

$$\vec{B} = -\frac{\lambda_v}{a} \cotg^2 \frac{\pi d}{2a} \left(1 + \sec^2 \frac{\pi d}{2a} \cotg^2 \frac{\pi x_0}{a} \right) \quad (8.34)$$

Vidíme, že susceptance je záporná, má tedy clona indukční charakter, což souhlasí též s fyzikální představou, že v apertuře clony nastává „zhuštění“ magnetického pole.

Pomocí stejné metody bychom zjistili, že v kvazistatickém přiblížení je normovaná susceptance tenké clony s hranami rovnoběžnými s delším rozměrem vlnovodu (obr. 8.5) dána vztahem

$$\vec{B} = \frac{4b}{\lambda_v} \ln \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2b} \operatorname{cosec} \frac{\pi y_0}{b} \right) \quad (8.35)$$

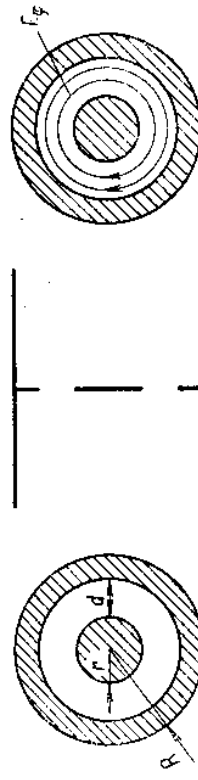


Obr. 8.5. Rozměry kapacitní clony

Uvážíme-li rozložení elektrického pole vidu TE_{10} , nastává v průřezu clony „zhuštění“ elektrického pole, je to tedy clona kapacitní.

8.1.3. Indukční clona v kruhovém vlnovodu

Vytvořit čistě indukční nebo kapacitní clonu v kruhovém vlnovodu lze jen tehdy, šíří-li se v něm osově symetrický vid TE_{01} nebo TM_{01} .



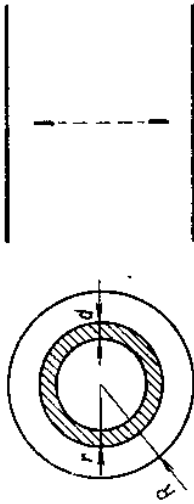
Obr. 8.6. Indukční clona v kruhovém vlnovodu

Šíří-li se v kruhovém vlnovodu vid TE_{01} , můžeme v něm realizovat clonu indukčního charakteru takovým způsobem, že v přepážce tvořící clonu zhotovíme otvor ve tvaru mezikruží (obr. 8.6). Její normovaná reaktance je dána vztahem [8]

$$\vec{X} = \frac{r}{\lambda_v} \left(\frac{\pi d}{2R} \right)^2 \frac{J_0^2 \left(\alpha_{01} \frac{r}{R} \right)}{0,162} \quad (8.36)$$

clony je zřejmý z obr. 8.6a. Na vedlejším obrázku 8.6b je znázorněno elektrické pole v otvoru. Vidíme opět, že hrany clony jsou rovnoběžné se siločarami intenzity elektrického pole E_y . Meze použitelnosti vzorce jsou v rozsahu $0,896 R < \lambda < 1,04 R$.

8.1.4. Kapacitní clona v kruhovém vlnovodu



Obr. 8.7. Kapacitní clona v kruhovém vlnovodu

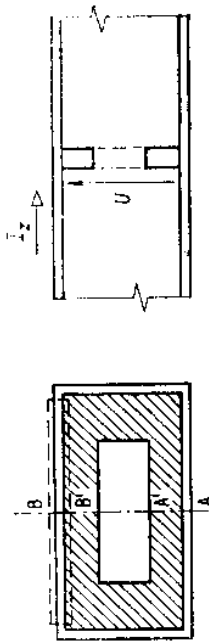
Vložením nekonečně tenkého kovového kroužku (obr. 8.7) do kruhového vlnovodu s videm TM_{01} vytvoříme clonu kapacitního charakteru s normovanou susceptancí [8]

$$\bar{B} = \frac{r}{\lambda_c} \left(\frac{\pi d}{R} \right)^2 \frac{J_0^2 \left(\alpha_{01} \frac{r}{R} \right)}{0,269} \quad (8.37)$$

kde $\alpha_{01} = 2,405$ je kořen Besselovy funkce nultého řádu. Meze použitelnosti tohoto vzorce jsou $1,14 R < \lambda < 2,61 R$.

8.1.5. Rezonanční okénko

Kombinací indukční a kapacitní clony můžeme ve vlnovodu vytvořit rezonanční okénko (obr. 8.8). Taková clona může mít buď kapacitní, nebo indukční charakter. Rozměry clony můžeme však zvolit také tak, že její susceptance bude nulová a v tomto případě bude ekvivalentní schéma clony paralelně laděný obvod. Clona pak nebude mít na šíření vlny ve vlnovodu žádný vliv [10].



Obr. 8.8. Rezonanční okénko s vyznačením integrační dráhy k výpočtu podélného proudu

pokládat za vlnovod. Nemá-li clona vyvolat odrazy, je nutné, aby v místě přechodu byl podélný proud I_z spojitý a napětí U uprostřed vlnovodu a clony bylo stejné. Šíří-li se ve vlnovodu dominantní vid, určíme napětí a proudy z křivkových integrálů

$$U(z) = \int_{-a}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-a}^a E_y dy = \int_0^b C \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jz z} dy = C b e^{-jz z} \quad (8.38)$$

pro $x = \frac{a}{2}$

Celkový podélný proud I_z v horní stěně vlnovodu vyvolává magnetické pole s intenzitou H_x , je tedy

$$I_z = \int_{-a}^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^a Y_0 C \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jz z} dx = C Y_0 \frac{2a}{\pi} e^{-jz z} \quad (8.39)$$

kde $Y_0 = H_x/E_y$ je charakteristická admitance vlnovodu daná reciprokou hodnotou vztahu (2.25). Stejným způsobem dostaneme pro napětí a proud na hraně clony ($z = 0$)

$$U' = C'b' \quad (8.40)$$

$$I_z = C'Y_0' \frac{2a'}{\pi} \quad (8.41)$$

Obě veličiny musí být na rozhraní spojitě, tj. musí platit $U' = U$ a $I_z = I_z'$. Dosaďme-li do těchto podmínek, dostaneme

$$Cb = C'b'$$

$$C Y_0 \frac{2a}{\pi} = C' Y_0' \frac{2a'}{\pi}$$

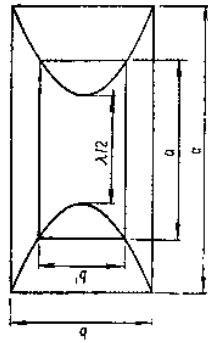
které mají netriviální řešení vzhledem k neznámým konstantám C a C' , je-li determinant soustavy nulový. Odtud vyplývá

$$\frac{1}{Y_0} \frac{b}{a} = \frac{1}{Y_0'} \frac{b'}{a'}$$

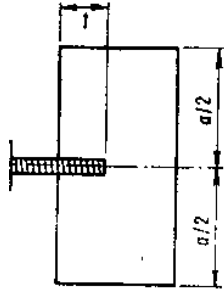
Dosaďme-li do této rovnice za Y_0 reciproké hodnoty (2.25), je

$$\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} = \frac{b'}{a'} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'} \right)^2}} \quad (8.42)$$

Pro dané hodnoty a a b a proměnné a' a b' je tato rovnice rovnicí hyperboly, jejíž velká poloosa je rovna $\lambda/4$. Rohy obdélníků tvořených vlnovodem a clonou leží na této hyperbole (obr. 8.9). Jsou-li tedy rozměry clony navrženy tak, aby byla splněna rovnice (8.42), nemá clona na šíření vlny vliv a ekvivalentní schéma je tvořeno paralelním připojením paralelního rezonančního obvodu k vlnovodu.



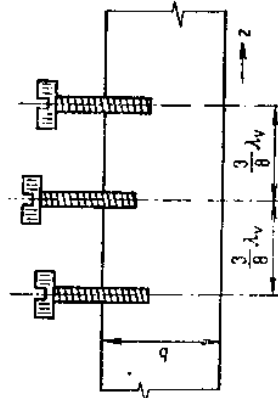
Obr. 8.9. Rozměry rezonančního okénka při rezonanci



Obr. 8.10. Přizpůsobovací kolík s proměnnou délkou

8.2. PŘIZPŮBOVACÍ REZONANČNÍ KOLÍK VE VLNOVODU

Velmi často používanou nespojitostí k účelům přizpůsobování je kolík ve vlnovodu (obr. 8.10). Je-li průměr kolíku zanedbatelný v porovnání s vlnovou délkou λ_v , pak zhruba při hloubce ponoru $l < \lambda/4$ má kapacitní charakter a indukční má při hloubce $l > \lambda/4$. Změnou ponoru při ladění lze dosáhnout jak kladné, tak i záporné susceptance; chová se tedy jako rezonanční člen. Přizpůsobovací kolík může být konstruován nejen s proměnnou hloubkou ponoru, ale i s možností



Obr. 8.11. Tříkolíkový impedanční transformátor

změny polohy podél osy vlnovodu. Takto konstruovaný přizpůsobovací kolík pracuje jako *impedanční transformátor*. Ke zvýšení frekvenčního rozsahu je možné podobný impedanční transformátor konstruovat v tzv. *tříkolíkovém provedení* (obr. 8.11). Všechny tři kolíky mají proměnnou hloubku, avšak vzájemná vzdálenost je konstantní a rovna $3\lambda_v/8$.

Podrobné vztahy pro výpočet susceptancí (reaktancí) přizpůsobovacích kolíků v závislosti na jejich poloze a rozměrech zde nebudeme uvádět pro omezený rozsah učebnice. Zájemce je nutné odkázat na citovanou literaturu.

Z hlediska ekvivalentních obvodů popisovaných nespojitostí v předchozím textu tvořily tyto obvody v podstatě čtyřpólové soustavy. Teorie nespojitostí ve vlnovodech je velmi rozsáhlá, takže není možné zabývat se všemi možnými sou-

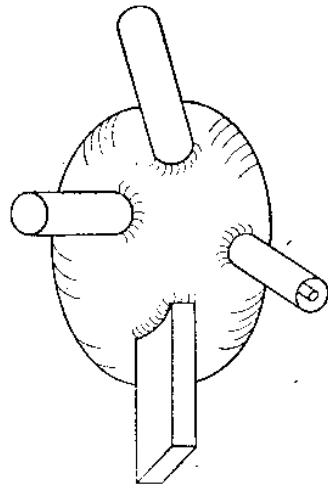
stavami z hledisek této teorie. Vynechali jsme zejména popis nespojitostí způsobených štěrbinami ve stěně vlnovodu, protože tyto problémy náležejí spíše do oboru mikrovlákových antén. Soustavy vícepólové (n -brany) budou probírány v deváté kapitole, nikoliv však z hlediska teorie nespojitostí, tj. stanovení velikostí parametrů prvků ekvivalentních obvodů, ale z jiných hledisek používaných v praxi.

Literatura ke kapitole 8

- [1] *Lewin, L.*: Teorija vlnovodov (překl. z angl.). Moskva, Izd. Radio i svjaz 1981.
- [2] *Lewin, L.*: Sovremennaja teorija vlnovodov (překl. z angl.). Moskva, Izd. Inostrannoj literatury 1954.
- [3] *Collin, R. E.*: Field Theory of Guided Waves. New York, McGraw—Hill Comp. 1960.
- [4] *Ghose, R. N.*: Microwave Circuit Theory and Analysis. New York, McGraw—Hill Comp. 1963.
- [5] *Mitra, R.—Lee, S. W.*: Analitičeskije metody teoriji vlnovodov (překl. z angl.). Moskva, Izd. Mir 1974.
- [6] *Collin, R. E.*: Grundlagen der Mikrowellentechnik (překl. z angl.). Berlin, VEB Verlag Technik 1973.
- [7] *Young, L.—Sobel, H.*: Advances in Microwaves, Vol. 8. New York, McGraw—Hill Comp. 1948.
- [8] *Marcuvitz, N.*: Waveguide Handbook. New York, McGraw—Hill Comp. 1948.
- [9] *Tolston, G. P.*: Rjady Furje. Moskva, GHTTL 1951.
- [10] *Kvasil, B.*: Theoretické základy techniky centimetrových vln. Praha, SNTL 1957.

7. КЕСИРСОСНІ МІКРОВІВНІВНІ ОБВОДИ

V této kapitole se budeme zabývat obecnou teorií různě rozvětvených vlnovodných útvarů, tzv. *mikrovlnných mnohobranů*. Mezi mikrovlnnými obvody s rozloženými parametry a obvody se soustředěnými parametry není ostrá hranice, ale pozvolný přechod. Existují mezi nimi četné analogie. V některých jednoduchých případech můžeme přibližně (zpravidla v nevelikém rozsahu frekvencí) mikrovlnný prvek (např. clonu ve vlnovodu nebo rozvětvení) nahradit prvky se soustředěnými parametry.



Obr. 9.1. Obecný mikrovlnný mr.ohobran

Mikrovlnným mnohobranem (obr. 9.1) rozumíme část nevodivého (dielektrického) prostředí ohraničeného vodivými stěnami, z něhož vychází n různých mikrovlnných vedení (zpravidla vlnovodů). O vnitřním prostředí mnohobranu předpokládáme, že jeho elektrické parametry σ , μ a ϵ jsou ve všech místech stejné.

Struktura mnohobranu může být velmi složitá a detailní řešení elektromagnetického pole uvnitř mnohobranu pomocí Maxwellových rovnic může být obtížné nebo i neproveditelné. Ve většině případů nás však nezajímá pole uvnitř mnohobranu, ale pouze poměry ve vstupních nebo výstupních ramenech a jejich vzájemné souvislosti. Uvidíme, že souvislost polí ve vstupech a výstupech mnohobranu může být do značné míry určena bez znalostí procesů probíhajících uvnitř. Vlastnosti mnohobranu můžeme určit s použitím pouze obecných zákonitostí jako jsou: zachování energie, linearita a symetrie Maxwellových rovnic, geometrická symetrie obvodu apod. Mnohdy můžeme použít některé metody z teorie obvodů, i když v mikrovlnné technice je přímé měření proudů a napětí nemožné. Co však můžeme dobře měřit, je frekvence, činitel odrazu a výkon. Poslední dvě veličiny můžeme dokonce velmi snadno vyjádřit i pomocí napětí a proudů, a tím také i pomocí

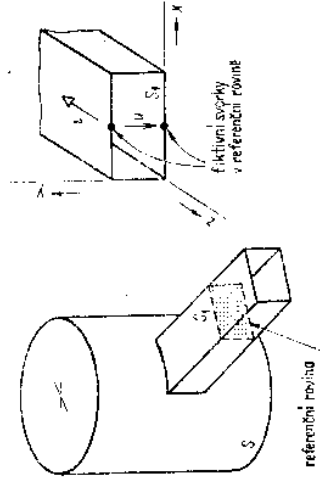
импульсами nebo суммами. В результате а также значительно упрощается задание кladných vlastností обводу jsou pojмы proud a napětí navzdory jejich obtížné definovatelnosti velmi užitečné.

9.1. МАТИЦОВЫЙ ПОПИС МИКРОВОЛННЫХ ЛИНЕАРНЫХ МНОГОБРАН

Předpokládáme nejjednodušší mikrovlnný obvod s jedním vstupním ramenem, tj. *mikrovlnný dvojpól*. Příkladem takového dvojpólu může být reflexní rezonátor (rezonátor s jedním vstupem). Budeme definovat fiktivní svorkové napětí a proud, dále určíme souvislost těchto veličin s energií a ztrátami v obvodu. Výsledky pak zobecníme na mnohobran.

9.1.1. Mikrovlnný dvojpól

Mikrovlnný dvojpól si můžeme představit podle obr. 9.2. Ve vstupním vlnovodovém rameni zvolíme ve zcela libovolném (prozatím) místě referenční rovinu kolmou k ose vlnovodu. V této rovině budeme definovat fiktivní normované svorkové napětí u a proud i . Nahlédneme-li do výrazů (3.17) pro složky intenzit polí ve směru souřadných os, zjistíme např., že vztahy pro složky intenzit pole vlny



Obr. 9.2. Mikrovlnný dvojpól a jeho „svorky“

TE v obdélníkovém vlnovodu

$$E_x = j\omega\mu \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{jz} + C_2 e^{-jz})$$

$$H_y = -jix \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y (C_1 e^{jz} - C_2 e^{-jz})$$

můžeme napsat obecněji ve tvaru vhodném i pro jiné vlnovody

$$E_x = u(z) f_x(x, y) \quad (9.1)$$

$$H_y = i(z) g_y(x, y) \quad (9.2)$$

$$E_y = u(z) f_y(x, y) \quad (9.3)$$

$$H_x = i(z) g_x(x, y) \quad (9.4)$$

kde $u(z)$ je fiktivní „svorkové“ napětí, $i(z)$ fiktivní „svorkový“ proud. Funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou reálné a popisují prostorové rozložení složek polí v příčné rovině (referenční vlnovodu). Komplexní veličiny $u(z)$ a $i(z)$ jsou normovány tak, aby pro funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ platilo [1]

$$\int_{s_1} \int_{s_2} (f_x g_y - f_y g_x) dx dy = -1 \quad (9.5)$$

Potřebnou vazbu mezi integrálními veličinami teorií obvodů $u(z)$ a $i(z)$ a diferenciálními veličinami pole \mathbf{E} a \mathbf{H} dostaneme pomocí Poynťingovy věty. Přitom vyjádříme z Maxwellových rovnic ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} \quad (9.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \quad (9.7)$$

Do vektorové identity (A.47) dosadíme $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}^*$, takže

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}^* = -j\omega\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + j\omega\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (9.8)$$

Integraci přes objem našeho dvojpólu a použitím Gaussovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dV &= \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= -j\omega\mu \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV + j\omega\epsilon \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV - \sigma \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \end{aligned} \quad (9.9)$$

Z předcházejících kapitol již víme, že členy na pravé straně rovnice jsou úměrné energiím uvnitř mikrovlnného dvojpólu a ztrátám v dvojpólu.

Připomeňme, že \mathbf{E} i \mathbf{H} jsou komplexní amplitudy. Po uvážení vztahů pro střední hodnotu energie a ztrát uvnitř dvojpólu přejde rovnice (9.9) po změně znamének na tvar

$$-\frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS = 2j\omega(W_H - W_E) + P_z \quad (9.10)$$

Se zřetelem k okrajové podmínce $E_t = 0$ na vodivé stěně uvnitř dvojpólu bude plošný integrál nenulový pouze v příčném průřezu vstupního vlnovodu, který můžeme zvolit právě v místě fiktivních „svorek“. Vyšetříme nyní tento plošný integrál samostatně. Podle obr. 9.2 je ve zmiňované referenční rovině $\mathbf{n} \equiv \mathbf{z}$, takže

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS &= -\frac{1}{2} \int_{s_1} \int_{s_2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{z} dS = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{s_1} \int_{s_2} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \end{aligned} \quad (9.11)$$

Uvážíme-li směr jednotkové normály, vidíme, že výraz (9.11) vyjadřuje výkon vstupující do mikrovlnného dvojpólu. Tato skutečnost je též v souladu s definicí divergence; záporná divergence znamená „vtok“ vektoru, kladná znamená „výtok“.

Умножив (9.11) на (z, y) , как в уравнении на (2.5) установили законности
взťah nejen pro mikrovlnný dvojpól, ale i pro popis mnohobranů

$$\frac{1}{2} u(z) i(z) = 2j\omega(W_H - W_E) + P_z \quad (9.12)$$

Tento vztah můžeme interpretovat fyzikálně také tak, že napětí $u(z)$ přiložené na svorky vyvolá proud jdoucí do dvojpólu; v něm se nahromadí energie $(W_H - W_E)$ a vzniknou ztráty P_z konečnou vodivostí prostředí uvnitř dvojpólu.

Lze dokázat, že takto zavedené veličiny $u(z)$ a $i(z)$ jsou určeny jednoznačně příčnými složkami intenzit polí \mathbf{E} a \mathbf{H} ve vlnovodu. Vzhledem k tomu, že podélné složky intenzit polí E_z nebo H_z nemají vliv na výkon přenášený ve vlnovodu, nemají tyto složky vliv ani na velikost svorkových veličin.

Jsou-li $u(z)$ a $i(z)$ určeny jednoznačně, můžeme definovat impedanci na vstupu dvojpólu (v referenční rovině)

$$\frac{u(z)}{i(z)} = z(z) \quad (9.13)$$

Z linearity Maxwellových rovnic vyplývá, že závislost mezi $u(z)$ a $i(z)$ je také lineární. K dosažení větší obecnosti (zejména později u mnohobranů) budeme předpokládat, že impedance $z(z)$ je normovaná. Jak jsme poznali v kap. 2, může být charakteristická impedance vlnovodu definována několika způsoby, takže není nutné brát v úvahu určitou normovací bázi. Protože $u = z i$, můžeme přepsat (9.12) na tvar

$$\frac{1}{2} z i i^* = 2j\omega(W_H - W_E) + P_z \quad (9.14)$$

a odtud

$$z = \frac{4j\omega(W_H - W_E) + 2P_z}{i i^*} \quad (9.15)$$

Podobným způsobem dostaneme pro admitanci dvojpólu

$$y = \frac{4j\omega(W_E - W_H) + 2P_z}{u u^*} \quad (9.16)$$

Z takto získaných vzorců můžeme učinit některé závěry o charakteru impedanci nebo admitanci. Je-li $P_z = 0$ (dvojpól je bezztrátový), je impedance ryze imaginární. Je-li $W_H = W_E$, což je případ rezonance, je impedance reálná.

9.1.2. Imitanční matice mikrovlnného obvodu

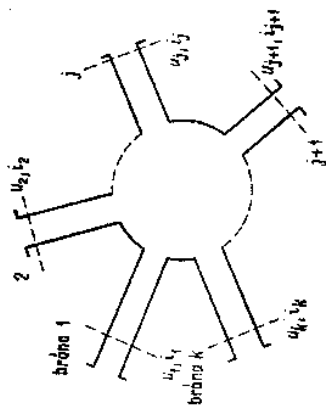
Pojmy „napětí“ a „proud“ v teorii mikrovlnných obvodů jsou zvláště užitečné při vyšetřování mikrovlnných mnohobranů. Napětí v j -té bráně (obr. 9.3) může být chápáno jako výsledné napětí složené z příspěvků vnučených proudů do jednotlivých bran. Považujme-li Maxwellovu rovnici (9.7) za „rovnici přičinnosti“, pak např. magnetické pole s intenzitou H_k v k -té bráně vyvolá elektrické

pole v k -té oraně. Zavojnásobí se toto magnetické pole v k -té braně, jeho příspěvek se také zdvojnásobí. Přitom příspěvky z ostatních bran zůstanou nezměněny. Je tedy \mathbf{u}_j dáno lineární kombinací proudů \mathbf{i}_k , tedy

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=1}^n z_{jk} \mathbf{i}_k \quad (9.17)$$

nebo v maticovém tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} \mathbf{i} \quad (9.18)$$



Maticový prvek z_{jk} je impedanční koeficient (bezrozměrný) takový, že součin $z_{jk} \mathbf{i}_k$ znamená příspěvek proudu \mathbf{i}_k k napětí \mathbf{u}_j v referenční rovině j -tého vlnovodu. Ještě je však nutné se zmínit o impedanci z_j na svorkách j -tého vlnovodu mnohobranu. Tato impedance je vždy určena vztahem

$$z_j(z_j) = \frac{\mathbf{u}_j(z_j)}{\mathbf{i}_j(z_j)} \quad (9.19)$$

Je však samozřejmé, že $z_j(z_j)$ je také funkcí proudů vnučených ostatními rameny a není tedy konstantou (parametrem) daného mnohobranu.

Předpokládáme-li naopak, že \mathbf{u}_k je vnučené napětí a výsledkem je \mathbf{i}_j , pak opět můžeme psát v maticovém tvaru

$$\mathbf{i} = \mathbf{y} \mathbf{u} \quad (9.20)$$

kde \mathbf{y}_{jk} je bezrozměrný admitanční koeficient.

Analogicky pak je

$$\mathbf{y}_j(z_j) = \frac{\mathbf{i}_j(z_j)}{\mathbf{u}_j(z_j)} = \frac{1}{z_j(z_j)} \quad (9.21)$$

normovaná admittance na svorkách j -tého vlnovodu. Tato admittance opět není konstantou (parametrem) mnohobranu.

Matematický a fyzikální počet bran

Fyzikální a matematický počet ramen vlnovodového útvaru se nemusí vždy vzájemně rovnat. Pokud se v každém rameni šíří jen jeden vid při nadkritické

pouhnce ($\omega > \omega_m$), rovina se lyzikami počet matematického počtu ramen. Vybudí-li se na jedné frekvenci v jednom rameni dva nebo více vidů, musíme každý vid posuzovat jako zvláštní přenosovou cestu. Matematický počet ramen může být proto větší než fyzikální počet ramen. Jako příklad lze uvést kruhový polarizátor s kovovou nebo dielektrickou lištou ve vlnovodu kruhového průřezu. K tomu, abychom mohli vystihnout všechny vlastnosti polarizátoru, považujeme jej z matematického hlediska za čtyřbran, i když ve skutečnosti má pouze dvě brány (viz odst. 9.3.5). Naopak nepočítáme za rameno útvar, v němž se mikrovlnná energie nešíří, i když v tomto útvaru mohou existovat vidy za podkritické podmínky. Předpokládáme totiž, že každé fyzikální rameno vlnovodového rozvětvení je tak dlouhé, že tzv. podkritické vidy jsou v referenčních rovinách zanedbatelně malé.

9.1.3. Vlastnosti imitančních matic

Před vyšetřením vlastností impedanční a admitanční matice musíme nejdříve stanovit energetickou bilanci n -branu podobně jako u mikrovlnného dvojpólu. Energetická bilance dvojpólu je dána vztahem (9.12), získaným integrací Poyntingova vektoru přes vnitřní plochu dvojpólu. Budeme-li integrovat Poyntingův vektor přes vnitřní plochu n -branu, bude plošný integrál opět všude nulový vyjma ploch S_1, S_2, \dots, S_n průřezů referenčních rovin v jednotlivých ramenech. Je tedy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS &= -\frac{1}{2} \int_{S_1+S_2+\dots+S_n} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{i}_j^* = \\ &= 2j\omega(W_H - W_E) + P_z \end{aligned} \quad (9.22)$$

když jsme předpokládali, že na všech „svorkách“ v referenčních rovinách máme napětí a proud. Energie a ztráty v n -branu jsou tedy dány příspěvky ze všech vlnovodových ramen.

a) *Symetrie imitančních matic*

Ukážeme nyní, že impedanční a admitanční matice jsou symetrické, tj. že pro jejich maticové prvky platí

$$z_{jk} = z_{kj} \quad (9.23)$$

$$y_{jk} = y_{kj} \quad (9.24)$$

K důkazu této důležité vlastnosti použijeme Lorentzův princip reciprocity [2]. Princip reciprocity lze matematicky vyjádřit takto

$$\text{div} [(\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)}) - (\mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)})] = 0 \quad (9.25)$$

kde $\mathbf{E}^{(a)}, \mathbf{H}^{(a)}$ a $\mathbf{E}^{(b)}, \mathbf{H}^{(b)}$ jsou dvě řešení Maxwellových rovnic při stejné úhlové frekvenci. Mohou to být např. dva vidy nebo pole ze dvou zdrojů. Integrujeme tuto rovnici přes objem našeho n -branu a pak s použitím Gaussovy věty dostaneme

$$\int_V \text{div} [(\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)}) - (\mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)})] dV =$$

$$= \int_S (\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{r} - (\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \int_{S_1+S_2+\dots+S_n} [(\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)}) - (\mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)})] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.26)$$

Polím „vidu a“ $\mathbf{E}^{(a)}$, $\mathbf{H}^{(a)}$ odpovídá v j -té referenční rovině $\mathbf{u}_j^{(a)}$, $\mathbf{j}_j^{(a)}$ a polím „vidu b“ $\mathbf{E}^{(b)}$, $\mathbf{H}^{(b)}$ jsou úměrné v téže rovině veličiny $\mathbf{u}_j^{(b)}$, $\mathbf{j}_j^{(b)}$. Pak pomocí (9.22) můžeme vyjádřit vztah (9.26) takto

$$- \int_{S_1+S_2+\dots+S_n} [(\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)}) - (\mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)})] \cdot d\mathbf{S} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_j^{(a)} \mathbf{j}_j^{(b)} - \mathbf{u}_j^{(b)} \mathbf{j}_j^{(a)}) = \tilde{\mathbf{i}}^{(b)} \mathbf{u}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \mathbf{i}^{(a)} = 0 \quad (9.27)$$

kde symbolem \sim jsou označeny transponované matice. Za sloupcové vektory napětí v (9.27) dosadíme (9.18)

$$\mathbf{u}^{(a)} = \mathbf{z} \mathbf{i}^{(a)}; \quad \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(b)} \tilde{\mathbf{i}}$$

a dostaneme

$$\tilde{\mathbf{i}}^{(b)} \mathbf{z} \mathbf{i}^{(a)} - \tilde{\mathbf{i}}^{(b)} \tilde{\mathbf{z}}^{(b)} \tilde{\mathbf{i}}^{(a)} = 0$$

neboli

$$\tilde{\mathbf{i}}^{(b)} (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}) \mathbf{i}^{(a)} = 0$$

Tato rovnice platí identicky pro jakýkoliv proud, takže

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \quad (9.23a)$$

Analogicky pak platí pro admítanční matici

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} \quad (9.24a)$$

Imitanci matice jsou tedy symetrické a pro jejich prvky platí vztahy (9.23) a (9.24). Je třeba poznamenat, že imitanci matice nemusí být symetrické, je-li prostředí uvnitř mnohobranu anizotropní. Dodejme ještě, že pokud veličiny \mathbf{u} a \mathbf{i} mají pouze formální smysl, platí to i pro prvky z_{jk} a y_{jk} imitačních matic.

b) *Vztah mezi maticemi \mathbf{z} a \mathbf{y}*

Impedanční a admítanční matice jsou navzájem inverzní. Předpokládejme, že \mathbf{z} a \mathbf{y} jsou regulární, tj. $\det \mathbf{z} \neq 0$. Rovnici (9.18) násobíme zleva maticí inverzní \mathbf{z}^{-1} a porovnáme s (9.20)

$$\mathbf{z}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{i} = \mathbf{i}$$

takže

$$\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{y} \quad (9.28)$$

c) *Bezeztrátový mikrovlnný obvod*

Bezeztrátový mikrovlnný obvod má imitanci matice ryze imaginární. Předpokládejme, že platí $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + j\mathbf{z}_2$, kde \mathbf{z}_1 je matice sestavená z reálných částí prvků z_{jk} a \mathbf{z}_2 je matice sestavená z imaginárních částí prvků z_{jk} . Pak je

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{z}_1 - j\mathbf{z}_2$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + j\mathbf{z}_2$$

sectenim odou rovnice dostaneme

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{z} + \mathbf{z}^*)$$

Avšak pro bezeztrátový obvod je $\mathbf{z}_1 = 0$, takže

$$-\mathbf{z} = \mathbf{z}^* \quad (9.29)$$

Analogicky platí také

$$-\mathbf{y} = \mathbf{y}^* \quad (9.30)$$

V případě rezonance ($W_H = W_E$) jsou imitanci matice reálné, což vyplývá přímo ze základního vztahu (9.22).

9.1.4. Rozptylová matice

Při vyšetřování složitějších n -branů ($n > 2$) nejsou imitanci matice výhodné. U takových n -branů je užitečnější použít k popisu tzv. *rozptylovou matici*, která v podstatě vyjadřuje vztahy mezi vlnami vstupujícími do mnohobranu a vlnami z něj vystupujícími. Rozptylová matice závisí pouze na konstrukci mnohobranu a definuje všechny jeho vlastnosti jako mikrovlnného obvodu.

Předpokládejme, že kladný směr osy z ve všech vstupních vlnovodech směřuje dovnitř n -branu¹⁾. Porovnáním rovnic (9.1) až (9.4) s obecnými výrazy pro složky intenzit polí ve vlnovodových ramenech libovolného průřezu, vidíme, že např. pro j -té rameno můžeme psát

$$\mathbf{u}_j(z) = \mathbf{u}_0^+ e^{j(\cos \alpha_j z)} + \mathbf{u}_0^- e^{j(\cos \alpha_j z)} = \mathbf{u}_j^+ + \mathbf{u}_j^- \quad (9.31)$$

$$\mathbf{i}_j(z) = \mathbf{i}_0^+ e^{j(\cos \alpha_j z)} - \mathbf{i}_0^- e^{j(\cos \alpha_j z)} = \mathbf{i}_j^+ - \mathbf{i}_j^- \quad (9.32)$$

kde horním indexem $+$ jsou označeny amplitudy napětových a proudových vln přímých a horním indexem $-$ amplitudy vln odražených (zpětných). Z obou vztahů vyplývá, že výsledná napěťová vlna je dána součtem vln přímé a odražené. Výsledná vlna proudová je naopak dána rozdílem vln přímé a odražené, což vyplývá zcela bezprostředně ze vztahů (3.17) nebo z přímého řešení telegrafních rovnic. Položíme nyní v referenční rovině j -tého ramene

$$\mathbf{u}_j^+ = \mathbf{a}_j$$

$$\mathbf{u}_j^- = \mathbf{b}_j$$

kde \mathbf{a}_j je komplexní skalární veličina charakterizující vlnu vstupující do mnohobranu, a to jak její amplitudu, tak její fázi,

\mathbf{b}_j komplexní skalární veličina charakterizující vlnu (odraženou nebo rozptýlenou) vystupující z mnohobranu, a to opět jak její amplitudu, tak i fázi.

¹⁾ Tento předpoklad je pouze zdánlivě v rozporu s obr. 9.2. V mnohobranu nemohou totiž mít jednotlivé osy vstupních vlnovodů totožné směry. Obr. 9.2 slouží pouze k určení základního vztahu (9.12). Kladný smysl $n - z$ je dán definicí Gaussovy věty.

ro vosazení do (9.31) a (9.32) je

$$\mathbf{u}_j(z) = \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j \quad (9.33)$$

$$\mathbf{i}_j(z) = \mathbf{a}_j - \mathbf{b}_j \quad (9.34)$$

kde jsme uvázili, že $\mathbf{u}_j(z)\mathbf{i}_j(z) = z_j(z)$ je normovaná impedance. Pak z (9.31) a (9.32) vyplývá

$$\frac{\mathbf{u}_j^+}{\mathbf{i}_j^+} = \frac{\mathbf{u}_0^+}{\mathbf{i}_0^+} = 1 \quad (9.35)$$

$$\frac{\mathbf{u}_j^-}{\mathbf{i}_j^-} = -\frac{\mathbf{u}_0^-}{\mathbf{i}_0^-} = -1 \quad (9.35a)$$

neboť na vedení, kde se šíří jen postupná vlna, je poměr napětí k proudu v libovolném místě roven charakteristické impedanci.

Komplexní skalární veličiny $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ jsou normovány tak, že výraz

$$\frac{1}{2} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^* = \frac{1}{2} |\mathbf{a}_j|^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{u}_j^+|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_j^+ \mathbf{i}_j^{*+} = P_{j \text{ vst}} \quad (9.36)$$

je roven výkonu vstupujícímu do mnohobrany j -tým ramenem.

Podobně výraz

$$\frac{1}{2} \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j^* = \frac{1}{2} |\mathbf{b}_j|^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{u}_j^-|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_j^- \mathbf{i}_j^{*-} = P_{j \text{ odr}} \quad (9.37)$$

je roven výkonu vystupujícímu (odraženému) z j -tého ramene.

Ze vztahů (9.33) a (9.34) můžeme opačně vyjádřit

$$\mathbf{a}_j = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_j(z) + \mathbf{i}_j(z)] \quad (9.38)$$

$$\mathbf{b}_j = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_j(z) - \mathbf{i}_j(z)] \quad (9.39)$$

Podle definice činitele odrazu je v j -tém rameni

$$\rho_j(z) = \frac{\mathbf{u}_j^-}{\mathbf{u}_j^+} = \frac{\mathbf{b}_j}{\mathbf{a}_j} = \frac{z_j(z) - 1}{z_j(z) + 1} \quad (9.40)$$

Nyní již můžeme přistoupit k definici rozptylové matice. Do vztahů (9.38) a (9.39) dosadíme (9.17) a dostaneme soustavu rovnic

$$\mathbf{a}_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{jk} \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{jk} + \delta_{jk}) \mathbf{i}_k \quad (9.41)$$

$$\mathbf{b}_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{jk} \mathbf{i}_k - \mathbf{i}_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{jk} - \delta_{jk}) \mathbf{i}_k \quad (9.42)$$

kde δ_{jk} je Kroneckerův symbol, který pro $j = k$ je roven jedné a pro $j \neq k$ je roven nule.

U správnosti přepisu poslepných dvou rovnic se můžeme přesvědčit pouze tím způsobem, že je rozepíšeme pro konkrétní hodnotu n (n -branu). Obě soustavy rovnic lze napsat stručněji v maticovém tvaru

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\mathbf{z} + \mathbf{1}) \mathbf{i} \quad (9.43)$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{1}) \mathbf{i} \quad (9.44)$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{i}$ jsou sloupcové vektory

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix}$$

\mathbf{z} je normovaná impedanční matice stejného tvaru jako v (9.18) a $\mathbf{1}$ je jednotková matice.

Z rovnice (9.43) vypočítáme

$$\mathbf{i} = 2(\mathbf{z} + \mathbf{1})^{-1} \mathbf{a}$$

a dosadíme do (9.44)

$$\mathbf{b} = (\mathbf{z} - \mathbf{1})(\mathbf{z} + \mathbf{1})^{-1} \mathbf{a}$$

Matice spojující \mathbf{a} a \mathbf{b} se nazývá *rozptylovou maticí* \mathbf{s}

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \mathbf{a} \quad (9.45)$$

a je

$$\mathbf{s} = (\mathbf{z} - \mathbf{1})(\mathbf{z} + \mathbf{1})^{-1} = (\mathbf{z} + \mathbf{1})^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{1}) \quad (9.46)$$

Tento vztah platí pro n -bran je analogií podobného vztahu (9.40) pro dvojpol. Stejným postupem lze vyjádřit rozptylovou matici pomocí admitancí

$$\mathbf{s} = (\mathbf{1} - \mathbf{y})(\mathbf{1} + \mathbf{y})^{-1} \quad (9.47)$$

Z maticového zápisu (9.45) zjistíme, že pro j -tý řádek platí

$$\mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^n s_{jk} \mathbf{a}_k \quad (9.48)$$

nebo interpretováno fyzikálně; vlna vystupující z j -tého ramene je složena z „vlnových příspěvků“, od všech vln vstupujících do všech ramen n -branu včetně j -té brány. Poměrnou velikost jednotlivých příspěvků vyjadřují prvky s_{jk} , a jsou proto nazývány činiteli přenosu mezi j -tým a k -tým ramenem. Prvky s_{jj} , tj. prvky ležící na diagonále matice, nemohou mít proto z tohoto hlediska jinou interpretaci než, že to jsou činitele odrazu v jednotlivých ramenech mnohobrany.

Pro některé výpočty je užitečné znát i vyjádření imitancí matice pomocí rozptylové matice. Běžnými algebraickými úpravami dostaneme

$$\mathbf{z} = (\mathbf{1} + \mathbf{s})(\mathbf{1} - \mathbf{s})^{-1} \quad (9.49)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1} - \mathbf{s})(\mathbf{1} + \mathbf{s})^{-1} \quad (9.50)$$

Rozptylová matice má některé důležité matematické vlastnosti, které vyjadřují fyzikální vlastnosti n -branu.

a) *Symetrie rozptylové matice*

Ukážeme, že transponovaná matice $\tilde{\mathbf{s}}$ je rovna \mathbf{s} . Položíme

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{z} - \mathbf{1} &= \mathbf{M} \\ \mathbf{z} + \mathbf{1} &= \mathbf{N} \\ \mathbf{MN}^{-1} &= \mathbf{s} \end{aligned} \quad (9.51)$$

Matice \mathbf{M} a \mathbf{N} jsou zaměnitelné, tj. platí

$$\mathbf{MN} = \mathbf{NM} = \mathbf{z}^2 - \mathbf{1}$$

Násobíme-li tento výsledek zleva i zprava \mathbf{N}^{-1} , dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{MNN}^{-1} &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{NMN}^{-1} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M} &= \mathbf{MN}^{-1} \end{aligned}$$

Dosadíme-li získaný vztah do (9.51), dostaneme

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M}$$

pak použítím (C.25)

$$\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \mathbf{MN}^{-1}$$

Protože impedanční matice je symetrická, jsou symetrické i matice \mathbf{M} a \mathbf{N} (přičtením jedničky na hlavní diagonále se symetrie matice nemění). Je tedy

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \quad (9.52)$$

Získaný výsledek matematicky vyjadřuje recipročnost n -branu, tj. je-li $\mathbf{s}_{jk} = \mathbf{s}_{kj} \neq 0$, je „průchodnost“ n -branu mezi j -tým a k -tým ramenem stejná v obou směrech.

b) *Rozptylová matice bezeztrátového mnohobranu je unitární*

Pro unitární matici musí platit

$$\mathbf{s}^{-1} = \tilde{\mathbf{s}}^* \quad (9.53)$$

a jak uvidíme později [viz též v dodatku vzorce (C.31) a (C.32)], vyjadřuje tato vlastnost v podstatě zákon zachování energie. K důkazu unitárnosti použijeme vztah (9.22), když do něj dosadíme (9.33) a (9.34). Je tedy

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(z) \mathbf{u}_j^*(z) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j) (\mathbf{a}_j^* - \mathbf{b}_j^*) = 4j\omega(W_H - W_E) + 2P_z$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^* - \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j^*) &= 2P_z \\ \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_j^* \mathbf{b}_j - \mathbf{b}_j^* \mathbf{a}_j) &= 4\omega(W_H - W_E) \end{aligned} \quad (9.54)$$

Vyjádříme (9.54) v maticovém tvaru a uvážíme, že pro bezeztrátový mnohobran je $P_z = 0$, takže

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^* - \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b}^* = 0$$

Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{sa}$ a $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{s}}$, dostaneme po dosazení a úpravě vztah

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{s}^*)\mathbf{a}^* = 0$$

který musí platit identicky pro jakékoliv \mathbf{a} . Odtud

$$\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{s}^* = 0; \quad \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{s}^* = \mathbf{1}$$

Protože pro reciproční mnohobran je matice \mathbf{s} symetrická, platí

$$\mathbf{s}^{-1} = \tilde{\mathbf{s}}^*$$

c) *Totálně přizpůsobený mnohobran má nulové diagonální prvky rozptylové matice*

Napájíme-li z generátoru např. j -té rameno, zatímco ostatní jsou zakončena bezodrazově, může nastat situace, že $\mathbf{b}_j = 0$ při $\mathbf{a}_j \neq 0$. Interakční prostor mnohobranu rozdělil vstupující výkon do všech ostatních ramen tak, že se žádný výkon nevrací do napájeného ramene a $\mathbf{s}_{jj} = 0$. Podobná situace může nastat i v případě napájení a přizpůsobení některých jiných ramen. Takovou situaci nazýváme *dílčím přizpůsobením mnohobranu*.

Podají-li se přizpůsobit mnohobran ve všech ramenech, nazývá se takový mnohobran *totálně přizpůsobeným* a jeho rozptylová matice má na diagonále pouze nulové prvky, tj.

$$\mathbf{s}_{jj} = 0 \quad \text{pro všechna } j \quad (9.55)$$

Analýzou konkrétních mnohobranů zjistíme, že některé z nich lze totálně přizpůsobit poměrně snadno, zatímco u jiných nelze dosáhnout totálního přizpůsobení vůbec (např. reciproční trojbran).

d) *Transformace rozptylové matice při posunu referenčních rovin*

Změníme-li polohu referenční roviny v některém rameni mnohobranu, prodloužíme nebo zkrátíme tím dráhu vlny vstupující nebo vystupující daným ramenem. Tato skutečnost se musí projevit ve změně fáze \mathbf{a} i \mathbf{b} , a tím také v rozptylové matici. Vyšetříme nyní tuto změnu.

Předpokládejme, že v j -tém rameni jsme posunuli referenční rovinu z místa z do místa $z' = z + d$, tj. směrem k mnohobranu (obr. 9.4). Pak z (9.31) vyplývá

$$\mathbf{u}_j(z') = \mathbf{u}_0^+ e^{j(\omega t - \alpha z')} + \mathbf{u}_0^- e^{j(\omega t + \alpha z')}$$

takže

$$\mathbf{u}_j^+(z') = \mathbf{u}_0^+ e^{j(\omega t - \alpha z')} e^{-j\alpha d} = \mathbf{u}_j^+ e^{-j\theta_j}$$

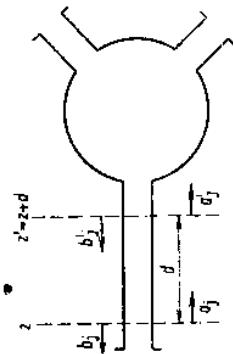
$$\mathbf{u}_j^-(z') = \mathbf{u}_0^- e^{j(\omega t + \alpha z')} e^{j\alpha d} = \mathbf{u}_j^- e^{j\theta_j}$$

kde $\theta_j = 2\pi d/\lambda_j$ je elektrická délka posunu referenční roviny, λ_j vlnová délka j -tého vlnovodu.

Z uvedeného vyplývá, že vlny \mathbf{a} a \mathbf{b} se při posunu referenční roviny transformují takto

$$\mathbf{a}'_j = \mathbf{a}_j e^{-i\vartheta_j} \quad (9.56)$$

$$\mathbf{b}'_j = \mathbf{b}_j e^{i\vartheta_j} \quad (9.57)$$



Obr. 9.4.

Nová rozptylová matice \mathbf{s}' odpovídající změně referenčních rovin o úhly $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_j, \dots, \vartheta_n$, je

$$\mathbf{b}' = \mathbf{s}' \mathbf{a}' \quad (9.58)$$

Odtud pro j -tý řádek vyplývá

$$\mathbf{b}'_j = s'_{j1} \mathbf{a}'_1 + s'_{j2} \mathbf{a}'_2 + \dots + s'_{jk} \mathbf{a}'_k + \dots + s'_{jn} \mathbf{a}'_n \quad (9.58a)$$

avšak před transformací bylo

$$\mathbf{b}_j = s_{j1} \mathbf{a}_1 + s_{j2} \mathbf{a}_2 + \dots + s_{jk} \mathbf{a}_k + \dots + s_{jn} \mathbf{a}_n$$

Dosadíme nyní do (9.58a) transformační vztahy (9.56) a (9.57)

$$\mathbf{b}'_j = \mathbf{b}_j e^{i\vartheta_j} = s'_{j1} \mathbf{a}_1 e^{-i\vartheta_1} + s'_{j2} \mathbf{a}_2 e^{-i\vartheta_2} + \dots + s'_{jk} \mathbf{a}_k e^{-i\vartheta_k} + \dots + s'_{jn} \mathbf{a}_n e^{-i\vartheta_n}$$

Odtud např. pro k -tý člen

$$\mathbf{b}_j e^{i\vartheta_j} = s'_{jk} \mathbf{a}_k e^{-i\vartheta_k}$$

nebo

$$s'_{jk} = \frac{\mathbf{b}_j}{\mathbf{a}_k} e^{i(\vartheta_j + \vartheta_k)}$$

takže

$$s'_{jk} = s_{jk} e^{i(\vartheta_j + \vartheta_k)} \quad (9.59)$$

V případě posunu referenční roviny směrem od mnohobranu bude transformační vztah

$$s'_{jk} = s_{jk} e^{-i(\vartheta_j + \vartheta_k)} \quad (9.59a)$$

9.1.6. Vlnová přenosová matice

Vlnová přenosová matice má podobné vlastnosti jako kaskádní matice známá z teorie čtyřpólů. Rozptylová matice definovaná v předcházejícím odstavci je nepoužitelná pro řešení kaskádního řazení čtyřpólů, protože v definiční rovnici vystupují odražené vlny \mathbf{b}_j jako závislé proměnné a vlny \mathbf{a}_j jako nezávisle proměnné.

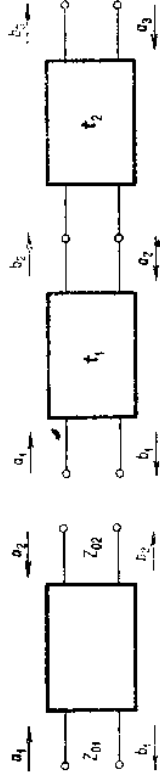
Při kaskádním zapojení několika čtyřpólů jsou vždy výstupní vlny čtyřpólu vstupními vlnami následujícího čtyřpólu. Uspořádáme-li vztahy mezi těmito vlnami jinak, dostaneme nový soubor parametrů t_{jk} , které po uspořádání vytvoří známou vlnovou přenosovou matici. Předpokládáme normované veličiny $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$, které pro čtyřpól na obr. 9.5 lze napsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

nebo po roze-psání

$$\mathbf{a}_1 = t_{11} \mathbf{b}_2 + t_{12} \mathbf{a}_2 \quad (9.61)$$

$$\mathbf{b}_1 = t_{21} \mathbf{b}_2 + t_{22} \mathbf{a}_2$$



Obr. 9.6.

Zapojíme-li např. dva čtyřpóly do kaskády podle obr. 9.6, můžeme psát pro takové zapojení

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = t_1 t_2 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (9.62)$$

Máme-li zapojeno v kaskádě n čtyřpólů, pak je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^n t_j \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{n+1} \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{n+1} \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (9.63)$$

odkud vyplývá, že výsledná přenosová matice je dána součinem vlnových přenosových matic jednotlivých obvodů řazených v kaskádě.

a) Vztah mezi normovanou a nenormovanou vlnovou přenosovou maticí

Vlnová přenosová matice se velmi často používá k návrhu mikrovlnných obvodů v mikropáskovém provedení. V mikropáskovém vedení se šíří vlna TEM nebo kvazi-TEM, takže zde lze jednoznačně definovat napětí a proud. Z toho důvodu je někdy velmi užitečné znát vztahy mezi normovanými a nenormovanými veličinami.

Dosadíme-li do (9.60) za \mathbf{a}_j a \mathbf{b}_j explicitní normovací vztahy pro \mathbf{u}_j^+ a \mathbf{u}_j^- , dostaneme

$$\frac{U_1^+}{\sqrt{Z_{01}}} = t_{11} \frac{U_2^-}{\sqrt{Z_{02}}} + t_{12} \frac{U_2^+}{\sqrt{Z_{02}}}$$

$$\frac{U_1^-}{\sqrt{Z_{01}}} = t_{21} \frac{U_2^-}{\sqrt{Z_{02}}} + t_{22} \frac{U_2^+}{\sqrt{Z_{02}}}$$

a) pro úpravu

$$\begin{aligned} U_1^+ &= t_{11} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} U_2^- + t_{12} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} U_2^+ \\ U_1^- &= t_{21} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} U_2^- + t_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} U_2^+ \end{aligned} \quad (9.64)$$

Tyto rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} U_1^+ &= T_{11} U_2^- + T_{12} U_2^+ \\ U_1^- &= T_{21} U_2^- + T_{22} U_2^+ \end{aligned}$$

nebo maticově

$$\begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^- \\ U_2^+ \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} U_2^- \\ U_2^+ \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{T} je nenormovaná vlnová přenosová matice.

Z těchto rovnic vyplývá, že vztah mezi nenormovanou a normovanou vlnovou přenosovou maticí je

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \mathbf{t} \quad (9.65)$$

b) Vztah mezi rozptylovou maticí a vlnovou přenosovou maticí

Rozepsáním (9.45) pro čtyřpól dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= s_{11} \mathbf{a}_1 + s_{12} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= s_{21} \mathbf{a}_1 + s_{22} \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

Odtud vyjádříme veličiny \mathbf{a}_1 a \mathbf{b}_1 explicitně ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{1}{s_{21}} \mathbf{b}_2 - \frac{s_{22}}{s_{21}} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_1 &= \frac{s_{11}}{s_{21}} \mathbf{b}_2 + \frac{s_{12}s_{21} - s_{11}s_{22}}{s_{21}} \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

nebo v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_{21}} & -\frac{s_{22}}{s_{21}} \\ \frac{s_{11}}{s_{21}} & \frac{\det \mathbf{s}}{s_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad (9.66)$$

čímž jsme vyjádřili normovanou vlnovou přenosovou matici pomocí maticových prvků normované rozptylové matice. Je tedy

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_{21}} & -\frac{s_{22}}{s_{21}} \\ \frac{s_{11}}{s_{21}} & \frac{\det \mathbf{s}}{s_{21}} \end{bmatrix} \quad (9.67)$$

upíne stejným způsobem vyjádříme explicitně z (9.01) veličiny \mathbf{b}_1 a \mathbf{b}_2 , takže

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{t_{21}}{t_{11}} \mathbf{a}_1 + \frac{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}}{t_{11}} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{t_{11}} \mathbf{a}_1 - \frac{t_{12}}{t_{11}} \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

nebo maticově

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_{21}}{t_{11}} & \frac{\det \mathbf{t}}{t_{11}} \\ \frac{1}{t_{11}} & -\frac{t_{12}}{t_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{s} \mathbf{a} \quad (9.68)$$

kde \mathbf{s} je vyjádřena pomocí prvků normované vlnové přenosové matice ve tvaru

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{t_{21}}{t_{11}} & \frac{\det \mathbf{t}}{t_{11}} \\ \frac{1}{t_{11}} & -\frac{t_{12}}{t_{11}} \end{bmatrix} \quad (9.69)$$

9.2. PROSTOROVÁ SYMETRIE MIKROVLNNÝCH OBVODŮ

U některých plošných nebo prostorových útvarů, ať již jsou vytvořeny přírodou nebo uměle, se setkáváme často s vlastností nazývanou se *geometrická pravidelnost*. Zvláštním případem této pravidelnosti je *souměrnost*. Tato souměrnost může být *síředová*, *osová* nebo *rovinná*. Jako příklady vytvořené přírodou můžeme uvést listy a květy rostlin, krystaly nerostů. Uměle člověkem vytvořené jsou ornamenty a stavby. V mikrovlnné technice se rovněž vyskytují symetrické vlnovodové útvary. Lze říci, že téměř všechny mikrovlnné obvody se vyznačují určitým typem symetrie. Některé typické příklady symetrie mikrovlnných obvodů jsou na obr. 9.7a, b, c, d. Symetrie je charakterizována tzv. *zákrytovými pohyby*, po nichž útvar zaujme opět tutéž část prostoru nebo tutéž polohu v prostoru jako před pohybem. Zákrytovým pohybům se také říká *symetrické transformace*. Na rozdíl od skutečného pohybu nepřihlížíme při zákrytovém pohybu ani k časovému průběhu (k rychlosti), ani k tomu, po jaké dráze se jednotlivé body útvaru dostaly z původní do nové polohy. Tím rozumíme, že dva zákrytové pohyby platí za stejné, jestliže vedou z téže výchozí polohy útvaru do téže polohy konečné.

9.2.1. Matematická formulace symetrických transformací

Symetrické transformace třírozměrných útvarů jsou:

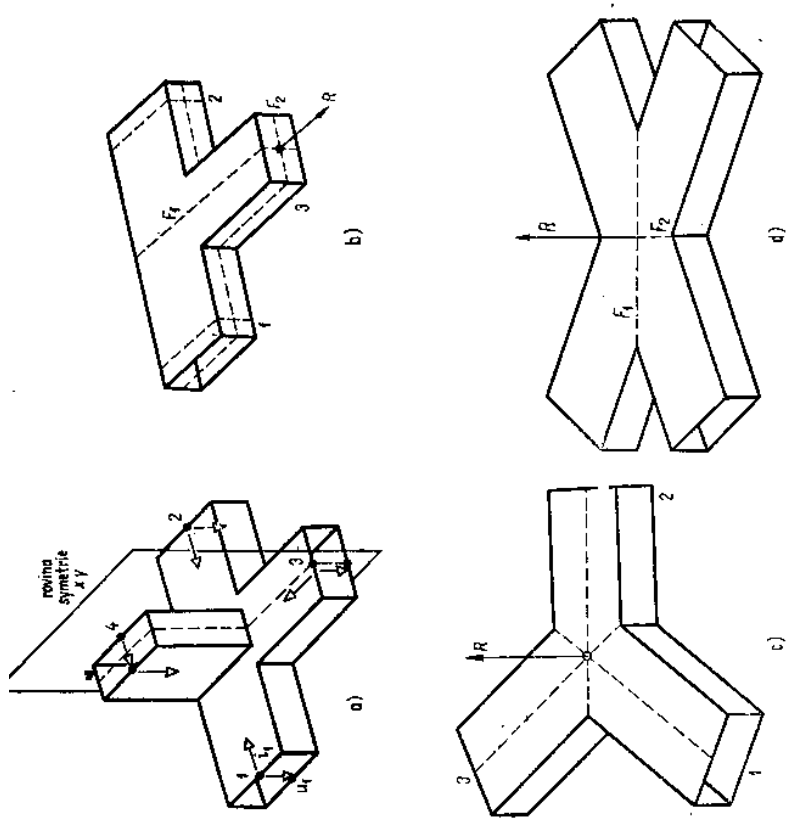
- reflexe* neboli zrcadlení podle roviny symetrie,
- rotace* neboli otočení kolem osy symetrie,
- inverze* neboli zrcadlové otočení,
- identita* (ponechává útvar v klidu).

Zavedeme formální operátor F_x , kterým vyjádříme tuto změnu znaménka souřadnice x

$$F_x \cdot x = x' = -x \quad (9.71)$$

nebo

$$F_x \cdot (x, y, z) = (x', y', z') = (-x, y, z) \quad (9.72)$$



Obr. 9.7. Prostorová symetrie mikrovlnných obvodů

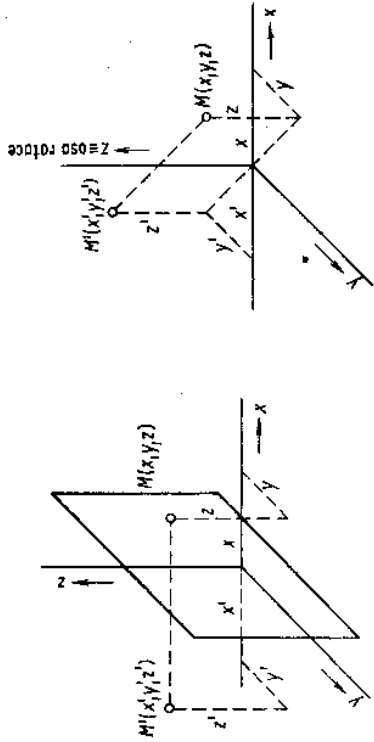
- a) symetrie vzhledem k jedné rovině (magické T),
- b) symetrie vzhledem ke dvěma rovinám (člen T v rovině „H“),
- c) trojčetná osa symetrie (člen Y v rovině „H“),
- d) úplná symetrie

Jednotlivé typy transformací probereme podrobněji.

a) *Reflexe*

Je-li v pravouhlém souřadnicovém systému rovinou symetrie rovina yz (obr. 9.8), pak při reflexi převádíme všechny body symetrického útvaru na druhou stranu roviny symetrie po kolmících tak, že vzdálenosti od roviny zůstanou zachovány. Bod $M(x, y, z)$ se transformuje do bodu $M'(x', y', z')$. Mezi „starými“ a „novými“ souřadnicemi budou platit vztahy

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = -x \\ y &\rightarrow y' = y \\ z &\rightarrow z' = z \end{aligned} \quad (9.70)$$



Obr. 9.8. Zrcadlení podle roviny symetrie

Obr. 9.9. Otočení kolem osy symetrie

Zcela analogicky pro symetrické transformace podle roviny xz platí

$$F_y \cdot (x, y, z) = (x', y', z') = (x, -y, z) \quad (9.73)$$

a podle roviny xy

$$F_z \cdot (x, y, z) = (x', y', z') = (x, y, -z) \quad (9.74)$$

Je zřejmé, že dvojnásobnou reflexí dostaneme opět původní vztah, tedy

$$F_x \cdot F_x \cdot (x, y, z) = F_x \cdot (-x, y, z) = (x, y, z) \quad (9.75)$$

b) *Rotace*

Otočení útvaru kolem osy symetrie je převedení všech bodů útvaru na druhou stranu osy po kolmících tak, aby jejich vzdálenost od osy zůstala zachována (obr. 9.9). Pro případ otočení kolem osy z zřejmě platí

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = -x \\ y &\rightarrow y' = -y \\ z &\rightarrow z' = z \end{aligned} \quad (9.76)$$

Tuto symetrickou transformaci kolem osy z vyjádříme matematicky operátorem R_z

$$R_z \cdot (x, y, z) = (x', y', z') = (-x, -y, z) \quad (9.77)$$

Podobně vyjádříme symetrickou transformaci kolem zbývajících dvou os ope-

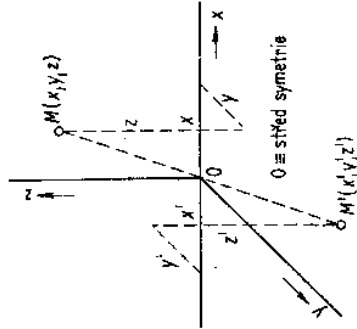
$$\mathbf{R}_x \cdot (x, y, z) = (x, -y, -z)$$

$$\mathbf{R}_y \cdot (x, y, z) = (-x, y, -z)$$

(9.78)

c) Inverze

Symetrická transformace zvaná inverze znamená převedení všech bodů symetrického útvaru po paprscích procházejících středem symetrie na opačnou stranu od středu tak, aby byla zachována původní vzdálenost od středu symetrie (obr. 9.10). Snadno zjistíme, že inverzi získáme složením dvou předcházejících zákrytových pohybů reflexe a rotace – otočením bodu M kolem osy z a pak zrcadlením kolem roviny xy. Odtud také pochází jiný název inverze – *zrcadlové otočení*.



Obr. 9.10. Zrcadlové otočení (inverze)

Matematicky vyjádříme inverzi operátorem **P**

$$\mathbf{P} \cdot (x, y, z) = (x', y', z') = (-x, -y, -z) \tag{9.79}$$

d) Identita

Posledním operátorem symetrických transformací je tzv. operátor totožnosti, který ponechává souřadnice beze změny, tedy

$$\mathbf{I} \cdot (x, y, z) = (x', y', z') = (x, y, z) \tag{9.80}$$

9.2.2. Reflexní grupa operátorů symetrie

Podle změny znaménka souřadnic bodů tvořících symetrický útvar při zákrytových pohybech zjistíme velmi snadno vztahy mezi jednotlivými operátory. Platí zřejmě

$$\mathbf{F}_x \cdot \mathbf{F}_y = \mathbf{F}_y \cdot \mathbf{F}_x = \mathbf{R}_z$$

$$\mathbf{F}_y \cdot \mathbf{F}_z = \mathbf{F}_z \cdot \mathbf{F}_y = \mathbf{R}_x$$

$$\mathbf{F}_x \cdot \mathbf{F}_z = \mathbf{F}_z \cdot \mathbf{F}_x = \mathbf{R}_y$$

$$\mathbf{F}_x \cdot \mathbf{F}_y \cdot \mathbf{F}_z = \mathbf{P} \tag{9.81}$$

atd. množina všech osmi operátorů symetrie uvedených v předcházejících odstavcích, včetně zákona jejich vzájemného skládání (násobení), se nazývá *grupa*. Protože v ní platí zákon komutativní, nazývá se *grupa Abelova*²⁾. Prvky grupy \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y a \mathbf{F}_z tvoří podgrupu, a protože z těchto prvků lze vytvořit postupným násobením všechny prvky ostatní, tvoří tyto prvky tzv. *generátory grupy*. Grupa samotná bývá proto někdy nazývána grupou reflexní. Nás zajímají především aplikace teorie symetrie k vyšetřování elektrických vlastností mikrovlnných obvodů. Každý mikrovlnný obvod se vyznačuje určitým typem symetrie a každý typ symetrie (obr. 9.7a, b, c, d) vyjádřený příslušnými operátory tvoří podgrupu reflexní grupy. Toto použití teorie symetrie umožňuje invariantnost Maxwellových rovnic k symetrickým transformacím. Řešení Maxwellových rovnic však invariantní k těmto transformacím být nemusí. Tak např. vlna šířící se zleva doprava bude po reflexi transformována na vlnu šířící se zprava doleva. Umístíme-li však rovinu symetrie v uzlu nebo kmitně stojaté vlny, bude toto řešení k reflexi invariantní.

Prostorové symetrické mnohobrany budeme vyšetřovat tak, že nalezneme symetrická řešení Maxwellových rovnic splňujících okrajové podmínky v mnohobranu. Odvození těchto symetrických vlastností či spíše odvození rozptylové matice, která tyto vlastnosti vyjadřuje, je založeno právě na zmíněných symetrických transformacích³⁾. Je-li prostorová symetrie mnohobranu vyjádřena některým operátorem symetrie reprezentovaným maticí, pak vzájemná souvislost prostorové symetrie a elektrických vlastností mikrovlnného obvodu je zdánlivě velmi jednoduchá: $\mathbf{F}\mathbf{s} = \mathbf{s}\mathbf{F}$, tj. rozptylová matice je *zaměnitelná* s maticí operátoru zákrytového pohybu. Vlastnostmi takových matic se zabývá teorie vlastních hodnot a vlastních vektorů. Některé důležité výsledky této teorie jsou uvedeny v matematické příloze.

Na závěr je třeba dodat, že rozptylová matice **s** a imitační matice **z** a **y** popisují vlastnosti *n*-branu tak, jako kdyby tento obvod byl „černá schránka“. Dávají totiž zcela minimální informace o skutečném poli uvnitř mnohobranu. Zpravidla však inženýr navrhuje vlastní mnohobran empiricky nebo poloempiricky. Tvar matice **s** a její vlastnosti (jako je symetrie nebo unitárnost) mu zcela jasně „řeknou“, které vlastnosti obvodu jsou dosažitelné a které ne, bez ohledu na vynakládané úsilí.

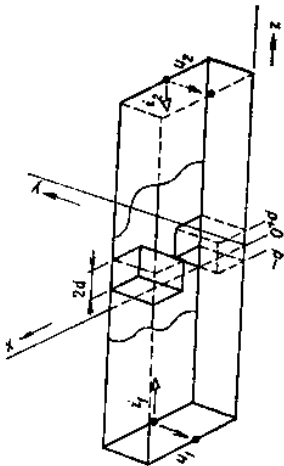
9.3. ANALÝZA VLASTNOSTÍ MIKROVLNNÝCH MNOHOBRANŮ

Zde vyšetříme některé mnohobrany používané v praxi. Cílem rozboru je stanovení rozptylové matice daného mnohobranu vyjma dvojbranu, jehož vlastnosti vystihuje lépe impedanční nebo admitační matice.

²⁾ Na počest norského matematika Nielse Henrika Abela, 1802–1829, který se zabýval teorií eliptických funkcí a lineární algebrou.

³⁾ Pozor však, symetrie matice **s** nevyplývá z geometrické symetrie.

Pomocí teorie symetrie určíme náhradní schéma tlusté clony v obdélníkovém vlnovodu (obr. 9.11). Clona je symetrická podle roviny xy . Označíme obě ramena číslly a vyznačíme směry svorkových napětí a proudů. Ukážeme nyní jak nám pomůže nejjednodušší zákrytový pohyb — zrcadlení podle roviny symetrie — určit elektrické vlastnosti tlusté clony ve vlnovodu.



Obr. 9.11. Tlustá clona ve vlnovodu

Symetrickou transformaci můžeme provést dvojným způsobem: buď transformujeme „hmotné“ body mnohobranu, přičemž elektromagnetické pole uvnitř zůstane nedotčeno, nebo zůstanou nedotčeny body sítě a transformujeme pole. Zvolíme první způsob. Při zrcadlení nastane záměna svorek (bodů) a na svorkách budou jiné hodnoty svorkových veličin, které označíme čárkovaně. Transformované veličiny porovnáme s původními veličinami, takže dostaneme

$$\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_2; \quad \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_1 \quad (9.82)$$

Tyto vztahy můžeme napsat také takto

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (9.82a)$$

nebo maticově

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (9.82b)$$

nebo ještě stručněji

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (9.82c)$$

Tím jsme získali maticový tvar operátoru reflexe \mathbf{F} , přesně řečeno matematicky: reprezentovali jsme prvek \mathbf{F} reflexní grupy matic. Podobným způsobem získáme maticovou reprezentaci operátorů symetrie i u složitějších mnohobran.

Stejným způsobem můžeme vyjádřit i proudy

$$\mathbf{i}' = \mathbf{F}\mathbf{i} \quad (9.83)$$

Zaměnitelnost matic \mathbf{z} , \mathbf{y} a \mathbf{s} s maticí \mathbf{F}

Ukážeme také, že imunanci matice a rozptylová matice jsou zamenitelné s maticemi operátorů symetrie.

Kirchhoffův zákon platí před transformací i po transformaci, tj.

$$\mathbf{u} = \mathbf{z}\mathbf{i} \quad (9.84)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{z}'\mathbf{i}' \quad (9.85)$$

Obvod je však lineární, což znamená, že jeho impedanční matice nemůže záviset na velikosti přiložených napětí a proudů, je tedy

$$\mathbf{u}' = \mathbf{z}\mathbf{i}'$$

Dosadíme-li nyní do tohoto vztahu (9.82c), (9.83) a (9.84), zjistíme po úpravě, že platí identicky

$$(\mathbf{F}\mathbf{z} - \mathbf{z}\mathbf{F})\mathbf{i} = 0 \quad (9.86)$$

z čehož vyplývá, že matice \mathbf{F} a \mathbf{z} jsou zaměnitelné, tedy

$$\mathbf{F}\mathbf{z} = \mathbf{z}\mathbf{F} \quad (9.87)$$

Násobíme-li tento vztah operátorem \mathbf{F}^{-1} a uvážíme-li ortogonálnost jeho matice, je

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}\mathbf{z}\mathbf{F} \quad (9.88)$$

Podobným způsobem lze odvodit

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{y}\mathbf{F} \quad (9.89)$$

Zbývá ještě ukázat, že matice \mathbf{s} je také zaměnitelná s maticí operátoru reflexe \mathbf{F} . Platí-li transformací vztah (9.82c) pro napětí, platí i pro jeho složky \mathbf{a} , \mathbf{b} , takže

$$\mathbf{b}' = \mathbf{F}\mathbf{b} \quad (9.90)$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{F}\mathbf{a} \quad (9.91)$$

Platí-li před transformací

$$\mathbf{b} = \mathbf{s}\mathbf{a} \quad (9.92)$$

je po transformaci

$$\mathbf{b}' = \mathbf{s}\mathbf{a}' \quad (9.93)$$

tj. matice \mathbf{s} se transformací nemůže změnit, protože stěny obvodu zaujaly tutéž polohu v prostoru jako před transformací (podmínky přenosu se nezměnily). Stačí nyní dosadit v (9.93) za čárkované veličiny příslušné vztahy, abychom dostali identitu

$$\mathbf{F}\mathbf{s} - \mathbf{s}\mathbf{F} = 0 \quad (9.94)$$

a odtud vztah vyjadřující hledanou zaměnitelnost

$$\mathbf{F}\mathbf{s} = \mathbf{s}\mathbf{F}$$

nebo

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{s}\mathbf{F} \quad (9.96)$$

stejně vlastnosti, jako má operátor tenze (ortogonalnost, zaměnitelnost s maticemi \mathbf{s} , \mathbf{z} a \mathbf{y}), mají i ostatní operátory reflexní grupy, uvážíme-li, že tato grupa je Abelova. Vztah (9.96) využijeme výhodně k určení vlastností i složitějších n -branů.

Symetrická řešení dvojbranu

Symetrická řešení polí v dvojbranu získáme pomocí rovnice vlastních hodnot a vlastních vektorů matice operátoru \mathbf{F} [viz vztah (C.38) v příloze C]

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = f\mathbf{a} \quad (9.97)$$

Vlastní hodnoty f určíme z charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{F} - f\mathbf{1}) = 0 \quad (9.98)$$

když dosadíme za \mathbf{F} z (9.82b), takže

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f^2 - 1 = 0 \quad (9.99)$$

Vlastní hodnoty jsou zřejmě

$$f_{1,2} = \pm 1 \quad (9.100)$$

Nyní můžeme určit pomocí (9.97) vlastní vektory $\mathbf{a}^{(1)}$ a $\mathbf{a}^{(2)}$ odpovídající vlastním hodnotám $f = \pm 1$. Je tedy

$$\mathbf{F}\mathbf{a}^{(j)} = f\mathbf{a}^{(j)}; \quad j = 1, 2 \quad (9.101)$$

nebo po dosazení

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} a_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} \end{bmatrix} \quad (9.102)$$

Z této soustavy rovnic můžeme zjistit, že pro prvky prvního vektoru $\mathbf{a}^{(1)}$ musí platit

$$a_2^{(1)} = a_1^{(1)}; \quad a_1^{(1)} = a_2^{(1)} \quad (9.103)$$

a pro prvky druhého vektoru $\mathbf{a}^{(2)}$ musí platit

$$a_2^{(2)} = -a_1^{(2)}; \quad a_1^{(2)} = -a_2^{(2)} \quad (9.104)$$

Oba vektory $\mathbf{a}^{(j)}$ můžeme však normovat tak, že budou mít jednotkovou velikost. Pomocí (C.34) se snadno přesvědčíme, že když je napíšeme ve tvaru

$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.105)$$

mají oba jednotkovou velikost a že jsme respektovali požadavky (9.103) a (9.104). Kromě toho jsou oba vektory lineárně nezávislé [viz (C.37)] a ortogonální [viz (C.36)].

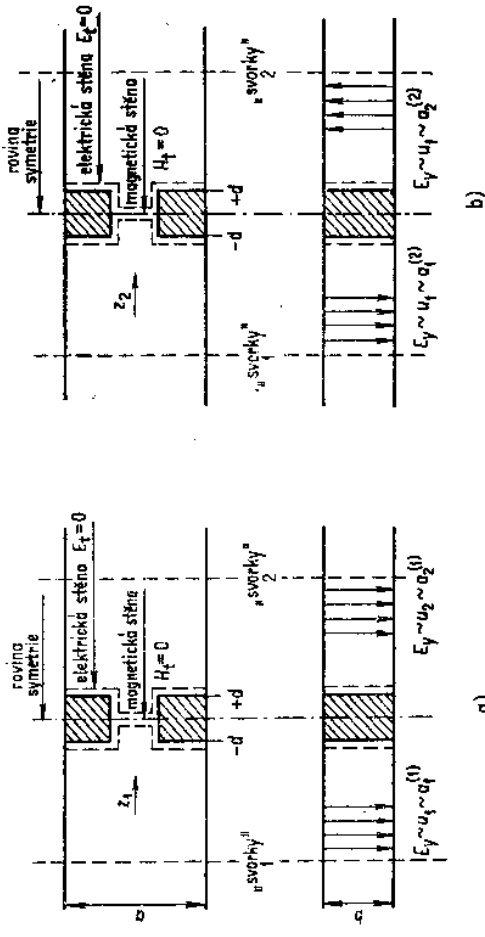
Nyní již snadno určíme impedanční matici tlusté clony ve vlnovodu. V předcházejícím odstavci bylo ukázáno (9.87), že impedanční matice je zaměnitelná

o matici vlnovodu \mathbf{Z}_0 . Platí tedy pro impedanční matici podobné rovnice

$$\mathbf{z}\mathbf{a}^{(j)} = \mathbf{z}_j\mathbf{a}^{(j)}; \quad j = 1, 2 \quad (9.106)$$

Vlastní hodnoty impedanční matice \mathbf{z}_j ($j = 1, 2$) jsou pochopitelně jiné než (9.100). Předtím, než určíme prvky impedanční matice, provedeme rozbor dosud získaného řešení.

V odstavci 9.2.2 bylo řečeno, že vyhledáme symetrická řešení Maxwellových rovnic (samozřejmě invariantních vzhledem k symetrické operaci odpovídající reflexi). Tato úloha mohla být řešena dvojím způsobem, buď z fyzikálních představ o symetrickém uspořádání polí v referenčních rovinách, nebo matematicky pomocí rovnice vlastních hodnot a vlastních vektorů matice \mathbf{F} , což v podstatě matematicky interpretuje symetrické uspořádání polí v našem dvojbranu. Pokusíme se nyní interpretovat fyzikálně výsledky řešení (9.100) a (9.105) rovnice (9.97). Jediná řešení invariantní vzhledem k \mathbf{F} jsou: řešení sudé *neboli symetrické*, což odpovídá $f_1 = +1$ a řešení liché *neboli antisymetrické* odpovídající vlastní hodnotě $f_2 = -1$.



Obr. 9.12. Symetrická řešení tlusté clony ve vlnovodu
a) sudé (symetrické) řešení, b) liché (antisymetrické) řešení

Obě řešení jsou schematicky znázorněna na obr. 9.12a, b. Prostorové uspořádání pole symetrického řešení je na obr. 9.12a. Takové uspořádání by vzniklo, kdyby např. v rovině symetrie byla hypotetická magnetická stěna, na níž je $H_t = 0$ a $E_y = E_{y\max}$. Antisymetrické uspořádání je na obr. 9.12b a opět odpovídá takové situaci, jako kdyby v rovině symetrie byla elektrická stěna, na níž je $E_t \equiv E_y = 0$. Taková situace by nastala v případě nekonečně tenké clony, tj. pro $d \rightarrow 0$. Má-li clona konečnou tloušťku nebo je dokonce tlustá jako v našem případě,

je rovnice elektrické stěny posunutá z místa $z = 0$ do místa $z = \pm z$. I to skutečnost musíme vzít v úvahu při určování velikosti prvků impedanční matice. Na polohu magnetické stěny tloušťka clony nemá vliv. Vlastní hodnota z_1 , je „impedance“ v rovině symetrie pro sudé řešení, zatímco z_2 je „impedance“ v rovině symetrie pro liché řešení. Výsledné řešení bude dáno lineární kombinací obou dílčích řešení.

Dosadíme-li nyní do (9.106) za vektory $\mathbf{a}^{(i)}$ z (9.105), dostaneme vztahy vyjadřující závislost prvků impedanční matice z_{ij} na vlastních hodnotách

$$z_{11} = z_{22} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad (9.107)$$

$$z_{21} = z_{12} = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \quad (9.108)$$

nebo obráceně

$$z_1 = z_{11} + z_{12} \quad (9.109)$$

$$z_2 = z_{11} - z_{12} \quad (9.110)$$

Z rovnice (9.107) a (9.108) vyplývají některé důležité poznatky, získané právě pomocí rovnice vlastních hodnot. Výsledek, že $z_{11} = z_{22}$, je dán právě prostorovou symetrií našeho dvojbranu, zatímco výsledek $z_{12} = z_{21}$ může být chápán jako běžná podmínka symetrie impedanční matice platící nezávisle na prostorové symetrii dvojbranu (reciproční člen).

Pomocí (9.107) a (9.108) už bychom mohli sestavit impedanční matici dvojbranu a nakreslit ekvivalentní schéma tlusté clony ve vlnovodu. Vzhledem k tomu, že uvedenou matematickou metodu lze použít i při vyšetřování složitějších n -branů, budeme postupovat formálně jiným způsobem (u složitějšího n -branu nejsou rovnice vyjadřující závislost prvků impedanční matice na jejích vlastních hodnotách jednoznačné). Zápis rovnic (9.106) může být upraven do jedné rovnice maticové, tvaru

$$\mathbf{zA} = \mathbf{Az}_d \quad (9.111)$$

kde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.112)$$

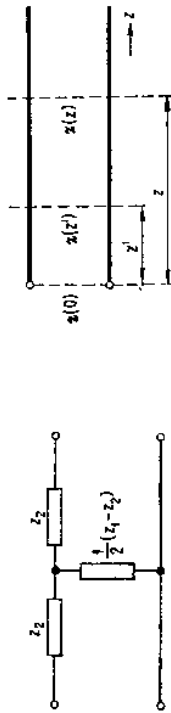
$$\mathbf{z}_d = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \quad (9.113)$$

Všimněme si, že \mathbf{A} má sloupce vytvořeny z vektorů $\mathbf{a}^{(1)}$ a $\mathbf{a}^{(2)}$, které jsou normovány na jednotkovou velikost a jsou ortogonální. Taktó vytvořená matice je také ortogonální, tj. platí pro ni $\mathbf{\bar{A}} = \mathbf{A}^{-1}$. Matice daná vztahem (9.112) je symetrická. Zaměníme-li vlastní hodnoty z_1 a z_2 , dostaneme matici nesymetrickou, což však na výsledek nemá vliv. Z (9.111) dostaneme

$$\mathbf{z} = \mathbf{Az}_d \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Az}_d \mathbf{\bar{A}} = \mathbf{Az}_d \mathbf{A} \quad (9.114)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (z_1 + z_2) & (z_1 - z_2) \\ (z_1 - z_2) & (z_1 + z_2) \end{bmatrix} \quad (9.115)$$

Zvolíme jako ekvivalentní obvod článek T. Velikosti jeho prvků jsou uvedeny na obr. 9.13. Charakter jednotlivých prvků můžeme ještě upřesnit analýzou okrajových podmínek symetrických řešení. O charakteru vlastní hodnoty z_1 z teorie vlastních hodnot matice \mathbf{z} již nic víc zjistit nemůžeme. Bylo řečeno, že antisymetrické řešení má prostorové uspořádání takové, jako kdyby v rovině symetrie byla



Obr. 9.13.

Obr. 9.14.

nekonečně vodivá elektrická stěna, na níž je $E_t = 0$ a vlastní hodnota z_2 je v tomto místě nulová. Je-li však clona tlustá, posune se poloha této vodivé stěny do místa $z' = \pm d$ a příčná impedance odpovídající vlastní hodnotě z_2 v rovině symetrie se transformuje na jinou hodnotu, tj. z_2 tam již nulová nebude. Vypočítáme tedy tuto transformovanou hodnotu z_2 . Pomocí vztahů (2.109) a (2.110) zjistíme, že [známe-li impedanci v místě vedení $z = 0$, tedy $\mathbf{z}(0)$], určíme impedanci $\mathbf{z}(z)$ v libovolném místě pomocí vztahu

$$\mathbf{z}(z) = \frac{\mathbf{z}(0) \cos \alpha z - j \sin \alpha z}{\cos \alpha z - j \mathbf{z}(0) \sin \alpha z} \quad (9.116)$$

kteřý můžeme upravit na tvar (viz obr. 9.14)

$$\mathbf{z}(z) = \frac{\mathbf{z}(z') \cos \alpha(z - z') - j \sin \alpha(z - z')}{\cos \alpha(z - z') - j \mathbf{z}(z') \sin \alpha(z - z')} \quad (9.117)$$

Pomocí tohoto vztahu lze vypočítat, jak se transformuje zkrat v místě $z' = -d$ (posunutá elektrická stěna) do místa $z = 0$ (rovina symetrie).

Po dosazení, je-li $\mathbf{z}(-d) = 0$ a $\alpha \ll \lambda_v$, bude impedance v rovině symetrie neboli vlastní hodnota z_2 dána vztahem

$$z_2 = \mathbf{z}(0) = -\frac{j \sin \alpha d}{\cos \alpha d} \approx -j \frac{2\pi}{\lambda_v} d$$

Z dosaženého výsledku je zřejmé, že podélné impedance v ekvivalentním článku T mají kapacitní charakter. Příčná impedance v tomto článku má indukční charakter, což vyplývá z teorie nespojitosti ve vlnovodu pro daný tvar clony při $d \rightarrow 0$; při této hodnotě tloušťky clony podélné impedance mizí, ekvivalentní schéma má pouze příčnou indukčnost, a tak i tento výsledek se shoduje s výsledky

obvodu o 180° je stejný jako tvar matice F_1 až na znaménka všech prvků. Provedením zákrytových pohybů zjistíme, že operátory F_1 a R můžeme reprezentovat maticemi

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.118)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.119)$$

Pro rozptylovou matici opět platí (9.96)

$$s = F_1 F R$$

Rozepsáním a vynásobením dostaneme

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{22} & s_{12} & s_{23} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} \\ s_{23} & s_{13} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (9.120)$$

Porovnáme-li odpovídající prvky výsledné matice s původní maticí, dostaneme

$$s_{11} = s_{22}; \quad s_{23} = s_{13}$$

Položíme $s_{11} = s_{22} = \alpha$, $s_{23} = s_{13} = \delta$, $s_{33} = \beta$, $s_{12} = \gamma$, takže rozptylová matice členu T má obecně tvar

$$s = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \gamma & \alpha & \delta \\ \delta & \delta & \beta \end{bmatrix}$$

Vyšetříme dále některé tvary rozptylové matice vyskytující se v praxi.

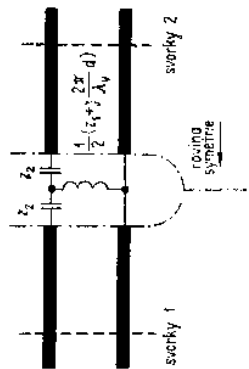
a) *Mikrovlnný bezeztřatový trojbran nelze totálně přizpůsobit*

Abý důkaz této důležité věty byl krátký, provedeme jej sporem. Předpokládejme, že obecný trojbran je totálně přizpůsobený. Tím se zmenší počet nenulových prvků rozptylové matice trojbranu, neboť by měla mít tvar

$$s = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \delta \\ \gamma & 0 & \delta \\ \delta & \delta & 0 \end{bmatrix} \quad (9.122)$$

Matice je unitární, takže pro prvky jejich řádků platí

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\ |\delta|^2 + |\delta|^2 &= 1 \end{aligned}$$

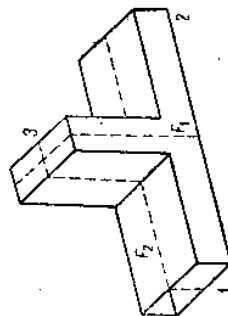


Obr. 9.15. Ekvivalentní schéma tlusté clony

Na závěr je třeba dodat, že pro praktické účely je nutné parametry z_1 a z_2 náhradního obvodu získat měřením nebo výpočtem pomocí jiných metod. Tyto metody výpočtu velikosti náhradních parametrů však předpokládají nějaký typ náhradního obvodu. Jeden z možných typů jsme v této části právě určili, a to bylo mimo jiné také naším cílem.

9.3.2. Mikrovlnný trojbran

Z mikrovlnných trojbranů se nejčastěji používají: člen T v rovině „H“ (obr. 9.7b) a člen T v rovině „E“ (obr. 9.16). Oba trojbrany jsou symetrické vzhledem ke dvěma rovinám, takže mají i osu symetrie danou průsečnicí obou rovin. Symetrický rozvětvený člen ve tvaru „H“ (obr. 9.7c) se používá jen s feritovým prostředím uvnitř ve funkci nerezipročního cirkulátoru. Člen Y má tři roviny symetrie a jednu trojčetnou osu symetrie. Ukážeme dále, že mikrovlnné trojbrany s izotropním prostředím uvnitř nelze totálně přizpůsobit a oba členy T lze použít ke konstrukci laditelného impedančního transformátoru.



Obr. 9.16. Mikrovlnný trojbran – člen T v rovině „E“

Člen T v rovině „H“ bývá též nazýván paralelním T , protože rameno 3 je připojeno paralelně k ramenům 1 a 2. Označíme svorkové parametry u_j . S obvodem můžeme provést tři zákrytové pohyby, z nichž praktický význam má pouze operace reflexe vzhledem k rovině F_1 . Operace reflexe vzhledem k F_2 mění pouze znaménka všech polí na svorkách, takže je triviální. Tvar matice R odpovídající otočení

což lze splnit, protože výraz $e^{i(\sigma - \psi)}$ se nikdy nerovná nule. Nemohou tedy prvky na hlavní diagonále být současně všechny nulové, z čehož vyplývá, že trojbran nelze totálně přizpůsobit. Protože tvar rozptylové matice trojbranu byl zvolen obecně, platí tato věta pro libovolný mikrovlnný trojbran s izotropním prostředím uvnitř.

$$\gamma\delta^* = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\psi} = 0 \quad (9.123)$$

b) *Současné přizpůsobení ramene 1 a 2*
 Při současném přizpůsobení ramen 1 a 2 musí být $\alpha = 0$ a rozptylová matice (9.121) přejde na tvar

$$s = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \delta \\ \gamma & 0 & \delta \\ \delta & \delta & \beta \end{bmatrix} \quad (9.124)$$

Z hermitovského součinu prvního a druhého řádku vyplývá, že $\delta\delta^* = 0$, tedy $\delta = 0$. Pak $|\gamma| = 1$ a $|\beta| = 1$ (z vlastností řádků unitární matice). Rozptylová matice je v tomto případě

$$s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.125)$$

Dosáhli jsme toho, že rameno 3 je od zbývajících dvou ramen zcela odděleno. Vlna vstupující do ramene 1 vstupuje ramenem 2 a naopak. Vlna vstupující do ramene 3 se úplně odrazí nazpět. Má-li být rameno 3 od ostatních zcela odděleno, musíme to zařídit, tj. do vlnovodu ramene 3 se vloží kovová přepážka (zkrat) tak, aby vlna vstupující z třetího ramene $b_3 = 1$. Je-li tento zkrat ve vzdálenosti $\lambda_v/4$ od osy vlnovodu ramen 1 a 2, nastane v rovině symetrie taková situace, jako kdyby rameno 3 v trojbranu neexistovalo.

c) *Člen T jako přizpůsobovací prvek*

Vložíme-li do ramene 3 posuvný zkrat, např. ve formě pístu, můžeme ve vlnovodu tvořícím ramena 1 a 2 v rovině symetrie realizovat libovolnou paralelní reaktanci. Stačí uvážit, jak se tento zkrat v rameni 3 transformuje podél roviny symetrie do osy podélného vlnovodu ramene 1 a 2. Normovaná vstupní impedance úseku vedení délky l na konci zkratovaného je dána známým vztahem $Z_{vt} = j \operatorname{tg} 2\pi l/\lambda_v$. Můžeme tedy takovým způsobem realizovat v podélném vlnovodu v rovině symetrie libovolnou reaktanci od nuly do $j\infty$. Na tomto principu je založena funkce některých impedančních transformátorů.

u) *Prizpůsobení ramene 3*

V tomto případě je $\beta = 0$ a rozptylová matice paralelního T má tvar

$$s = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \gamma & \alpha & \delta \\ \delta & \delta & 0 \end{bmatrix} \quad (9.126)$$

K určení konkrétních velikostí prvků matice využijeme vlastností její unitárnosti. Z třetího řádku vyplývá $2|\delta|^2 = 1$ neboli $|\delta|^2 = 1/2$. Dosadíme-li tento výsledek do hermitovského součinu druhého a třetího řádku $\gamma\delta^* + \alpha\delta^* = 0$, dostaneme $\gamma = -\alpha$ nebo $\gamma^* = -\alpha^*$. Pak z hermitovského součinu prvního a druhého řádku $\alpha\gamma^* + \gamma\alpha^* + \delta\delta^* = 0$ vychází po dosazení tohoto výsledku $|\alpha|^2 = 1/4$. Po dosazení vypočítaných hodnot do (9.126) je

$$s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.127)$$

Měřením bylo zjištěno, že dosažení $\beta = 0$ je prakticky vždy možné. Je-li třetí rameno přizpůsobeno, může být paralelní T (stejně tak i sériové T) použito jako tzv. *třídeciblový dělič výkonu*. Z (9.127) se snadno přesvědčíme, že napájíme-li třetí rameno, pak celý vstupující výkon se rozdělí na poloviny do obou zbývajících ramen, aniž by ve třetím rameni vznikla odražená vlna.

Nakonec je třeba poznamenat, že všechny závěry analyzovaných případů platí nejen pro vlnovodové provedení paralelního T, ale pro všechny trojbrany se symetrií vzhledem k rovině F_1 včetně mikropáskového nebo koaxiálního provedení.

Zcela souběžně mohla být odvozována rozptylová matice členu T v rovině „E“ (nebo sériové T na obr. 9.16). Analyzované případy i výsledky by se shodovaly s případy paralelního T zejména v bodě a), tj. v nemožnosti totálního přizpůsobení; v bodě c), v možnosti použití tohoto členu jako přizpůsobovacího prvku, ale s tím rozdíllem, že v rovině symetrie by byla reaktance podélná s dosažitelnými hodnotami $\in < 0, j\infty >$; v bodě d) ve funkci třideciblového děliče, ale s tím rozdíllem, že vlna vystupující z ramene 3 do ramen 1 a 2 se dělí na dvě poloviny, avšak v protifázi. Rozptylová matice v tomto případě ($\beta = 0$) se liší od (9.127) jen ve znaménkách, tedy

$$s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.128)$$

9.3.3. Mikrovlnné čtyřbrany

Ze čtyřbranů budeme analyzovat podrobněji tzv. magické T (někdy též dvojité T nebo můstkové T) a popíšeme činnost směrové odbočnice v různých provedeních.

a) *Magické I (místkové I)*

Tento čtyřbran je symetrický podle jedné roviny, jak je vidět na obr. 9.7a. Po zákrytovém pohybu – reflexi – se svorková napětí zřejmě transformují takto

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_2; \quad \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_1; \quad \mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{u}'_3 = \mathbf{u}_3; \\ \mathbf{u}_4 \rightarrow \mathbf{u}'_4 = -\mathbf{u}_4 \end{aligned}$$

K získání matice operátoru reflexe \mathbf{F} napíšeme tyto transformační vztahy ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 1 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 + 0 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}'_2 &= 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 + 0 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}'_3 &= 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + 1 \cdot \mathbf{u}_3 + 0 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}'_4 &= 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 - 1 \cdot \mathbf{u}_4 \end{aligned} \quad (9.129)$$

nebo maticově

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}$$

nebo $\mathbf{u}' = \mathbf{F}\mathbf{u}$ (9.129b)

Známe-li nyní tvar matice operátoru \mathbf{F} , určíme rozptylovou matici daného čtyřbranu snadno pomocí vztahu (9.96). Předpokládáme, že je čtyřbran bezetržtový, pak jeho matice \mathbf{s} je unitární a je-li prostředí uvnitř čtyřbranu izotropní, pak je matice \mathbf{s} symetrická. Dosadíme-li do (9.96) v explicitním tvaru, dostaneme

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.130)$$

Po vynásobení pravé strany dostaneme rovnost dvou matic

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{12} & S_{23} & -S_{24} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} \\ S_{23} & S_{13} & S_{33} & -S_{34} \\ -S_{24} & -S_{14} & -S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (9.131)$$

Odtud porovnáním dostaneme

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = \alpha; \quad S_{12} = S_{12} = \beta; \quad S_{13} = S_{23} = \gamma; \\ S_{14} &= -S_{24} = \delta; \quad S_{33} = S_{33} = \varepsilon; \quad S_{34} = -S_{34} = 0; \\ S_{44} &= S_{44} = \eta \end{aligned}$$

Rozptylová matice magického T má po dosazení těchto vztahů tvar

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \gamma & -\delta \\ \gamma & \gamma & \varepsilon & 0 \\ \delta & -\delta & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (9.132)$$

Předpokládejme, že dovnitř ramen 3 a 4 lze vložit přízpůsobovací prvky tak, že obě ramena budou přízpůsobena. Přízpůsobovací prvky však nesmí narušit rovinnou symetrii čtyřbranu. Pak bude

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \gamma & -\delta \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ \delta & -\delta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.133)$$

Matice musí být unitární, platí tedy pro jednotlivé řádky (C.31)

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\ 2|\gamma|^2 &= 1 \\ 2|\delta|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (9.134)$$

Z této soustavy rovnic vyplývá

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0$$

součet kladných čísel může být nulový, jen jsou-li samotná čísla nulová, je tedy $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Ze zbývajících dvou rovnic pak dostaneme

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad |\delta| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{nebo} \quad \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}; \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi} \end{aligned}$$

kde úhly φ a ψ závisí na volbě referenčních rovin. Dosadíme-li získané výsledky do (9.133), máme

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{i\varphi} & e^{i\psi} \\ 0 & 0 & e^{i\varphi} & -e^{i\psi} \\ e^{i\psi} & e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ e^{i\psi} & -e^{i\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.135)$$

Dosažený tvar rozptylové matice může být ještě zjednodušen posunutím referenčních rovin v rameni 3 o $-\varphi$ a v rameni 4 o $-\psi$, tedy směrem od čtyřbranu. Pomocí (9.59a) dostaneme konečný tvar rozptylové matice magického T, který je již vhodný pro praktické použití

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.136)$$

Z rozprysove mance vyplývá, že magické 1 lze totálně prizpusobit. Z analyzy vyplývá, že postačuje dosáhnout přizpusobení ramen 3 a 4. Tím se dosáhne $s_{11} = s_{12} = 0$.

Zbývá nyní popsat chování magického T, napájíme-li postupně jednotlivá ramena. K tomu stačí dosadit do základního vztahu (9.45) odvozenou rozptylovou matici, čímž dostaneme

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a_3 + a_4 \\ a_3 - a_4 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} \quad (9.137)$$

Odtud pak dostaneme vztahy pro vstupující vlny a jejich výkony

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + a_4); & P_1 &= \frac{1}{2}|b_1|^2 = \frac{1}{4}|a_3 + a_4|^2 \\ b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 - a_4); & P_2 &= \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{4}|a_3 - a_4|^2 \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2); & P_3 &= \frac{1}{2}|b_3|^2 = \frac{1}{4}|a_1 + a_2|^2 \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2); & P_4 &= \frac{1}{2}|b_4|^2 = \frac{1}{4}|a_1 - a_2|^2 \end{aligned} \quad (9.138)$$

Z těchto rovnic vyplývá:

a) Napájíme-li rameno 1, tj. $a_1 \neq 0$; $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, je

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0; & P_1 &= P_2 = 0 \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_1; & P_3 &= \frac{1}{4}|a_1|^2 \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_1; & P_4 &= \frac{1}{4}|a_1|^2 \end{aligned} \quad (9.139)$$

Vlna vstupující ramenem 1 se rozdělí do ramen 3 a 4, polovinami svého výkonu a obě vlny jsou ve fázi.

b) Napájíme-li rameno 2, tj. $a_2 \neq 0$; $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, je

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0; & P_1 &= P_2 = 0 \\ b_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}a_2; & P_3 &= \frac{1}{4}|a_2|^2 \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2; & P_4 &= \frac{1}{4}|a_2|^2 \end{aligned} \quad (9.140)$$

Vlna vstupující ramenem 2 se rozdělí do ramen 3 a 4 v protifázi opět polovinami svého výkonu.

c) Napájíme-li rameno 3, tj. $a_3 \neq 0$; $a_1 = a_2 = a_4 = 0$, je

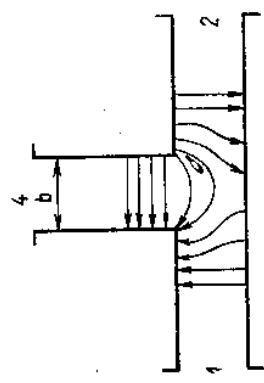
$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_3; & P_1 &= \frac{1}{4}|a_3|^2 \\ b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_3; & P_2 &= \frac{1}{4}|a_3|^2 \\ b_3 &= b_4 = 0; & P_3 &= P_4 = 0 \end{aligned} \quad (9.141)$$

Vlna vstupující ramenem 3 se rozdělí do ramen 1 a 2, polovinami svého výkonu a obě vlny jsou ve fázi.

d) Napájíme-li rameno 4, tj. $a_4 \neq 0$; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, pak

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_4; & P_1 &= \frac{1}{4}|a_4|^2 \\ b_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}a_4; & P_2 &= \frac{1}{4}|a_4|^2 \\ b_3 &= b_4 = 0; & P_3 &= P_4 = 0 \end{aligned} \quad (9.142)$$

Vlna vstupující ramenem 4 se opět rozdělí do ramen 1 a 2, a to v protifázi. Její výkon se dělí na poloviny. Tento případ si můžeme názorně představit podle obr. 9.17. Na tomto obrázku jsou znázorněna ramena 1, 2 a 4 ve středovém řezu kolmém na rovinu symetrie. Předpokládáme, že ve vlnovodových ramenech se šíří vlny TE₁₀. Z uspořádání síťových čar elektrického pole je zřetelné vidět dělení vlny do ramen 1 a 2 v protifázi.



Obr. 9.17.

e) Velmi zajímavý je též případ současného napájení ramene 1 a 2. Napájíme-li obě ramena v protifázi, bude

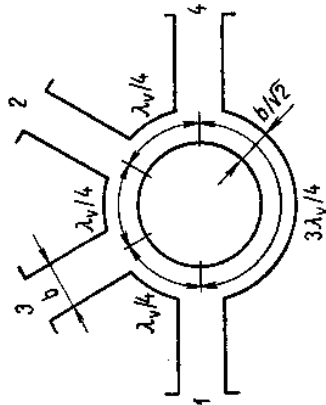
$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2; & a_3 &= a_4 = 0 \\ b_1 &= b_2 = 0; & P_1 &= P_2 = 0 \\ b_3 &= 0; & P_3 &= 0 \\ b_4 &= \sqrt{2}a_1; & P_4 &= |a_1|^2 \end{aligned} \quad (9.143)$$

Protože svorky 1 a 2 jsou ve stejné vzdálenosti od roviny symetrie, budou obě vlny na vnitřním vstupu ramene 3 v protifázi. Vybuzení ramene 3 není tedy možné. Pod ramenem 4 bude prostorové uspořádání pole takové, jak je znázorněno na obr. 9.17, takže toto rameno může být vybuzeno.

Budou-li ramena 1 a 2 současně napájena se shodnou fází, nemůže být vybuzeno rameno 4 a obě vlny budou vystupovat ramenem 3.

b) Kruhové T

Poslední dva případy buzení magického T dvěma rameny současně nám umožní podobnými úvahami určit rozptylovou matici jiného čtyřbranu, tzv. *kruhového* nebo *prstencového* T, (obr. 9.18), aniž bychom museli použít poznatky z teorie



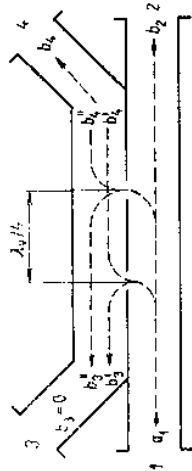
Obr. 9.18. Kruhové T v rovině „E“

symetrie. Uvážíme-li délky drah ve vlnododovém prstenci a skutečnost, že vlny vystupující z ramen do vlnododového prstence se dělí na poloviny vzájemně v protifázi, zjistíme, že tento čtyřbran má úplně stejnou rozptylovou matici jako magické T, danou vztahem (9.136). Všimněme si ještě, že rozměry užších stěn *b* vlnododových ramen a rozměr *b'* vlnododového prstence se liší, aby se dosáhlo přízpůsobení ramen připojených v sérii s vlnododem prstence.

c) Směrová odbočnice

Směrová odbočnice (někdy též nazývaná směrový vazební člen) je patrně nejčastěji v praxi používaný čtyřbran.

Směrová odbočnice je název mikrovlnného čtyřbranu, který je reciproční, totálně přízpůsobený a v němž nenastává přenos mezi dvěma dvojitými bran. Princip činnosti odbočnice objasníme na příkladu. Jedno z možných provedení směrové odbočnice je odbočnice se dvěma otvory, schematicky znázorněná na obr. 9.19.



Obr. 9.19. Směrová odbočnice se dvěma otvory

stěnami. Ve vlnododech se šíří vid TE₁₀. Nazvěme vlnodod spojující brány 1 a 2 „základním“ a vlnodod mezi 3 a 4 vlnododem „vedlejším“. Mezi oběma vlnodody je slabá vazba kruhovými otvory průměru *d* ($d \ll \lambda_v$) vzdálenými vzájemně o $\lambda_v/4$. Vlna *a*₁ vstupující prvním ramenem se šíří do ramene 2 a část její energie vstoupí oběma vazebními otvory do vedlejšího vlnododu, kde se dělí na poloviny a šíří se v obou směrech k ramenům 3 a 4. Vlna postupující směrem ke třetímu rameni je tvořena ze dvou amplitudově stejně velkých příspěvků *b*₃ a *b*₄, avšak fázově vzájemně posunutých o 180° (rozdíl jejich drah je $\lambda_v/2$), takže vlnodod ramenem 3 nemůže být vybuzen. Vlna postupující směrem ke čtvrtému rameni je také složena ze dvou amplitudově stejných částí *b*₄ a *b*₃, které jsou naopak ve fázi, takže vlnodod ramenem 4 může být vybuzen. Z toho vyplývá, že nenastává přenos mezi dvojitými rameny 1 a 3. Tuto vlastnost můžeme nazvat též izolací mezi rameny 1 a 3. Protože čtyřbran je symetrický, tak při napájení ramenem 2 bude vlna vystupovat z ramene 1 a 3 a přenos nenastane mezi ramenem 2 a 4. Známe-li činnost směrové odbočnice, můžeme vysvětlit též přívlastek „směrová“ v jejím názvu; přítomnost vlny ve třetí nebo čtvrté braně odbočnice závisí na směru šíření vlny v základním vlnododu. Z principu činnosti směrové odbočnice vyplývá, že vedlejší a základní vlnodod je ve své funkci vzájemně zaměnitelný, nejsou-li jednotlivá ramena zvlášť konstruktčně upravena k jiným účelům.

Ukážeme nyní, že každý reciproční čtyřbran, který je bezeztrátový a totálně přízpůsobený, musí být ideální směrovou odbočnicí. Důsledek tohoto důkazu bývá někdy zván větou o existenci směrové odbočnice. Rozptylová matice recipročního a totálně přízpůsobeného čtyřbranu má tvar

$$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.144)$$

Je-li obvod bezeztrátový, musí být rozptylová matice unitární. Minory nulových prvků unitární matice jsou nulové [viz (C.33)], takže platí

$$\det \begin{bmatrix} 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} = 2 S_{23} S_{34} S_{24} = 0 \quad (9.145)$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & S_{13} & S_{14} \\ S_{13} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} = 2 S_{13} S_{34} S_{14} = 0 \quad (9.146)$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{24} \\ S_{14} & S_{24} & 0 \end{bmatrix} = 2 S_{12} S_{24} S_{14} = 0 \quad (9.147)$$

$$\det \begin{bmatrix} s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{bmatrix} = 2 s_{12} s_{13} s_{23} = 0 \quad (9.148)$$

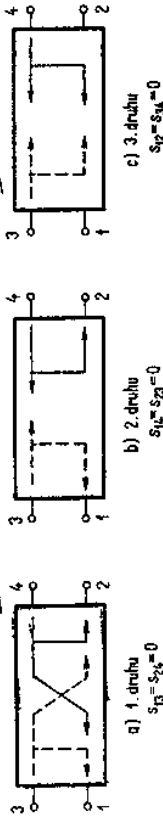
Mají-li být všechny čtyři rovnice současně řešitelné (vyjma řešení triviálního), musí vždy platit jeden ze vztahů

$$s_{13} = s_{24} = 0 \quad (\text{směrnost 1. druhu}) \quad (9.149)$$

$$s_{14} = s_{23} = 0 \quad (\text{směrnost 2. druhu}) \quad (9.150)$$

$$s_{12} = s_{34} = 0 \quad (\text{směrnost 3. druhu}) \quad (9.151)$$

přičemž ostatní prvky pro každý případ jsou nenulové. Autoři [5] rozlišují jednotlivé případy izolace mezi dvojicemi ramen a nazývají je odbočnicemi se směrností 1., 2., 3. druhu. Všechny tři případy směrnosti jsou schematicky znázorněny na obr. 9.20. Z uvedeného rozboru je zřejmé, že v definici směrové odbočnice je požadavek na vzájemnou izolaci dvojice ramen přebytný, protože tato vlastnost je přímým důsledkem jiných vlastností (reciprocita, přizpůsobení a bezztrátovost).



Obr. 9.20. Směrová odbočnice
a) 1. druhu ($s_{13} = s_{24} = 0$), b) 2. druhu ($s_{14} = s_{23} = 0$), c) 3. druhu ($s_{12} = s_{24} = 0$)

Definici směrové odbočnice splňuje i magické T nejen ve vlnododovém provedení, ale také všechny jeho hybridy s koaxiálními nebo mikropáskovými vedeními. Všechny tyto čtyřbrany se vyznačují dělením výkonu na poloviny, jsou tedy pouze zvláštními případy směrové odbočnice. Pomocí směrové odbočnice můžeme uskutečnit rozdělení výkonů na dvě nestejně velké části v libovolném poměru. K tomuto účelu určíme rozptylovou matici ideální směrové odbočnice a vyšetříme možnosti dosažení jejich provozních parametrů.

Rozptylová matice ideální směrové odbočnice

Učíme rozptylovou matici směrové odbočnice 1. druhu. K jejímu vyšetření nepoužijeme rovnice vlastních hodnot operátorů symetrie, protože analýza odbočnice je následkem degenerovaných vlastních hodnot dost složitá a výsledky této metody nedávají mnoho nových poznatků, které by nebylo možné získat jinak. Vyjdeme z požadavků na směrovou odbočnici. Odbočnice 1. druhu má izolaci mezi rameny 1 a 3 a mezi 2 a 4. Odtud vyplývá, že $s_{13} = s_{24} = 0$. Pro totálně přizpůsobený obvod musí platit $s_{jj} = 0$. Rozptylovou matici můžeme tedy psát

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 0 & s_{14} \\ s_{12} & 0 & s_{23} & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 & s_{34} \\ s_{14} & 0 & s_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.152)$$

Zbývá určit velikost jednotlivých prvků a jejich argumenty. Obvod je bezztrátový, proto jeho matice je unitární. Tedy

$$\begin{aligned} |s_{12}|^2 + |s_{14}|^2 &= 1; & |s_{12}|^2 + |s_{23}|^2 &= 1 \\ |s_{23}|^2 + |s_{34}|^2 &= 1; & |s_{14}|^2 + |s_{34}|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (9.153)$$

Položíme $|s_{14}| = |s_{23}| = p$ a $|s_{12}| = |s_{34}| = \sqrt{1-p^2}$. Po zpětném dosazení do (9.152) je

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-p^2} e^{i\varphi_{12}} & 0 & p e^{i\varphi_{14}} \\ \sqrt{1-p^2} e^{i\varphi_{12}} & 0 & p e^{i\varphi_{23}} & 0 \\ 0 & p e^{i\varphi_{23}} & 0 & \sqrt{1-p^2} e^{i\varphi_{34}} \\ p e^{i\varphi_{14}} & 0 & \sqrt{1-p^2} e^{i\varphi_{34}} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.154)$$

Získaná rozptylová matice však ještě nemusí být unitární, pokud nebudou splněny určité vztahy i pro argumenty φ_{jk} . Určíme je opět z podmíněk unitárnosti matice. Pro hermitovský součin prvního a třetího řádku matice platí $s_{12} s_{23}^* + s_{14} s_{34}^* = 0$ nebo dosazení

$$e^{i(\varphi_{12}-\varphi_{23})} + e^{i(\varphi_{14}-\varphi_{34})} = 0 \quad (9.155)$$

Součet dvou komplexních čísel je nulový tehdy, jestliže se rovnají jejich moduly a argumenty se liší o π . Musí tedy pro argumenty platit

$$\varphi_{12} + \varphi_{34} = \varphi_{14} + \varphi_{23} + (2k + 1)\pi \quad (9.156)$$

kde k je reálné celé číslo.

Odvozená rozptylová matice odpovídá všem podmínkám kladeným na směrovou odbočnici v její definici uvedené na začátku této části. Výsledek jsme získali bez jakýchkoliv předpokladů o poloze referenčních rovin. Argumenty φ_{jk} nemohou však být zvoleny libovolně, jak vyplývá z (9.156). Můžeme např. tři z nich zvolit a čtvrtý bude určen z (9.156). Z rozptylové matice (9.154) vyplývá též zřetelně, že oba dva vlnovody „základní“ a „vedlejší“ lze v odbočnici funkčně zaměnit. Na závěr ještě zjednodušíme rozptylovou matici (9.154) na „standardní“ tvar bez exponenciálních funkcí tím, že zvolíme $\varphi_{12} = \varphi_{34} = 0$ a $\varphi_{23} = \varphi_{14} = \varphi$. Pak z (9.156) dostaneme $\varphi = \pi/2 + k\pi$. Po této volbě argumentů je

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-p^2} & 0 & ip \\ \sqrt{1-p^2} & 0 & ip & 0 \\ 0 & ip & 0 & \sqrt{1-p^2} \\ ip & 0 & \sqrt{1-p^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.157)$$

$= 1/\sqrt{2} \sqrt{1 - p^2} = 1/\sqrt{2}$. Velikost výkonu přecházejícího ze základního vlnovodu do vedlejšího závisí na způsobu provedení vazby a na její velikosti.

Provozní parametry reálné směrové odbočnice

Kromě parametrů vyjádřených prvky rozptylové matice se v praxi používají jednodušší parametry směrových odbočnic. Směrové odbočnice se zpravidla konstruují tak, že výkon vstupující do odbočnice se dělí do dvou určitých ramen, a to v přesně definovaném poměru. K tomu účelu se definuje *odbočný útlum* při napájení ramena 1 pomocí vztahu (pro odbočnici 1. druhu)

$$D = 10 \log \frac{P_2}{P_4} \quad (\text{dB}) \quad (9.158)$$

kde P_2 a P_4 jsou výkony vstupující z příslušných ramen. Odbočný útlum můžeme definovat též pomocí prvků rozptylové matice, dosadíme-li $P_2 = |b_2|^2$ a $P_4 = |b_4|^2$ a uvážíme-li, že $a_2 = a_3 = a_4 = 0$; pak

$$D = 10 \log \frac{|s_{12}|^2}{|s_{14}|^2} \quad (\text{dB}) \quad (9.159)$$

Tak např. je-li $D = 30$ dB, pak ramenem 4 vystupuje tisíckrát menší výkon než ramenem 2.

V reálné směrové odbočnici není možné dosáhnout toho, aby v určitém frekvenčním pásmu byly dvě dvojice ramen dokonale odděleny nebo izolovány, a aby např. u odbočnice 1. druhu platilo $s_{13} = s_{24} = 0$. Není to možné proto, že nastává odraz od vazebních otvorů a od nepřizpůsobených zátěží ramen zejména na okrajích pásma. Dokonalost této izolace definujeme tzv. *směrovností*, vztahem

$$S = 10 \log \frac{P_4}{P_3} \quad (\text{dB}) \quad (9.160)$$

tedy poměrem výkonů ve vedlejším vlnovodu, přičemž „prosakující“ výkon P_3 je nežádoucí. Z toho vyplývá, že ideální odbočnice má $S \rightarrow \infty$. Analogicky můžeme vyjádřit směrovnost pomocí prvků rozptylové matice

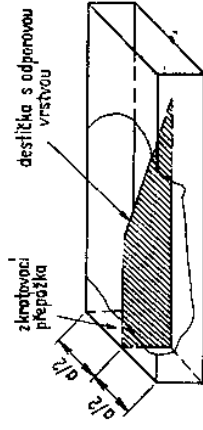
$$S = 10 \log \frac{|s_{14}|^2}{|s_{13}|^2} \quad (\text{dB}) \quad (9.161)$$

Odbočný útlum i směrovnost v decibelech udává výrobce odbočnice ve frekvenčním pásmu, v němž nepřekročí čísel stojatých vln v základním vlnovodu určitou hodnotu. Směrovnost 20 dB až 30 dB bývá pro mnohé účely považována za dostatečnou.

Typy směrových odbočnic

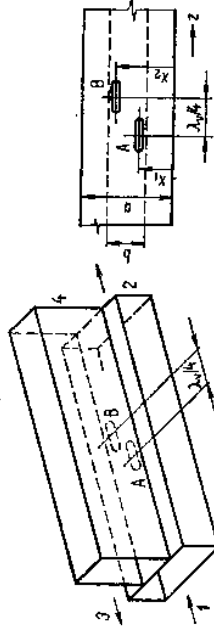
Směrové odbočnice můžeme rozřadit podle provedení vazby mezi vlnovody. V podstatě je můžeme rozdělit na odbočnice s jedním nebo se dvěma vazebními otvory a na odbočnice s rozloženou nebo spojitou vazbou. V dalším tedy vyšetříme

konstrukci směrové odbočnice, je způsob dosažení směrové vazby. Nejjednodušším způsobem je směrová vazba vyřešena u odbočnice se dvěma otvory. Princip činnosti tohoto typu s vazebními otvory v širší stěně vlnovodu byl popsán na začátku odst. 9.3.3c. Odbočnice tohoto typu může být realizována i takovým způsobem, že „základní“ a „vedlejší“ vlnovod jsou spolu vázány svými užšími stěnami, např. jako na obr. 9.7d. Tento typ odbočnice má vzdálenost obou otvorů $\lambda_g/4$, tedy teoretická směrovnost $S \rightarrow \infty$ by mohla být dosažena pouze pro jednu frekvenci. Při jiných frekvencích není amplituda vlny vstupující do třetího ramene zanedbatelná a tak, aby dalšími případnými odrazy nebyly narušeny vlastnosti směrové odbočnice, vkládá se do třetího ramena absorbní člen, v němž je energie nežádoucí vlny pohlcena. Tento způsob zakončení třetího ramena je znázorněn na obr. 9.21.



Obr. 9.21. Bezodrazové zakončení ramene odbočnice β

Absorbce vlny nastane v odporové vrstvě nanesené na povrch dielektrického pásku. Šířka pásku se plynule zvětšuje s cílem dosáhnout přizpůsobení. Na konci pásku i na konci ramene je zkrat. Komerční provedení tohoto typu odbočnice má tedy jen tři vlnododové výstupy, a to ramena 1, 2 a 4.



Obr. 9.22. Schwingerova odbočnice

Jiným typem odbočnice se dvěma otvory je tzv. Schwingerova⁴⁾ odbočnice (obr. 9.22). Tato odbočnice má směrovnost 2. druhu, i když jsou oba otvory vzdáleny o $\lambda_g/4$, ale ve směru příčném jsou vzájemně posunuty. Otvory nejsou kruhové, ale podlouhlé, čímž je právě zabezpečena vazba mezi oběma vlnovody. Ukážeme nyní, že při takto uspořádané vazbě se vlny vybuzevané oběma otvory v rameni 3 sčítají, kdežto v rameni 4 se odčítají. Předpokládáme vid TE_{10} . Uvážíme-li geometrické rozložení složek intenzit pole E_x a H_x ve vedlejším vlnovodu 3-4

⁴⁾ Julian Schwingler, * 1918, americký teoretický fyzik. Za práce v kvantové elektrodynamice a fyzice elementárních částic obdržel v r. 1965 Nobelovu cenu.

v blízkosti otvorů, zejména v ramenech, se mohou vyskytnout místa, kde mají sinusové rozložení v příčném směru, takže jejich velikost je v místě štěrbin téměř nulová). Vazba je tedy uskutečněna podélnou složkou intenzity magnetického pole H_z . Pro tuto složku platí

$$H_z = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x e^{-j\pi z/a}$$

V místě štěrbin A je tato složka ($z = 0$)

$$H_{zA} = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 \quad (9.162)$$

v místě B

$$H_{zB} = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_2 e^{-j\frac{2\pi}{a} \frac{\lambda_v}{4}} = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_2 e^{-j\pi/2}$$

Dosadíme-li $x_2 = a - x_1$, je

$$H_{zB} = j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 \quad (9.163)$$

Do ramene 4 budou postupovat dvě vlny vybuzené otvory A a B, které se budou skládat ve vlnu výslednou, a ta má v tomto ramenu zaniknout. Je tedy pole v blízkosti otvoru B

$$H_B = H_{zB} + H_{zA}|_B = j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 + H_{zA} e^{-j\frac{2\pi}{a} \frac{\lambda_v}{4}} = j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 + H_{zA} e^{-j\pi/2} = j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 + H_{zA} e^{-j\pi/2} = j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 - j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 = 0$$

Výsledné pole v rameni 4 tedy skutečně zaniká.

Naopak v blízkosti otvoru A, tj. směrem ke třetímu rameni,

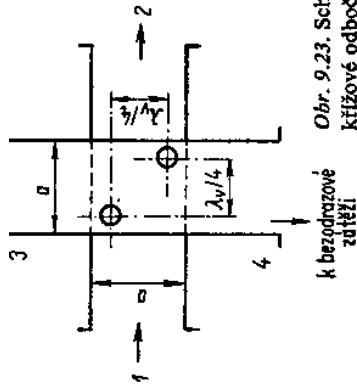
$$H_A = H_{zA} + H_{zB}|_A = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 + H_{zB} e^{-j\frac{2\pi}{a} \frac{\lambda_v}{4}} = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 + j C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 e^{-j\pi/2} = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 - j^2 C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1 = 2 C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x_1$$

Obě dílčí vlny se sčítají, rameno 3 je tedy vybuzeno.

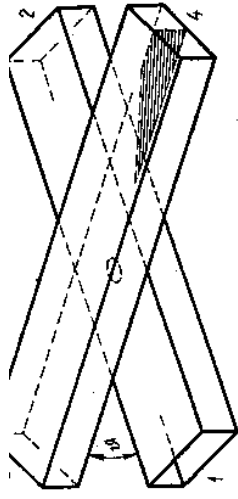
Magnetická vazba je také u křížové směrové odbočnice se dvěma kruhovými otvory, její vazební systém je schematicky znázorněn na obr. 9.23. Rameno 4 bývá ukončeno bezodrazovou zátěží podobného typu jako na obr. 9.21. K vysvětlení principu činnosti je třeba odkázat na speciální literaturu, např. [3], [4].

Podrobněji se budeme zabývat principem činnosti odbočnice s jedním vazebním otvorem neboli tzv. *Betheho odbočnicí* znázorněnou na obr. 9.24. Tyto odbočnice mají název podle autora⁵⁾ teorie vyzářování malými otvory. Vyznačují se také směrovostí 2. druhu. Čtvrté rameno je také zakončeno bezodrazovou zátěží.

⁵⁾ Hans Albrecht Bethe, * 1906, německý teoretický fyzik, od r. 1935 v USA. Zabýval se kvantovou a nukleární fyzikou. Získal v r. 1967 Nobelovu cenu.



Obr. 9.23. Schéma vazby k bezodrazové zátěži



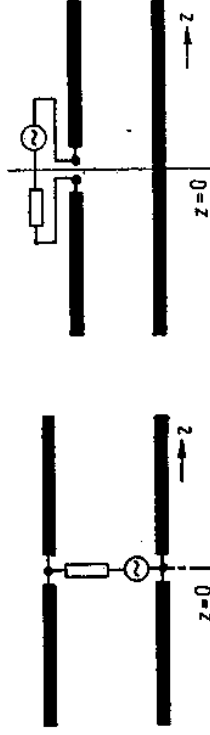
Obr. 9.24. Betheho směrová odbočnice s bezodrazovou zátěží v rameni 4

Předtím, než popíšeme princip její činnosti, musíme analyzovat elektrickou a magnetickou vazbu generátoru s vedením. Elektrickou vazbu si lze představit jako sondu volně vázanou k vedení. Sonda napájená generátorem může být reprezentována ekvivalentním schématem podle obr. 9.25, v němž je generátor k vedení připojen paralelně. Vlny vybuzené na vedení lze matematicky vjádřit vztahy

$$u = U_0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad i = \frac{U_0}{Z_0} e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{pro } z > 0 \quad (9.164)$$

$$u = U_0 e^{j(\omega t + kz)}, \quad i = -\frac{U_0}{Z_0} e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{pro } z < 0 \quad (9.165)$$

Poznamenejme, že při tomto způsobu buzení jsou napětí v symetrických bodech vedení na obou stranách ve fázi, zatímco proudy jsou v protifázi.



Obr. 9.25. Ekvivalentní schéma elektrické vazby

Obr. 9.26. Ekvivalentní schéma magnetické vazby

Magnetickou vazbu lze uskutečnit smyčkovou volně vázanou k vedení a napájenou generátorem zapojeným v sérii s vedením. Ekvivalentní schéma této vazby je na obr. 9.26. Matematicky formulováno je

$$u' = U_0' e^{j(\omega t - kz)}, \quad i' = \frac{U_0'}{Z_0} e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{pro } z > 0 \quad (9.166)$$

$$u' = -U_0' e^{j(\omega t + kz)}, \quad i' = -\frac{U_0'}{Z_0} e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{pro } z < 0 \quad (9.167)$$

... a tím dosáhnout rovnosti amplitud symetrického a antisymetrického pole, jak to vyžadují vztahy (9.168) a (9.169). Podrobnější vzorce k určení velikosti vazebních otvorů viz [7]. Větších šířek frekvenčního pásma směrových odbočnic pro danou směrovost a odbočný úhel lze dosáhnout složitějšími vazebními systémy, avšak tuto úlohu musíme již ponechat speciální literatuře, např. [3], [4], [6], [7].

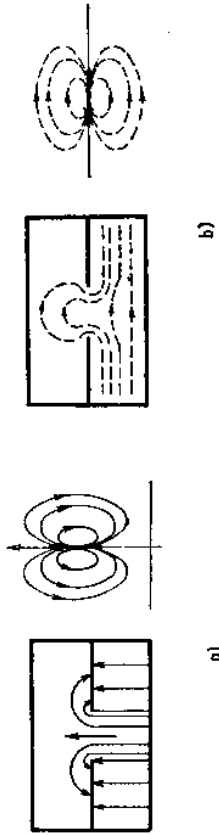
... a tím dosáhnout rovnosti amplitud symetrického a antisymetrického pole, jak to vyžadují vztahy (9.168) a (9.169). Podrobnější vzorce k určení velikosti vazebních otvorů viz [7]. Větších šířek frekvenčního pásma směrových odbočnic pro danou směrovost a odbočný úhel lze dosáhnout složitějšími vazebními systémy, avšak tuto úlohu musíme již ponechat speciální literatuře, např. [3], [4], [6], [7].

$$u = -(U_0 + U'_0) e^{i(\omega t - kz)}; \quad i = \frac{1}{Z_0} (U_0 + U'_0) e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{pro } z > 0 \quad (9.168)$$

$$u = (U_0 - U'_0) e^{i(\omega t + kz)}; \quad i = -\frac{1}{Z_0} (U_0 - U'_0) e^{i(\omega t + kz)} \quad \text{pro } z < 0 \quad (9.169)$$

Dosáhneme-li pak vazbou toho, že $U_0 = U'_0$, je $u = 0$ pro $z < 0$ a vlna šířící se doleva zaniká. Opačně zase dosáhneme-li $U_0 = -U'_0$, zanikne vlna šířící se doprava.

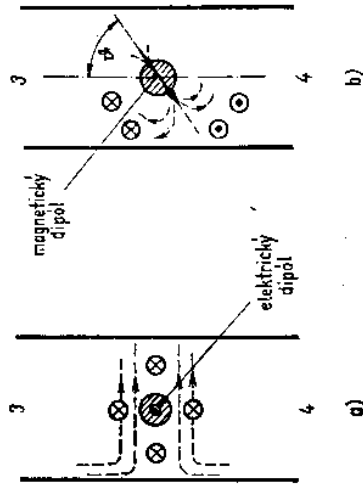
Princip činnosti Bethého odbočnice vysvětlíme pomocí kmitajícího elektrického a magnetického dipólu ve vazebním otvoru. Oba dipóly podle Bethého teorie vzniknou působením pole postupné vlny v základním vlnovodu. Předpokládá se, že průměr otvoru je malý v porovnání s vlnovou délkou a že je otvor daleko od bočních stěn vlnovodu. Oba dipóly generují elektromagnetické vlny podobně jako při paralelní a sériové vazbě generátoru k vedení. Vznik elektrického a magnetického dipólu ve vazebním otvoru si lze představit podle obr. 9.27. Elektrické pole



Obr. 9.27. Vazba malým otvorem
a) elektrická vazba a odpovídající elektrický dipól, b) magnetická vazba a odpovídající magnetický dipól

vybuzené elektrickým dipólem v horním vlnovodu je v blízkosti otvoru symetrické na jeho obou stranách, souhlasně se vztahy (9.164) a (9.165). Magnetický dipól rovněž vybudí elektrické pole po obou stranách otvoru, avšak toto pole je vzhledem k otvoru antisymetrické opět v soulahu se vztahy (9.166) a (9.167). Oba případy jsou znázorněny na obr. 9.28. Z tohoto obrázku je zřejmé, že vlny směřující do ramene 4 se vzájemně ruší a v rameni 3 se sčítají. Vzhledem k nestejně velikosti obou vazeb je nutné osu vedlejšího vlnovodu pootočit o úhel θ . Změnou tohoto

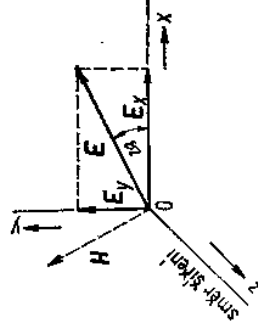
... a tím dosáhnout rovnosti amplitud symetrického a antisymetrického pole, jak to vyžadují vztahy (9.168) a (9.169). Podrobnější vzorce k určení velikosti vazebních otvorů viz [7]. Větších šířek frekvenčního pásma směrových odbočnic pro danou směrovost a odbočný úhel lze dosáhnout složitějšími vazebními systémy, avšak tuto úlohu musíme již ponechat speciální literatuře, např. [3], [4], [6], [7].



Obr. 9.28. Vazba malým otvorem
a) elektrické pole vybuzené elektrickým dipólem,
b) elektrické pole vybuzené magnetickým dipólem

9.3.4. Kruhová polarizace v mikrovlnných obvodech

Vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y}$ rovinné vlny šířící se ve volném prostoru zachovává neustále svůj směr. Rovina daná směrem šíření vlny a vektorem elektrického pole se nazývá rovinou polarizace a o samotné vlně říkáme, že je lineárně polarizovaná (obr. 9.29). Je-li směr vektoru \mathbf{E} libovolný,



Obr. 9.29. Lineárně polarizovaná vlna

můžeme jej rozložit na dvě vzájemně kolmé složky E_x a E_y . Je-li $E_y = 0$ a $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}$, říkáme, že je vlna polarizovaná horizontálně; je-li $E_x = 0$ a $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}$, je vlna polarizovaná vertikálně. Obě složky E_x a E_y mohou mít různé amplitudy fáze, avšak obě složky mají stejnou frekvenci, vlnovou délku i fázovou rychlost. Z toho je zřejmé, že každá vlna, jejíž elektrický vektor svírá rovinou xOz libovolný úhel θ , může být rozložena na dvě vlny; vlnu polarizovanou vertikálně a vlnu polarizovanou horizontálně.

Vyšetříme nyní superpozici takových vln. Předpokládejme, že obě jsou vzájemně fázově posunuty o úhel φ a mají různé amplitudy A^v a A^h . Tedy

$$\mathbf{E}_y = Y A^v e^{j(\omega t - kz + \varphi)} \quad (9.170)$$

$$\mathbf{E}_x = X A^h e^{j(\omega t - kz)} \quad (9.171)$$

a) Je-li $\varphi = 0$, leží vektor \mathbf{E} v rovině polarizace svírající s rovinou xOz konstantní na čase nezávislý úhel

$$\vartheta = \arctg \frac{E_y}{E_x} = \arctg \frac{A^v}{A^h} \quad (9.172)$$

a polarizace je lineární tak, jak bylo uvedeno na začátku se zvláštními případy vertikální ($E_x = 0$) a horizontální ($E_y = 0$) polarizace.

b) Položíme $A^h = A^v = A$ a $\varphi = \pm \pi/2$, pak

$$E_x = A \cos(\omega t - kz) \quad (9.173)$$

$$E_y = \mp A \sin(\omega t - kz) \quad (9.174)$$

a úhel

$$\vartheta = \arctg \frac{E_y}{E_x} = \arctg [\mp \operatorname{tg}(\omega t - kz)] = \mp(\omega t - kz) \quad (9.175)$$

se mění se vzdáleností z a časem. Při $z = \text{konst}$ se vektor \mathbf{E} otáčí s úhlovou rychlostí ω okolo osy šíření vlny Oz . Konec vektoru intenzity elektrického pole se zřejmě pohybuje po kružnici, o čemž se přesvědčíme tím, že z rovnic (10.173) a (10.174) vyloučíme čas. Položíme $z = 0$, pak $E_x = A \cos \omega t$, $E_y = \mp A \sin \omega t$. Povyššíme-li obě rovnice na druhou, dostaneme po sečtení rovnici kružnice s poloměrem A

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2 \quad (9.176)$$

Taková vlna se nazývá *kruhově polarizovaná*. Na dráze rovné délce vlny se otočí vektor intenzity elektrického pole právě jednou dokola. Při šíření vlny opisuje konec vektoru intenzity elektrického pole šroubovici.

c) Je-li $A^h \neq A^v$, pak při stejném fázovém posunu $\varphi = \pm \pi/2$ dostaneme analogicky

$$E_x = A^h \cos(\omega t - kz) \quad (9.176)$$

$$E_y = \mp A^v \sin(\omega t - kz) \quad (9.177)$$

Vyloučením proměnné t z obou vztahů dostaneme rovnici elipsy

$$\left(\frac{E_x}{A^h}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A^v}\right)^2 = 1 \quad (9.178)$$

s poloosami A^v a A^h . O takové vlně se říká, že je *elipticky polarizovaná*. Je tedy kruhově polarizovaná vlna zvláštním případem vlny elipticky polarizované. Je zřejmé, že se vektor intenzity magnetického pole rovněž otáčí, avšak jeho koncový bod se pohybuje po jiné elipse.

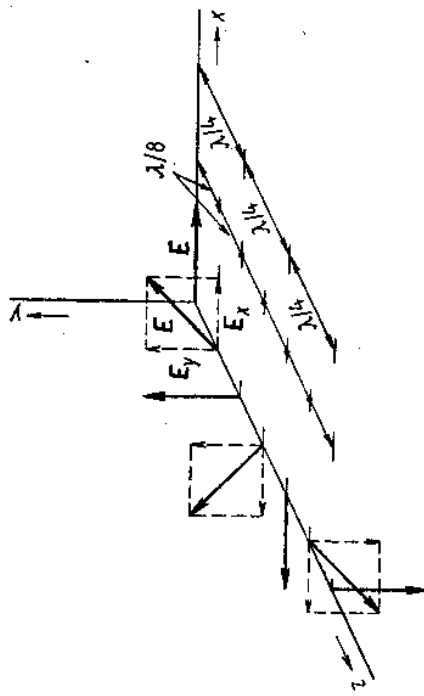
Pro praktické účely je důležité znát směr otáčení vektoru intenzity elektrického pole. Směr otáčení porovnáme se směrem pravotočivého šroubu. Pravotočivě

kruhově polarizovaná vlna bude taková, jejíž vektor se bude otáčet doprava, jestliže se vlna šíří směrem od pozorovatele. Nakreslíme-li časovou posloupnost vektorových součtů vztahů (9.173) a (9.174) tak, jak je to znázorněno na obr. 9.30, zjistíme vztahy pro vzájemně kolmé složky vektoru intenzity elektrického pole: pro pravotočivé vlny

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= X A e^{j(\omega t - kz)} \\ \mathbf{E}_y &= Y A e^{j(\omega t - kz - \pi/2)} \end{aligned} \quad (9.179)$$

a pro levotočivé vlny

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= X A e^{j(\omega t - kz)} \\ \mathbf{E}_y &= Y A e^{j(\omega t - kz + \pi/2)} \end{aligned} \quad (9.180)$$



Obr. 9.30. Časová posloupnost polohy vektoru \mathbf{E} pravotočivě kruhově polarizované vlny

Zajímavá situace nastane při odrazu kruhově polarizované vlny. Levotočivá vlna se šíří v kladném směru z a dopadá na rovinu odrazu v místě $z = 0$, takže

$$\mathbf{E} = A(\mathbf{x} + j\mathbf{y}) e^{j\omega t}$$

Vlna se odráží a v místě odrazu ($z = 0$) je

$$\mathbf{E} = \epsilon_0 A(\mathbf{x} + j\mathbf{y}) e^{j\omega t}$$

kde ϵ_0 je činitel odrazu v místě $z = 0$. Vlna se po odrazu šíří opačným směrem, tj. ve směru $-z$, což vyjádříme činitelem $e^{j(\omega t + kz)}$, takže v libovolném místě je

$$\mathbf{E} = \epsilon_0 A(\mathbf{x} + j\mathbf{y}) e^{j(\omega t + kz)} \quad (9.181)$$

Směr otáčení zůstal stejný, ale směr šíření se vzhledem k pozorovateli změnil. Pro původního pozorovatele je to tedy vlna pravotočivá.

d) Každá lineárně polarizovaná vlna může být rozložena na dvě kruhově polarizované vlny — pravotočivou a levotočivou. Tak např. horizontálně polarizovaná

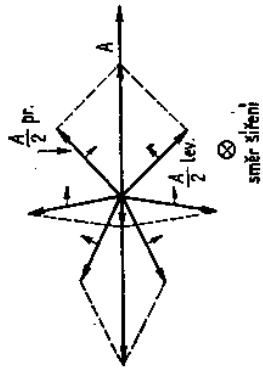
vlnu rozložíme

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}A e^{-ikz} = \frac{A}{2} [(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \mathbf{y})] e^{-ikz}$$

nebo

$$\mathbf{E} = \frac{A}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{y} e^{i\pi/2}) e^{-ikz} + \frac{A}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{y} e^{-i\pi/2}) e^{-ikz} \quad (9.182)$$

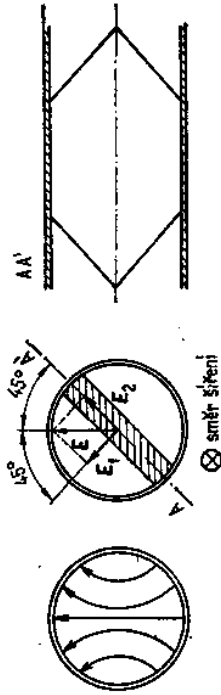
První člen na pravé straně představuje zřejmě vlnu levotočivou a druhý vlnu pravotočivou. Rozklad je znázorněn na obr. 9.31.



Obr. 9.31. Rozklad lineárně polarizované vlny na dvě kruhově polarizované vlny

9.3.5. Kruhové polarizátory

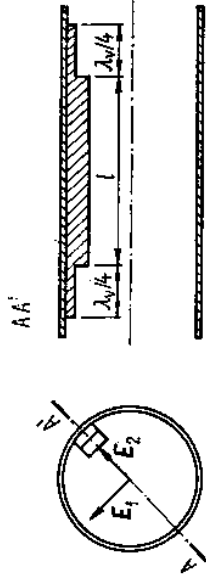
V tomto odstavci se budeme zabývat způsobem vytváření kruhově polarizovaných vln z vlny lineárně polarizované ve vlnovodu kruhového průřezu. K tomu je nutné lineárně polarizovanou vlnu rozložit na dvě vzájemně kolmé složky se stejnými amplitudami a pak jednu oproti druhé fázově posunout o 90° . Z vidů v kruhovém vlnovodu se k tomu hodí dominantní vid TE_{11} . Pro vytvoření kruhově polarizovaných vln z vln lineárně polarizovaných se používají tzv. *kruhové polarizátory*. Kruhový polarizátor s dielektrickou lištou je znázorněn schematicky na obr. 9.32a, b. Na obr. 9.32a je nakresleno rozložení příčné složky elektrického pole



Obr. 9.32. Kruhový polarizátor s dielektrickou lištou

vidu TE_{11} , která je polarizována lineárně. Rozklad intenzity pole na dvě vzájemně kolmé složky je znázorněn na obr. 9.32b. Obě složky \mathbf{E}_1 a \mathbf{E}_2 svírají s vektorem \mathbf{E} úhel 45° . Ve směru vektoru \mathbf{E}_2 , tj. pod úhlem 45° ke svislé ose, je ve vlnovodu

umístěna dielektrická lišta. Činnost tohoto typu polarizátoru lze vysvětlit zhruba tak, že se vlna E_2 šíří v dielektrickém prostředí lišty, zatímco vlna E_1 v prostředí vzduchu, takže se vlna E_2 oproti E_1 opožďuje. Délka, tloušťka a permitivita dielektrické lišty musí být zvoleny tak, aby zpoždění bylo právě 90° . Všimněme si, že pro přizpůsobení je šířka lišty oboustranně zkosená. Hlavní nesází při návrhu tohoto polarizátoru je určení délky vlny ve vlnovodu, který je v podstatě v příčném průřezu nehomogenní. Jiný podobný typ polarizátoru dostaneme, nahradíme-li dielektrickou lištu kovovou lištou (obr. 9.33). Činnost tohoto polarizátoru můžeme opět zhruba vysvětlit tak, jakoby se vlnovod pro vlnu s intenzitou pole E_1 zúžil, čímž vzroste její fázová rychlost. Vlna s intenzitou pole E_1 fázově předběhne vlnu s E_2 . Délka a tloušťka lišty opět musí být určeny tak, aby vznikl fázový rozdíl 90° .



Obr. 9.33. Kruhový polarizátor s kovovou lištou

Fázový rozdíl 90° může být dosažen i jinými členy, např. pomocí kapacitního a indukčního kolíku nebo clonou ve vlnovodu. Zájemce o podrobnější výklad vytváření kruhově polarizovaných vln je nutné odkázat na speciální literaturu, např. [1], [3].

9.3.6. Rozptylová matice kruhového polarizátoru

Odvodíme nyní rozptylovou matici kruhového polarizátoru. Z hlediska dříve uvedené teorie by se mohlo zdát, že polarizátor je dvojitý, ale tak bychom nemohli vystihnout vlastnosti rozdílného chování polarizátoru ke dvěma vzájemně kolmým složkám intenzity elektrického pole. Budeme proto formálně předpokládat, že je polarizátor čtyřbran; první rameno pro E_1 , druhé rameno pro E_2 , ze třetího a čtvrtého ramene budou vlny jen vystupovat, a to s intenzitami pole E_3 a E_4 , mezi nimiž bude fázový posun -90° . Můžeme tedy pro vlny vstupující a vystupující psát

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -j & -j \end{bmatrix}$$

kde $\varphi = 2\pi l/\lambda_g$, přičemž l je délka lišty polarizátoru. Orientace vektorů elektrického pole a směru šíření vlny je schematicky znázorněna na obr. 9.34. Dosadíme-li do

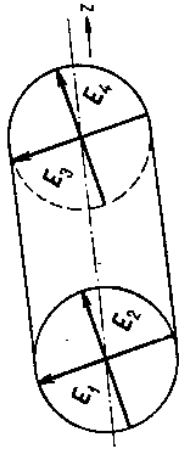
základní rovnice $\mathbf{D} = \mathbf{s}\mathbf{a}$, dostaneme

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

a po rozepsání

$$S_{11} + S_{12} = 0; \quad S_{12} + S_{22} = 0; \quad S_{13} + S_{23} = e^{-j\varphi};$$

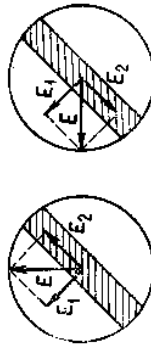
$$S_{14} + S_{24} = -je^{-j\varphi}$$



Obr. 9.34. Orientace ramen polarizátoru

Předpokládáme, že polarizátor je přizpůsoben, takže $s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{44} = 0$. Z principu jeho funkce vyplývá, že $s_{23} = s_{14} = 0$. Výsledný tvar rozptylové matice je

$$\mathbf{s} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.183)$$



a) b) Obr. 9.35.

Zbývá ještě vysvětlit použití rozptylové matice polarizátoru. Mohou nastat čtyři případy:

a) Vlna je polarizována lineárně a rovina polarizace je svislá (obr. 9.35a), takže je-li $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$, bude na výstupu polarizátoru

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{a} \\ -j\mathbf{a} \end{bmatrix} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{a} \\ -j\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (9.184)$$

Vlna na výstupu je kruhově polarizována a pravotočivá [porovnejme s (9.179)].

b) Vlna je polarizována lineárně ve vodorovné rovině (obr. 9.35b). Je-li $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$, je na výstupu

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{a} \\ j\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (9.185)$$

Opět porovnáním s (9.179) zjistíme, že je vlna polarizována kruhově a je levotočivá.

c) Na vstupu polarizátoru je pravotočivá kruhově polarizovaná vlna, tedy $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2 = -j\mathbf{a}$. Na výstupu je

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ -j\mathbf{a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{a} \\ -\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (9.186)$$

tedy vlna polarizována lineárně ve vodorovné rovině.
d) Analogicky zjistíme, že vstupní levotočivě kruhově polarizovaná vlna se transformuje ve vlnu lineárně polarizovanou ve svislé rovině.

Pro zajímavost můžeme ještě dodat, že nahradíme-li v matici (9.183) členy $s_{24} = s_{42}$ zápornou jedničkou, dostaneme rozptylovou matici tzv. *přelivového polarizátoru*, který posouvá fázi o 180° a může být použit pro transformaci pravotočivé kruhově polarizované vlny na levotočivou kruhově polarizovanou vlnu.

K přenosu kruhově polarizovaných vln lze použít vlnodů kruhově polarizovanou vlnu nebo čtvercového průřezu. Obdélníkovým vlnodům to možné není. Lineárně polarizovaná vlna je však obdélníkovým vlnodem vedena pevně, kdežto v kruhovém nebo čtvercovém vlnodě to tak není. Mohou se v nich totiž současně vytvořit dva na sebe kolmé základní vidy. I velmi malé nehomogenity (např. číptičnost), které jinak mohou být impedančně téměř nezávadné, vyvolají nežádoucí natočení roviny polarizace, které je nutné dodatečně korigovat.

9.3.7. Kruhově polarizované magnetické pole v obdélníkovém vlnodě s vlnou TE₁₀

Nahlédnutím do vztahu (3.17) pro složky magnetického pole vidů TE v obdélníkovém vlnodě zjistíme, že rozložení magnetického pole dominantního vidu TE₁₀ je určeno dvěma vzájemně kolmými složkami intenzity pole H_x a H_z vzájemně fázově posunutými o 90° . Může být tedy magnetické pole dominantního vidu v obdélníkovém vlnodě kruhově polarizováno. Určíme polohu a charakter tohoto pole. Pro zmíněné složky pole přímé vlny TE₁₀ platí

$$H_x = j\omega C \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jz}$$

$$H_z = C I^2 \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jz} \quad (9.188)$$

Zvolíme velikost složky H_x tak, že $CI' = 1$ a dosadíme za integrační konstantu C v první rovnici pomocí vztahu $I_{10} = \pi/a = 2\pi/\lambda_m$. Pak

$$H_x = j \frac{\lambda_m}{\lambda_y} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jz} \quad (9.189)$$

$$H_z = \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jz} \quad (9.190)$$

Uuríme nyní dvě podélné symetrické roviny, v nichž je $|H_x| = |H_z|$ takové, že je v nich magnetické pole kruhově polarizované. Porovnáním (9.189) a (9.190) dostaneme

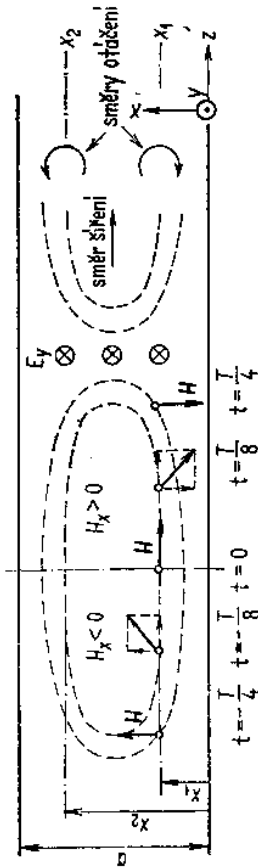
$$\frac{\lambda_m}{\lambda_y} \sin \frac{\pi}{a} x = \cos \frac{\pi}{a} x \quad (9.191)$$

a odtud

$$x_1 = \frac{a}{\pi} \arctg \frac{\lambda_y}{2a} \quad (9.192)$$

Vzhledem k podélné symetrii pole ve vinovodu je

$$x_2 = a - x_1 \quad (9.193)$$



Obr. 9.36. Kruhová polarizace magnetického pole vidu TE_{10} v obdélníkovém vinovodu

Smysl otáčení vektoru magnetického pole vzhledem ke kladnému směru osy y zjistíme opět nakreslením časové posloupnosti polohy vektoru H tak, jak to je znázorněno na obr. 9.36. Z něj vyplývá, že přímá vlna má magnetické pole v rovině x_1 levotočivě vzhledem ke kladnému směru osy y . Vzhledem k podélné symetrii je pole v rovině x_2 pravotočivé. Pro zpětnou vlnu jsou oba směry otáčení v rovinách x_1 a x_2 opačné. K určení smyslu otáčení zvolíme např. ve (9.187) a (9.188) $z = 0$ a uvážíme směry polí v různých časových okamžicích kolem hodnoty $t = 0$. K tomu účelu položíme

$$H_x = jH = \text{Re} [jH e^{j\omega t}] = -H \sin \omega t \quad (9.194)$$

$$H_z = H = \text{Re} [H e^{j\omega t}] = H \cos \omega t \quad (9.195)$$

V rovině $x = x_1$:
V rovině $x = x_2$:
Přímá vlna:
Zpětná vlna:
levotočivá
pravotočivá
pravotočivá
levotočivá

Pomocí kruhově polarizovaných magnetických vln lze vysvětlit některé jevy v mikrovlnných obvodech. V obvodech s izotropním prostředím např. směrovost křížové odbočnice se dvěma otvory. V obvodech nerecipročních např. nereciproční rezonanční absorpci nebo činnost hvězdicového cirkulátoru apod. (viz odst. 10.4.2).

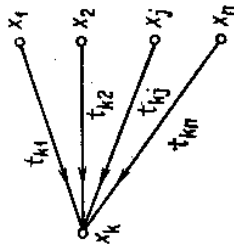
9.4. ANALÝZA MIKROVLNNÝCH OBVODŮ METODOU ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

V analýze lineárních obvodů se soustředěnými parametry se často používá metoda orientovaných grafů (také někdy nazývaná metodou grafů signálových toků). Tuto metodu můžeme úspěšně použít i při vyšetřování obvodů s rozloženými parametry. Zopakujeme nejdříve některé základní pojmy používané v této metodě.

Orientovaný graf je tvořen soustavou uzlů, které reprezentují všechny nezávisle i závisle proměnné veličiny obvodu, tzv. uzlové signály. Uzly jsou navzájem spojeny orientovanými větvemi, které vyjadřují vztahy mezi příslušnými uzlovými signály (tzv. přenosy větví). Šipka na větvi směřuje od nezávisle proměnné k závisle proměnné veličině. Tak např. přenos t_{kj} vyjadřuje větev mezi j -tým a k -tým uzlem, s orientací (šipkou) ve stejném směru. Uzlový signál k -tého uzlu x_k je určen algebraickým součtem signálů vcházejících větví, tedy

$$x_k = \sum_{j=1}^n t_{kj} x_j \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

kde n je počet větví vcházejících do k -tého uzlu. Tento vztah můžeme vyjádřit orientovaným grafem podle obr. 9.37.



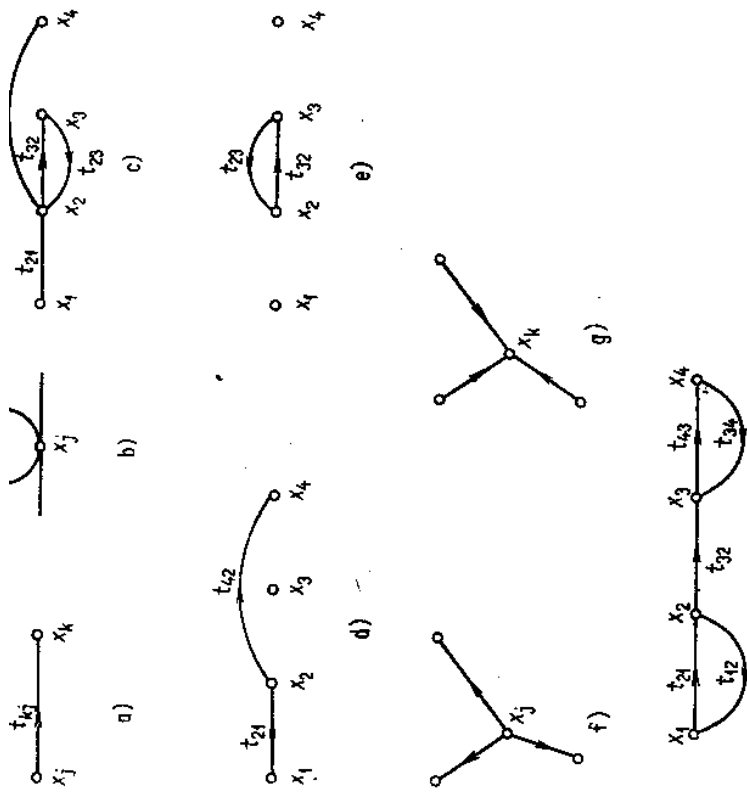
Obr. 9.37.

9.4.1. Definice základních pojmů a jejich grafické interpretace

Větev je přímá spojnice dvou uzlů (obr. 9.38a).

Vlastní smyčka je větev, která začíná a končí v témže uzlu (obr. 9.38b).

Cesta je spojení souhlasně orientovaných větví mezi dvěma uzly (obr. 9.38c).



Obr. 9.38.

Přímá cesta je cesta, v níž se každý uzel vyskytuje jen jednou (obr. 9.38d).
Smyčka (smyčka prvního řádu) je cesta, která má shodný počáteční a koncový uzel (obr. 9.38e).

Přenos přímé cesty je dán součinem přenosů všech větvi přímé cesty. Na obr. 9.38d to je $t_{41} = t_{21}t_{32}$.

Přenos smyčky je součin přenosů všech větvi smyčky.

Přímý graf má pouze přímé cesty.

Smyčkový graf obsahuje alespoň jednu smyčku nebo vlastní smyčku (např. graf na obr. 9.45).

Zřídlo je uzel, který není koncovým uzlem žádné větve. Větve z něj pouze vystupují (obr. 9.38f).

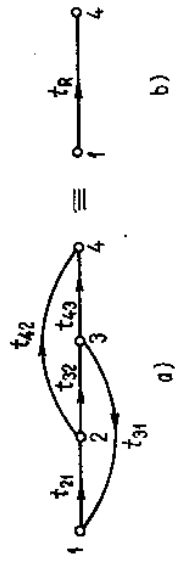
Nora je uzel, který není počátečním uzlem žádné větve. Větve do nory pouze vstupují (obr. 9.38g).

Smyčka n-tého řádu je tvořena n smyčkami prvního řádu, které nemají společné uzly. Na obr. 9.38h je znázorněna smyčka druhého řádu.

Přenos smyčky n-tého řádu $f^{(n)}$ je roven součinu přenosů jednotlivých n smyček prvního řádu. Na obr. 9.38h to je $f^{(2)} = t_{21}t_{12}t_{43}t_{34}$.

K zjednodušení orientovaného grafu používáme některé operace, z nichž uvedeme pouze základní.

1. *Reziduální graf přímého grafu* je tvořen pouze dvěma uzly a jedinou větví. Libovolný přímý orientovaný graf můžeme převést na reziduální graf. Uzly reziduálního grafu odpovídají těm uzlům původního grafu, jejichž vzájemný přenos vyšetřujeme. Přenos spojující větve reziduálního grafu je roven součtu přenosů všech přímých cest mezi vyšetřovanými uzly. Tuto úpravu vysvětlíme na příkladu.



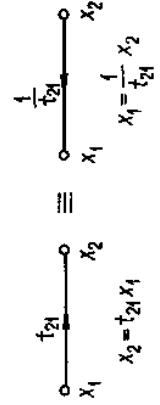
Obr. 9.39.

Orientovaný graf na obr. 9.39a převedeme na reziduální graf mezi uzly 1-4. Podle definice jsou v tomto grafu tři přímé cesty s přenosy $t_1 = t_{21}t_{32}t_{43}$, $t_2 = t_{21}t_{42}$ a $t_3 = t_{31}t_{43}$. Výsledný přenos reziduálního grafu na obr. 9.39b je tedy

$$t_R = t_1 + t_2 + t_3 = t_{21}t_{32}t_{43} + t_{21}t_{42} + t_{31}t_{43}$$

2. *Inverze* je vzájemná záměna závislých a nezávislých veličin, tj. záměna počátečního a koncového uzlu větve nebo cesty.

Inverze izolované větve (tj. větve, k jejímuž uzlu není připojena žádná další větev) spočívá ve změně orientace větve a změně přenosu větve na recipročnou hodnotu původního přenosu (obr. 9.40).



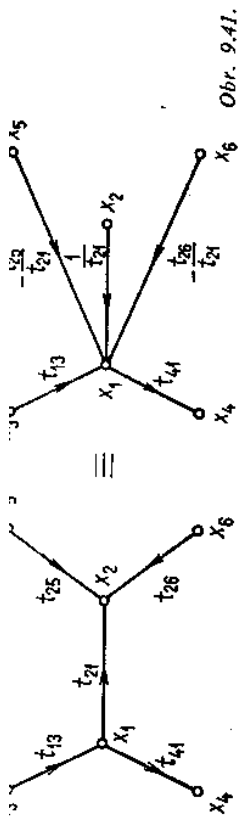
Obr. 9.40.

Invertujeme-li neizolovanou větev, pak se kromě orientace a přenosu změni i ty větve grafu, které původně končily v koncovém uzlu neinvertované větve. Po inverzi budou tyto větve končit v novém koncovém uzlu invertované větve a jejich původní přenosy je nutné vynásobit přenosem invertované větve s opačným znaménkem. Příklad inverze neizolované větve mezi uzly $x_1 - x_2$ je znázorněn na obr. 9.41. Uzlový signál x_2 (závisle proměnná) před inverzí je

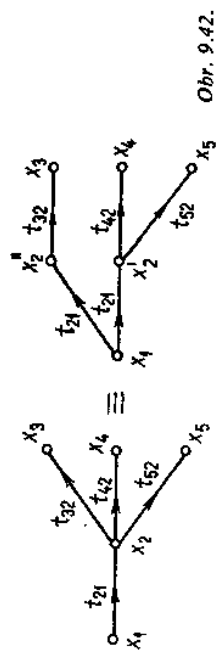
$$x_2 = t_{21}x_1 + t_{25}x_5 + t_{26}x_6$$

a po inverzi této větve bude uzlový signál x_1 (nová závisle proměnná)

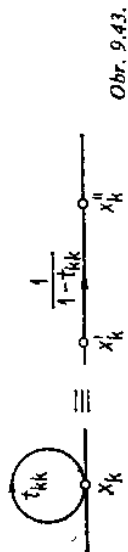
$$x_1 = \frac{1}{t_{21}}x_2 - \frac{t_{25}}{t_{21}}x_5 - \frac{t_{26}}{t_{21}}x_6 + t_{13}x_3$$



Obr. 9.41.



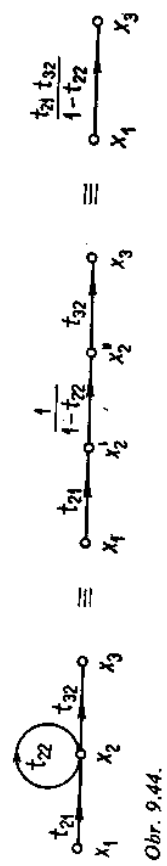
Obr. 9.42.



Obr. 9.43.

3. Rozštěpení vnitřního uzlu grafu. Každý vnitřní uzel grafu (uzel, který není ani norou, ani zřídlem) lze rozštěpit na dva uzly, na něž pohlédneme jako na samostatné uzly. Příklad rozštěpení je na obr. 9.42, kde je rozštěpen uzel x_2 .

4. Vyloučení vlastní smyčky a smyčky. Vlastní smyčku v uzlu x_k s přenosem t_{kk} nahradíme reziduálním grafem mezi uzly x_k' a x_k'' s přenosem $1/(1 - t_{kk})$ podle obr. 9.43. Vyloučení vlastní smyčky a vnitřního uzlu je postupně naznačeno v obr. 9.44.



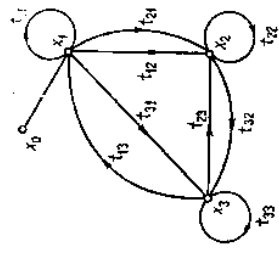
Obr. 9.44.

9.4.3. Určování hledaných veličin

Pro sestrojení grafu obvykle hledáme přenos mezi dvěma uzly grafu buď postupným zjednodušováním, nebo použitím Masonova vzorce. Tento vzorec umožňuje přímý výpočet přenosu mezi zřídlem a libovolným uzlem grafu bez předběžných úprav. Přenos t_{10} mezi zřídlem x_0 a libovolným uzlem x_i grafu je dán

$$t_{10} = \frac{x_i}{x_0} = \frac{\sum_k t_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\sum_k t_k \Delta_k}{1 - \sum_j t_j^{(1)} + \sum_j t_j^{(2)} - \sum_j t_j^{(3)}}$$

kde Δ je determinant grafu, $t_j^{(n)}$ přenos j -té smyčky n -tého řádu, t_k přenos k -té přímé cesty z x_0 do x_i , Δ_k determinant té části grafu, jejíž větve se nedotýkají uzlu k -té přímé cesty.



Obr. 9.45.

Použití Masonova vzorce objasníme příkladem výpočtu přenosu mezi uzly x_0 a x_2 v grafu na obr. 9.45. Daný graf obsahuje osm smyček prvního řádu s přenosy

$$t_1^{(1)} = t_{11}; \quad t_2^{(1)} = t_{22}; \quad t_3^{(1)} = t_{33}; \quad t_4^{(1)} = t_{12}t_{21}; \quad t_5^{(1)} = t_{33}t_{32};$$

$$t_6^{(1)} = t_{13}t_{31}; \quad t_7^{(1)} = t_{12}t_{23}t_{31}; \quad t_8^{(1)} = t_{13}t_{32}t_{21}$$

Z těchto osmi smyček prvního řádu nemá 6 dvojic smyček společný uzel, tj. graf obsahuje 6 smyček druhého řádu s přenosy

$$t_1^{(2)} = t_{11}t_{22}; \quad t_2^{(2)} = t_{11}t_{33}; \quad t_3^{(2)} = t_{22}t_{33}; \quad t_4^{(2)} = t_{11}t_{23}t_{32};$$

$$t_5^{(2)} = t_{22}t_{13}t_{31}; \quad t_6^{(2)} = t_{33}t_{12}t_{21}$$

V grafu jsou dále 3 smyčky, které nemají společný uzel neboli tzv. jedna smyčka třetího řádu s přenosem

$$t_1^{(3)} = t_{11}t_{22}t_{33}$$

Determinant grafu podle Masonova vzorce je tedy

$$\Delta = 1 - t_{11} - t_{22} - t_{33} - t_{12}t_{21} - t_{23}t_{32} - t_{13}t_{31} - t_{12}t_{23}t_{31} -$$

$$- t_{13}t_{32}t_{21} + t_{11}t_{22} + t_{11}t_{33} + t_{22}t_{33} + t_{11}t_{23}t_{32} + t_{22}t_{13}t_{31} +$$

$$+ t_{33}t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22}t_{33}$$

Ze zřídla x_0 do koncového uzlu x_2 jsou v grafu dvě přímé cesty.

I. přímá cesta: $x_0 - x_1 - x_2$ s přenosem $t_1 = t_{21}$. Determinant části grafu nedotýkající se této cesty je $\Delta_1 = 1 - t_{33}$.

II. přímá cesta: $x_0 - x_1 - x_3 - x_2$, s přenosem $t_2 = t_{31}t_{23}$ a determinantem $\Delta_2 = 1$.

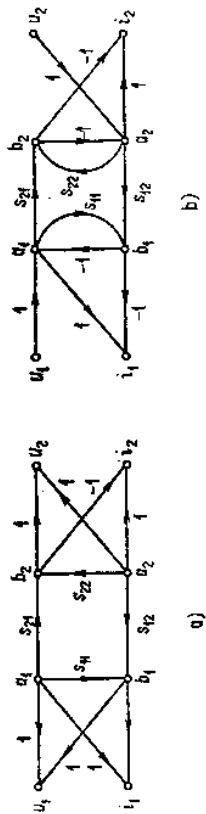
Po dosazení do Masonova vzorce dostaneme hledaný přenos

$$t_{20} = \frac{x_2}{x_0} = \frac{t_{21}(1 - t_{33}) + t_{31}t_{23}}{A}$$

9.4.4. Řešení mikrovlnných obvodů metodou grafů

V tomto odstavci uvedeme několik příkladů aplikace metody grafů k řešení mikrovlnných obvodů.

PŘÍKLAD 1: Grafický převod normovaných rozptylových parametrů mikrovlnného dvojbranu na normované admitanční parametry.



Obr. 9.46.

Orientovaný graf mikrovlnného dvojbranu popsaného vztahy (9.45), (9.33) a (9.34) je na obr. 9.46a. Máme tedy převést vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{s}_{11}\mathbf{a}_1 + \mathbf{s}_{12}\mathbf{a}_2 & \text{přičemž} & \quad \mathbf{u}_j = \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{s}_{21}\mathbf{a}_1 + \mathbf{s}_{22}\mathbf{a}_2 & & \quad \mathbf{i}_j = \mathbf{a}_j - \mathbf{b}_j \end{aligned} \quad (j = 1, 2)$$

na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \mathbf{y}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{y}_{21}\mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

V těchto posledních dvou rovnicích jsou veličiny \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 známé, tj. v terminologii metody grafů jsou to zřídla. Z toho důvodu musíme v grafu na obr. 9.46a invertovat větve $\mathbf{a}_1 - \mathbf{u}_1$ a $\mathbf{a}_2 - \mathbf{u}_2$. Z takto získaného grafu (obr. 9.46b) můžeme pomocí Masonova vzorce snadno vyjádřit admitanční parametry dvojbranu

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{i}_1}{\mathbf{u}_1} \Big|_{\mathbf{u}_2=0} = \frac{(1 + \mathbf{s}_{22})(1 - \mathbf{s}_{11}) + \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{21}}{(1 + \mathbf{s}_{11})(1 + \mathbf{s}_{22}) - \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{21}}$$

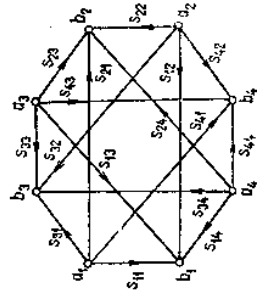
$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{i}_1}{\mathbf{u}_2} \Big|_{\mathbf{u}_1=0} = \frac{2\mathbf{s}_{12}}{(1 + \mathbf{s}_{11})(1 + \mathbf{s}_{22}) - \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{21}}$$

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\mathbf{i}_2}{\mathbf{u}_1} \Big|_{\mathbf{u}_2=0} = \frac{2\mathbf{s}_{21}}{(1 + \mathbf{s}_{11})(1 + \mathbf{s}_{22}) - \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{21}}$$

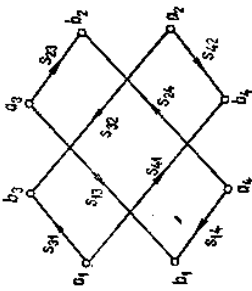
$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{i}_2}{\mathbf{u}_2} \Big|_{\mathbf{u}_1=0} = \frac{(1 + \mathbf{s}_{11})(1 - \mathbf{s}_{22}) + \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{21}}{(1 + \mathbf{s}_{11})(1 + \mathbf{s}_{22}) - \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{21}}$$

4.4.4.4. Orientovaný graf čtyřbranu

Soustava rovnic získaná rozepsáním vztahu (9.45) pro čtyřbran může být reprezentována orientovaným grafem podle obr. 9.47. Je-li tento čtyřbran magické T, pak z (9.136) vyplývá $\mathbf{s}_{11} = \mathbf{s}_{22} = \mathbf{s}_{33} = \mathbf{s}_{44} = \mathbf{s}_{44} = \mathbf{s}_{12} = \mathbf{s}_{34} = 0$ a graf se zjednoduší na tvar podle obr. 9.48. Na příkladu výpočtu přenosu mezi některými rameny můžeme ukázat přednosti použití popisované metody.



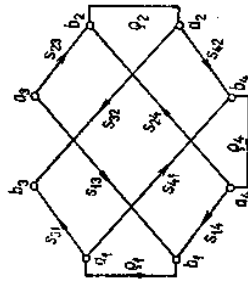
Obr. 9.47.



Obr. 9.48.

Máme vyšetřit přenos mezi rameny 3 a 4 magického T napájeného do třetího ramene, jsou-li k ramenům 1, 2 a 4 připojeny zátěže s činiteli odrazu ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_4 . Podle obr. 9.49 platí vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{s}_{13}\mathbf{a}_3 + \mathbf{s}_{14}\mathbf{a}_4; & \mathbf{a}_1 &= \varrho_1\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{s}_{23}\mathbf{a}_3 + \mathbf{s}_{24}\mathbf{a}_4; & \mathbf{a}_2 &= \varrho_2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{s}_{31}\mathbf{a}_1 + \mathbf{s}_{32}\mathbf{a}_2; & \mathbf{a}_3 &= \varrho_3\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 &= \mathbf{s}_{41}\mathbf{a}_1 + \mathbf{s}_{42}\mathbf{a}_2; & \mathbf{a}_4 &= \varrho_4\mathbf{b}_4 \end{aligned}$$



Obr. 9.49.

Řešením těchto rovnic dostaneme pro přenos mezi rameny 3 a 4 výraz

$$t_{43} = \frac{\mathbf{b}_4}{\mathbf{a}_3} = \frac{\mathbf{s}_{23}\varrho_2\mathbf{s}_{42} + \mathbf{s}_{13}\varrho_1\mathbf{s}_{41}}{1 - \varrho_4(\varrho_1\mathbf{s}_{41}\mathbf{s}_{14} + \varrho_2\mathbf{s}_{42}\mathbf{s}_{24})}$$

Použijeme-li Masonův vzorec, dostaneme výsledek rychleji:

1. v grafu jsou dvě smyčky prvního řádu s přenosy $\varrho_1\mathbf{s}_{41}\varrho_4\mathbf{s}_{14}$ a $\varrho_2\mathbf{s}_{42}\varrho_4\mathbf{s}_{24}$, takže determinant grafu je $\Delta = 1 - \varrho_1\mathbf{s}_{41}\varrho_4\mathbf{s}_{14} - \varrho_2\mathbf{s}_{42}\varrho_4\mathbf{s}_{24}$.
2. V grafu jsou dvě přímé cesty $\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_4$ s přenosy $\mathbf{s}_{23}\varrho_2\mathbf{s}_{42}$ a $\mathbf{s}_{13}\varrho_1\mathbf{s}_{41}$.

Určování času grafu neodokrajden se velmi ceni, jsou $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$. Losami-
me-li dříve výsledky do Masonova vzorce, bude se konečný výsledek shodovat
s výsledkem získaným analyticky. Je však zřejmé, že použití metody grafů vede
k cíli podstatně rychleji. Další příklady použití metody grafů viz např. [10].

Literatura ke kapitole 9.

- [1] *Montgomery, C. G. - Dicke, R. H. - Purcell, E. M.*: Principles of Microwave Circuits, New York, McGraw-Hill Book Comp. 1948.
- [2] *Hanika, L.*: Teorie elektromagnetického pole, Praha, SNTL 1975.
- [3] *Altman, J. L.*: Microwave circuits, New York, D. Van Nostrand Comp. Inc. 1964.
- [4] *Boudouris, G. - Chenevier, P.*: Čepi svěřchvysokých častot (překl. z franc.). Moskva, Sovětskoje radio 1979.
- [5] *Feldštein, A. L. - Javič, L. R.*: Sintéz čtyřechpolusnikov i vosmipolusnikov na SVČ. Moskva, Izd. Svjaz 1971.
- [6] *Montgomery, C. G.*: Te chnique of Microwave Measurements. New York, McGraw-Hill Book Comp. 1947.
- [7] *Vrba, J.*: Měření na centimetrových vlnách, díl I. Praha, SNTL 1958.
- [8] *Sazonov, D. M. - Gridin, A. N. - Mišustin, B. A.*: Ustrojstva SVČ. Moskva, Vyššaja škola 1981.
- [9] *Helszajn, J.*: Passivnye i aktivnye čepi SVČ (překl. z angl.) Moskva, Radio i svjaz 1981.
- [10] *Sitafee, M. A. - Brjancev, S. F.*: Priloženije matric i grafov k analizu SVČ ustrojstv. Moskva, Sovětskoje radio 1970.
- [11] *Kvasil, B.*: Teorie prostorových 2n-polů. Praha, Academia 1967.
- [12] *Tysl, V.*: Obvody a technika velmi vysokých kmitočtů II. Skriptum. Praha, Ediční středisko ČVUT 1983.

10. Mikrovlnné nereziproční obvody

10.1. OBECNÉ VLASTNOSTI NERECIPROČNÍCH MIKROVLNNÝCH OBVODŮ

V této kapitole se budeme zabývat šířením elektromagnetických vln v anizotropním prostředí, a to v tzv. *gyrotropním prostředí*. Anizotropie tohoto prostředí je způsobena precesním pohybem mikroskopických magnetických dipólů nebo elektrických nábojů. Prostředí, v němž je permeabilita tenzorovou veličinou a permitivita skalární veličinou, nazýváme *gyromagnetickým* a prostředí, v němž je naopak permitivita tenzorovou veličinou a permeabilita skalární veličinou, nazýváme *gyroelektrickým*. Představitelem gyroelektrického prostředí je např. ionosféra v magnetickém poli Země. Představitelem gyromagnetického prostředí jsou ferity – syntetické magnetodielektrické materiály.

10.1.1. Složení a struktura feritů

Ferity jsou feromagnetické látky s velkou rezistivitou [$\rho = (10^4 \text{ až } 10^6) \Omega \cdot \text{m}$, $\epsilon_r = 8 \text{ až } 17$, $\text{tg } \delta = 10^{-2} \text{ až } 10^{-3}$]. V podstatě jsou to sloučeniny kyslíčnicků trojmocného železa a některého dvojmocného kovu typu MOFe_2O_3 , kde M znamená některý dvojmocný kov (Mn, Ni, Co, Mg apod.). Jejich vlastnosti závisejí na krystalické struktuře. Ferity mohou být polykrystalické i monokrystalické. Zmíněné typy feritů krystalují v kubické mřížce minerálu spinelu, bývají proto nazývány ferospinelny. Zvláštní skupinu mezi magnetickými polovodiči tvoří ferity¹⁾ vzácných zemin se strukturou granátu $3\text{M}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{Fe}_2\text{O}_3$, kde M je symbol prvku vzácných zemin (Y – yttrium, Gd – gadolinium atd.). Nejčastěji používaný je monokrystalický yttrioželeznatý ferit²⁾ $\text{Y}_3\text{Fe}_5(\text{FeO}_4)_3$ pro svou vysokou kvalitu (velmi úzká rezonanční křivka). Polykrystalické ferity se získávají spékáním a mechanickými vlastnostmi se podobají keramice. Monokrystaly se vyrábějí krystalizací z roztoku nebo krystalizací z taveniny (metoda Verneuilova). V současné praxi mikrovlnných obvodů se používá mnoho různých typů feritů.

¹⁾ Názvem ferit se v naší technické praxi označují všechny ferimagnetické nebo feromagnetické látky uvedeného typu. Rozlišují se pouze ferity se spinelovou, granátovou nebo hexagonální strukturou. V americké literatuře se jako ferity označují pouze sloučeniny se spinelovou strukturou.

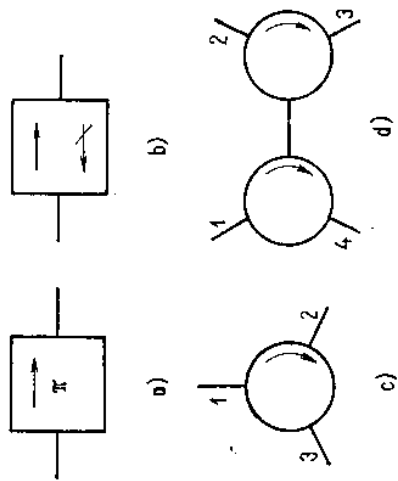
²⁾ V anglosaské literatuře bývá tento typ feritu označován zkratkou YIG (Yttrium Iron Garnet).

Na zaver docejme, ze v polykrystalickech feritech se anizotropie vyvolava pomoci vnějšho magnetického pole, kdežto monokrystalicke ferity jsou anizotropní i bez tohoto pole.

10.1.2. Rozdělení obvodů s ferity

Mikrovlnné obvody s ferity mohou být rozděleny v podstatě do dvou skupin. V první skupině jsou nereziproční zařízení: gyrátory, izolátory a cirkulátory. Jsou definovány takto:

Gyrátor je nereziproční dvojitran, u něhož v jednom směru šíření vlny nastává fázový posun o 180° , kdežto ve směru opačném je fázový posun nulový. Schematicky je tento dvojitran znázorněn na obr. 10.1a.



Obr. 10.1.

Izolátor je nereziproční dvojitran, který propouští elektromagnetickou vlnu v jednom směru téměř bez útlumu, kdežto ve směru opačném vzniká velmi velký útlum. Dodejme k tomu, že útlum ve směru opačném není způsoben odrazy. Název „izolátor“ vznikl z jeho nejpřirozenější aplikace – izolace generátoru od odrazů způsobených zátěží. Jeho schematické označení je na obr. 10.1b.

Cirkulátor je nereziproční přizpůsobený trojitran (nebo čtyřtrán), v němž přenos energie nastává jen v jednom směru. Energie přivedená do ramene 1 bude vycházet pouze z ramene 2, energie vstupující ramenem 2 vystoupí pouze ramenem 3 atd. Jiný přenos než v uvedeném sledu není možný (obr. 10.1c). Cirkulátor s n rameny lze vytvořit ze dvou cirkulátorů s $(n+2)/2 = n/2 + 1$ rameny. Na obr. 10.1d je čtyřramenný cirkulátor vytvořený ze dvou tříramenných.

Druhou skupinu mikrovlnných zařízení s ferity tvoří řídicí obvody – fázové posouvače, spínače a přepínací proměnné děliče výkonu a předatelné filtry. Tyto obvody jsou ovládány proudem ve vlnitých elektromagnetu magnetujících ferit. Z toho vyplývá, že rychlost ovládání těchto obvodů je omezena vlivem velké setrvačnosti magnetických obvodů. K dosažení vyšších spínacích nebo přepínacích rychlostí lze použít také feritové materiály s pravouhlohou hysterezní smyčkou, které

neperiodicky uzkopacne irvae magnety nebo elektromagnety. Lyto feritové součástky pracují ve dvojsměrném magnetickém poli vytvořeném vlastní remanencí po zmagnetování proudovým impulsem, který prochází vodičem vhodné umístěným přímo ve feritu. Převážná většina uvedených zařízení pracuje v pásmu centimetrových vln. Použití feritů v pásmu decimetrových a milimetrových vln je také možné, avšak potíže s jejich konstrukcí již bývají značné.

10.2. GYROMAGNETICKÉ JEVY VE FERITECH

10.2.1. Feromagnetická rezonance

Feromagnetickou rezonanci rozumíme rezonanci pohlcování elektromagnetické vlny ve feromagnetické látce. Umístíme-li ve vlnovodu feritovou tyčinku zmagnetovanou vnějším statickým magnetickým polem, bude vlna šířící se ve vlnovodu s feritem pohlcována. Velikost této absorpce závisí na úhlové frekvenci vlny ω a na feromagnetické rezonanci úhlové frekvenci ω_0 . Rezonanční úhlovou frekvenci ω_0 lze měnit v určitých mezích změnou intenzity statického magnetického pole H_0 magnetujícího ferit. Při $\omega = \omega_0$ je absorpce maximální. Jak uvidíme dále, je tato rezonance v podstatě rezonanci vlastních kmitů vektoru magnetizace.

Z kvantové elektroniky víme, že elementárními nositeli magnetismu každé látky jsou spinové momenty elektronů. Oba spinové momenty, jak mechanický tak magnetický, jsou kvantovány. Magnetický moment spinu je roven Bohrovu magnetonu [1]

$$m_{sp} = \pm \mu_B; \quad \mu_B = \frac{|e| \hbar}{2m_e} \quad (10.1)$$

kde $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C je náboj elektronu,

$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31}$ kg hmotnost elektronu,

$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J . s Planckova konstanta,

$\mu_B = 9,28 \cdot 10^{-34}$ A . m² Bohrov magneton.

Mechanický moment spinu je

$$s = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (10.2)$$

Vytvoříme-li poměr obou momentů, dostaneme po dosazení

$$\frac{|m_{sp}|}{|s|} = -\frac{e}{m_e}; \quad -\frac{e}{m_e} = \gamma = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1} \quad (10.3)$$

Veličina γ se nazývá gyromagnetický poměr. Jsou si tedy oba momenty úměrny a mají vzájemně opačný směr. Vložíme-li takovou mikročástici do magnetického pole, bude mít spin snahu orientovat se do směru tohoto pole. Elektron začne konat precesní pohyb (obr. 10.2) podobný pohybu gyroskopu (setrvačníku). Vyšetříme tento pohyb kvaziklasickou metodou, uveřejněnou již v r. 1935 Landauem

a Lisicem, rostata kvaziklasické metody spočívá v tom, že typicky kvantově mechanické veličiny se dosazují do pohybové rovnice klasické fyziky. Pohybové rovnice rotujícího tělesa praví, že časová změna momentu hybnosti je rovna momentu působících sil [2], tedy

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{m}_{sp} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{m}_{sp} \times \mathbf{H}) \quad (10.4)$$

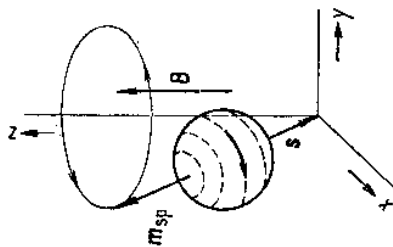
Po dosazení z (10.3) je

$$\frac{d\mathbf{m}_{sp}}{dt} = -\mu_0\gamma(\mathbf{m}_{sp} \times \mathbf{H}) \quad (10.5)$$

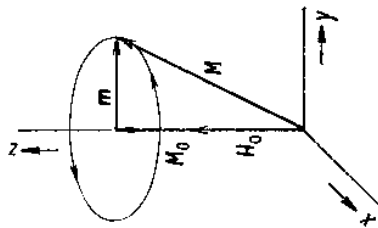
Předpokládáme, že v jednotce objemu feritu je N elementárních částic, takže vynásobíme-li tímto číslem vztah (10.5), dostaneme

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0\gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (10.6)$$

kde $\mathbf{M} = N\mathbf{m}_{sp}$ je výsledný magnetický moment objemové jednotky feritu, tj. makroskopická magnetizace prostředí. Předpokládáme, že feritové prostředí je prostorově neomezené a bez vnějšího pole ($\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = 0$) je izotropní. Zvolíme vnější magnetické pole ve směru osy z tak silné, že prostředí bude zmagnetováno do stavu nasycení. Vzniklá magnetizace \mathbf{M}_0 bude pak rovnoběžná s intenzitou vnějšího pole \mathbf{H}_0 . O vlastních kmitech vektoru magnetizace budeme předpokládat, že jsou harmonické. Máme tedy podle obr. 10.3



Obr. 10.2. Představa precesního pohybu elektronu



Obr. 10.3. Precese vektoru magnetizace

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= H_0 \mathbf{z} \\ \mathbf{M} &= M_0 \mathbf{z} + \mathbf{m} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (10.7)$$

kde \mathbf{m} je amplituda proměnné magnetizace, kterou máme určit. Dosadíme-li vztahy (10.7) do pohybové rovnice, dostaneme po úpravě (s uvážením, že vektory

\mathbf{M}_0 i \mathbf{H}_0 jsou rovnoběžné a vektor \mathbf{M}_0 je na čase nezávislý) vektorovou rovnici (10.8)

$$j\omega_0 \mathbf{m} = -\gamma \mu_0 H_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{z})$$

a z ní tři rovnice skalární

$$j\omega_0 m_x + \gamma \mu_0 H_0 m_y = 0 \quad (10.9)$$

$$-\gamma \mu_0 H_0 m_x + j\omega_0 m_y = 0$$

$$m_z = 0 \quad (10.10)$$

Rovnice mají netriviální řešení, je-li determinant soustavy nulový. Z této podmínky dostaneme pro rezonanční úhlovou frekvenci

$$\omega_0 = \gamma \mu_0 H_0 \quad (10.11)$$

Zbývá určit proměnnou složku magnetizace \mathbf{m} . Vztah pro ω_0 dosadíme do jedné z rovnic (10.9) a dostaneme

$$j\mathbf{m}_y = m_x \quad (10.12)$$

Poněvadž $m_z = 0$, vyplývá z tohoto vztahu, že vlastní kmitý vektoru magnetizace představují v podstatě pravotočivý precesní pohyb vektoru \mathbf{M} kolem směru konstantní magnetizace \mathbf{M}_0 , tj. kolem osy z . O tom bychom se mohli přesvědčit opět nakreslením časové posloupnosti otáčení vektoru \mathbf{m} kolem osy z podobně jako v odst. 9.3.4 předcházející kapitoly.

V případě bezeztrátového feromagnetika by precesní pohyb vektoru magnetizace trval od okamžiku vzniku působícího magnetického pole po nekonečně dlouhou dobu. Vlivem ztrát se však konec vektoru magnetizace \mathbf{M} nebude pohybovat po kružnici, ale po spirále. Po určité době zaujme vektor \mathbf{M} polohu rovnoběžnou s vnějším magnetickým polem a proměnná složka \mathbf{m} zanikne.

K udržení kmitů vektoru magnetizace musí působit vnější střídavé magnetické pole superponované na konstantní pole s intenzitou \mathbf{H}_0 . Působením tohoto střídavého pole, spadajícího frekvenčně do pásma centimetrových vln, vzniknou tzv. *vynucené kmitý magnetizace*.

10.2.2. Vynucené kmitý magnetizace

Výšeřité vynucené malé kmitý magnetizace. Na mikročástice feritového prostředí bude působit současně statické magnetické pole \mathbf{H}_0 a magnetické pole mikrovlnného signálu \mathbf{h}_0 . Výsledná intenzita magnetického pole a výsledná magnetizace jsou tedy dány vztahy

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z} + \mathbf{h}_0 \quad (10.13)$$

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}}_0 \mathbf{z} + \mathbf{m}_0 \quad (10.14)$$

Veličiny \mathbf{H}_0 , \mathbf{h}_0 a \mathbf{M}_0 jsou dány a proměnnou složku magnetizace \mathbf{m} hledáme. Ke splnění podmínek linearity předpokládáme, že $h_0 \ll H_0$ a $m_0 \ll M_0$. Dosadíme

oba vztahy (10.15) a (10.14) do (10.9) a dostaneme

$$\frac{d\mathbf{m}_0}{dt} = -\mu_0\gamma[(\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}_0) \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_0)] \quad (10.15)$$

Uvážíme-li rovnoběžnost vektorů \mathbf{M}_0 a \mathbf{H}_0 a že součin $\mathbf{m}_0 \times \mathbf{h}_0$ je vzhledem ke zmíněným podmínkám linearitě malá veličina druhého řádu, dostaneme po jejím zanedbání rovnici vynucených kmitů magnetizace ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{m}_0}{dt} = -\mu_0\gamma(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}_0) - \mu_0\gamma(\mathbf{m}_0 \times \mathbf{H}_0) \quad (10.16)$$

Opět budeme předpokládat, že vynucené kmity jsou harmonické

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{m} e^{j\omega t}; \quad \mathbf{h}_0 = \mathbf{h} e^{j\omega t} \quad (10.17)$$

takže po dosazení do (10.16) dostaneme vektorovou rovnici

$$j\omega\mathbf{m} = -\mu_0\gamma(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}) - \mu_0\gamma(\mathbf{m} \times \mathbf{H}_0)$$

Získaná vektorová rovnice je stručnějším zápisem tří rovnic skalárních s neznámými

m_x , m_y , a m_z , tedy

$$\begin{aligned} j\omega m_x + \mu_0\gamma H_0 m_y &= \mu_0\gamma M_0 h_y \\ -\mu_0\gamma H_0 m_x + j\omega m_y &= -\mu_0\gamma M_0 h_x \\ j\omega m_z &= 0 \end{aligned} \quad (10.18)$$

Odtud řešením dostaneme pro složky vektoru vynucené magnetizace

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{\mu_0\gamma M_0 h_0}{\omega^2 - \mu_0^2\gamma^2 H_0^2} h_x - j\frac{\omega\mu_0\gamma M_0}{\omega^2 - \mu_0^2\gamma^2 H_0^2} h_y \\ m_y &= j\frac{\omega\mu_0\gamma M_0}{\omega^2 - \mu_0^2\gamma^2 H_0^2} h_x - \frac{\mu_0^2\gamma^2 M_0 H_0}{\omega^2 - \mu_0^2\gamma^2 H_0^2} h_y \\ m_z &= 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

Z výsledku je zřejmé, že podélná složka střídavého magnetického pole vlny nemá na vynucené kmity vektoru magnetizace žádný vliv. Příčné složky intenzity magnetického pole h_x a h_y vyvolávají nejen paralelní, ale i kolmé složky magnetizace. Oba vektory \mathbf{h} i \mathbf{m} nejsou zřejmě paralelní tak, jak by to bylo v prostředí izotropním. Uvážíme-li tedy vztah (1.6), vyplývá z něj pro náš případ, že magnetická susceptibilita χ je veličina tenzorová. Složky tohoto tenzoru můžeme napsat v maticovém tvaru

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi & -j\chi_a & 0 \\ j\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.19a)$$

kde

$$\chi = -\frac{\mu_0^2\gamma_0^2 M_0 H_0}{\omega^2 - \mu_0^2\gamma^2 H_0^2}; \quad \chi_a = \frac{\omega\mu_0\gamma M_0}{\omega^2 - \mu_0^2\gamma^2 H_0^2}$$

Použijeme dále vztah mezi permeabilitou a susceptibilitou, který můžeme pro tenzorové veličiny psát formálně zcela stejně jako pro veličiny v izotropním prostředí

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0\mathbf{1} + \mu_0\chi \quad (10.20)$$

kde $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor, jehož složky lze vyjádřit pomocí jednotkové matice (viz vztah C.5 matematického dodatku).

Tenzor permeability pak má tvar

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & -j\mu_a & 0 \\ j\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

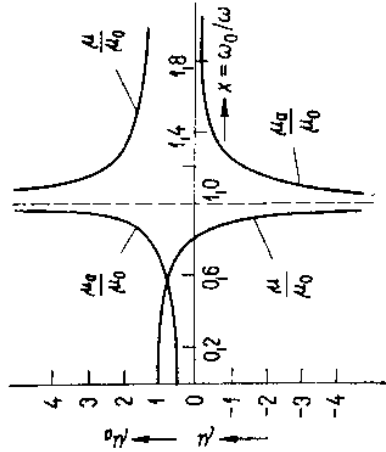
Vzmemme-li v úvahu, že $\omega_0 = \mu_0\gamma H_0$ a položíme-li $\omega_M = \mu_0\gamma M_0$ (M_0 má stejný rozměr jako H_0), můžeme psát složky tenzoru permeability ve tvaru

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - \frac{\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}; \quad \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{\omega_M\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (10.22)$$

Z obou vztahů je jasné vidět, že složky tenzoru permeability mají rezonanční charakter. Při rezonanční úhlové frekvenci odmítná feromagnetické prostředí vysokofrekvenčnímu poli část energie, která se spotřebovává na krytí ztrát způsobených tlumením precese. Tenzor permeability odvodil Polder a publikoval jej v r. 1949 [3]. Bývá proto v literatuře označován jeho jménem.

Rozbor vlastností tenzoru permeability

Závislost složek tenzoru permeability na intenzitě magnetického pole je znázorněna na obr. 10.4 [5]. Měření se obvykle provádějí při konstantní pracovní úhlové frekvenci ω , takže veličina ω_0/ω na vodorovné ose je úměrná intenzitě pole H_0 .



Obr. 10.4. Závislost složek tenzoru permeability na intenzitě magnetického pole

V daném grafu je $\omega_M/\omega = 0,4$, $f = 10^{10}$ Hz (přičemž $M_0 = 1,13 \cdot 10^5$ A \cdot m $^{-1}$, $H_0 = H_{rez} = 2,82 \cdot 10^5$ A \cdot m $^{-1}$). Z průběhu vyplývá, že se při zvětšování intenzity vnějšího statického magnetického pole H_0 složka μ zmenšuje a přechází do zápor-

нужн поделит. При $\omega_0/\omega = 1$ (резонанс) возникает в пренебрежении и обе составляющие тензора становятся бесконечно большими. В действительности ферритовых веществ возникают магнитические потери. Физические процессы, связанные с магнитными потерями, являются очень сложными и не будем здесь ими заниматься. Величина потерь в феррите может быть вычислена с помощью имитационных частей тензоров проницаемости или восприимчивости. Выводы из этих потерь относятся к действительным и мнимым частям тензоров проницаемости и восприимчивости. Составляющие комплексных тензоров пишем в виде

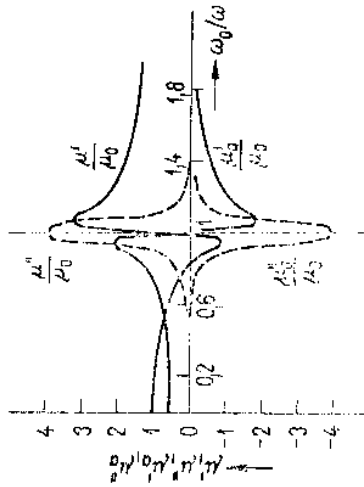
$$\begin{aligned} \mu &= \mu' - j\mu'' \\ \mu_a &= \mu'_a - j\mu''_a \end{aligned} \quad (10.23)$$

Пробег действительных и мнимых частей тензоров проницаемости на рис. 10.5 для тех же параметров, что на рис. 10.4. Мнимая часть тензоров μ'' и μ''_a характеризует поглощение энергии волны и достигают максимальных значений при резонансе. Для практических целей мы определяем ширину $2\Delta H$ резонансных кривых μ'' и μ''_a как разницу между магнитными полями, при которых

$$\begin{aligned} \mu'' &= \frac{1}{2} \mu''_{\text{рез}} \\ \mu''_a &= \frac{1}{2} \mu''_{a, \text{рез}} \end{aligned}$$

Для ширины резонансных кривых можно вывести [4]

$$2\Delta H = 2\delta \frac{\omega}{\mu_0 \mu_3}$$



Обр. 10.5. Пробег действительных и мнимых частей тензоров проницаемости

где $\delta = \Delta\omega_0/\omega$ — величина характеризующая качество феррита. При этом обычно $\delta \ll 1$ и поэтому можно экспериментально. Феррит, для которого составляющие тензоров проницаемости показаны на рис. 10.5, имеет $2\Delta H = 0,282 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ и $\delta = 0,05$.

Диагонализация тензора проницаемости

Укажем теперь, что для кругово поляризованной волны из тензора проницаемости можно выделить, т.е. что для кругово поляризованной волны ее проницаемость феррита в состоянии насыщения является скалярной, которая является различной для правотоковой и левотоковой волны. Выявляем вид $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ в матричном виде и подставляем в него составляющие векторов магнитной индукции и интенсивности магнитного поля кругово поляризованных волн. Это дает

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -j\mu_a & 0 \\ j\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

Согласно (9.180) для правотоковой волны

$$h_x = h^+; \quad h_y = -jh^+; \quad b_x = b^+; \quad b_y = -jb^+ \quad (10.25)$$

а для левотоковой волны

$$h_x = h^-; \quad h_y = +jh^-; \quad b_x = b^-; \quad b_y = +jb^- \quad (10.26)$$

Подставляем последовательно эти соотношения в (10.24), получим

$$b^+ = (\mu - \mu_a) h^+ \quad (10.27)$$

$$b^- = (\mu + \mu_a) h^- \quad (10.28)$$

$$b_z = \mu_0 h_z \quad (10.29)$$

или матрично

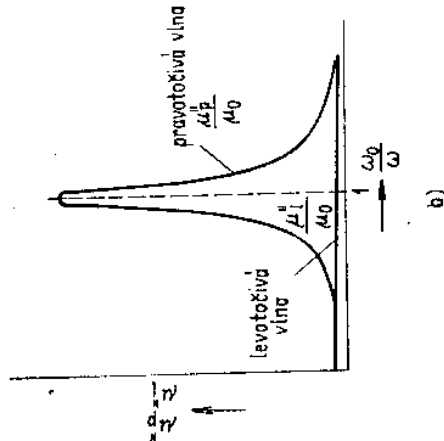
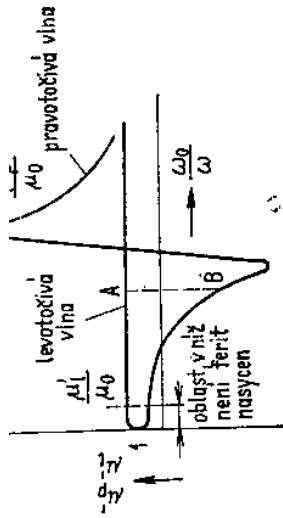
$$\begin{bmatrix} b^+ \\ b^- \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - \mu_a & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^+ \\ h^- \\ h_z \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

Отсюда видно, что для кругово поляризованной волны ее проницаемость является скалярной величиной, зависящей от направления вращения плоскости поляризации. Подставляем в (10.22), получим для проницаемости плоскости для кругово поляризованных волн соотношения

$$\mu_p = \mu^+ = \mu - \mu_a = \mu_0 + \mu_0 \frac{\omega_M}{\omega_0 - \omega} \quad (10.31)$$

$$\mu_t = \mu^- = \mu + \mu_a = \mu_0 + \mu_0 \frac{\omega_M}{\omega_0 + \omega} \quad (10.32)$$

Проницаемость μ_t для левотоковой волны не имеет резонансной зависимости. Пробег действительных и мнимых частей проницаемости феррита в зависимости от интенсивности магнитного поля H_0 для кругово поляризованных волн показан на рис. 10.6а, б.



Obr. 10.6. Závislost relativní permeability na poměrné úhlové frekvenci pro kruhově polarizované vlny
 a) závislost reálné části,
 b) závislost imaginární části

10.3. ŠÍŘENÍ VLN V GYROTROPNÍM PROSTŘEDÍ

Zavedení Polderova tenzoru permeability umožňuje vyšetřovat pomocí Maxwellových rovnic (a podstatně toto vyšetřování zjednodušuje) mnoho jevů vznikajících při šíření mikrovln ve feritovém prostředí. Předpokládáme, že feritové prostředí je neomezené, homogenní a bezeztrátové. Maxwellovy rovnice pak píšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}; & \text{div } \mu\mathbf{H} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} &= j\omega\mathbf{E}; & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

Jejich rozepsáním v pravotočivé soustavě souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega(\mu H_x - j\mu_a H_y); & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega(j\mu_a H_x + \mu H_y); & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z; & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon E_z \end{aligned} \quad (10.33)$$

Гидрокалиция магн, зс се вна зли се зилити вкати влешно магнетекено поие $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}$ a že nezávisí na souřadnicích x a y . Z Maxwellových rovnic pak vyplývá, že vlna nemá podélné složky intenzit polí, tedy $E_z = H_z = 0$. Řešení předpokládejme ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (H_x \mathbf{x} + H_y \mathbf{y}) e^{i(\omega t - \gamma z)} \\ \mathbf{E} &= (E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y}) e^{i(\omega t - \gamma z)} \end{aligned} \quad (10.34)$$

kde γ je zatím neznámý součinitel šíření. Předpokládána řešení jednotlivých složek intenzit polí dosadíme do Maxwellových rovnic (10.33) a dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma H_y &= \omega\epsilon E_x; & \gamma E_y &= -\omega\mu H_x + j\omega\mu_a H_y \\ \gamma H_x &= -\omega\epsilon E_y; & \gamma E_x &= j\omega\mu_a H_x + \omega\mu H_y \end{aligned} \quad (10.35)$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic E_x a E_y , dostaneme

$$\begin{aligned} (\gamma^2 - \omega^2 \mu\epsilon) H_x &= -j\omega^2 \epsilon \mu_a H_y \\ (\gamma^2 - \omega^2 \mu\epsilon) H_y &= j\omega^2 \epsilon \mu_a H_x \end{aligned} \quad (10.36)$$

Odtud vyplývá

$$(\gamma^2 - \omega^2 \mu\epsilon)^2 = \omega^4 \mu_a^2 \epsilon^2$$

a pro veličinu γ

$$\gamma_{1,2}^2 = \omega^2 \epsilon (\mu \mp \mu_a) \quad (10.37)$$

Veličina γ má tedy dvě hodnoty

$$\gamma^+ = \gamma_1 = \omega \sqrt{\epsilon(\mu - \mu_a)}; \quad \gamma^- = \gamma_2 = \omega \sqrt{\epsilon(\mu + \mu_a)} \quad (10.37)$$

což znamená, že se v daném směru z mohou šířit nezávisle na sobě dvě vlny s různými rychlostmi a s různými složkami intenzit polí. Fázové rychlosti těchto vln jsou

$$v_{r(1,2)} = \frac{\omega}{\gamma_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\mu \mp \mu_a)}} \quad (10.38)$$

Je zřejmé, že feritové prostředí má v tomto případě pro oba typy vln různé efektivní permeability

$$\mu_{\text{eff}} = \mu^+ = \mu - \mu_a; \quad \mu_{\text{eff}} = \mu^- = \mu + \mu_a \quad (10.39)$$

Tyto vztahy se shodují se vztahy (10.31) a (10.32). To svědčí o tom, že obě dílečky vlny jsou *kruhově polarizované*. Nemusí mít stejnou amplitudu. Jsou-li amplitudy obou kruhově polarizovaných vln nestejně, je výsledná vlna *polarizovaná elipticky*. Během šíření nastává pootáčení hlavních os této elipsy, protože fázové rychlosti obou díleček vln nejsou stejné. Jsou-li amplitudy obou díleček vln stejné, je výsledná vlna polarizována lineárně a opět během šíření nastává u výsledné vlny stáčení roviny polarizace jako důsledek rozdílné rychlosti obou vln. Pro úplnost podmínek dodejme, že jedna vlna se součinitelem šíření γ_1 může být při splnění podmínek rezonance $\omega = \omega_0$ ve feritu intenzivně pohlcována.

V odstavci 9.3.4d bylo ukázáno, že každá lineárně polarizovaná vlna může být rozložena na dvě vlny kruhově polarizované, a to pravotočivou a levotočivou. Rozklad je znázorněn na obr. 9.31. Šíří-li se takové dvě vlny ve feritovém prostředí, mají obě vlny různé fázové rychlosti [viz (10.38)] a dochází k jejich fázovému posunu. Fáze výsledné vlny se sice nezmění, ale rovina polarizace bude pootočena o určitý úhel. Tímto způsobem vysvětlujeme tzv. *Faradayův jev*, jehož podstata spočívá v natočení roviny polarizace, šíří-li se lineárně polarizovaná vlna feritem ve směru statického magnetického pole. Určíme nyní velikost úhlu natočení roviny polarizace a ukážeme, že Faradayův jev je nereciproční.

Zjistíme vztah mezi složkami intenzity magnetického pole obou vln tak, že do jedné z rovnic (10.36) dosadíme (10.37)

$$H_y = \pm j H_x \quad (10.40)$$

Dosadíme-li tento výsledek do první rovnice (10.34), dostaneme vlnové funkce obou vln ve tvaru

Pravotočivá vlna	Levotočivá vlna
$H^+ = H(x - jy)e^{i(\omega t - \gamma z)}$	$H^- = H(x + jy)e^{i(\omega t - \gamma z)}$

Z toho snadno určíme úhel natočení roviny polarizace. Vektorovým součtem obou intenzit pole dostaneme vlnu polarizovanou lineárně. Sečteme je nejdříve v místě $z = 0$ a pak znovu po proběhnutí vzdálenosti $z = l$. Vynecháme-li časový činitel $e^{i\omega t}$, bude v počátku

$$H|_{z=0} = H^+ + H^-|_{z=0} = 2Hx \quad (10.42)$$

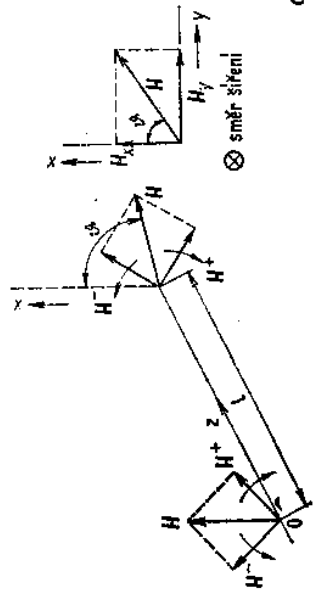
Ve vzdálenosti $z = l$ bude výsledná intenzita magnetického pole

$$H|_{z=l} = H^+ + H^-|_{z=l} = H[(x - jy)e^{-\gamma l} + (x + jy)e^{-\gamma l}] = H e^{-\gamma l} [(x - jy) + (x + jy)] = 2Hx e^{-\gamma l}$$

a po úpravě

$$H = 2H e^{-\gamma l} \cos \frac{\gamma l}{2} \left[x \cos \frac{\gamma l}{2} + y \sin \frac{\gamma l}{2} \right] \quad (10.43)$$

Skládání polí v místech $z = 0$ a $z = l$ je graficky znázorněno na obr. 10.7.



Obr. 10.7. Faradayův jev

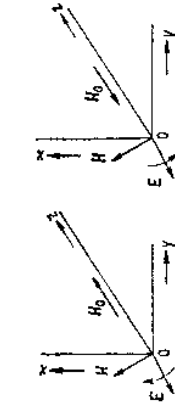
$$\beta = \frac{\gamma^- - \gamma^+}{2} l \quad (10.44)$$

Veličina

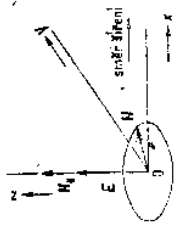
$$R = \frac{\gamma^- - \gamma^+}{2} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{2} (\sqrt{\mu + \mu_a} - \sqrt{\mu - \mu_a}) \quad (10.45)$$

vyjadřující úhel pootočení roviny polarizace na jednotku u délky dráhy vlny s^e nazývá *Faradayova konstanta*.

Faradayův jev je nereciproční. Pozorujeme-li vlnu šířící se ve směru vektoru H_0z konstantního magnetického pole tak, že se od pozorovatele vzdaluje, pak s^e při $\mu_a > 0$ rovina polarizace natičí ve směru hodinových ručiček. Při šíření proti směru vektoru H_0z se změně znaménko složky tenzoru permeability a pozorovatel zjistí u vzdalující se vlny otáčení roviny polarizace proti směru hodinových ručiček. Faradayova konstanta je v tomto případě záporná. Směry otáčení roviny polarizace jsou znázorněny na obr. 10.8.



Obr. 10.8. Nerecipročnost Faradayova jevu



Obr. 10.9. Kruhová polarizace magnetického pole mimořádné vlny

10.3.2. Dvojloň a příčná feromagnetická rezonance

V tomto odstavci budou analyzovány jevy vznikající ve feritu, šíří-li se v něm vlna ve směru kolmém k vektoru H_0z statického magnetického pole. Kdybychom měli řešit tuto úlohu se zcela obecným směrem vektoru intenzity elektrického pole oproti vektoru H_0z , bylo by řešení složité a nepřehledné. Rozdělíme proto řešení na dvě dílčí řešení: vektor intenzity elektrického pole je rovnoběžný s H_0z a vektor intenzity elektrického pole je kolmý na H_0z . Vyššíme tedy nejdříve vlnu, jejíž vektor intenzity elektrického pole je rovnoběžný s vektorem H_0z , tedy $E = E_z z$. Vlna necht se šíří ve směru osy x (obr. 10.9). Položíme v (10.33) $E_x = E_y = 0$ a parciální derivace veličin podle y a z nechť jsou také rovny nule. Řešení předpokládáme opět ve tvaru

$$H = (H_x x + H_y y) e^{-j\gamma z}; \quad E = E_z e^{-j\gamma z} \quad (10.46)$$

Časový činitel $e^{i\omega t}$ byl vynechán a hledáme neznámý součinitel šíření γ . Po dosazení do Maxwellových rovnic (10.33) dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma H_y &= -\omega \epsilon E_z \\ \mu H_x &= j\mu_a H_y \\ \gamma E_z &= -\omega(j\mu_a H_x + \mu H_y) \end{aligned} \quad (10.47)$$

Z druhé rovnice je zřejmé, že segovana lineárně polarizovaná vlna má složku intenzity magnetického pole H_x ve směru šíření a ta je fázově posunuta oproti příčné složce H_y o 90° . Magnetické pole této vlny je tedy elipticky polarizováno. Vektor \mathbf{H} svým koncem opisuje při šíření vlny elipsu v rovině xOy (obr. 10.9). Vyloučíme-li z (10.47) nejdříve E_x , můžeme pak ze zbývajících dvou rovnic vy počítat součinitel šíření této vlny, tedy

$$\gamma^2 = \omega^2 \epsilon (\mu^2 - \mu_a^2) \frac{1}{\mu} \quad (10.48)$$

Efektivní permeabilita vystupující v této rovnici

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} \quad (10.49)$$

obsahuje složku μ_a tenzoru permeability v druhé mocnině a proto se μ_{eff} nemění se změnou znaménka H_0 . Popsaná vlna se nazývá *vlnou mimořádnou³⁾* jako analogie mimořádného paprsku v optice.

V druhém dílčím řešení je vektor intenzity elektrického pole kolmý k vektoru intenzity statického magnetického pole H_0z , tj. $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}$, $E_x = E_z = 0$, parciální derivace podle y a z jsou nulové a tak z (10.33) vyplývá $\mathbf{H} = H_x z$. Předpokládáme-li, že obě složky E_y i H_x mění se vzdáleností s činitelem $e^{-j\gamma x}$, pak po dosazení do (10.33) dostaneme

$$\gamma H_x = \omega \epsilon E_y, \quad \gamma E_y = \omega \mu_0 H_x \quad (10.50)$$

takže

$$\gamma^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 \quad (10.51)$$

Dosažený výsledek ukazuje, že tato vlna je rovinná vlna (TEM) jako v izotropním volném prostoru s permeabilitou $\mu_{\text{eff}} = \mu_0$ a gyrotropní vlastnosti prostředí na ni nemají vliv. Je nazývána *vlnou řádnou* jako optická analogie řádného paprsku. Z tohoto rozboru tedy vyplývá, že vlna s libovolnou lineární polarizací šíří se feritem ve směru kolmém ke statickému magnetickému poli se rozloží na dvě, vlny; řádnou a mimořádnou. Tento jev vzniká vlnou vln se nazývá *dvojitom*.

Zjistíme nyní rezonanční úhlovou frekvenci příčné feromagnetické rezonance. Při určité intenzitě statického magnetického pole nastává opět intenzivní pohlcování energie „mimořádné“ vlny ve feritu. Efektivní permeabilita platící pro mimořádnou vlnu je dána vztahem (10.49), který pomocí (10.22) uvedeme na tvar

$$\frac{\mu_{\perp}}{\mu_0} = 1 - \frac{\omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{\omega^2 \omega_M^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad 1 - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

³⁾ Světelný paprsek se při průchodu čirým krystalem islandského vápence rozděluje na dva paprsky, řádný a mimořádný. Tento úkaz se nazývá dvojitom.

Pro jeho uprave dostaneme

$$\frac{\mu_{\perp}}{\mu_0} = 1 - \frac{(\omega_0 + \omega_M) \omega_M}{\omega^2 - \omega_0(\omega_0 + \omega_M)} \quad (10.52)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že rezonance nastane, když $\mu_{\perp} \rightarrow \infty$, takže je-li $\omega_M = \mu_0 \gamma M_0$, je rezonanční úhlová frekvence

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{M_0}{H_0}} \quad (10.53)$$

Tomuto případu se říká *příčná feromagnetická rezonance*. Intenzitu magnetického pole odpovídající příčné rezonanci určíme z (10.53)

$$H_{\perp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\mu_0 \gamma^2} + \frac{M_0^2}{4}} - \frac{M_0}{2} = \sqrt{H_{\parallel}^2 + \frac{M_0^2}{4}} - \frac{M_0}{2} \quad (10.54)$$

Ze vztahu je zřejmé, že intenzita pole H_{\perp} odpovídající příčné rezonanci je vždy menší než intenzita pole H_{\parallel} v případě podélné rezonance.

Případem příčné feromagnetické rezonance jsme zakončili rozbor všech nejdůležitějších jevů vznikajících v gyromagnetickém prostředí, v němž se šíří elektromagnetická vlna. Další logický postup by byl takový, že bychom všechny zmíněné jevy vyšetřovali ve vlnovech zaplněných feritem a pak teprve přistoupili k popisu a rozboru mikrovlnných obvodů s ferity. Analýza jevů ve vlnovodech je však velmi složitá i rozsáhlá, takže se jimi nemůžeme zabývat. Pro pochopení činnosti jednoduchých mikrovlnných obvodů s ferity však uvedený rozbor zcela postačuje.

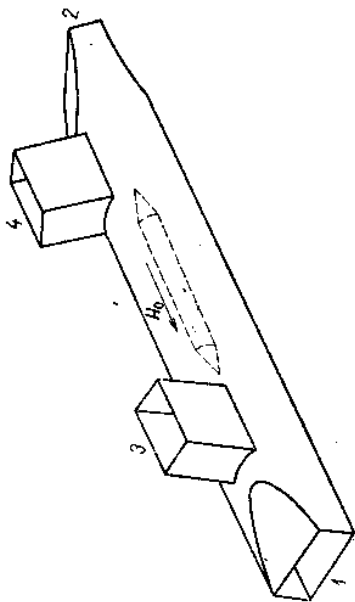
10.4. PRAKTICKÉ VYUŽITÍ GYROMAGNETICKÝCH JEVŮ

Rozdělení nerecipročních obvodů s ferity podle jejich funkce bylo uvedeno na začátku kapitoly. Rozdělíme je dále podle směru vektoru intenzity vnějšího magnetického pole H_0 na *mikrovlnné obvody s podélně magnetovaným feritem* a *obvody s příčně magnetovaným feritem*. Obvody s podélně magnetovaným feritem využívají pouze Faradayův jev ve feritovém tělese umístěném ve vlnovodu kruhového průřezu. Obvody s příčně magnetovaným feritem mají mnohem širší uplatnění, poněvadž ferit může být umístěn v podstatě v libovolném typu vedení, ať již vlnovodem, sousosém nebo i mikropáskovém.

10.4.1 Obvody s podélně magnetovaným feritem

Na principu Faradayova jevu lze realizovat všechny tři mikrovlnné nereciproční obvody definované na začátku kapitoly. Hoganův gyrátor (r. 1952) [7], zabírající éru nerecipročních pasivních obvodů, pracoval rovněž na principu Faradayova jevu, ale dnes se již v praxi nepoužívá. Obvody s podélně magnetovaným feritem byly postupně vytlačovány konstručením i výrobně jednoduššími obvody s příčným magnetickým polem.

Устройство на принципе Faradayовой явы је значајног значења на одр. 10.10. На томо проведеном циркулатору lze velmi názorně vysvětlit cirkulaci signálu. Proto se o něm zmiňujeme, i když se nyní v praxi používají jiné typy cirkulátorů.

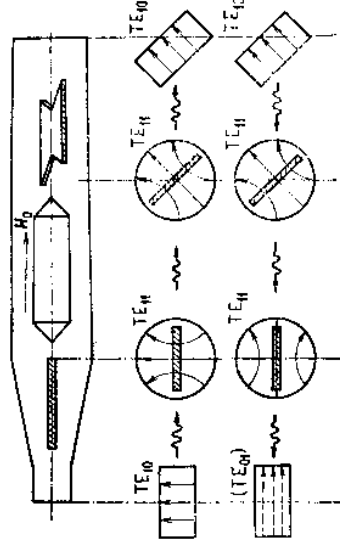


Obr. 10.10. Cirkulátor na principu Faradayova jevu

Skládá se ze dvou přechodů obdélníkového vlnovodu na kruhový vlnovod, z feritové tyčinky podélně magnetované a uložené v kruhovém vlnovodu a ze dvou dalších obdélníkových výstupů. Délka feritové tyčinky musí být zvolena tak, aby nastalo natočení roviny polarizace o 45° . Kružlové zakončení tyčinky zajišťuje potřebné impedanční přizpůsobení. Charakteristické je natočení zadní poloviny o 45° oproti přední části. Vlna TE_{10} vstupuje do ramene 1 a transformuje se na vlnu TE_{11} . Při průchodu feritem do ramene 2 se vektor intenzity elektrického pole natočí o 45° , takže překrutm ramene 2 nevadí a vlna dosáhne zátěže v rameni 2. Není-li zátěž přizpůsobena, vstupuje odražená vlna ramenem 2. Při průchodu pod ramenem 4 odpovídá rozložení pole vlně TE_{11} , takže toto rameno nemůže být vybuzeno. Po průchodu feritem dojde k pootočení o 45° a sečteme-li ho ještě s překrutm ramene 2 vůči rameni 1, dostaneme celkové natočení 90° . Tato poloha vektoru intenzity elektrického pole je právě vhodná pro vybuzení ramene 3 a zcela nevhodná pro rameno 1, neboť v něm by to odpovídalo vidu TE_{01} s mezní vlnovou délkou $\lambda_m = 2b$, tedy případu, kdy je $\lambda > \lambda_m$. Vstupuje-li vlna ramenem 3, transformuje se vid TE_{10} na TE_{11} v kruhovém vlnovodu s takovou polohou vektoru intenzity elektrického pole, že v rameni 1 by mohl být vybuzen pouze vid TE_{01} . Vlna se tedy šíří směrem k rameni 4, ve feritu se pootočí o 45° a pod ramenem 4 bude mít takové uspořádání, že toto rameno může být vybuzeno žádoucím polem TE_{10} . Z toho je zřejmé, že přenos nastává ve směru ramen $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Při změně směru pole vnějšího magnetu nastane přenos v opačném sledu $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Při realizaci bývá izolace mezi neprůchodnými rameny v mezích 20 dB až 30 dB a ztráty v průchozím směru 0,1 dB až 0,5 dB.

Izolátor s Faradayovou rotací je schematicky znázorněn v podélném průřezu na obr. 10.11. Je sestaven z úseku vlnovodu kruhového průřezu, v němž je uložena

тычкова укладка намагнетована подольно внаправлену магнету. Удлинна странне куželовэ закончэнні тычкы слуюць к імпаданціму прызпубоўнені. Дэйка тычкы је опэт zvolena tak, aby natočení roviny polarizace bylo 45° . Kružlový vlnovod přechází na obou stranách roviny spojitě ve vlnovod obdélníkového průřezu, přičemž obdélníkový vlnovod na pravé straně je pootočen oproti levému vstupnímu vlnovodu o 45° . Ve vlnovodových přechodech jsou umístěny dielektrické destičky s povlakem odporové vrstvy. Elektrické pole vstupní vlny TE_{10} je kolmé k ploše destičky, takže její vliv na šíření (útlum) je zanedbatelný. Vid TE_{10} se plynule transformuje na TE_{11} v kruhovém vlnovodu. Po průchodu feritem se rovina polari-



Obr. 10.11. Schéma podélného průřezu izolátoru s Faradayovou rotací

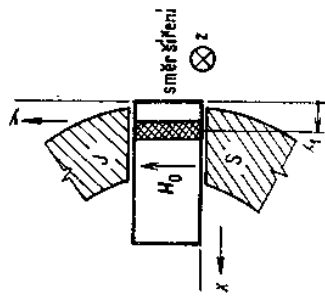
zace natočí o 45° , vlna projde opět vlnovodovým přechodem s druhou odporovou destičkou bez podstatných ztrát do výstupního obdélníkového vlnovodu, poněvadž její elektrické pole je kolmé k ploše destičky. Vlna postupující v opačném směru (odražená od zátěže) je feritem pootočená o 45° tak, že její vektor intenzity elektrického pole je rovnoběžný s levou odporovou destičkou. Energie zpětné vlny je tedy v destičce intenzívně pohlcována. Neabsorbovaná část vlny nemůže vstupní obdélníkový vlnovod vybudit, poněvadž má konfiguraci vidu TE_{01} s $\lambda_m = 2b$; vstupní vlnovod by pracoval v podkritickém stavu ($f < f_m$).

Předností obvodů s podélně magnetovaným feritem je poměrně malá intenzita magnetujícího pole H_0 (ferit musí pracovat mimo oblast rezonance). Nevýhody spočívají v těžkopádnosti vlnovodových přechodů a v obtížnosti odvodu tepla z feritu a z odporové destičky.

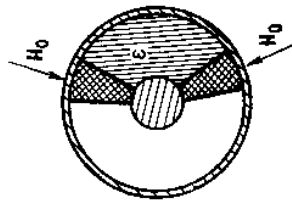
10.4.2. Obvody s příčně magnetovaným feritem

Umístíme-li v pravouhlém vlnovodu feritovou destičku tak, aby nezaplnovala celý průřez vlnovodu, můžeme při jejím příčném zmagnetování pozorovat stejné nereciproční jevy jako v neomezeném gyromagnetickém prostředí, které byly popsány v odst. 10.3.2. Je to příčná nereciproční feromagnetická rezonance, nereciproční fázový posuv a nereciproční rozložení intenzity poli v příčném průřezu vlnovodu.

9.3.7) bylo ukázáno, že v obdélníkovém vlnovodu s vlnou TE_{10} jsou dvě podélné roviny, v nichž je magnetické pole šířící se vlny kruhově polarizované. Vložíme-li do jedné z těchto rovin feritovou destičku příčně magnetovanou, bude mít ferit na vlny ve vlnovodu stejný vliv jako magnetodielektrický izotropní materiál, jehož permeabilita závisí na magnetujícím poli a na směru šíření (viz obr. 10.6b). Křivka μ''^+ pro pravotočivou vlnu má rezonanční charakter, zatímco pro μ''^- nikoliv. Musíme proto destičku vložit do vlnovodu tak, aby pro přímou vlnu nenastávala rezonanční absorpce. Pak tedy podle obr. 9.36 musíme umístit destičku v místě $x = x_1$. Příčný průřez takového izolátoru je znázorněn na obr. 10.12. Ferit se magnetuje polem trvalého podkovovitého magnetu. Zvláštností rezonančních izolátorů je to, že absorpce zpětné vlny nastává přímo ve feritu. Použití tohoto způsobu izolace tedy závisí na možnostech chlazení feritu. Pro zvětšení šířky frekvenčního pásma a pro zvýšení výkonových parametrů bylo vyvinuto velké množství různých modifikačních metod.



Obr. 10.12. Rezonanční izolátor

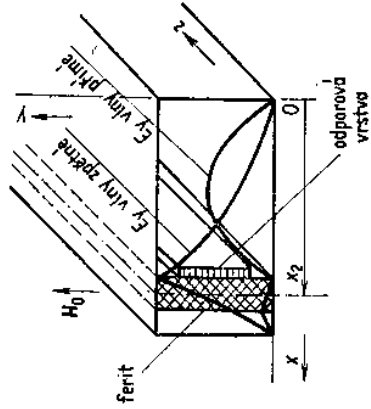


Obr. 10.13. Průřez koaxiálního rezonančního izolátoru

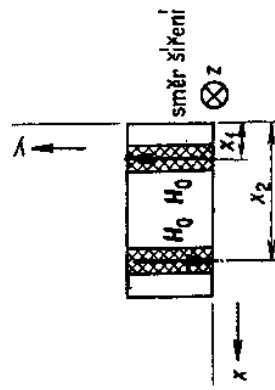
Koaxiální rezonanční izolátor, jehož příčný průřez je znázorněn na obr. 10.13, pracuje na stejném principu jako předcházející typ izolátoru. K tomu je však nutné vytvořit podélnou složku vysokofrekvenčního magnetického pole a tím vytvořit kruhovou polarizaci magnetického pole. Vlna v sousedním vedení je typu TEM. Částečným zaplněním příčného průřezu vedení dielektrikem s velkou permitivitou lze dosáhnout transformace vlny TEM na hybridní vlnu s podélnou složkou magnetického pole. Přímá vlna má magnetické pole s levotočivou kruhovou polarizací, zatímco zpětná má magnetické pole s pravotočivou kruhovou polarizací, takže je feritu pohlcována. Koaxiální rezonanční izolátory mají výhodu velké šířky frekvenčního pásma. Dosažitelná šířka pásma může být až jedná oktáva.

Izolátor s posuvem pole v pravotočivém vlnovodu je znázorněn na obr. 10.14. Feritová destička je umístěna ve vlnovodu v rovině $x = x_1$, v níž je magnetické pole přímé vlny pravotočivě kruhově polarizované. Intenzita příčného magnetického pole H_0 se zvolí tak, aby permeabilita feritu μ^+ pro pravotočivou vlnu byla

zaplněna (viz obr. 10.6a, 10.6b, 10.6c). Pak μ^+ (10.30) vyplývá, že součinné šíření $\gamma' = -\gamma_1$ je ryze imaginární a z (10.34) je zřejmé, že se vlna ve feritovém prostředí nešíří, pole je tedy z feritu vytlačeno⁴⁾. Průběh intenzity složky elektrického pole E_y přímé vlny je znázorněn na obr. 10.14 [6]. Zpětná vlna je v rovině $x = x_2$ levotočivě kruhově polarizovaná. Pro ni má ferit permeabilitu $\mu^- > 0$ (bod A na obr. 10.6a). Následkem větších hodnot μ^- a ϵ je zpětná vlna pomalá, takže má na rozhraní ferit – vzduch charakter povrchové vlny. Rozložení intenzity elektrického pole E , této vlny má jiný průběh, jak je zřejmé z obr. 10.14. Toto nereciproční rozložení pole se využije ke konstrukci izolátoru tak, že se na povrch feritu upevní destička s odporovou vrstvou, v níž je pole zpětné vlny pohlcováno, zatímco přímá vlna zůstává téměř nedotčena. Izolátory tohoto typu mají výhodu váhově lehkého magnetu ($H_0 < \omega_0/\mu_0$) a větší šířky frekvenčního pásma. Pro obtížný odvod tepla mohou však pracovat jen s malými výkony.



Obr. 10.14. Izolátor s posuvem pole ($\omega_0 \neq \mu_0\gamma H_0$). Grivet [6]



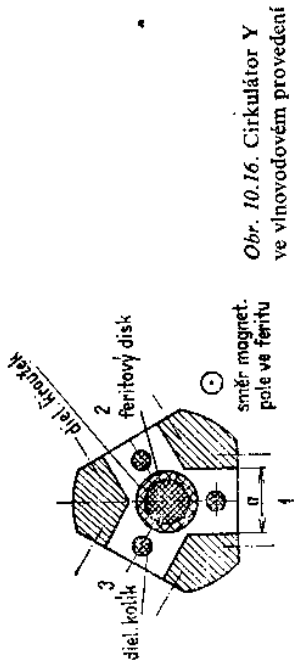
Obr. 10.15. Nereciproční fázový posouvač

Nereciproční posouvač fáze s příčným magnetováním je znázorněn schematicky v příčném průřezu na obr. 10.15. K jeho činnosti je opět využita existence kruhově polarizovaného magnetického pole s různým směrem otáčení a závislost permeabilit feritových destiček na magnetujícím poli a na směru otáčení vektoru pole, podobně jako u předcházejících obvodů. Místo trvalých magnetů jsou použity elektromagnety k plynulé změně fázového posunu změnou magnetujícího proudu. Posouvač fáze je nereciproční, neboť smysl otáčení magnetického pole v destičkách je rovněž nereciproční. Ke zvětšení fázového zdvihu a ke zmenšení délky destiček jsou použity obvykle dvě destičky magnetované v opačných směrech [3]. Fázový posun je možný i pomocí jedné destičky, avšak se dvěma destičkami zůstává prostorově uspořádání pole ve vlnovodu symetrické ke střední vertikální rovině a tato vlastnost je velmi výhodná pro přizpůsobení vstupu a výstupu posouvače.

⁴⁾ To vyplývá z předpokládaného tvaru řešení podle (10.34). Předpokládá-li se řešení ve tvaru (2.9), pak vychází, že podmínkou šíření vlny je imaginární nebo komplexní veličina γ (jak bylo uvedeno v čl. 2.1).

11. Mikrovláknové integrované obvody

Hvězdicový cirkulátor je typem cirkulátoru, který z mikrovláknových obvodů vytlačil všechny ostatní typy díky své konstrukční jednoduchosti. Popis principu jeho činnosti je však o to nesnadnější. Nejpoužívanější je třiramenná modifikace nebo také tzv. cirkulátor Y v rovině „H“ (obr. 10.16). Magnetující statické pole vytvářejí diskové trvalé magnety. Princip činnosti můžeme stručně vysvětlit opět pomocí kruhové polarizovaného magnetického pole v obdélníkovém vlnovodu. Dílčí vlny odpovídající oběma polím mají vzhledem k různým permeabilitám μ^+ a μ^- při průchodu ferritem různé fáze rychlosti. Rozměry a parametry ferritu je třeba zvolit takovým způsobem, aby vlny přicházející z ramene 1 byly na vnitřním vstupu ramene 2 ve fázi a na vstupu ramene 3 v protifázi. Výsledné pole v rameni 3 je tedy nulové. Tímto způsobem je tedy zhruba dosaženo toho, že vlna vstupující ramennem 1 vystupuje ramennem 2. Vzhledem k rotační symetrii cirkulátoru lze právem očekávat, že vlna vstupující ramennem 2 bude vystupovat ramennem 3 atd. Dielektrický kroužek obklopující ferritový disk zlepšuje provozní charakteristiky cirkulátoru. Dielektrické kolíky v jednotlivých ramenech pak slouží k přizpůsobení vstupních vlnovodů. Pracovní šířka frekvenčního pásma u vlnovodové varianty cirkulátoru dosahuje až 30 %, kdežto v páskověmp rovedení lze dosáhnout až jedné oktávy.



Literatura ke kapitole 10.

- [1] Blochincen, D. I.: Osnovy kvantovej mechaniki, 4. vyd. Moskva, Izd. Vysšaja škola 1963.
- [2] Haňka, V.: Teorie elektromagnetického pole. Praha, SNTL 1975 (str. 250).
- [3] Lax, B. - Burton, K. J.: Svěrvysokočastotnyje ferrity i ferritmagnetiki (překl. z angl.). Moskva, Izd. Mir 1965.
- [4] Mikaeľjan, A. L.: Teorija i primeněnije ferritov na SVČ. Moskva, Gosenergoizdat 1963.
- [5] Gureniš, A. G.: Ferrity na svěrvysokich častotach. Moskva, Fizmatgiz 1960.
- [6] Grubeš, P.: The Physics of Transmission Lines at High and Very High Frequencies, Vol. 2. Microwave Circuits and Amplifiers. London, Academic Press 1976.
- [7] Hogan, C. L.: The Ferrimagnetic Faraday Effect at Microwave Frequencies and its Applications - the Microwave Gyrator. Bell Syst. Tech. Journal 1952, č. 1, str. 1-31.
- [8] Fox, A. G. - Miller, S. E. - Weiss, M. T.: Svojtva ferritov i jich primeněnije v diapazone SVČ (překl. z angl.). Moskva, Izd. Sov. radio 1956.
- [9] Nejedlý, Z.: Hvězdicový cirkulátor, Sl. obzor 1964, č. 2, str. 85.
- [10] Sarozov, D. M. - Grudin, A. N. - Mišus tin, B. A.: Ustrojstva SVČ. Moskva, Izd. Vysšaja škola 1981.

Přibližně do r. 1965 byly téměř ve všech mikrovláknových zařízeních používány vlnovody, souosá vedení nebo pásková vedení. Jednotlivé obvodové součástky byly vytvořeny vždy z částí nebo úseků zmíněných typů vedení. Aktivní součástky, jako mikrovláknové elektronky, směšovací diody, tunelové diody, varaktory a spínací diody, byly upraveny konstruktivně tak, aby mohly být v mikrovláknových obvodech vyměnitelné, tj. byly vždy nějakým způsobem upevněny v pouzdrech. Mikrovláknová zařízení v tomto provedení měla mnoho výhod spočívajících ve snadné opravě, vlnovodnosti, v nastavitelnosti parametrů, v odvádění tepla apod. Nevýhodné však byly rozměry, hmotnost, příkony a výrobní náklady.

Úspěšný rozvoj planární polovodičové techniky a zejména pak rozvoj obvodové techniky kovových pásků na ploché dielektrické podložce (substrátu) dal vznik integrované technice i v mikrovláknových zařízeních. Vznik mikrovláknových integrovaných obvodů (MIO) je jedním z nejvýznamnějších pokroků v mikrovláknové technice. V současné době se technikou MIO konstruuji mikrovláknová zařízení na malé a střední výkony (řádově μW a mW), a to jak s pasívními obvody, tak i s obvody s polovodičovými součástkami nebo s ferity. Oblast velkých výkonových úrovní zůstává stále vyhrazena klasické vlnovodové nebo koaxiální technice.

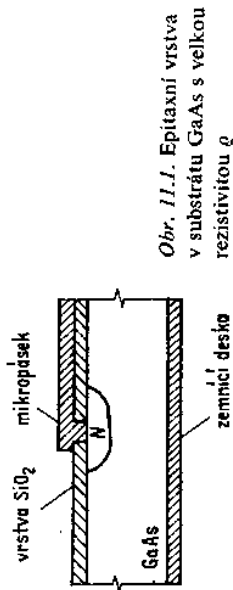
Mikrovláknové integrované obvody lze realizovat pomocí součástek se soustředěnými nebo rozloženými parametry, popř. kombinací obou typů, přičemž základní kritéria pro toto rozdělení zůstávají v platnosti tak, jak bylo uvedeno v první kapitole.

Provedení MIO může být dvojit: monolitické nebo hybridní.

11.1. MONOLITICKÉ MIKROVLÁKNÉ INTEGROVANÉ OBVODY

Monolitické mikrovláknové integrované obvody (MMIO) představují nejvyšší stupeň miniaturizace. Jsou vyrobeny z polovodiče, který slouží jako dielektrická podložka pro mikropáskové vedení. Současně se na této podložce vytvářejí pasívní obvodové součástky (L , C , R) a aktivní polovodičové součástky (tranzistory, diody apod.). Tyto součástky se zhotovují vhodnou technologií jako je epitaxe, iontová implantace, napařování, difúze nebo jejich kombinace. Příklad pro vedení epitaxní vrstvy v substrátu je znázorněn na obr. 11.1. Základní polovodičový substrát musí přitom zabránit vzniku parazitních vazeb a zároveň má mít co

nejmenší ztráty. V nízkofrekvenčních obvodech nehraní ztráty tak důležitou roli jako při mikrovlnných frekvencích. Izolace mezi jednotlivými prvky může být při nízkých frekvencích vytvořena tzv. plošnou izolací, a to tak, že každá součástka je obklopena přechodem PN pólovaným v závěrném směru. Jiná provedení izolace jsou např. dielektrická izolace nebo izolace pomocí polykrystalického křemíku.

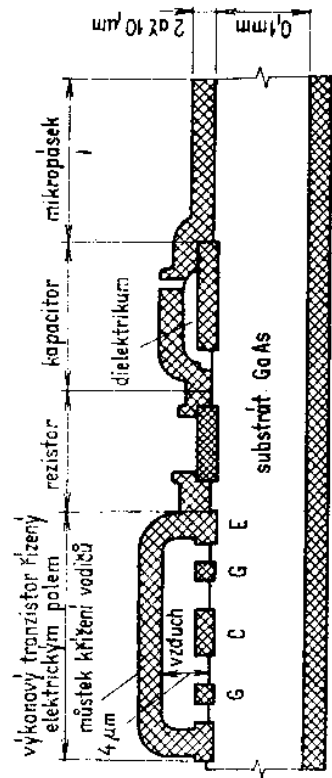


Obr. 11.1. Epitaxní vrstva v substrátu GaAs s velkou rezistivitou ρ

Tyto způsoby jsou však na velmi vysokých frekvencích nepoužitelné vzhledem k velkým parazitním kapacitám. V mikrovlnném pásmu musí být v monolitických obvodech použita izolace odporová. Podložky musí mít velmi velký odpor. Jako materiál pro podložku se používá křemík s velkou rezistivitou ($\rho = 10^3 \Omega \cdot \text{cm}$) nebo arsenid galia ($\rho = 10^6 \Omega \cdot \text{cm}$). Protože se mikrovlnná energie šíří v polovodičové podložce monolitického obvodu, musí mít materiál podložky při mikrovlnných frekvencích malé dielektrické ztráty.

Důsledkem použití polovodičových substrátů s velkou rezistivitou je velký poměrný útlum MMIO. Naopak zase realizace pasivních i aktivních součástek bez parazitních vlastností pouzder a přívodů umožňuje dosáhnout velké širokopásmovosti obvodu (až několik oktáv) a vysokých pracovních frekvencí (několik desítek GHz). Realizace prvků se skutečně soustředěnými parametry je obtížná vzhledem k parazitním jevům daným přítomností zemnicí desky při malé tloušťce substrátu (0,1 mm).

Jako vodiče pro spoje a mikropásková vedení se v MMIO používají kombinace molybdenu a zlata nebo titanu a zlata, přičemž první kov je adhezivní a druhý vodivý.



Obr. 11.2. Náčrt průřezu hypotetického MMIO

Tloušťka vodivého kovu musí být přibližně 3krát až 5krát větší než hloubka vniku vf proudu. Příklad provedení hypotetického MMIO je na obr. 11.2.

Na závěr je nutné poznamenat, že od r. 1980 se začíná technika MMIO velmi prudce rozvíjet zejména pro účely družicových komunikací a radiolokací [1], [2].

11.2. HYBRIDNÍ MIKROVLNNÉ INTEGROVANÉ OBVODY

V hybridních MIO jsou pásková vedení vytvářena na dielektrických podložkách a pasivní součástky a aktivní polovodičové součástky se k těmto vedením připojují ve tvaru zapouzdřených nebo nezapouzdřených vsazovacích součástek (čipů) pájením nebo ultrazvukovým svařováním. To umožňuje optimalizaci aktivních součástek a obvodů z mikropáskového vedení nezávisle na sobě.

Základním stavebním prvkem hybridních MIO je dielektrická podložka – substrát. Substrátem se šíří převážná část energie elektromagnetické vlny a tím jsou čáry velmi přesně požadavky na jeho vlastnosti:

- Velká poměrná permittivita ($\epsilon_r \approx 10$), jejíž hodnota musí být konstantní v celém používaném rozsahu frekvencí a teplot. Zmenšení rozměrů obvodů je úměrné zkrácení vlnové délky v dielektriku, tj. úměrné hodnotě $1/\sqrt{\epsilon_r}$.
- Co nejmenší činitel ztrát $\text{tg } \delta$ (řádově 10^{-4}).
- Velká čistota materiálu.
- Konstantní tloušťka podložky a velmi hladký povrch.
- Velká rezistivita, velká tepelná vodivost, malá teplotní roztažnost a dobří adheze pro nanášené vodiče.
- Všechny zmíněné parametry musí být během zpracování obvodu dostatečně stabilní.

Takové požadavky splňují jen některé materiály. Nejčastěji se používá tzv. korundová keramika (99,5 % Al_2O_3). Další vhodný materiál je safír (monokrystal Al_2O_3). Jejich nevýhodou je malá tepelná vodivost, takže se nehodí pro výkonové MIO. Z hlediska tepelné vodivosti je výhodná berylová keramika (99,5 % BeO). Její výroba je však drahá, neboť práškový BeO je jedovatý. Ke konstrukci nereci-pročních obvodů lze použít feritové substráty. Z feromagnetických materiálů jsou pro tyto účely vhodné yttrioželeznaté granáty (YIG) nebo lithné ferity, u nichž lze dosáhnout větší nasycené magnetizace.

Rozměry čtvercových substrátů¹⁾ jsou 25 mm × 25 mm, 50 mm × 50 mm, 75 mm × 75 mm. Jejich tloušťky jsou $h = 0,635$ mm, 1 mm a 1,4 mm. Drsnost povrchu 0,05 mm, teplotní roztažnost $6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, odchylka rovnoběžnosti ploch 0,02 mm. Tolerance délky hrany 0,05 mm a tolerance tloušťky $\pm 1\%$. Elektrické parametry: $\epsilon_r = 9,9$ až 10 a $\text{tg } \delta = 1 \cdot 10^{-4}$. Z ilustrativního výčtu je vidět, že tyto parametry jsou téměř na hranici technologických a výrobních možností.

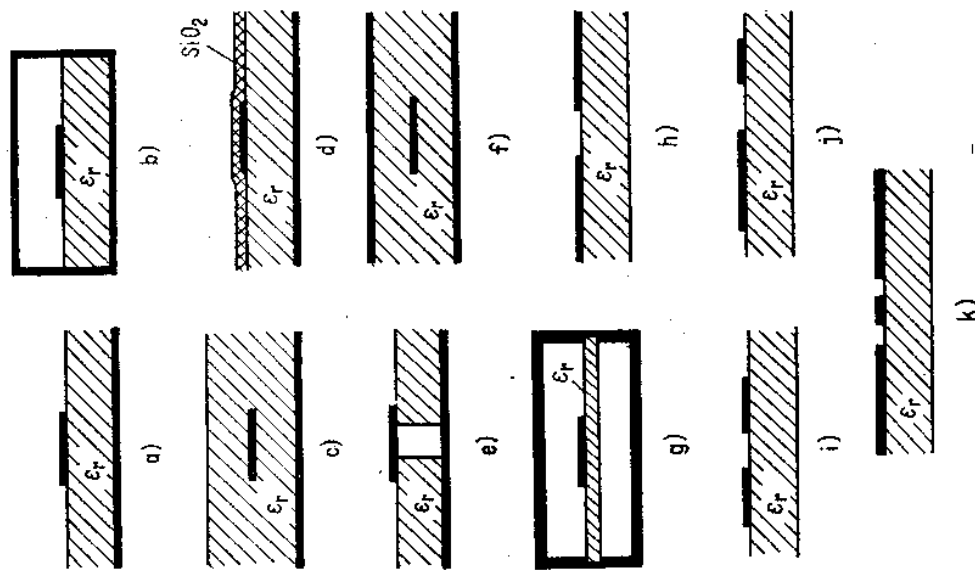
¹⁾ Výrobce VUEK Hradec Králové.

tvář požadovaného páskového obvodu. Opačná strana substrátu se obvykle pokrývá souvislou vrstvou vodivého kovu. Tato vrstva tvoří zemnicí desku. Pro nanášení vodivých motivů na substráty byly z techniky nízkofrekvenčních IO převzaty obě technologie, jak tlustovrstvová, tak i tenkovrstvová. V technice MIO oba rozdílné názvy postrádají svůj smysl, poněvadž bez ohledu na použitou technologii musí být tloušťky vodivých vrstev třikrát až pětkrát větší než je hloubka vniku. Tlustovrstvová technologie spočívá v nanášení vodivé pasty na substrát přes masku a jejím následujícím vypálením. Tenkovrstvová technologie spočívá ve vakuovém napařování. Vodivé motivy jsou do konečného tvaru upraveny leptáním. U obou technologií musí být nanášené vrstvy zesíleny elektrolytickým plátováním. Vodivý motiv se skládá z několika vrstev. První vrstva je opět adhezivní. Vazba mezi substrátem a adhezivní vrstvou je chemická. Redukční kov, např. Cr nebo Ti, je oxidován ohřátým substrátem. Druhou vrstvu tvoří čistý chrom. Třetí vrstva je tvořena dobře vodivým kovem. Na třetí vrstvu je teprve nanesen vlastní vodič – nejčastěji zlato nebo měď. Vrstva Cr má tloušťku 0,01 μm až 0,03 μm , zatímco Cu nebo Au má tloušťku 2 μm až 10 μm . Další podrobnosti viz např. [1], [3].

11.3. MIKROVLNNÉ INTEGROVANÉ OBVODY S ROZLOŽENÝMI PARAMETRY

Základním obvodem hybridních MIO a MMIO jsou tzv. *mikropásková vedení*. Jsou to v podstatě pásková vedení vytvořená na dielektrické podložce pro hybridní obvody nebo na polovodičové podložce pro MMIO. Ke konstrukci nerezipročních MIO se jako podložky používají ferity. Běžně používané druhy mikropáskových vedení jsou znázorněny na obr. 11.3. Nejčastěji používaným typem je *nesymetrické mikropáskové vedení* podle obr. 11.3a. Cílem jeho různých modifikací je potlačení některých nežádoucích vlastností. Ve *stíněném vedení* (obr. 11.3b) je zabráněno vyzářování. V technologicky náročné modifikaci (obr. 11.3c) je odstraněna příčná nehomogenita původního vedení. Mikropáskové vedení na polovodičovém substrátu pro účely MMIO má povrch pokryt tenkou izolační vrstvou SiO_2 k pasivaci povrchu, tj. k zabránění nebo potlačení prosakujících proudů (obr. 11.3d). Nevýhodou nesymetrického mikropásku je obtížné připojování paralelních součástek, což vyžaduje vyvrtání otvoru v podložce (obr. 11.3e). Dalším typem vedení pro hybridní MIO je *symetrické mikropáskové vedení* znázorněné na obr. 11.3f. V porovnání s nesymetrickým vedením má menší ztráty vyzářování. *Stíněné mikropáskové vedení se zavěšeným substrátem* podle obr. 11.3g se vyznačuje vysokou jakostí. V porovnání se stíněným vedením podle obr. 11.3b se zde v dielektriku šíří jen menší část elektromagnetické energie, takže toto vedení má velmi malé dielektrické ztráty. Může být tedy použito ke konstrukci mikrovlnných obvodů s velkým činitelem jakosti. Další typy mikropáskových vedení jsou znázorněny na obr. 11.3h až k. Jsou to postupně *šterbinové vedení*,

dvoudířčové koplanární vedení symetrické a nesymetrické. Poslední typ (obr. 11.3k) je *třídířčové koplanární vedení*. Tato vedení mají vodiče pouze na jedné straně substrátu. Paralelní připojení polovodičových součástek je tedy velmi jednoduché. V dalších odstavcích popíšeme vlastnosti některých nepoužívanějších typů mikropáskových vedení.



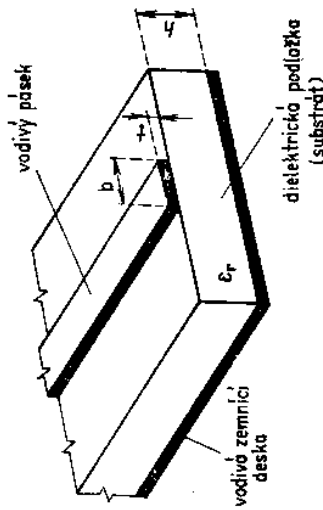
Obr. 11.3. Typy mikropáskových vedení

11.3.1. Nesymetrické mikropáskové vedení

Toto vedení se v hybridních MIO a MMIO používá nejčastěji. Z obr. 11.4, je zřejmé, že je příčně nehomogenní, neboť obsahuje ve svém příčném průřezu dvě různá prostředí; pevné dielektrikum s permitivitou ϵ_r a prostředí vzduchové

značně komplikuje jeho analýzu.

V příčné nehomogenním vedení nemůže existovat čistá vlna TEM a nemohou se v něm šířit ani vlny TE a TM, poněvadž tyto dílčí vlny nespĺňují samostatně okrajové podmínky na povrchu pásky a na rozhraní substrát – vzduch (spojitost tečných složek intenzit elektrického a magnetického pole). Okrajovým podmínkám



Obr. 11.4. Nesymetrické mikropáskové vedení

vyhovuje pouze superpozice vln TE a TM. Taková superpozice má název hybridní vlna (HEM). Vlna HEM má tedy podélnou složku jak elektrického pole, tak magnetického pole. Složky intenzit polí nemohou být odvozeny z jediné vlnové rovnice, ale z tolika rovnic, kolik různých dielektrik je obsaženo v příčném průřezu vedení. Vlnové rovnice pro Hertzův vektor budou mít tvar

$$\Delta \Pi_z^m + k_0^2 \Pi_z^m = 0 \quad (\text{ve vzduchu}) \quad (11.1)$$

$$\Delta \Pi_z^m + k_0^2 \Pi_z^m = 0 \quad (\text{ve vzduchu}) \quad (11.2)$$

$$\Delta \Pi_z^m + \epsilon_r k_0^2 \Pi_z^m = 0 \quad (\text{v substrátu}) \quad (11.3)$$

$$\Delta \Pi_z^m + \epsilon_r k_0^2 \Pi_z^m = 0 \quad (\text{v substrátu}) \quad (11.4)$$

Ve všech rovnicích je $\Pi_z = T_1 T_2$, přičemž funkce $T_2(z)$ je dána opět vztahem (2.9). Dále platí $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Je zřejmé, že se elektromagnetická vlna šíří v podélném směru stejnou rychlostí jak v substrátu, tak nad ním. Tím jsou splněny okrajové podmínky – rovnost tečných složek na povrchu substrátu. Je tedy součinitel šíření γ stejný jak pro oblast substrátu, tak i pro vzduchové prostředí nad substrátem. Mezní vlnové číslo Γ se proto naopak musí pro obě oblasti vedení lišit, takže příčná funkce T_1 vyhovuje rovnicím (bez rozlišení magnetického a elektrického typu jako v rovnicích (11.1) až (11.4))

$$\Delta T_1 + \Gamma_0^2 T_1 = 0 \quad (\text{ve vzduchu}) \quad (11.5)$$

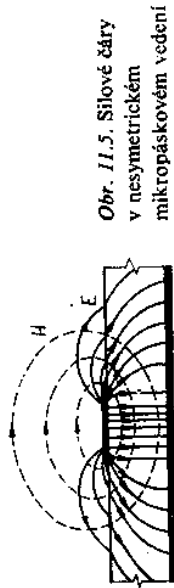
$$\Delta T_1 + \Gamma_d^2 T_1 = 0 \quad (\text{v substrátu}) \quad (11.6)$$

kde $\Gamma_0^2 = k_0^2 + \gamma^2$ a $\Gamma_d^2 = \epsilon_r k_0^2 + \gamma^2$.

formulace okrajových podmínek vyúsťuje do komplikovaných vztahů vzhledem k nutnosti brát v úvahu hybridní vlny.

Ve dvou mezních případech lze však řešení této úlohy zjednodušit. Je-li $\epsilon_r = 1$, rovnice (11.1) a (11.3) a stejně tak i (11.2) a (11.4) budou totožné, čímž se mikropáskové vedení stane v příčném průřezu homogenním. Při nejjednodušším uspořádání pole mezi pásky bude $\Gamma_0 = \Gamma_d = 0$ a rovnice (11.5) a (11.6) přejdou na Laplaceovy rovnice, což odpovídá vidu TEM bez podélných složek elektrického a magnetického pole jako u páskového vedení, které bylo vyšetřováno v kap. 3. Ve druhém mezním případě, je-li mikropásek vytvořen na substrátu s velmi velkou poměrnou permitivitou (teoreticky $\epsilon_r \rightarrow \infty$), je celé elektromagnetické pole soustředěno v dielektriku substrátu a vůbec neproniká do okolního vzduchového prostředí. Takové vedení je opět v příčném průřezu homogenní a elektromagnetické pole je popsáno rovnicemi (11.4) a (11.6).

Skutečné mikropáskové vedení může být chápáno jako „porucha“ některého ze dvou mezních případů. Porucha oproti stavu $\epsilon_r = 1$ je malá zejména na nižších frekvencích mikrovlnného pásma, kdy vlnové číslo k_0 je malé. Na těchto frekvencích jsou příčné rozměry substrátu i vodičů mnohem menší než polovina vlnové délky v dielektriku. V těchto případech se vlastnosti vedení vyšetřují pomocí tzv. aproximace kvazi-TEM. Podélné složky elektrického a magnetického pole vlny HEM jsou při těchto podmínkách zanedbatelně malé v porovnání s příčnými složkami pole. Říkáme v takovém případě, že se v mikropáskovém nesymetrickém vedení šíří vlna kvazi-TEM. Uspořádání siločar vidu kvazi-TEM je na obr. 11.5. Důsledkem takové aproximace je omezení platnosti dosažených



Obr. 11.5. Silové čáry v nesymetrickém mikropáskovém vedení

výsledků pouze na takový rozsah frekvencí, kde jsou podmínky pro tuto aproximaci spolehlivě splněny. V aproximaci kvazi-TEM jsou disperzní jevy zanedbány – fázová rychlost je rovna rychlosti skupinové. Přesnost aproximace kvazi-TEM na vyšších frekvencích lze zlepšit použitím substrátu s větší hodnotou ϵ_r . Tím se vlastně přibližujeme druhému meznímu případu přičné homogenního vedení s vlnou TEM. Čím větší bude hodnota ϵ_r , tím větší část elektromagnetického pole bude soustředěna v substrátu a tím přesnější bude koncepce vlny kvazi-TEM.

Přiblížení kvazi-TEM se pro řešení přičné nehomogenních mikropáskových vedení v praxi běžně používá, neboť dává poměrně jednoduché a přitom dostatečně přesné výsledky jak pro analýzu, tak i pro syntézu. Výsledky výpočtů v tomto přiblížení jsou v dobré shodě s hodnotami naměřenými až do frekvence přibližně

Uzlo při uzlov používaných substrátech s $\epsilon_r \approx 10$ a s tloušťkou substrátu $h \approx 1$ mm. Při experimentech se ukázalo, že při vyšších frekvencích se projevují disperzní jevy v mikropáskovém vedení (tj. frekvenční závislost ϵ_r a ν_r , a tím i frekvenční závislost Z_0 a λ_r , atd.). Pro respektování těchto jevů při současném zachování jednoduchého způsobu výpočtu v aproximaci kvazi-TEM bylo navrženo několik disperzních modelů, které uměle zavádějí korekce těchto parametrů tak, aby byly závislé na frekvenci.

Parametry nesymetrického mikropáskového vedení

Zde uvedeme některé výsledky řešení nesymetrického mikropáskového vedení na keramickém substrátu získané aproximací kvazi-TEM. První použitelné řešení podal Wheeler [1], [4] pomocí konformního zobrazení. Wheelerovo řešení se používá dodnes, zejména když je Wheeler později ještě zdokonalil. Novější a přehlednější řešení opět pomocí konformního zobrazení vypracoval Schneider [5]. Schneider odvodil pro výpočet vlnové impedance Z_0 nesymetrického páskového vedení s $\epsilon_r = 1$ přesné vzorce. Poněvadž tyto vzorce byly velmi složité, navrhl aproximace, které se od exaktních vztahů liší pro $0 < b/h < 10$ maximálně o 0,25% a pro $b/h > 10$ maximálně o 1%. Vlnová impedance pro vedení s $\epsilon_r \neq 1$ se v těchto aproximacích stanoví pomocí *efektivní permittivity* ϵ_{ef} , kterou již ve svých pracích zavedl Wheeler. Platí tedy podle Schneidera pro mikropásek s nulovou tloušťkou ($t = 0$)

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ef}}} \ln \left(\frac{8h}{b} + \frac{b}{4h} \right); \quad \frac{b}{h} \leq 1 \quad (11.7)$$

a

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{ef}}} \ln \left[\frac{b}{h} + 2,42 - 0,44 \frac{h}{b} + \left(1 - \frac{h}{b} \right)^6 \right]; \quad \frac{b}{h} \geq 1 \quad (11.8)$$

kde

$$\epsilon_{ef} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 10 \frac{h}{b}}} \quad (11.9)$$

Zavedením pojmu *efektivní permittivity* ϵ_{ef} je velmi jednoduchým způsobem kvantitativně vystižena skutečnost, že se vlna šíří dvěma prostředími. Efektivní permittivity (relativní) je s vlnovými impedancemi vázána vztahem

$$Z_0 = \frac{Z_{0v}}{\sqrt{\epsilon_{ef}}} \quad (11.10)$$

Vztah (11.9) vyjadřují její hodnotu s přesností asi 2%.

Vlnová délka na vedení může být také vyjádřena pomocí ϵ_{ef} vztahem

$$\lambda_r = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_{ef}}} \quad (11.11)$$

vzorce pro vlnovou impedanci platí pro nulovou tloušťku pásku. Tento předpoklad je v mnoha případech oprávněný, při některých výpočtech však tloušťku pásku zanedbat nelze.

a) Oprava na nenulovou tloušťku pásku

Vliv skutečné tloušťky páskového vodiče ($t \neq 0$) lze respektovat v analýze tak, že se do vzorců (11.7) a (11.8) dosadí místo šířky pásku b hodnota $b' = b + \Delta b$, kde Δb je korekce

$$\Delta b = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{t}{\pi} \left[1 + \ln \frac{2h}{t} \right] \quad \text{pro } b > \frac{h}{2\pi} > 2t \quad (11.12)$$

nebo

$$\Delta b = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{t}{2\pi} \left[1 + \ln \frac{4\pi b}{t} \right] \quad \text{pro } \frac{h}{2\pi} > b > 2t \quad (11.13)$$

Při návrhu mikropáskového vedení se postupuje tak, že se šířka vodiče vypočítaná podle (11.7) a (11.8) zmenší o Δb a tím zůstane vlnová impedance Z_0 nezměněna.

b) Oprava na disperzní jevy

Nahlédnutím do (11.7) a (11.8) zjistíme, že vzorce pro výpočet vlnové impedance jsou frekvenčně nezávislé. Tato skutečnost je způsobena tím, že byly odvozeny pomocí aproximace kvazi-TEM. Bylo již řečeno, že tato aproximace nerespektuje disperzní vlastnosti mikropásku. Vlna šířící se podél tohoto vedení je však vlna HEM, takže jeho disperzní vlastnosti se musí projevit a také se projevují na frekvencích vyšších než 6 GHz až 8 GHz. Aby byly dříve uvedené vzorce použitelné i pro případ disperze, navrhl Schneider vyjádření frekvenční závislosti efektivní permittivity ϵ_{ef} ve tvaru

$$\epsilon_{ef}(f) = \epsilon_r \epsilon_{ef} \left[\frac{1 + f^2}{\sqrt{\epsilon_r} + f_n^2 \sqrt{\epsilon_{ef}}} \right]^2 \quad (11.14)$$

kde

$$f_n = \frac{4hf}{c} \sqrt{\epsilon_r - 1} \quad (11.15)$$

Nahradíme tedy ve všech předcházejících vztazích (11.7), (11.8) a (11.11) hodnotu ϵ_{ef} hodnotou $\epsilon_{ef}(f)$. Výsledky měření ukazují, že při tom se vypočítané výsledky liší maximálně o 3% od skutečnosti. Výhodou rovnice (11.14) je její jednoduchost a snadný výpočet $\epsilon_{ef}(f)$. Praktickou frekvenční hranici bude frekvence, při níž nastane vyzařování z vedení nebo vybuzení vyšších (vlnodových) vidů v mikropáskovém vedení [7]. Frekvenční opravu uvádí více autorů. Přehledný a podrobný popis disperzních jevů viz např. v [6].

c) Ztráty v mikropáskovém vedení

Ztráty v nesymetrickém mikropáskovém vedení vznikají v dielektriku, ve vodičích a vyzařováním. Ztráty v dielektriku jsou vzhledem k používaným jakostním dielektrikům ($\text{tg } \delta \approx 10^{-4}$) malé a tvoří asi 20% celkových ztrát. Ztráty vyzařo-

váním nejsou doposud zcela exaktně popsány a bývají nejbastěji neuvyváženými a připojení mikropásky k napájecímu vedení. Toto vedení bývá do 18 GHz koaxiální a nad touto hranicí vlnovodové.

Ztráty v dielektriku ($\text{dB} \cdot \text{m}^{-1}$) lze podle [1] vypočítat ze vztahu

$$\beta_d = 27,3 \frac{f_{\text{er}} \cdot 10^3 \delta}{c \epsilon_{\text{er}}} \frac{\partial \epsilon_{\text{er}}}{\partial \epsilon_r} \quad (11.16)$$

Tento vzorec opět odvodil Schneider. Efektivní permittivita ϵ_{er} je dána vztahem (11.9).

Ztráty ve vodičích jsou podle Schneidera [5] dány vztahy

$$\beta_c = 1,38 \frac{\rho_{\text{er}}}{h} \left(\frac{h}{b} - \frac{b}{4h} \right) \left(1 + \frac{h}{b} + \frac{\partial b}{\partial t} \right); \quad b/h \leq 1 \quad (11.17)$$

$$\beta_c = 6,12 \cdot 10^{-5} \frac{\rho_{\text{er}}}{h} Z_0 \sqrt{\epsilon_{\text{er}}} \left[1 + 0,44 \left(\frac{h}{b} \right)^2 + 6 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{h}{b} \right)^5 \right] \times \left(1 + \frac{b}{h} + \frac{\partial b}{\partial t} \right); \quad b/h \geq 1 \quad (11.18)$$

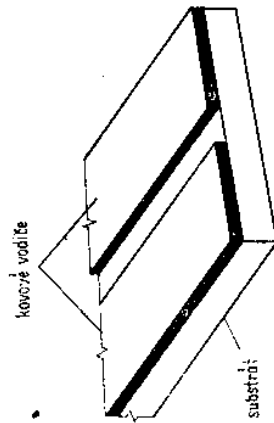
v těchto vztazích je $\rho_{\text{er}} = \sqrt{\omega \mu_0 / 2\sigma}$ poměrný vysokofrekvenční odpor vodičů s konduktivitou σ a

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{2h}{t}; \quad b > \frac{h}{2\pi} \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4\pi b}{t}; \quad \frac{h}{2\pi} > b > \frac{h}{2\pi} \quad (11.20)$$

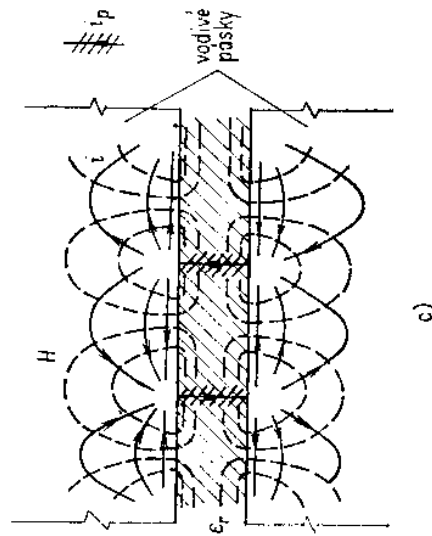
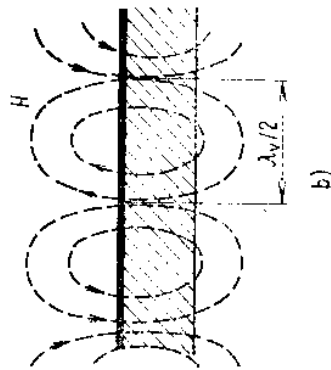
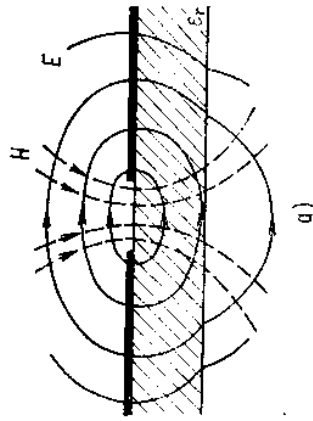
11.3.2. Štěrbinové vedení

Štěrbinové vedení je tvořeno dvěma neomezenými vodiči umístěnými na jedné straně substrátu (obr. 11.6). V praktickém provedení bývá širka páskových vodičů padesátkrát i vícekrát větší než šířka štěrbin mezi nimi. Poněvadž analýza takového vedení je velmi složitá, omezíme se pouze na popis tohoto vedení. Štěrbinové vedení se pro přenos energie používá velmi zřídka. Mnohem užitečnější je využít jeho zvláštních vlastností ke konstrukci některých obvodů a zařízení. Stojí



Obr. 11.6. Štěrbinové vedení

za cílem, že rezonanční struktury i štěrbinové vedení s postupnou vlnou byly použity již ve čtyřicátých letech ke konstrukci primárních zářičů v anténních systémech. První analýzu štěrbinového vedení vypracoval Cohn [4]. Cílem takové analýzy je určení vlnové impedance Z_0 a vlnové délky na vedení λ_{vs} . Vedení nemá mezní frekvenci ($\omega_m = 0$) a šíří se vlna je typu HEM. Má-li být štěrbinové vedení použí-



Obr. 11.7. Prostorové rozložení polí a proudů ve štěrbinovém vedení (i_p je posuvný proud v dielektriku)

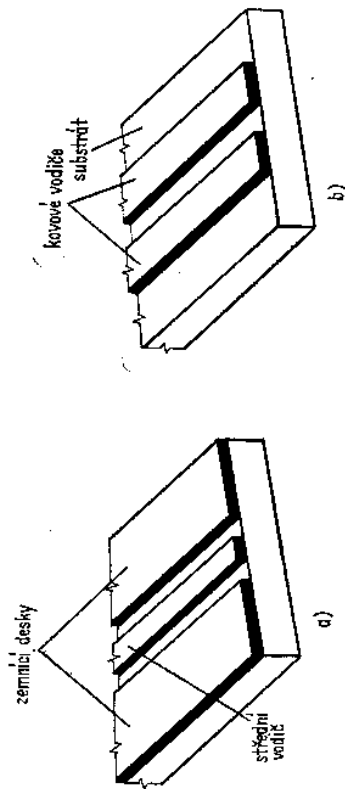
telné, musí být ztráty vyzařováním sníženy na minimum. Minimum vyzařování dosáhneme použitím substrátu s velkou relativní permitivitou ϵ_r . Tím se dosáhne toho, že vlnová délka na vedení bude velmi malá v porovnání s vlnovou délkou volného prostoru. Vlna podél vedení bude mít vlastnosti povrchové vlny s energií soustředěnou v největší blízkosti štrébiny a ztráty vyzařováním budou minimální. Např. je-li $\epsilon_r = 20$, pak $\lambda_v \approx \lambda/3$ a z analýzy vyplývá, že intenzita pole je velmi utlumena již ve vzdálenosti $r = \lambda/8$, tj. 12,5 mm při frekvenci 3 GHz [4].

Prostorové rozložení pole ve štrébinovém vedení je znázorněno na obr. 11.7 ve třech pohledech. Mezi pásy je napětí. Elektrické pole leží v rovině nákrese na obr. 11.7a. Magnetické pole je kolmé k rovině štrébiny. Vzhledem k tomu, že je mezi pásy napětí, je takové rozložení pole velmi výhodné pro připojování různých součástek (jako jsou diody, rezistory a kapacity) pouhým přemostěním štrébiny. Pohled v obr. 11.7b na podélný průřez štrébinového vedení ukazuje, že se siločáry magnetického pole ve vzduchu nad štrébinou zakřívují a vracejí se nazpět ke štrébině v půlvlnných intervalech. Důsledkem toho je, že vlna šířící se podle vedení, má eliptický polarizovaný charakter, což lze využít ke konstrukci feritových zařízení (např. nereciproční fázové posouvače). Proudové dráhy na vodivé ploše pásků (obr. 11.7c) ukazují, že hustota povrchového proudu je největší podél štrébiny a rychle se zmenšuje se vzdáleností od štrébiny.

Štrébinové vedení umožňuje zajímavé aplikace pro MIO v kombinaci s nesy-metrickým mikropáskovým vedením. Mikropáskové vedení je umístěno na jedné straně substrátu a na jeho druhé straně je štrébinové vedení. Příklady takové kombinace vedení jsou uvedeny v odst. 11.3.7 a 11.4.2.

11.3.3. Koplanární vedení

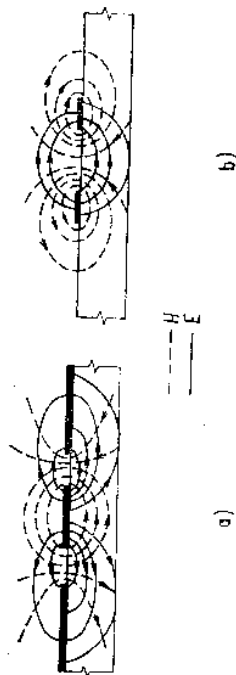
Koplanární vedením rozumíme páskové vedení, jehož všechny vodiče leží v jedné rovině, tj. na jedné straně podložky. Ve smyslu této definice náleží mezi koplanární vedení i vedení štrébinové popsané v předcházejícím odstavci. Do této skupiny vedení náleží dále třívodičové koplanární vedení (obr. 11.8a) a dvou-



Obr. 11.8. Koplanární vedení
a) třívodičové, b) dvou-vodičové

vodičové symetrické koplanární vedení (obr. 11.8b). Dvou-vodičové koplanární vedení může být modifikováno do nesymetrického tvaru rozdílnou šířkou pásku. Štrébinové vedení se však vzrůstajícím rozsahem praktických aplikací i rozvojem teorie postupně z této skupiny osamostatnilo. Koplanární vedení poskytuje výhodu snadné paralelní montáže součástek do struktury, aniž by bylo nutné vrtat do podložky otvory.

Dominantním videm třívodičového i dvou-vodičového koplanárního vedení je vlna HEM s nulovou mezní frekvencí. Při nízkých frekvencích ji lze nahradit vlnou kvazi-TEM. Prostorové uspořádání polí v obou vedeních v přiblížení kvazi-TEM je na obr. 11.9a, b.



Obr. 11.9. Prostorové rozložení polí v koplanárním vedení
a) v třívodičovém, b) ve dvou-vodičovém

Metody řešení koplanárního vedení k určení Z_0 , λ , a disperzních jevů jsou však velmi složité. Vzhledem k omezenému rozsahu učebnice se jimi nemůžeme zabývat. Zájemce odkazujeme na citovanou literaturu, např. [4], [6].

11.3.4. Porovnání vlastností páskových vedení

Symetrické páskové vedení (obr. 11.3f), v němž se využívá dominantní vid TEM, se vyznačuje oproti vedením na podložkách větší šířkou frekvenčního pásma a větší možnou úrovní přenesené výkonu. Jeho výroba s nejčastěji používanou vlnovou impedancí $Z_0 = 50 \Omega$ není příliš obtížná, pokud má sloužit pouze pro přenos energie nebo ke konstrukci zařízení s rozloženými parametry (směrové odbočnice, děliče, filtry apod.). Montáž přídavných součástek, ať již aktivních nebo pasivních, je obtížná. Používané dielektrikum má menší hodnotu ϵ_r . Poměrný útlum tohoto vedení se $Z_0 = 50 \Omega$ bývá přibližně $0,1 \text{ dB} \cdot \text{cm}^{-1}$.

V páskových vedeních s dielektrickým substrátem je používána jako dominantní vid vlna HEM. Přímým důsledkem disperzních jevů, které na těchto vedeních vznikají, je omezení použitelné šířky frekvenčního pásma. Rozsah vlnových impedancí, jichž lze u páskových vedení dosáhnout, je dán šířkou pásku nebo šířkou mezery mezi pásy. Podle Pucela [2] lze dosáhnout šířky mikropásku $b_{\min} = 5 \mu\text{m}$ až do $b_{\max} = \lambda/8$. Těmito hodnotám odpovídají dosažitelné hodnoty Z_0 od 10Ω do 100Ω při frekvenci $f = 10 \text{ GHz}$. Rozsah dosažitelných hodnot Z_0 u štrébinového vedení je 55Ω až 300Ω , u dvou-vodičového koplanárního vedení 40Ω až 250Ω .

a u třívodičového koplánárního vedení 25 Ω až 125 Ω . Disperze, tj. závislost v_T na frekvenci, je nejmenší u mikropáskového vedení, střední u koplánárního a největší u šterbinového vedení. Ztráty jsou v podstatě dány převážně ztrátami ve vodičích. Nejmenšími ztrátami se vyznačuje mikropáskové vedení. Koplánární vedení se vyznačují většími ztrátami v důsledku větší koncentrace nábojů a proudů v blízkosti hran vodičů. Typická hodnota poměrného útlumu mikropáskového vedení ze $Z_0 = 50 \Omega$ na podložce s $\epsilon_r = 10$, $h = 1$ mm, $\text{tg } \delta = 5 \cdot 10^{-4}$ při frekvenci 10 GHz je přibližně 0,15 dB cm^{-1} [1].

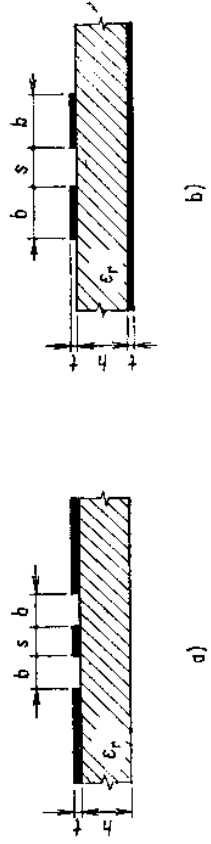
11.3.5. Vázaná vedení

Ke konstrukci směrových odbočnic, filtrů a fázových posouváčů v mikrovlnné integrované technice se používají tzv. vázaná vedení. Vázanými vedeními rozumíme dvě jednoduchá vedení (popsaná v předcházejících odstavcích), která jsou umístěna paralelně vedle sebe tak blízko, aby mezi nimi vznikla elektromagnetická vazba. Různé způsoby vazby dvou symetrických páskových vedení jsou uvedeny na obr. 11.10. Analýza a syntéza těchto vedení je dostatečně propracována [6], [9].



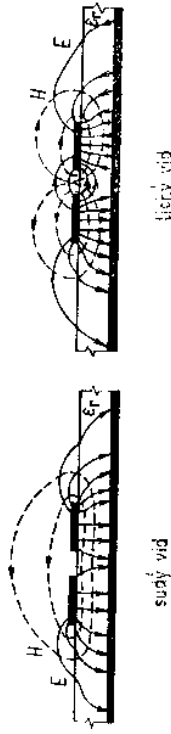
Obr. 11.10. Různé způsoby vazby vázaných symetrických vedení

Nejčastěji se používají vázaná šterbinová vedení a vázaná mikropásková vedení znázorněná na obr. 11.11a, b. Vedení jsou tvořena třemi vodiči. Vázané šterbinové vedení má všechny tři vodiče na jedné straně substrátu, zatímco vázané mikropáskové vedení má třetí vodič, tvořící současně zemnicí desku, na opačné straně substrátu.



Obr. 11.11. Vázaná vedení
a) šterbinové, b) mikropáskové

Z analýzy vyplývá, že ve vázaném mikropáskovém vedení se mohou šířit dva dominantní vlny HEM s nulovou mezní frekvencí. Označujeme je jako *sudý* a *lichý vln*. Na nízkých frekvencích lze rozložení pole těchto vlnů aproximovat sudým a lichým videm kvazi-TEM. Prostorové rozložení polí obou vlnů při aproximaci kvazi-TEM je uvedeno na obr. 11.12. Na vyšších frekvencích se oba vlny



Obr. 11.12. Prostorové rozložení polí ve vázaném mikropáskovém vedení v aproximaci kvazi-TEM

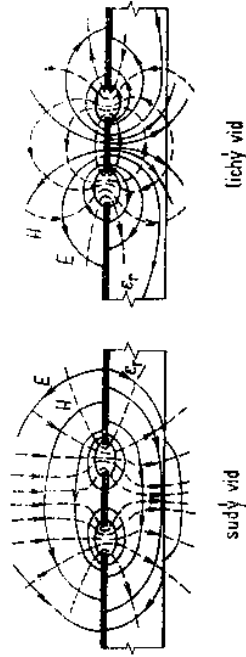
šíří současně s různými fázovými rychlostmi, tedy $v_{Ts} \neq v_{Tl}$. Fázové rychlosti závislé na rozměrech vázaného vedení a na permitivitě podložky ϵ_r , stejně tak, jako vlnová impedance sudého vlnu Z_{0s} a vlnová impedance lichého vlnu Z_{0l} . Lze ukázat [10], že pro přizpůsobení zátěže Z_k k takovému vedení musí platit

$$Z_x = \sqrt{Z_{0s} Z_{0l}} \quad (11.21)$$

$$\text{tg } \frac{2\pi}{\lambda_s} l = \text{tg } \frac{2\pi}{\lambda_l} l \quad (11.22)$$

kde λ_s a λ_l jsou vlnové délky sudého a lichého vlnu na vedení. Je zřejmé, že vzhledem k různým fázovým rychlostem není obecně druhá podmínka splnitelná. Čím větší bude rozdíl mezi λ_s a λ_l , tím více bude zúženo použitelné frekvenční pásmo mikrovlnného obvodu, v němž je vázané vedení použito.

Poděl vázaného šterbinového vedení se také mohou šířit dva dominantní vlny s nulovou mezní frekvencí. Oba vlny jsou opět typu HEM. Velikost vazby mezi oběma vedeními závisí na šířce s (viz obr. 11.11a) středního páskového vodiče. Odvozováním kvantitativního vyjádření poměrů ve vázaném šterbinovém vedení se pro jeho rozsáhlost nemůžeme zabývat. K usnadnění fyzikálních představ o rozložení polí obou vlnů poslouží obr. 11.13.



Obr. 11.13. Rozložení polí sudého a lichého vlnu ve vázaném šterbinovém vedení

11.3.6. Mikropáskové vedení na feritovém substrátu

Feritové substráty v technice MIO se nejčastěji používají v nesymetrických mikropáskových vedeních.

Šíření elektromagnetických vln ve feritovém prostředí bylo popsáno dostatečně podrobně v kap. 10. Zjistili jsme, že fyzikální jevy, vznikající při šíření mikrovln

teritovými prostrediami, jsou závislé na směru vnějšího magnetického pole magnetického feritu. Při šíření mikrovln podél mikropáskového vedení na feritovém substrátu nastává zcela podobná situace. Vzhledem k příčné nehomogenitě mikropásku s feritovou podložkou nemohou být šířící se vlny typu TEM, ale jsou opět typu HEM. Analýza těchto vedení je ještě složitější a obecná teorie, která by vzala v úvahu všechny různorodé podmínky, nebyla dosud vypracována. Všechny veličiny potřebné k návrhu mikropáskového vedení s feritovou podložkou lze však zjistit s dostatečnou přesností aproximací kvazi-TEM [1].

V tomto odstavci velmi stručně popíšeme šíření zvláštního vidu podél širokého mikropásku na feritové podložce s příčnou magnetizací. Podle Hines [11] můžeme předpokládat, že je-li horní páskový vodič dostatečně široký ($b \gg h$), bude většina energie pole soustředěna ve feritu pod páskem a malý zbytek bude rozdělen do rozptylového pole na okrajích pásku. Je-li prostředí bezztrátové a zanedbáme-li rozptylové pole (v prvním přiblížení), vede řešení Maxwellových rovnic k závěru, že výsledné pole šířící se vlny má pouze dvě složky intenzit pole E_y a H_x , tj. že vlna je typu TEM

$$E_y = A e^{-\beta_x x} e^{-j\alpha_z z} \quad (11.23)$$

$$H_x = \frac{A}{\omega \mu_0 \mu_r} \left(-\frac{\mu_0}{\mu} \beta_x + \alpha_z \right) e^{-\beta_x x} e^{-j\alpha_z z} \quad (11.24)$$

$$\alpha_z = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mu} \quad (11.25)$$

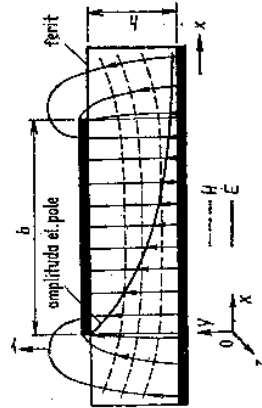
$$\beta_x = \omega \frac{\mu_0}{\mu} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mu} \quad (11.26)$$

kde

příčměz hodnoty μ a μ_0 jsou dány vztahy (10.22).

Ze vztahů (11.23) a (11.24) vyplývá, že intenzita pole E_x exponenciálně klesá s rostoucí souřadnicí x . Energie pole je převážně soustředěna v blízkosti okraje pásku ($x = 0$). Vlna jakoby byla vedena hranou pásku, takže dostala název *vlna vedená okrajem*. Poněvadž ve veličinách α_z a β_x vystupují složky Polderova tenzoru permeability, je zřejmé, že rozložení pole je nereciproční. Průběh poli takového vidu je na obr. 11.14.

Vln vedených okrajem se používá ke konstrukci nerecipročních obvodů (izolátorů a cirkulátorů).

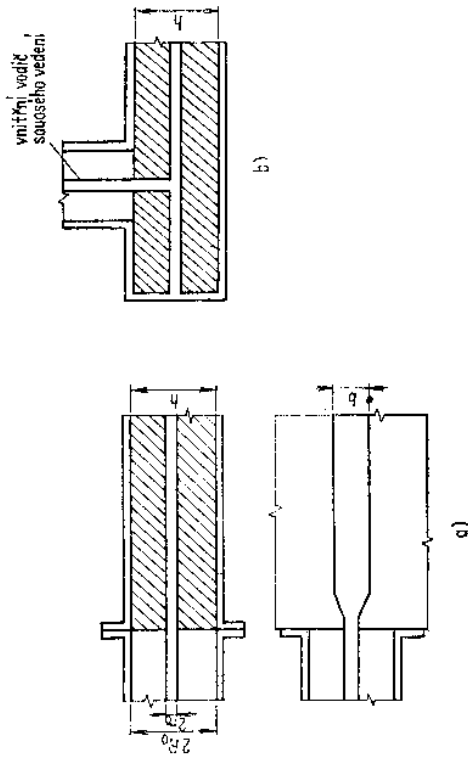


Obr. 11.14. Průběh amplitudy intenzity elektrického pole vlny vedené okrajem. Hines [11]

V tomto odstavci pojednáme o buzení mikropáskových a šterbinových vedení. MIO bývá obvykle součástí většího mikrovlnného zařízení, takže je nutné zvýšit přenos energie z běžného mikrovlnného vedení (vlnovodu, koaxiálního vedení) do integrovaného obvodu na substrátu. V podstatě tedy jde o konstrukci přechodu mezi různými typy vedení. Během vývoje MIO bylo vypracováno a experimentálně ověřeno velké množství různých přechodů. Zde budou popsány pouze nejjednodušší a nejpoužívanější konstrukce přechodů.

Přechod sousedě vedení — symetrické mikropáskové vedení

Tento přechod může být konstruován v axiálním provedení (obr. 11.15a) nebo v pravouhlém provedení (obr. 11.15b). Sousedě napájení je vhodné tehdy, je-li tloušťka dielektrika mikropáskového vedení h stejná jako vnitřní průměr vnějšího vodiče koaxiálního vedení. V obou vedeních se šíří vlna TEM, takže kompenzaci parazitní kapacity v místě skokové změny rozměrů vedení lze dosáhnout velké šířky použitelného frekvenčního pásma. Pravouhlý typ tohoto přechodu je vhodnější pro nižší frekvence mikrovlnného pásma ($f < 3$ GHz).

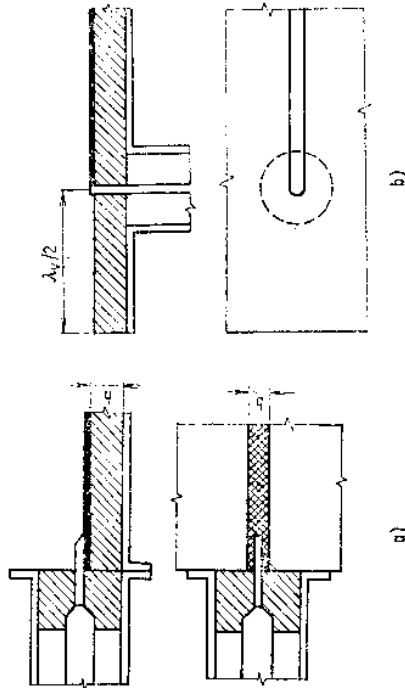


Obr. 11.15. Přechod sousedě vedení — symetrické mikropáskové vedení a) axiální provedení, b) pravouhlé provedení

Přechod sousedě vedení — nesymetrický mikropásek

Nesymetrické mikropáskové vedení může být napájeno z koaxiálního vedení nebo z vlnovodu. Přechod nesymetrický mikropásek — sousedě vedení může být opět axiální nebo pravouhlý. Axiální provedení tohoto přechodu je na obr. 11.16a. Rozměry koaxiálních konektorů jsou přizpůsobeny k normalizovaným tloušťkám substrátů. Nejlepších výsledků lze dosáhnout, je-li výška substrátu stejná jako

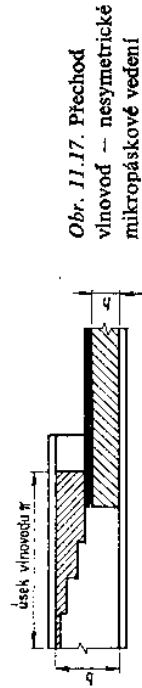
v současné době zcela převládá. Pravoúhlý přechod (obr. 11.16b) se používá zřídka vzhledem k nutnosti vrtání otvoru do podložky. Vrtání otvoru do substrátu je nejen obtížné, ale i nákladné pro jeho tvrdost (u korundu 9. stupeň Mohsovy stupnice). U axiálního typu tohoto přechodu lze dosáhnout značně širky frekvenčního pásma; tak např. pro činitel stojatých vln $\leq 1,1$ lze dosáhnout 2 GHz až 8 GHz, 3 GHz až 10 GHz a 6 GHz až 13 GHz.



Obr. 11.16. Přechod souosé vedení — nesymetrický mikropásek
a) axiální, b) pravoúhlý

Přechod vlnovod — nesymetrický mikropásek

Přes snahu konstruktérů nahrazovat vlnovody sousými vedeními zůstávají vlnovody v některých případech stále nenahraditelné — v současné době přibližně od 18 GHz výše [3]. Při konstrukci širokopásmových přechodů vlnovod — pásek je nejužitečnější používat přechody s vlnovodem Π . Při stejných rozměrech jako u obdélníkových vlnovodů, mají tyto vlnovody mnohem nižší mezní frekvenci.



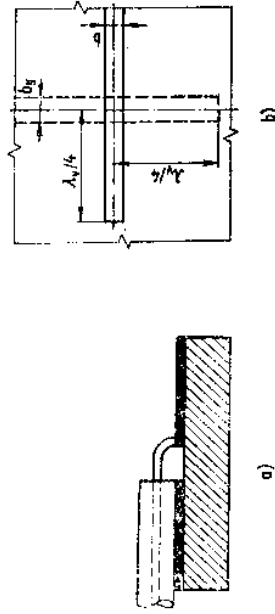
Obr. 11.17. Přechod vlnovod — nesymetrické mikropáskové vedení

Vlnovod Π přechází stupňovitě (nebo spojitě) v obdélníkový vlnovod tak, jak je znázorněno na obr. 11.17. Vlnovod Π je symetrický (v rovině „E“), takže v obdélníkovém vlnovodu se nemůže vybudit nesymetrický vid TE_{20} . Mezní vlnová délka vidu TE_{30} ve vlnovodu Π je menší než ve vlnovodu obdélníkovém. Tato skutečnost umožňuje využít takový přechod prakticky v celém pásmu mezi mezními frekvencemi vidů TE_{10} a TE_{31} obdélníkového vlnovodu.

Vlnová impedance výstupní části vlnovodu Π musí být rovna vlnové impedanci mikropáskového vedení a mezera mezi hřebenem a nižší stěnou vlnovodu musí být rovna tloušťce substrátu. Rozměry jednotlivých stupňů se určí z požadavku přizpůsobení v požadovaném frekvenčním pásmu, přičemž tato úloha je při návrhu základní.

Přechod souosé vedení — šěrbinové vedení

Tento přechod podle Cohna [4] je vytvořen smýčkou z vnitřního vodiče souosého vedení (obr. 11.18a). Smýčka je připájena svým koncem k jednomu vodiči šěrbinového vedení a vnější vodič je připájen k druhému vodiči. Uvážíme-li rozložení pole



Obr. 11.18. Přechody na šěrbinové vedení
a) axiální vedení — šěrbinové vedení,
b) nesymetrický mikropásek — šěrbinové vedení. Cohn [4]

ve šěrbinovém vedení (obr. 11.7), je tato varba magnetická. Pro lepší představu uvedeme výsledky [4]: Činitel stojatého vlnění byl menší než 1,2 v pásmu $\Delta f = 500$ MHz na frekvenci $f = 3$ GHz. Vlnové impedance $Z_{0s} = 75 \Omega$, $Z_{0krok} = 50 \Omega$. Parametry substrátu: $b = 0,787$ mm, $h = 1,575$ mm a $\epsilon_r = 16,0$.

Přechod nesymetrický mikropásek — šěrbinové vedení

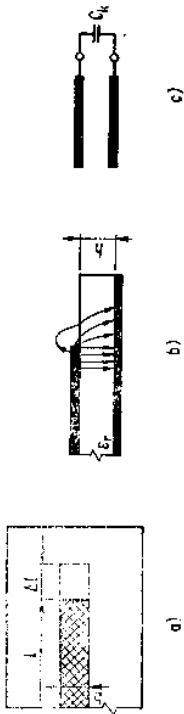
Buzení šěrbinového vedení koaxiálním vedením narušuje planární koncepci MIO, takže tento způsob buzení šěrbinového vedení je méně vhodný. Užitečnější z tohoto hlediska je tedy buzení šěrbinového vedení nesymetrickým mikropáskem, a to tak, že mikropásek je umístěn na jedné straně substrátu a šěrbinová je na druhé straně substrátu, jak je znázorněno na obr. 11.18b. Je zřejmé, že vzhledem k rozložení polí ve šěrbině a v mikropásku musí být přesahy obou vedení od místa jejich překřížení dlouhé $\lambda_g/4$. Cohn [4] uvádí, že při optimální poloze obou pásků lze dosáhnout 30 % šířky pásma a při použití přizpůsobovacích prvků lze použitelnou šířku frekvenčního pásma zvětšit až na jednu oktávu.

Otevřený konec vedení

Při konstrukci MIO se používají často úseky vedení s délkou rovnající se násobkům $\lambda_g/4$ nebo $\lambda_g/2$. Podmínky rezonance takových úseků lze přesněji splnit u vedení zkratovaných než u vedení naprázdno. Avšak zkraty mikropáskových vedení se realizují obtížněji než vedení naprázdno. Vliv rozptylového pole na konci pásku zakončeného naprázdno se projevuje tak, jako by vedení na konci bylo zatíženo kapacitou (obr. 11.19). K dosažení stejné vstupní impedance úseku mikropáskového vedení naprázdno je tedy nutné délku horního vodiče zkrátit o

$$\Delta l = C_k Z_0 v_T \quad (11.27)$$

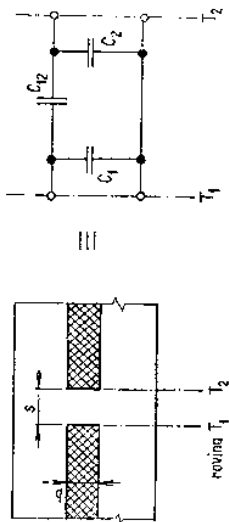
kde Δl je korekce délky, Z_0 je vlnová impedance a v_T je fázová rychlost. Hodnoty C_k pro různé ϵ_r substrátů a rozměrů mikropáskového vedení najdeme v [4]. Délka rezonujícího úseku vedení je tedy $\lambda_g/2 = l + 2\Delta l$.



Obr. 11.19. a) Efektivní prodloužení mikropásku naprázdno, b) rozptylové pole, c) ekvivalentní schéma. Silvester — Benedek [4]

Přerušení vedení

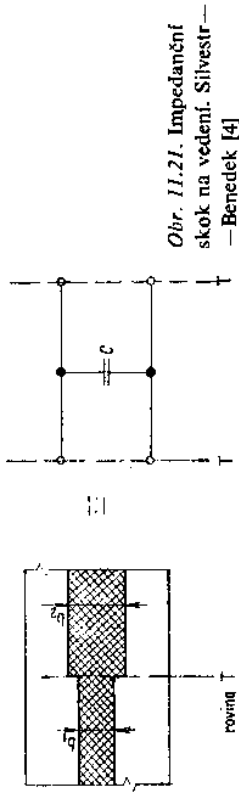
K oddělování stejnosměrného proudu v MIO s aktivními součástkami se používá příčná šterbina v mikropáskovém vedení. Tato nespojitost je zobrazena i se svým náhradním schématem podle [4] na obr. 11.20. Známe-li vlastnosti otevřeného mikropáskového vedení, je pak náhrada takové šterbiny článkem II zcela pochopitelná, i když jiní autoři [4] nahrazují tuto nespojitost jednodušším modelem. Velikosti kapacit náhradního schématu najdeme opět v [4].



Obr. 11.20. Příčná šterbina v mikropásku. Silvester — Benedek [4]

Impedanční skok na vedení

Geometrické uspořádání a náhradní schéma této nespojitosti je na obr. 11.21. Závislost normované paralelní kapacity C/b_1 na rozměrech b_1/b_2 nespojitosti pro různé hodnoty relativní permittivity ϵ_r substrátu lze najít v [4].

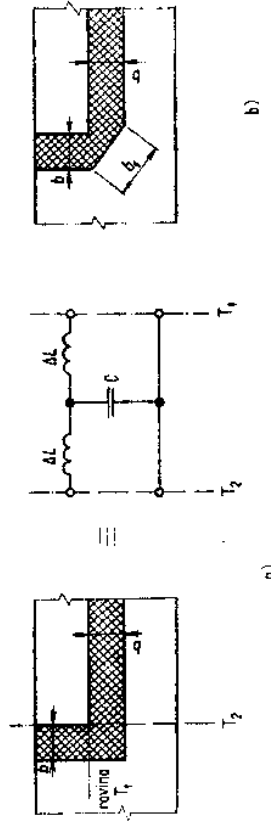


Obr. 11.21. Impedanční skok na vedení. Silvester — Benedek [4]

Pravouhý ohyb mikropásku

Geometrický tvar ohybu a náhradní schéma je na obr. 11.22a. Závislost kapacity C na rozměrech vedení je uvedena v [4]. Pravouhý ohyb vedení je nepřizpůsobený na všech frekvencích a se vzrůstající frekvencí nepřizpůsobení vzrůstá. Nepřizpůsobení lze kompenzovat ořізnutím rohu tak, jak je uvedeno na obr. 11.22b. Howe [7] uvádí, že optimální délka ořізnuté hrany je $b_1/b = 1,6$ při $Z_0 = 50 \Omega$.

Ve stručnosti byly popsány nejčastěji se vyskytující nespojitosti na nesymetrickém mikropáskovém vedení. Ostatní důležité nespojitosti, jako členy T nebo křížení pásků atd., najde zájemce v citované literatuře.



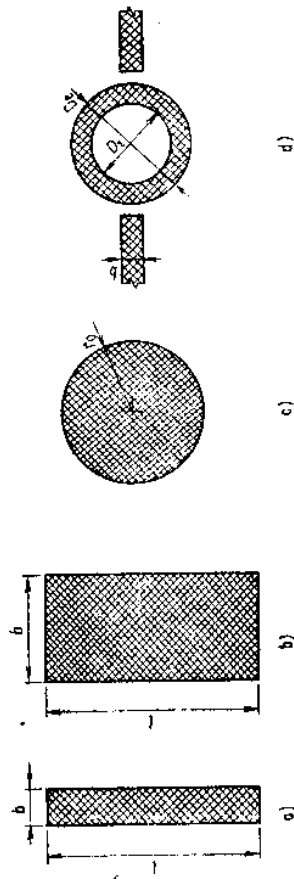
Obr. 11.22. Pravouhý ohyb mikropásku a) náhradní schéma, b) kompenzace [4], [7]

11.4. MIKROVLNNÉ OBVODY A SOUČÁSTKY V MIKROPÁSKOVÉM PŘEVODNÍKU

V tomto článku budou stručně popsány některé pasivní mikrovlnné obvodové součástky používané v MIO. Téměř všechny součástky a obvody používané v klasické vlnovodové nebo koaxiální technice byly již zhotoveny v mikropáskovém provedení. Vzhledem k jejich velkému množství se omezíme pouze na typické představitelé jednotlivých druhů prvků a obvodů.

11.4.1. Mikropáskové rezonátory

Rezonátory jsou v podstatě omezené prostory (uzavřené nebo otevřené), v nichž může na určitých frekvencích vzniknout stojaté vlnění. Nejjednodušší typ mikropáskového rezonátoru lze vytvořit z úseku vedení délky $l = n\lambda_g/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), který je na obou koncích zkratován nebo zakončen naprázdno. Zkratovaný mikropásek však není vhodný pro obřížnou realizaci zkratu. Z tohoto důvodu se výhradně používají úseky mikropásku na obou koncích otevřené nebo rezonátory diskové a prstencové (obr. 11.23). Rezonátor s velkou šířkou pásku



Obr. 11.23. Mikropáskové rezonátory

(obr. 11.23b) lze chápat jako „degenerovaný“ páskový rezonátor. Zatímco na úzkém páskovém rezonátoru (obr. 11.23a) vznikají stojaté vlny pouze ve směru z , na širokém pásku může existovat současně stojaté vlna i ve směru x (příčném). Zřejmě však musí být jeho šířka rovna polovině vlnové délky nebo jejímu násobku. Rozložení pole je tedy závislé i na souřadnici x a bude složitější než na úzkém pásku. Oscilace v diskovém rezonátoru (obr. 11.23c) mohou být interpretovány jako stojaté radiální vlny, které vznikají odrazy na okrajích a ve středu rezonátoru.

Diskový rezonátor

Uurčíme vlastní frekvence diskového rezonátoru. Vlastními frekvencemi rozumíme rezonanční frekvence nezátíženého rezonátoru, tj. bez vlivu vazby budících pásků. Poněvadž přesná řešení jsou velmi obtížná, budeme rezonátor idealizovat, čímž získáme pouze přibližné výsledky. V prvním přiblížení nahradíme skutečný rezonátor modelem podle obr. 11.24. Základny jsou tvořeny vodivými kotouči a plášť vytváří fiktivní magnetická stěna. Poloměr modelu r_0 se předpokládá v prvním přiblížení stejně velký jako u skutečného rezonátoru. Rovněž tak i jeho výška h a permittivita materiálu $\epsilon_r \epsilon_0$, jímž je objem rezonátoru vyplněn. Model vložíme do válcové soustavy souřadnic podle obr. 11.24b. Vzhledem k malé výšce rezonátoru v porovnání s vlnovou délkou (ve frekvenčním pásmu, které nás zajímá) mohou v něm vznikat pouze kmity nezávislé na souřadnici z . Tyto kmity bývají nazývány nulovými. Intenzita elektrického pole ve směru osy z může být vyjádřena

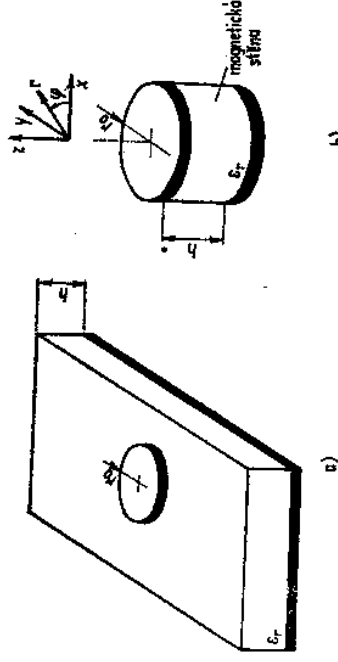
ve tvaru

$$E_z = A J_n(kr) \cos n\varphi \quad (11.28)$$

kde $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$ je vlnové číslo. Pomocí Maxwellových rovnic můžeme vypočítat ze známé složky E_z složky intenzity magnetického pole ve tvaru

$$H_\varphi = \frac{n}{j\omega\mu_0 r} A J_n'(kr) \sin n\varphi \quad (11.29)$$

$$H_r = -\frac{k}{j\omega\mu_0} A J_n'(kr) \cos n\varphi \quad (11.30)$$



Obr. 11.24. Diskový rezonátor a jeho model v prvním přiblížení [12]

Okrajové podmínky na magnetické stěně $r = r_0$ vyžadují, aby tečná složka intenzity magnetického pole H_φ byla nulová pro všechny φ a $r = r_0$, tj.

$$J_n'(kr_0) = 0$$

což nastane pro

$$kr_0 = 2\pi f r_0 \sqrt{\epsilon_r} / c = \alpha'_{nm}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.31)$$

kde α'_{nm} je m -tý kořen derivace Besselovy funkce n -tého řádu.

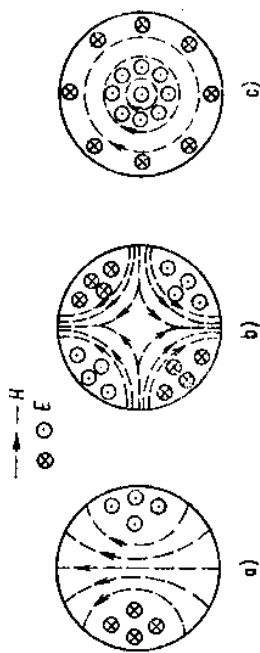
Vzhledem k ose z jsou to vidy TM_{nm0} . Vlastní frekvence jsou tedy dány vztahem ($p = 0$, poněvadž $h \ll r_0$)

$$f_{nm0} = \frac{c \alpha'_{nm}}{2\pi r_0 \sqrt{\epsilon_r}} \quad (11.32)$$

Nahlédneme do tabulky pro kořeny α'_{nm} derivací Besselových funkcí (viz matematickou přílohu) zjistíme, že nejnižší rezonanční frekvenci má vid TM_{110} ($\alpha'_{11} = 1,841$), pak následuje TM_{210} a TM_{010} . Rozložení polí těchto vidů je na obr. 11.25.

Experimentální výsledky ukazují, že se pro různé materiály substrátů změřené rezonanční frekvence odchylují od teoretických hodnot a jsou vždy nižší než teoretické. Největší odchylky byly zjištěny u vidu TM_{010} a mohou být pro malé poměry $r_0/h < 10$ i více než 10 % [12].

...
původní model novým modelem, který má efektivní poloměr $r_{0\text{eff}}$ větší než reálný rezonátor, čímž vyloučí vliv rozptylového pole na okrajích rezonátoru. Zavedením tzv. dynamické permittivity ϵ_{dyn} vstříchnou dodatečně vliv toho, že rozptylové pole probíhá částečně ve vzduchovém prostředí a částečně v dielektriku.



Obr. 11.25. Rozložení polí různých vidů v diskovém rezonátoru
a) $TM_{1,10}$, b) $TM_{2,10}$, c) $TM_{0,10}$ [12]

Pomocí tohoto druhého přiblížení byla dosažena pro poměry $r_0/h \geq 10$ shoda s naměřenými hodnotami v mezích 1%. Popis a výpočty ve druhém přiblížení nejsou sice obtížné, ale rozsáhlejší, takže přesahují rámec učebnice. Jiné metody řešení těchto rezonátorů viz v [6].

11.4.2. Reciproční mnohobrany v mikropáskovém provedení

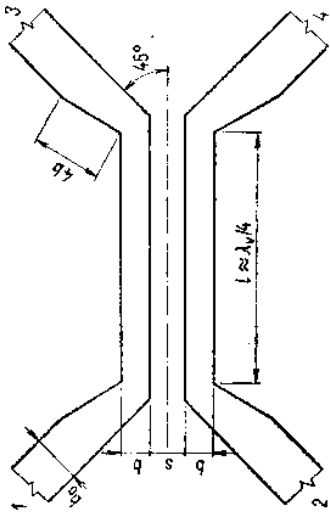
Téměř všechny mikrovlnné rozvětvené vlnovodové díly lze realizovat s menšími nebo většími obtížemi v plošném provedení na podložce pomocí mikropáskového vedení nebo šterbinového vedení, popř. jejich kombinací [4].

Jednostupňová mikropásková směrová odbočnice

Motiv horního vodiče nesymetrického mikropásku směrové odbočnice je znázorněn na obr. 11.26. Skládá se z úseku vázaných vedení délky $l \approx \lambda_g/4$ a přivodních vedení. Energie z hlavního vedení 1-3 se do vedlejšího vedení 2-4 přenese vazbou v úseku vázaného mikropáskového vedení. Její směrovost je druhého druhu. Za předpokladu totálního přizpůsobení má rozptylová matice tvar

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & 0 \\ s_{12} & 0 & 0 & s_{13} \\ s_{13} & 0 & 0 & s_{12} \\ 0 & s_{13} & s_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

Provozní parametry u mikropáskových odbočnic jsou definovány poněkud jinak než u klasického vlnovodového provedení. Z parametrů definovaných v části 9.3.3 zůstává nezměněna pouze definice směrovosti. Místo odbočného útlumu se definuje



Obr. 11.26. Motiv jednostupňové mikropáskové směrové odbočnice

vazba a nově parametry vložný útlum a izolace. Pro odbočnici druhého druhu (viz např. obr. 11.26) jsou zmíněné provozní parametry definovány takto:

vložný útlum

$$L = 10 \log \frac{P_1}{P_3} = 20 \log \frac{1}{|s_{13}|} \quad (11.34)$$

vazba

$$C = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 20 \log \frac{1}{|s_{12}|} \quad (11.35)$$

izolace

$$I = 10 \log \frac{P_1}{P_4} = 20 \log \frac{1}{|s_{14}|} \quad (11.36)$$

směrovost

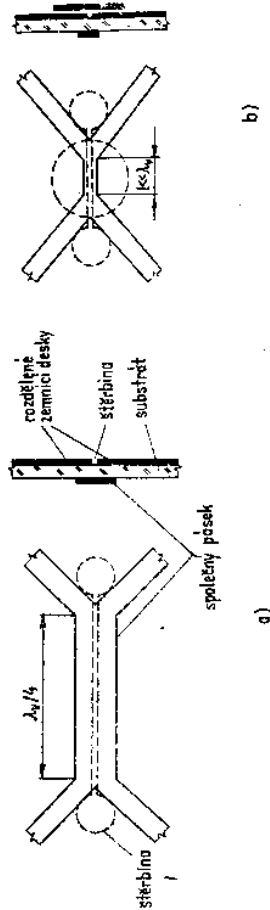
$$S = 10 \log \frac{P_2}{P_4} = 20 \log \frac{|s_{12}|}{|s_{14}|} \quad (11.37)$$

Všechny tyto parametry jsou udávány v decibelech.

Požadavky pro totální přizpůsobení a ideální izolaci, tj. $s_{11} = 0$ a $s_{14} = 0$ budou splněny při splnění vztahů (11.21) a (11.22). Se zvětšujícím se rozdílem konstant šíření sudého a lichého vidu se zužuje použitelné frekvenční pásmo směrové odbočnice. Na frekvenční charakteristiku odbočnice má též vliv velikost úhlu mezi osami napájecích vedení a podélnou osou odbočnice. Zvětšování tohoto úhlu z hodnoty 45° až na 90° způsobuje velké rozdíly mezi naměřenými a teoretickými frekvenčními charakteristikami. Autor [6] uvádí parametry navržené odbočnice ověřené experimentálně s těmito hodnotami (přechoeno z grafů: frekvenční pásmo $8,0$ až $12,5$ GHz, $L \leq 1$ dB, $C = (-10,0 \pm 1,5)$ dB, $I < 19$ dB, činitel stojatých vln $\leq 2,0$).

Velikost vazby závisí na mezere mezi vázanými vedeními, takže těsnější vazby < 6 dB jsou pro technologické nesnáze velmi obtížně řešitelné. Pro vazby těsnější je tedy nutné zvolit jiné provedení odbočnice.

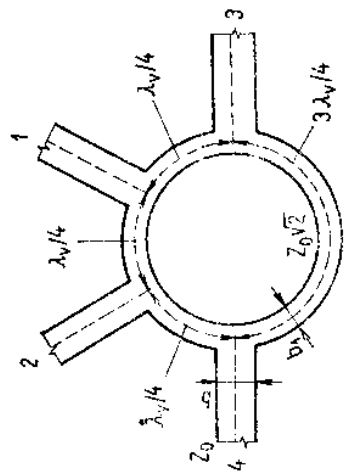
V práci [4] je popsán technicky velmi zajímavý způsob zlepšení frekvenčních charakteristik mikropáskové směrové odbočnice. Vychází se ze skutečnosti, že v podstatě není žádný rozdíl mezi horními a spodními vodiči (mikropáskem a zemnicí deskou). Mikrošěrbin a mezi vázanými vodiči se odstraní a vytvoří se v zemnicí desce (obr. 11.27a). Tímto opatřením uskutěčíme indukční vazbu. Vzniklý horní mikropásek se zúží a oproti původní délce $l \approx \lambda_v/4$ se ještě podstatně zkrátí. Dodatečná kapacitní vazba může být provedena přiložením vodivého kotoučku ke šěrbině v zemnicí desce. Touto rekonstrukcí vzniklá směrová odbočnice je znázorněna na obr. 11.27b. Její autor de Ronde [4] uvádí, že s experimentálním modelem takto upravené odbočnice na keramickém substrátu $25,4 \text{ mm} \times 25,4 \text{ mm}$ bylo v pásmu 2 až 8 GHz dosaženo těchto parametrů: $C = -3 \text{ dB}$, $S \geq \geq 20 \text{ dB}$ a činitel stojatého vlnění $\leq 1,2$.



Obr. 11.27. Mikropásková odbočnice s rozdělenou zemnicí deskou a vazební kapacitou de Ronde [4]

Kruhová směrová odbočnice

Motiv tohoto typu odbočnice je na obr. 11.28. Délka středního obvodu prstence je $6\lambda_v/4$. Energie přiváděná do vstupního ramene l se rozdělí v poměru 1 : 1 do vedení výstupních, takže vazba $C = -3 \text{ dB}$. Podle označení ramen má tato odbočnice směrovost druhého druhu (viz obr. 9.20).

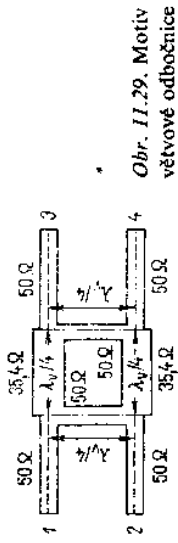


Obr. 11.28. Motiv kruhové směrové odbočnice [10]

Větrová odbočnice

Vodivý motiv větrové odbočnice je na obr. 11.29. Směrovost podle definice je prvního druhu. Vstupní energie (rameno 1) se dělí opět v poměru 1 : 1, takže vazba je také -3 dB . Od předcházející odbočnice se liší tím, že vlny vystupující z ramen 3 a 4 jsou navzájem fázově posunuty o $\pi/2$. S uvážením středních délek drah se snadno přesvědčíme, že rozptylová matice (je-li odbočnice totálně přízpusobena) má tvar

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.38)$$



Obr. 11.29. Motiv větrové odbočnice

Dosahovaná šíře pásma bývá kolem 5 % ze střední frekvence. Větších šířek pásma lze dosáhnout kaskádním řazením větrových odbočnic [10].

11.4.3. Nereciproční obvody v mikropáskovém provedení

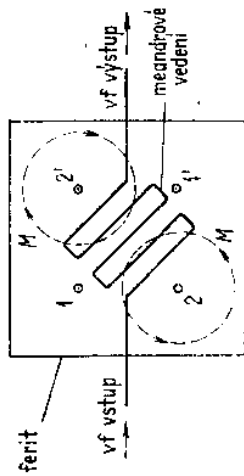
Na feritovém substrátu mohou být konstruovány všechny nereciproční obvody jako jsou izolátory, cirkulátory a fázové posunovače. Fázové posunovače na feritovém substrátu mohou být i reciproční a velikost fázového posunu může být ovládána elektricky. V této části popíšeme stručně princip činnosti těchto nejčastěji používaných obvodů.

Funkce posunovače fáze je založena na změně součinitele šíření vlny změnou intenzity nebo směru stejnosměrného magnetického pole, jehož vlivu je ferit vystaven. V recipročním posunovači fáze je magnetické pole vlny šířící se feritem polarizováno lineárně. V nerecipročním posunovači naopak musí být magnetické pole vlny polarizováno kruhově nebo elipticky.

Reciproční posunovač fáze

Je-li feritová podložka s mikropáskem magnetována podélně (tj. ve směru šíření), pak se změnou intenzity pole H_0 magnetujícího ferit mění také součinitel šíření v důsledku změny μ_{ef} [viz vztah (10.39)]. Při přičlením magnetování ve směru roviny substrátu by feritová podložka neměla mít vůbec žádný vliv na šíření vlny, pokud by vlna byla typu TEM (podobně jako u „řádné“ vlny při dvojlomu). Podél mikropásku se však šíří vlna hybridní, takže při příčném magnetování nastává také

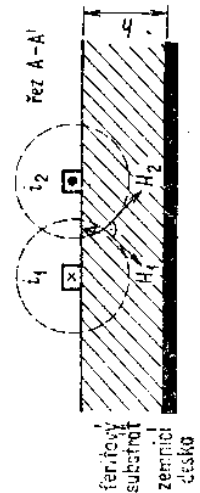
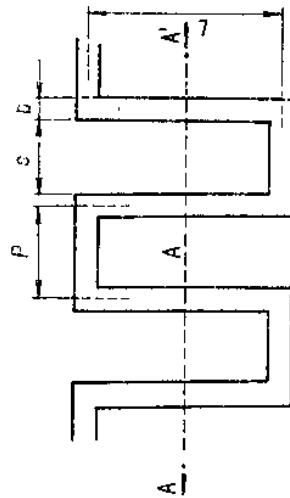
změna součinitele šíření. I tato změna fáze se obvykle volí za referenční. Aby rozměry posouvače nebyly příliš velké, je mikropásek upraven do tvaru meandru [4]. Vodivý motiv meandrového mikropáskového vedení na velmi tenkém ($h \approx 0,5 \text{ nm}$) feritovém substrátu ve funkci posouvače fáze je znázorněn na obr. 11.30. Stejnou směrné magnetování substrátu se provádí proudovými smyčkami vodičů provlečenými buď otvory $1-1'$ pro příčné magnetování, nebo otvory $2-2'$ pro podélné magnetování. Změna fázového posunu se provádí proudovými impulsy. Ferity použité v takovém typu posouvače se musí vyznačovat velkou hodnotou remanence B_r . K zabránění nerecipročních jevů musí být vzdálenost mezi sousedními vodiči meandrového vedení nejméně pětina násobek tloušťky substrátu. Fázovače tohoto typu se používají v anténních soustavách k elektronicky řízenému snímání prostoru pro radiolokační účely.



Obr. 11.30. Schéma recipročního posouvače fáze. Roome [4]

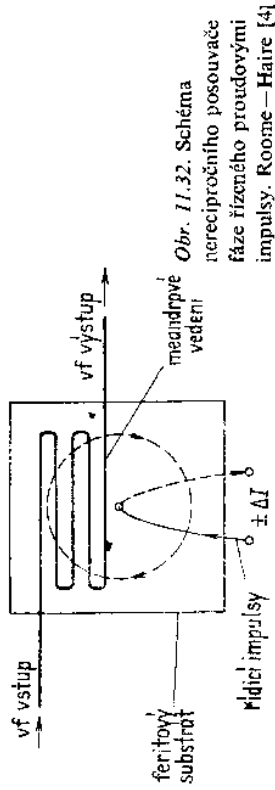
Nereciproční posouvač fáze

V tomto typu posouvače se využívá změna součinitele šíření elektromagnetické vlny v podélně zmagnetovaném feritu.



Obr. 11.31. Vytváření kruhově polarizované vlny v meandrovém mikropáskovém vedení. Roome—Haite [4]

V nesymetrickém mikropáskovém vedení není oblast, v níž by bylo magnetické pole polarizováno kruhově. Tato oblast musí být vytvořena uměle upravením mikropásku do tvaru meandru tak, aby mezi sousedními sekcemi meandru vznikla těsná vazba (obr. 11.31) na rozdíl od meandrového vedení recipročního posouvače. Navíc musí být délka sekcí meandru L rovna čtvrtině vlnové délky na střední frekvenci používaného pásma. V průřezu $A-A'$ (střed sekcí) vzniká vysokofrekvenční magnetické pole, které je kruhově polarizované následkem součtu dvou intenzit pole H_1 a H_2 vzájemně na sebe kolmých a vzájemně fázově posunutých o 90° . Fázový posun 90° vzniká časovým zpožděním proudů i_2 oproti i_1 , protože délka dráhy mezi středními průřezy sousedních sekcí je $\lambda/4$. Kruhově polarizované pole se směrem k okrajům meandru mění na elipticky polarizované pole a v místě spojky sousedních sekcí je pole polarizováno lineárně. Elektrické ovládání změny

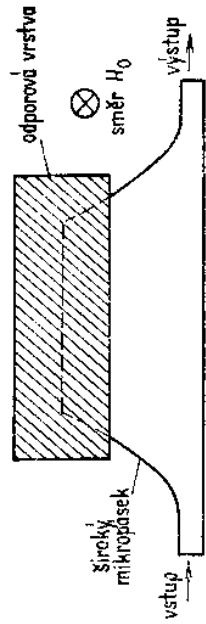


fáze je schematicky znázorněno na obr. 11.32. Meandrový mikropásek je umístěn na velmi tenké (není podmínkou) feritové podložce s otvorem, jímž prochází vodič podélně magnetující ferit proudovými impulsy. Diferenciální změny fáze se dosáhne změnou směru magnetizace při změně polarity proudových impulsů [4].

Fázové posouvače obou typů se pro praktické použití umísťují do kovových pouzder s koaxiálními konektory.

Izolátor

Izolátor, využívající ke své činnosti nereciproční rozložení pole vlny vedené okrajem, je schematicky znázorněn na obr. 11.33. Směr vnějšího magnetického pole

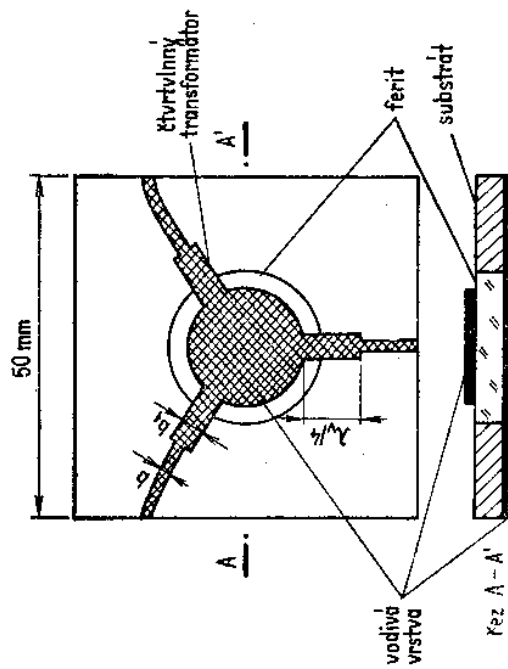


Obr. 11.33. Nereciproční izolátor na principu vlny vedené okrajem. Hines [1]

průběhu a rovinně nakloněný. Ohýbný páspek na ferritovém substrátu vedoucí svým okrajem vlnu je na vstupní straně plynule zúžen k dosažení impedančního přizpůsobení. Na rozšířené části pásku je nanesena absorpční odporová vrstva. Tato vrstva nemá na vlnu šířící se zleva doprava v přímém směru téměř žádný vliv, poněvadž pole této vlny je převážně soustředěno pod spodním okrajem pásku. Vlna šířící se zprava doleva je touto odporovou vrstvou intenzivně pohlcována v důsledku nerecipročního rozložení pole. Izolátor bývá také zapouzdřen [1].

Cirkulátor v mikropáskovém provedení

Motiv tříramenného cirkulátoru typu Y na ferritové podložce je znázorněn na obr. 11.34. Podložka však může být i dielektrická. Ferrit v takovém případě má tvar disku se stejným poloměrem (není podmínkou) jako má kruhová sekce horního mikropásku. Do mikropáskových vedení bývají ještě zařazeny čtvrtvlnné impedanční transformátory.



Obr. 11.34. Mikropáskový cirkulátor typu Y s ferritovým diskem v substrátu

Tím jsme vyčerpali velmi stručný přehled MIO s rozloženými parametry. Je zřejmé, že nebylo možné zabývat se popisem všech možných variant MIO s rozloženými parametry. V současném stavu mikrovlánné integrované techniky by to vyžadovalo velmi rozsáhlou samostatnou publikaci. Domníváme se však, že k úvodu do problematiky MIO s rozloženými parametry probraný přehled zcela postačuje.

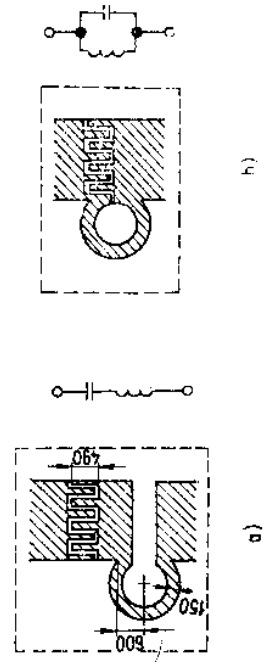
11.5. MIKROVLÁNNÉ INTEGROVANÉ OBVODY SE SOUSTŘEDĚNÝMI PARAMETRY

V tomto článku se budeme zabývat popisem a použitím součástek se soustředěnými parametry v pásmu 1 GHz až 12 GHz.

Součástka se soustředěnými parametry je (podle definice) mnohem menší než používá vlnová délka a vzniká na ní zanedbatelný fázový posuv podél libovolného rozměru. Je tedy frekvenční omezení součástek se soustředěnými parametry dáno jejich rozměry. S rozvojem fotolitografické tenkovrstvové techniky je možné zmenšit rozměry součástek tak, že mohou pracovat až v pásmu 10 GHz. Měření na velmi malých kapacitách a induktorech ukázala, že tyto součástky zůstávají skutečně „soustředěné“ i pro frekvence kolem 10 GHz, přičemž vykazují jen nepatrné jevy „rozloženosti“. Pro součástky se soustředěnými parametry je typické, že jejich použití umožňuje podstatné zmenšení rozměrů v pásmu 1 GHz a 3 GHz v porovnání se součástkami s rozloženými parametry. Cena integrovaného obvodu závisí na počtu obvodů, které lze vyrábět simultánně na jedné základní podložce keramické nebo polovodičové. Poněvadž na jedné podložce může být zhotoven simultánně větší počet (20 až 30) MIO se soustředěnými parametry jednoho a téhož typu, umožňuje tato technika podstatné snížení nákladů v porovnání s technikou, kde tento způsob není možný, tj. u IO s rozloženými parametry. Zmenšení rozměrů a snížení nákladů zřejmě v budoucnu sehraje důležitou roli v systémech s MIO. Technika pro výrobu součástek se soustředěnými parametry je vhodná jak pro hybridní, tak pro monolitické nebo kvazimonolitické konstrukce používající dielektrickou izolaci.

Obvody se soustředěnými parametry mají další výhodu v tom, že polovodičové součástky mohou být připojeny v nezapouzdřeném stavu. Vlivem parazitních kapacit oproti pouzdru se použitelná šířka pásma podstatně zmenšuje. Zapouzdření polovodičových součástek má také vliv na cenu, poněvadž pouzdro bývá mnohdy dražší než samotná součástka.

Pro ukázkou provedení obvodů se soustředěnými parametry vhodných ke konstrukci MIO jsou na obr. 11.35 znázorněny dva základní obvody: sériový a para-



Obr. 11.35. Rezonanční obvod se soustředěnými parametry (rozměry v mikrometrech). Aitchison [4]
a) sériový, b) paralelní

...
 pacitor v dané verzi má název interdigitální. Šířka „prstů“ kapacitoru je 100 μm a mezera mezi nimi je 20 μm.

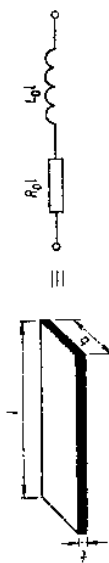
V dalším textu popíšeme vlastnosti součástek se soustředěnými parametry použitelných v MIO.

11.5.1. Pasívní součástky pro mikrovlnné integrované obvody se soustředěnými parametry

Vlastnosti součástek se soustředěnými parametry mohou být odvozeny ze vztahů pro vedení s rozloženými parametry. Vstupní impedance vedení zakončeného impedancí Z_k je dána vztahem (2.117). Krátký úsek vedení ($\gamma l \ll 1$) má při zkratu na konci ($Z_k = 0$) vstupní impedanci

$$Z_{st} = Z_0 \tanh \gamma l \approx Z_0 \gamma l = R_0 l + j\omega L_0 l \quad (11.39)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že model induktoru odvozený z krátkého úseku vedení je sériová kombinace rezistoru $R_0 l = R$ a induktoru $L_0 l = L$ v podélné větvi vedení (obr. 11.36). Podle velikosti poměru $\omega L/R$ lze takový úsek považovat buď za induktor ($\omega L/R \gg 1$), který má určité ztráty, nebo za rezistor ($\omega L/R \ll 1$), který má určitou malou indukčnost.



Obr. 11.36. Induktor se soustředěnými parametry vytvořený z úseku krátkého vedení i Cautlon [1]

Induktor z páskového vodiče

Vzorec pro výpočet indukčnosti páskového induktoru (obr. 11.36) je dán vztahem [8], [1].

$$L = 2l \left(\ln \frac{l}{b+t} + 1,19 + 0,22 \frac{b+t}{l} \right) \quad (\text{nH; cm}) \quad (11.40)$$

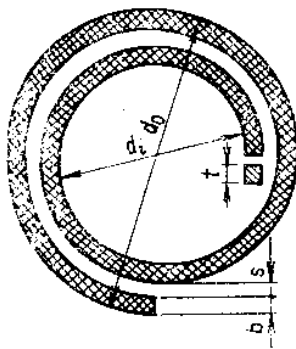
Hodnoty indukčnosti jsou při velmi vysokých frekvencích menší než při nižších frekvencích vlivem povrchového jevu. Zmenšení bývá něco méně než 10%. Induktory tohoto typu můžeme použít tehdy, má-li být $L \leq 2$ nH. Větších hodnot indukčnosti dosáhneme jinými typy induktorů. Výpočet činitele jakosti páskového induktoru viz např. [1].

Spirálový induktor

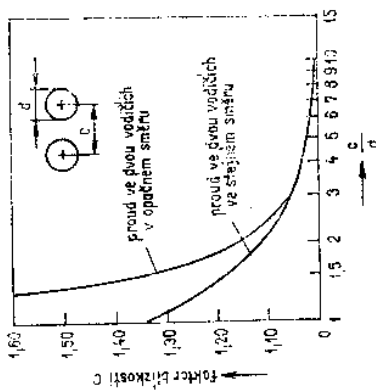
Větších hodnot indukčnosti se dosáhne plochým spirálovým induktorem (obr. 11.37). Jeho indukčnost při nízkých frekvencích je podle [1] dána přibližným

$$L = 39,37 \frac{n^2 a^2}{8a + 11c} \quad (\text{nH; mm}) \quad (11.41)$$

kde $a = (d_0 + d_1)/4$, $c = (d_0 - d_1)/2$ a n je počet závitů. K dosažení vysokého Q induktoru by měl být vnější průměr spirály d_0 malý a páskový vodič co nejširší (velké b), což vyžaduje malou mezera s mezi závity. Dolní hranice mezery je dána technologií. Je-li tato mezera malá, vznikají mezi závity parazitní kapacity, které omezují horní použitelnou frekvenci.



Obr. 11.37. Plochy spirálový induktor



Obr. 11.38. Faktor blízkosti pro souběžné válcové vodiče

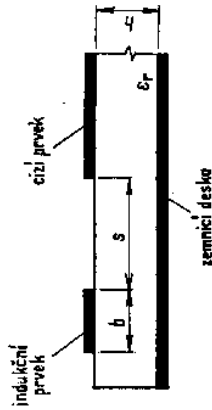
Kromě kruhového spirálového induktoru se používají ještě obdélníkové nebo čtvercové spirálové induktory (viz např. obr. 11.44).

V těchto úvahách byl zcela zanedbán účinek blízkosti jednoho vodiče na druhý vodič, procházející jimi proud. Tento jev (jak uvádí Terman [8]) může zvětšit vysokofrekvenční odpor až o 35%, jsou-li vodiče velmi blízko sebe (s je malé). Tyto ztráty vznikají vířivými proudy vybuzenými magnetickým polem druhého vodiče. Tento jev lze vyjádřit kvantitativně faktorem blízkosti, jehož závislost na rozměrech a vzdálenostech vodičů je znázorněna na obr. 11.38. Člen c/d je podobný členu $(s + b)/b$ pro páskový vodič.

Parazitní indukčnost

V předcházejících odstavcích byly probírány některé typy induktorů, přičemž uváděné vzorce pro jejich indukčnost platí pro induktory ve volném prostoru, tj. nebyl brán v úvahu vliv okolních vodičů. V praxi však jsou integrované induktory umístěny na podložkách, které mají na spodní straně pokovenou vrstvu tvořící zemnicí desku. Kromě této základní vodivé desky mohou být v blízkosti i jiné pokovené části tak, jak je znázorněno na obr. 11.39. Změnou indukčnosti páskového induktoru posouváme kvantitativně. Takový induktor společně se zemnicí deskou

výstavě v podobě rezistoru, jehož impedance zhmotňuje indukčnost induktoru ve volném prostoru.



Obr. 11.39. Induktor obklopený sousedními vodiči. Caulton [1]
 minimalizace parazitních jevů: $h > 20b$, $s \gg 4b$

Je-li fázová rychlost vlny na vedení dána vztahem

$$v_f = 1/\sqrt{L_0 C_0} \quad (11.41)$$

a vlnová impedance vztahem

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (11.42)$$

pak

$$Z_0 = L_0 v_f \quad (11.43)$$

kde L_0 , C_0 jsou primární parametry vedení na jednotku délky. Krátký úsek takového vedení, je-li na konci zkratovaný, má vstupní impedanci ($\gamma l \ll 1$, $\gamma = j\alpha$, $\alpha = \omega/v_f$)

$$Z_{\text{vst}} \approx jZ_0 \alpha l = j\omega L_0 l = j\omega L_e \quad (11.44)$$

Odtud pak dostaneme pro efektivní indukčnost

$$L_e = \frac{Z_0 l}{v_f} = Z_0 \sqrt{\epsilon_r} \frac{l}{c} \quad (11.45)$$

Ze získaného vztahu je zřejmé, že efektivní indukčnost L_e se zmenšuje se zmenšujícím se Z_0 , což odpovídá zmenšující se vzdálenosti h od ostatních vodičů součástí [1]. Pro představu: při safírové podložce $\epsilon_r \approx 9,4$, je-li $h > h_{\text{min}} = 20b$ a $s > s_{\text{min}} = 4b$, nebude indukčnost přítomností vodiče na druhé straně podložky ovlivněna.

Rezistor

Nejjednodušší provedení rezistoru použitelného v MIO je krátký úsek zkratované vedení s rozměry podle obr. 11.36. Je-li $\omega L/R \ll 1$, můžeme jeho parazitní séťovou indukčnost zanedbat. Rozvineme-li ve (11.39) hyperbolickou tangentu v Taylorovu řadu a vezmeme první dva členy řady, je

$$Z_{\text{vst}} \approx Z_0 \left(\gamma l - \frac{1}{3} \gamma l^3 \right) \quad (11.46)$$

Po dosazení za Z_0 a γ dostaneme po úpravě

$$Z_{\text{vst}} \approx \frac{R_0 l}{1 + \frac{j\omega C_0 l R_0 l}{3}} \quad (11.47)$$

Náhradní obvod takto vzniklého rezistoru má tedy odpor

$$R = R_0 l = \rho_{\text{vr}} \frac{l}{b} \quad (11.48)$$

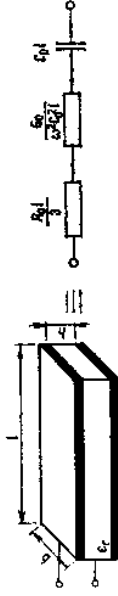
přemostěný paralelním kapacitorem s kapacitou

$$C = \frac{1}{3} C_0 l \quad (11.49)$$

kde R_0 a C_0 jsou primární parametry páska na jednotku délky [1].

Kapacitor

Kapacitor se soustředěným parametrem C můžeme realizovat v MIO v podobě sendvičového nebo interdigitálního kapacitoru. Sendvičový typ vyžaduje vícevrstvou strukturu. Náhradní schéma kapacitoru (obr. 11.40) odvodíme z vlastností krátkého úseku ($\gamma l \ll 1$) vedení se šířkou b a s dielektrikem výšky h . Vedení předpokládáme na konci otevřené a zanedbáme jeho indukčnost L_0 .



Obr. 11.40. Sendvičový kapacitor se soustředěnými parametry vytvořený z úseku krátkého vedení. Caulton [1]

Vstupní impedance takového úseku vedení pak je

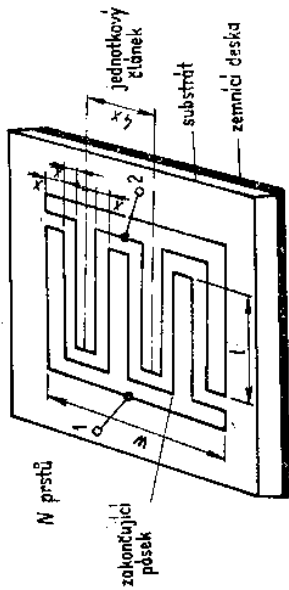
$$Z_{\text{vst}} = Z_0 \coth \gamma l = \sqrt{\frac{R_0}{G_0 + j\omega C_0}} \coth \left[l \sqrt{R_0(G_0 + j\omega C_0)} \right] \approx \frac{R_0 l}{3} + \frac{G_0}{\omega^2 C_0^2 l} - \frac{j}{\omega C_0 l} \quad (11.50)$$

Při úpravě tohoto vztahu jsme opět použili Taylorův rozvoj hyperbolické kotangenty. Kapacita kapacitoru je

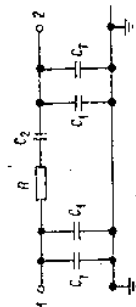
$$C = C_0 l = \epsilon \frac{bl}{h} \quad (11.51)$$

První rezistor v (11.50) představuje ztráty v elektrodách a druhý ztráty v dielektriku. Kapacitor sendvičového typu tvoří spodní elektroda pokrytá vrstvou dielektrika SiO_2 a na něm je pak nanášena druhá elektroda. Jejich kapacita může být v rozsahu 0,1 pF až 50 pF.

Jednodušší oproti předcházejícímu typu je kapacitor interdigitální, znázorněny na obr. 11.41, který je jednovrstvový. Může být vyroben v průměrné velikosti a hodnotami kapacit 0,1 pF až 15 pF. Vzhledem k větším délkám pásků tvořících „prsty“ kapacitoru rezonují kapacitory s velkou kapacitou na nižších frekvencích.



Obr. 11.41. Interdigitální kapacitor. Alley [4]



Obr. 11.42. Ekvivalentní schéma interdigitálního kapacitoru
 C_2 – vlastní kapacita,
 C_1 – kapacita zakončujícího pásku

Z toho vyplývá, že na vyšších frekvencích jsou použitelné pouze malé kapacitory s malou kapacitou (menší než 2 pF). Náhradní schéma interdigitálního kapacitoru při nízkých frekvencích je na obr. 11.42 [4], [1]. Kapacita interdigitálního kapacitoru podle Alleye [4] je dána vztahem

$$C_2 = 25,4 \frac{\epsilon_r + 1}{w} l [(N - 3) A_1 + A_2] \quad (\text{pF na jednotku délky})$$

kde A_1 je příspěvek jednoho vnitřního a A_2 dvou vnějších prstů. Pro nekonečně tlustý substrát (nebo bez zemní desky) je $A_1 = 8,85 \cdot 10^{-2} \text{ pF} \cdot \text{mm}^{-1}$ a $A_2 = 9,92 \cdot 10^{-2} \text{ pF} \cdot \text{mm}^{-1}$.

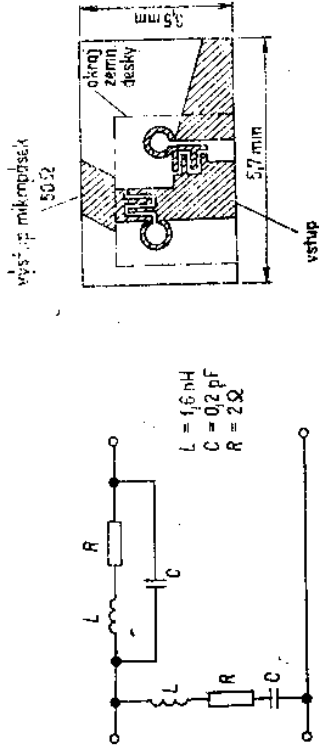
Celková kapacita interdigitálního kapacitoru vzdáleného od zemnicí desky je tedy dána hodnotou C_2 podle vzorce (11.52) (s uvedenými hodnotami A_1 a A_2) krát šířka w kapacitoru. Délka l je v milimetrech. Tloušťka vodičů t nemá na kapacitu podstatný vliv.

Interdigitální kapacitory jsou velmi výhodné, neboť mohou být vyráběny stejnou technologií jako mikropásková vedení.

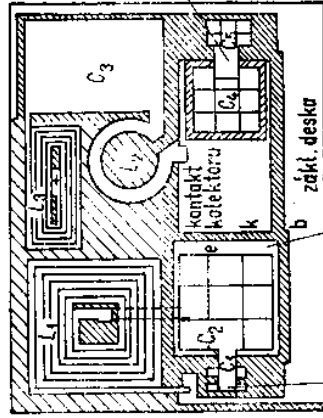
11.5.2. Některá praktická provedení mikrovlnných integrovaných obvodů se soustředěnými parametry

Provedení paralelního a sériového rezonančního obvodu s interdigitálním kapacitorem a induktorem ve formě jednoho závitů je znázorněno na obr. 11.35.

Na obr. 11.43 je zobrazeno provedení pásmové zadržky se soustředěnými parametry spolu s ekvivalentním schématem a s hodnotami použitých součástek L , C a R . Zadrž má průchozí útlum 30 dB na frekvenci 9 GHz ([4], str. 341).



Obr. 11.43. MIO pásmové zadržky se soustředěnými parametry. Aichehon [1]



Obr. 11.44. MIO tranzistorového zesilovače se soustředěnými parametry. Caution [1]

Na obr. 11.44 je zobrazen mikrovlnný integrovaný obvod tranzistorového zesilovače se soustředěnými parametry pracující v pásmu 1,8 GHz až 2,5 GHz [1]. Obvod je konstruován na safírovém čipu s tloušťkou 0,254 mm. Rozměry čipu jsou 3,09 mm × 3,96 mm. Tento obvod byl vyráběn simultánním způsobem v počtu 25 kusů na safírové podložce o rozměrech 19,05 mm × 25,4 mm.

Zemnicí deska je přibližně ohraničena plochou hustě vyrafovanou. Na této ploše je vytvořena izolační vrstva SiO_2 tloušťky asi 1 μm . Na kyslíčnickové vrstvě jsou vytvořeny kapacitory C_1 , C_3 a C_2 sendvičového typu. Všimneme si, že kapacitory C_1 a C_5 mají horní elektrodu dělenou na čtvercové plošky k dodatečnému doladění obvodu. Doladění se provádí paralelním připojováním částí kapacitoru pomocí drátků připájených ke vstupnímu kontaktu. Na izolační vrstvě jsou pak nanášeny poměrně velké vodivé plochy kontaktů emitoru a kolektoru k připojení

nezáporuďřeného tranzistoru. Tyto plochy tvoří spodní elektrody kapacitorů C_2 a C_4 . Horní elektrody jsou rovněž dělené pro účely ladění. Separace sousedních kapacitorů je asi 0,025 mm. Izolace sendvičových kapacitorů z SiO_2 má tloušťku 1 μm . Plošný součinitel kapacity je 0,023 pF na 0,025 mm². Je tedy možné vytvořit nejen kapacitory s malou kapacitou 0,1 pF (0,05 mm \times 0,05 mm), ale i s poměrně velkou až 50 pF (1,25 mm \times 1,25 mm).

Literatura ke kapitole 11

- [1] Young, L. — Sobol, H.: Advances in Microwaves, Vol. 8. New York, Academic Press 1974.
- [2] Puccé, R. A.: Design Considerations for Monolithic Microwave Circuits, Trans. IEEE MTT-29, č. 6, 1981, str. 513 — 543.
- [3] Oxley, J. H.: Microwave Integrated Circuit Techniques. GEC Journal of Science and Technology, Vol. 43, No 1, 1976.
- [4] Frey, J.: Microwave Integrated Circuits (sborník článků o MIO). Dedham, Massachusetts, Artech House, Inc. 1975.
- [5] Schneider, M. V.: Microstrip Lines for Microwave Integrated Circuits. Bell Syst. Techn. Journ. Vol. 48 (1969), č. 5, str. 1421.
- [6] Zehentner, J.: Mikrovlnná integrovaná technika. Skriptum FEL ČVUT. Praha, Ed. středisko ČVUT 1983.
- [7] Howe, H. J.: Stripline Circuit Design. Dedham, Massachusetts, Artech House, Inc. 1974.
- [8] Terman, F. E.: Radio Engineers' Handbook. New York, McGraw — Hill Comp. 1943.
- [9] Young, L.: Parallel Coupled Lines and Directional Couplers. Sborník článků. Dedham, Massachusetts, Artech House, Inc. 1972.
- [10] Fuchs, G. a kol.: Höchstfrequenz-Hybridintegration. Učební texty TH Limenau 1975.
- [11] Hines, M. E.: Reciprocal and Nonreciprocal Modes of Propagation in Ferrite Stripline and Microstrip Devices. IEEE Trans., MTT-19, 1971, č. 5, str. 442 — 451.
- [12] Wolff, I. — Knoppik, N.: Microstrip-Scheibenresonatoren AEU, Bd. 28, Heft 3, März 1974.

12. Uvod do měření při velmi vysokých frekvencích

Mikrovlnné měřicí metody prodělávají spolu s měřicími přístroji neustálý vývoj. Kvalitativní zvrat v přístrojové technice způsobilo zavedení mikrovlnné integrované techniky a použití mikroprocesorů. Dnešní měřicí přístroje umožňují rychlá, přesná a velmi často i automatizovaná měření. Jejich vývoj se neustále zdokonaluje a není možné ani účelně uvádět jejich podrobnější popis v publikaci, která má být především základní učebnicí.

V této kapitole se omezíme, po seznámení se základními pojmy, na výklad nejdůležitějších měřicích metod, které z hlediska vytvoření správné fyzikální představy mají a budou mít své stálé místo v mikrovlnné technice.

12.1. STOJATÉ VLNY NA VEDENÍ

Napětí ve vzdálenosti y od konce vedení můžeme vyjádřit podle (2.127) výrazem

$$U = U_0^+ e^{jy} + U_0^- e^{-jy} = U_0^+ e^{jy} \left(1 + \frac{U_0^-}{U_0^+} e^{-2jy} \right) \quad (12.1)$$

takže za použití vztahu (2.128) dostaneme

$$U = U_0^+ e^{jy} (1 + \rho_0 e^{-2jy})$$

kde ρ_0 je činitel odrazu zátěže, pro který platí podle (2.126)

$$\rho_0 = \frac{U_0^-}{U_0^+} = \frac{Z_k - Z_0}{Z_k + Z_0}$$

neboli

$$|\rho_0| e^{j\phi} = \frac{|Z_k - Z_0|}{|Z_k + Z_0|} e^{j\phi} \quad (12.2)$$

kde Z_k je impedance připojená na konec vedení, Z_0 vlnová impedance vedení.

Předpokládáme bezztrátové vedení, pro které platí $\gamma = j\alpha$ a vyjádříme absolutní hodnotu výsledného napětí U , určeného rovnicí (12.1)

$$|U| = |U_0^+| \left\{ \left[1 + |\rho_0| e^{j(\phi - 2\alpha y)} \right] \left[1 + |\rho_0| e^{-j(\phi - 2\alpha y)} \right] \right\}^{1/2}$$

Po úpravě dostaneme

$$|U| = |U_0^+| \left[1 + |\rho_0|^2 + 2|\rho_0| \cos(\phi - 2\alpha y) \right]^{1/2} \quad (12.3)$$

a za použití vztahu $|\varrho_0| = |U_0^-|/|U_0^+|$, viz obr. 12.1

$$|U|^2 = |U_0^+|^2 + |U_0^-|^2 + 2|U_0^+||U_0^-|\cos(\varphi - 2xy) \quad (12.4)$$

Tento výraz bude mít maximum při $\varphi - 2xy_1 = -2n\pi$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, takže

$$|U_{\max}|^2 = |U_0^+|^2 + |U_0^-|^2 + 2|U_0^+||U_0^-|$$

a tedy

$$|U_{\max}| = |U_0^+| + |U_0^-| \quad (12.5)$$

Minimum bude při $\varphi - 2xy_2 = -(2n + 1)\pi$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, takže

$$|U_{\min}|^2 = |U_0^+|^2 + |U_0^-|^2 - 2|U_0^+||U_0^-|$$

a tedy

$$|U_{\min}| = |U_0^+| - |U_0^-| \quad (12.6)$$

Vzdálenost mezi místy maximálního a minimálního napětí bude

$$(\varphi - 2xy_1) - (\varphi - 2xy_2) = -2n\pi + (2n + 1)\pi$$

neboli

$$y_2 - y_1 = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\lambda}{4}$$

(neboť $\alpha = 2\pi/\lambda$).

Vzdálenost mezi místy minima a maxima napětí je tedy $\lambda/4$, vzdálenost mezi sousedními místy maxima (nebo minima) je $\lambda/2$ atd. Poměr maximální hodnoty napětí ku minimální hodnotě budeme nazývat *činitelem stojaté vlny* (bývá označován též jako *napětový poměr stojatých vln*)

$$p = \frac{|U_{\max}|}{|U_{\min}|} \quad (12.7)$$

takže za použití vztahů (12.5) a (12.6) dostaneme

$$p = \frac{|U_0^+| + |U_0^-|}{|U_0^+| - |U_0^-|}$$

neboli

$$1 + \frac{|U_0^-|}{|U_0^+|} = \frac{1 + |\varrho_0|}{1 - |\varrho_0|} \quad (12.8)$$

popř. s použitím vztahu (12.2)

$$p = \frac{|Z_k + Z_0| + |Z_k - Z_0|}{|Z_k + Z_0| - |Z_k - Z_0|} \quad (12.9)$$

Podle rovnice (12.8) tedy platí

$$|\varrho_0| = \frac{p - 1}{p + 1} \quad (12.10)$$

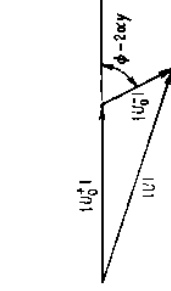
Ze vztahů (12.7) až (12.10) vyplývá, že činitel stojaté vlny je vždy reálné číslo

$$p \geq 1$$

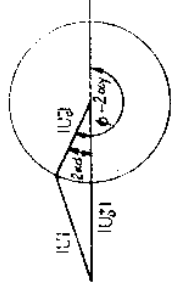
kdežto činitel odrazu může být číslo komplexní, pro jehož absolutní hodnotu, kterou můžeme určit ze vztahu (12.10), platí

$$|\varrho| \leq 1$$

Vrátíme-li se zpět ke vztahu (12.4), je zřejmé, že tento vztah vyjadřuje v podstatě kosinovou větu pro trojúhelník se stranami $|U|$, $|U_0^+|$ a $|U_0^-|$, viz obr. 12.1.



Obr. 12.1.



Obr. 12.2.

Budeme-li odměřovat úhel mezi napětími $|U_0^+|$ a $|U_0^-|$ od minima napětí, potom podle obr. 12.2 je

$$(\varphi - 2xy) = -(\pi + 2\alpha d)$$

takže

$$\cos(\varphi - 2xy) = -\cos 2\alpha d$$

a vztah (12.3) můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{|U|}{|U_0^+|} = [1 + |\varrho_0|^2 - 2|\varrho_0|\cos 2\alpha d]^{1/2} \quad (12.11)$$

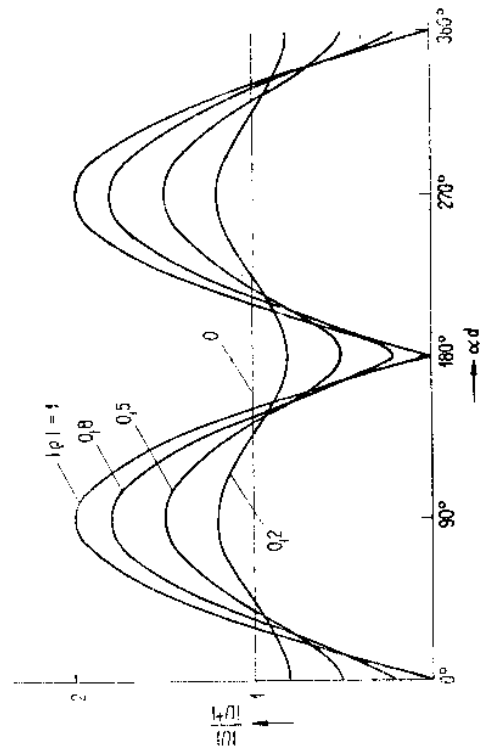
Vztah (12.11) je znázorněn pro různé hodnoty ϱ_0 na obr. 12.3.

Platí-li $|\varrho_0| = 1$ (vedení nakrátko nebo naprázdno), lze vztah (12.11) napsat ve zjednodušeném tvaru

$$\frac{|U|}{|U_0^+|} = \sqrt{2(1 - \cos 2\alpha d)^{1/2}} = 2|\sin \alpha d| \quad (12.12)$$

který je v praxi velmi významný, při určování charakteristik detekčních diod.

Protože příčinou vzniku stojaté vlny je impedančně nespřípůsobená zátěž, od které se část dodávaného výkonu odráží, určeme souvislost mezi odraženým výkonem a činitelem odrazu ϱ .



Obr. 12.3. Průběh napětí podél vedení při různých hodnotách činitele odrazu ρ

Výkony postupné a odražené vlny můžeme vyjádřit výrazy

$$P^+ = \frac{1}{2} Y_0 |U^+|^2 \quad P^- = \frac{1}{2} Y_0 |U^-|^2$$

takže pro poměr těchto výkonů platí

$$\frac{P^-}{P^+} = \frac{|U^-|^2}{|U^+|^2} = |\tilde{\rho}_0|^2 \quad (12.13)$$

neboť

$$|\rho_0| = \frac{|U_0^-|}{|U_0^+|}$$

popř. za použití vztahu (12.10)

$$\frac{P^-}{P^+} = \left(\frac{p-1}{p+1} \right)^2 \quad (12.14)$$

Užitečný výkon, který se dostane do zátěže, je dán rozdílem mezi výkonem postupné a odražené vlny

$$P_u = P^+ - P^- = P^+ \left(1 - \frac{P^-}{P^+} \right)$$

takže

$$P_u = P^+ (1 - |\rho_0|^2) \quad (12.15)$$

popř.

$$P_u = P^+ \frac{4p}{(p+1)^2} \quad (12.16)$$

Ztráty vzniklé neprizpůsobením definujeme vztahem

$$L = 10 \log \frac{P^+}{P_u} = 10 \log \left(\frac{1}{1 - |\rho_0|^2} \right) \quad (\text{dB}) \quad (12.17)$$

12.1.1. Experimentální určení činitele stojatých vln

Rozložení elektromagnetického pole ve vedení určíme pomocí tzv. *měřičích vedení*, což je úsek vedení s úzkou podélnou štěrbinou, do které zasahuje malá posuvná sonda, která má slabou vazbu s elektrickým polem vedení. Vysokofrekvenční energie se přivádí ze sondy na polovodičový detektor, který je připojen buď k mikroampérmetru, nebo na vstup zesilovače selektivního voltmetru. Aby bylo možné zjistit podélnou polohu sondy co nejpřesněji, je měřící vedení opatřeno stupnicí s noniem, popř. s ručkovým indikátorem, umožňujícím určovat polohu s přesností 0,01 mm.

Protože polovodičová dioda v detektoru sondy nepracuje v lineární oblasti své charakteristiky, je nutné znát její voltampérovou charakteristiku, i když při malých výkonových úrovních (pod 10 μW) můžeme předpokládat, že je kvadratická. Činitel stojatých vln je podle (12.7)

$$P = \frac{|U_{\max}|}{|U_{\min}|}$$

Protože výchylka měřičho přístroje při použití nelineárního detektoru není lineárně závislá na vř napětí, nemůžeme v takovém případě určit činitel stojatých vln přímo z poměru výchylek, ale je nutné detektor předem kalibrovat. Při kvadratické charakteristice platí pro proud měřičho přístroje

$$I \sim |U|^2$$

takže jeho výchylka je úměrná výkonu. Činitel stojatých vln musíme pak počítat ze vztahu

$$P = \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_{\min}}} \quad (12.18)$$

kde I_{\max} a I_{\min} jsou hodnoty udávané maximální a minimální výchylkou měřičho přístroje.

Jestliže neznáme charakteristiku detekční diody, je nutné diodu kalibrovat nebo použít takovou metodu určení činitele stojatých vln, která nevyžaduje znalost charakteristiky diody. Použijeme-li např. přesný stavitelný zesilovač ke zmenšení maximální výchylky na stejnou hodnotu, jaká je v minimu, platí

$$L = 20 \log \frac{|U_{\max}|}{|U_{\min}|} \quad (\text{dB})$$

popř.

$$L = 20 \log p \quad (\text{dB})$$

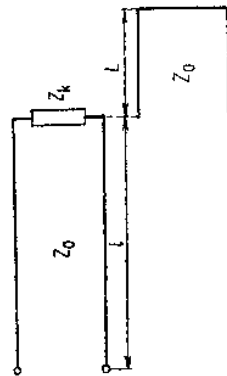
takže

$$p = 10^{L/20} \quad (12.19)$$

Vztah (12.19) umožňuje tedy určit číselný stojatých vln bez znalosti charakteristiky detekční diody.

12.2. KRUHOVÝ IMPEDANČNÍ DIAGRAM

V technice velmi vysokých frekvencí je možné řešit mnoho úloh pomocí tzv. impedančních diagramů. Nejčastěji se používá *kruhový impedanční diagram*, označovaný jako Smithův, jehož podstatu zde vysvětlíme.



Obr. 12.4. Náhrada zakončovací impedance vedením nakrátko

Předpokládejme vedení s vlnovou impedancí Z_0 , s poměrným posunem α , s poměrným útlumem β a zakončené impedancí Z_k (obr. 12.4). Vstupní impedance takového vedení je podle (2.117)

$$Z_p = Z_0 \frac{Z_k + Z_0 \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_0 + Z_k \operatorname{tgh} \gamma l}$$

kde $\gamma = \beta + j\alpha$.

Nahradíme impedanci Z_k vedením nakrátko se stejnou vlnovou impedancí Z_0 , s poměrným posunem a , s poměrným útlumem b a s délkou L (obr. 12.4), přičemž platí

$$g = b + j\alpha$$

Vstupní impedance takového vedení nakrátko je

$$Z_k = Z_0 \operatorname{tgh} gL = Z_0 \operatorname{tgh} (bL + jaL) \quad (12.20)$$

takže normovanou vstupní impedanci $z_p = Z_p/Z_0$ určíme ze vztahu

$$z_p = \frac{\operatorname{tgh} gL + \operatorname{tgh} \gamma l}{1 + \operatorname{tgh} gL \operatorname{tgh} \gamma l} = \operatorname{tgh} (gL + \gamma l) \quad (12.21)$$

Vyjádříme-li hyperbolicou tangentu pomocí exponenciálních funkcí, dostaneme po úpravě

$$\operatorname{tgh} (gL + \gamma l) = \frac{1 - e^{-2(gL + \gamma l)}}{1 + e^{-2(gL + \gamma l)}}$$

a při zavedení nové komplexní proměnné w je

$$z_p = \frac{1 - w}{1 + w} \quad (12.22)$$

kde

$$w = e^{-2(gL + \gamma l)} \quad (12.23)$$

Vztahy (12.22) a (12.23) definují konformní zobrazení roviny komplexních impedancí (z) a komplexní roviny přenosu (w) do komplexní roviny (w). Tímto zobrazením vznikne kruhový, tzv. *Smithův impedanční diagram*.

Pro komplexní normované impedance v rovině (z)

$$z = r + jx \quad (12.24)$$

platí vztahy

$$z^* = r - jx \quad (12.24a)$$

$$r = \frac{1}{2} (z + z^*) \quad (12.24b)$$

$$x = \frac{1}{2j} (z - z^*) \quad (12.24c)$$

$$zz^* = r^2 + x^2 \quad (12.24d)$$

Vztahy (12.24b) a (12.24c) za pomoci zobrazovacího vztahu (12.22) umožní transformaci reálných a imaginárních složek impedancí z do komplexní roviny (w).

12.2.1. Zobrazení konstantních reálných složek impedance

Provedme nejprve transformaci konstantních reálných složek impedance z roviny (z) do roviny (w). S použitím zobrazovacího vztahu (12.22) můžeme napsat výraz (12.24b) ve tvaru

$$2r = \frac{1 - w}{1 + w} + \frac{1 - w^*}{1 + w^*} \quad (12.25)$$

Tento vztah upravíme na takový tvar, který lze porovnat s obecnou rovnicí kružnice v komplexní rovině a určíme souřadnice středu i a poloměr. Úpravou vztahu (12.25) dostaneme

$$ww^* + w \frac{r}{r+1} + w^* \frac{r}{r+1} + \frac{r-1}{r+1} = 0 \quad (12.26)$$

Protože rovnici kružnice můžeme vyjádřit vztahem (viz přílohu G)

$$zz^* - z(m - jn) - z^*(m + jn) + m^2 + n^2 - R^2 = 0$$

je při porovnání s rovnicí (12.26) zřejmé, že pro souřadnice středu kružnice platí

$$m = -\frac{r}{r+1}; \quad n = 0 \quad (12.27)$$

a pro poloměr R

$$m^2 + n^2 - R^2 = \frac{r-1}{r+1} \quad (12.28)$$

neboli

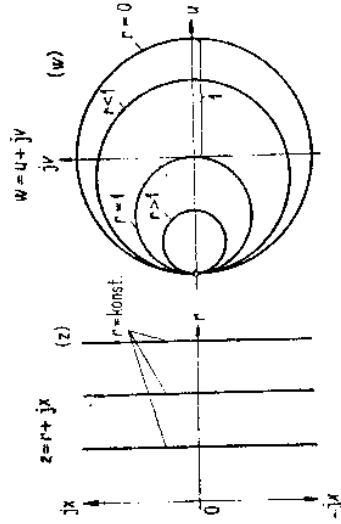
$$R = \frac{1}{r+1} \quad (12.29)$$

Zobrazíme-li tedy v komplexní rovině (z) konstantní reálné hodnoty normovaných impedancí přímkaní (obr. 12.5)

$r = konst$

zobrazí se tyto reálné hodnoty v rovině (w) kružnicemi, pro které platí

$$R = \frac{1}{r+1}, \quad m = -\frac{r}{r+1}, \quad n = 0$$



Obr. 12.5. Zobrazení konstantních reálných hodnot normovaných impedancí

12.2.2. Zobrazení konstantních reaktancí

Vztah (12.24c) můžeme napsat pomocí zobrazovacího vztahu (12.22)

ve tvaru

$$2jx = \frac{1-w}{1+w} - \frac{1-w^*}{1+w^*}$$

jehož úpravou dostaneme

$$ww^* + w \frac{1+jx}{jx} - w^* \frac{1-jx}{jx} + 1 = 0 \quad (12.29)$$

Porovnáme-li tuto rovnici s obecnou rovnicí kružnice

$$zz^* - z(m-jn) - z^*(m+jn) + m^2 + n^2 + R^2 = 0$$

dostaneme po úpravě pro souřadnice středu

$$m = -1; \quad n = -\frac{1}{x} \quad (12.30)$$

a pro poloměr R

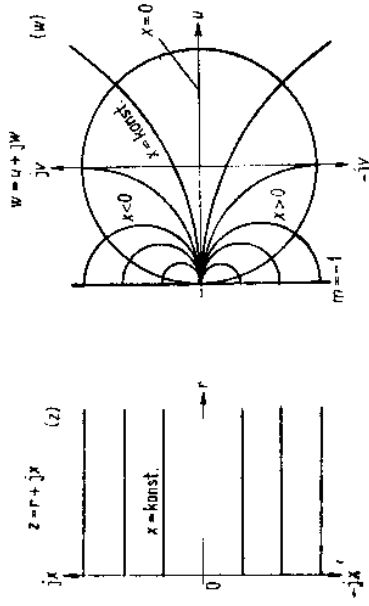
$$R = \frac{1}{x} \quad (12.31)$$

Zobrazíme-li tedy v komplexní rovině (z) konstantní normované reaktance přímkami (obr. 12.6)

$x = konst$

zobrazí se tyto reaktance v rovině (w) kružnicemi, pro které platí

$$R = -\frac{1}{x}; \quad m = -1; \quad n = -\frac{1}{x}$$



Obr. 12.6. Zobrazení konstantních normovaných reaktancí

12.2.3. Zobrazení komplexní roviny přenosu

Použijeme-li vztahy

$$w = u + jv; \quad \gamma = \beta + j\alpha; \quad g = b + ja$$

můžeme napsat zobrazovací vztah (12.23) ve tvaru

$$u + jv = e^{-2(\beta L + \theta)} [\cos 2(\alpha L + \alpha t) - j \sin 2(\alpha L + \alpha t)] \quad (12.32)$$

takže platí

$$u = e^{-2(\beta L + \theta)} \cos 2(\alpha L + \alpha t)$$

$$v = -e^{-2(\beta L + \theta)} \sin 2(\alpha L + \alpha t)$$

a tedy

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{tg} 2(\alpha L + \alpha t) \quad (12.33)$$

$$u^2 + v^2 = e^{-4(\beta L + \theta)} \quad (12.34)$$

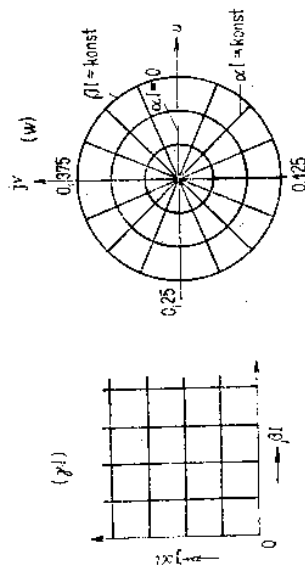
Rovnice (12.33) je rovnicí soustavy přímek prozrazujícím počátkem souřadnic se směrnici $-\operatorname{tg} 2(aL + 2\pi/l)$. Hodnota aL charakterizuje délku fiktivního ztrátového vedení, kterým jsme nahradili zakončovací impedanci, a je různá u různých hodnot impedancí. Přímka konstantní fáze, která této hodnotě aL odpovídá, určuje počátek měřítka fáze (tj. pro $l = 0$). Z praktických důvodů je však při konstrukci kruhového diagramu vhodné umístít počátek měřítka fáze do takové polohy, která odpovídá hodnotě $L = 0$. Z rovnice (12.33) je dále zřejmé, že směrnice přímek, pro něž je rozdíl vzdáleností na vedení roven celistvému násobku $\lambda/2$, jsou totožné.

Rovnice (12.34) je při $bL + \beta l = \text{konst}$ rovnice kružnice s poloměrem

$$R = e^{-2(bL + \beta l)} \quad (12.35)$$

Nelze-li poměrný útlum vedení zanedbat, $\beta \neq 0$, mění se R exponenciálně v závislosti na hodnotě útlumu βl , takže v rovině (w) dostaneme místo kružnice spirálu. Hodnota bL charakterizuje útlum fiktivního vedení nakrátko, kterým jsme nahradili zakončovací impedanci, a je různá při různých hodnotách impedancí. Kružnice, jejíž poloměr odpovídá hodnotě bL , určuje počátek měřítka útlumu (tj. pro $l = 0$). Při rostoucí hodnotě l je poloměr buď konstantní (v případě bezeztrátového vedení, $\beta = 0$), nebo se poloměr s rostoucí hodnotou vzdálenosti l zmenšuje (při respektování ztrát na vedení, kdy $\beta \neq 0$).

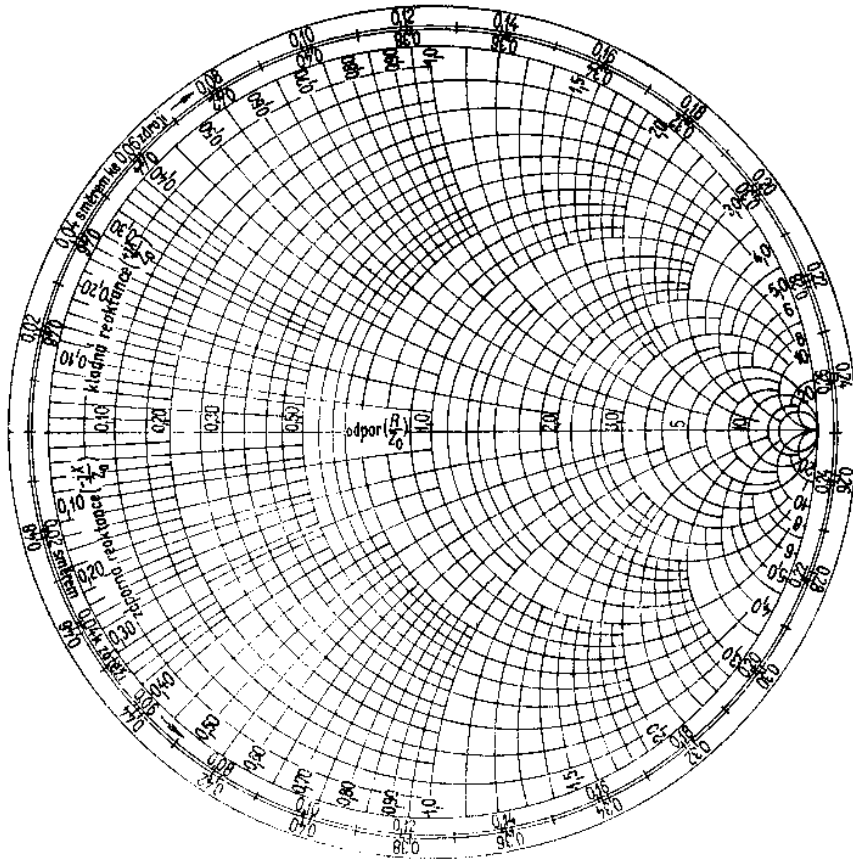
Ortogonalní soustavu přímek konstantního fázového posunu ($\alpha l = \text{konst}$) a přímek konstantního útlumu ($\beta l = \text{konst}$) z roviny (z) převedeme tedy zobrazovacím vztahem (12.23) do roviny (w) na orthogonalní soustavu přímek ($\alpha l = \text{konst}$) a kružnic ($\beta l = \text{konst}$), viz obr. 12.7.



Obr. 12.7. Zobrazení konstantního útlumu a konstantního fázového posunu

Současným zakreslením orthogonalní soustavy přenosu a orthogonalní soustavy normovaných impedancí do roviny (w) bychom dostali velmi nepřehledný diagram a proto je obvyklé zakreslovat do něj pouze soustavu kružnic normovaných impedancí, přičemž z roviny komplexního přenosu se kružnice konstantního útlumu obvykle nekreslí a z přímek konstantního fázového posunu se zakresluje pouze

měřítka na obvodu diagramu (přitom se místo hodnot $\alpha l = 2\pi/l$ = konst uvádí pouze $l/\lambda = \text{konst}$). Příklad nejčastějšího provedení kruhového diagramu je na obr. 12.8.



Obr. 12.8. Kruhový impedanční diagram

12.2.4. Zobrazení činitele odrazu a činitele stojatých vln

Velkou předností kruhového impedančního diagramu je možnost zobrazení činitele odrazu a činitele stojatých vln.

Činitel odrazu můžeme vyjádřit vztahem (2.126), který lze upravit do tvaru

$$\rho_0 = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (12.36)$$

Dosadíme-li za z zobrazovací vztah (12.22), dostaneme

$$\rho_0 = -w \quad (12.37)$$

takže platí

$$|\varrho_0| = |w| \quad (12.38)$$

což je rovnice kružnice s poloměrem $|\varrho_0|$ a se středem v počátku souřadnic u, v . Použijeme-li vztah (12.23), lze napsat vztah (12.37) ve tvaru (položíme $gL = 0$)

$$\varrho_0 = -e^{-2\gamma l}$$

neboli

$$|\varrho_0| e^{i\varphi} = e^{-2\beta l} e^{-i(2\alpha l - \pi)} \quad (12.39)$$

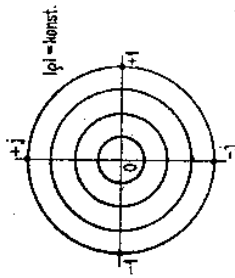
takže argument činitele odrazu můžeme vyjádřit výrazem

$$\varphi = \pi - 2\alpha l = \pi \left(1 - 4 \frac{l}{\lambda}\right) \quad (12.40)$$

a pro modul činitele odrazu platí

$$|\varrho_0| = e^{-2\beta l} \quad (12.41)$$

Z toho je zřejmé, že v rovině kruhového impedančního diagramu (w) můžeme zobrazit též komplexní činitel odrazu ϱ . Při konstantní hodnotě útlumu $\beta l = \text{konst}$ jsou geometrickým místem modulů činitele odrazu $|\varrho_0|$ kružnice totožné s kružnicemi konstantního útlumu. Měřitko poloměrů kružnic konstantního modulu činitele odrazu je lineární (obr. 12.9). Kružnice konstantního činitele odrazu se obvykle kreslí na průsvítku, která se na kruhový impedanční diagram přikládá.



Obr. 12.9. Kružnice konstantních modulů činitele odrazu

Použijeme-li vztah mezi činitelem stojatých vln a modulem činitele odrazu (12.10), můžeme vyjádřit vztah (12.38) též ve tvaru

$$|w| = \frac{p-1}{p+1} \quad (12.42)$$

neboli

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^2$$

Z toho je zřejmé, že konstantní hodnoty činitele stojatých vln můžeme zobrazit v rovině (w) kružnicemi, které mají střed v počátku souřadnice (tj. uprostřed kruhového diagramu) a poloměr

$$R = \frac{p-1}{p+1} \quad (12.43)$$

Pro činitel stojatých vln jsme odvodili též vztah (12.9), který můžeme upravit do tvaru

$$p = \frac{|z+1| + |z-1|}{|z+1| - |z-1|}$$

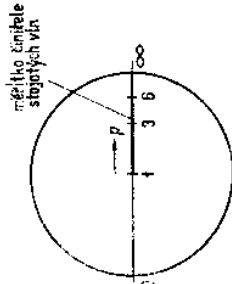
Jestliže ve výrazu pro normovanou impedanci $z = r + jx$ položíme $x = 0$, můžeme napsat tento vztah ve tvaru

$$p = \frac{r+1 + |r-1|}{r+1 - |r-1|} \quad (12.44)$$

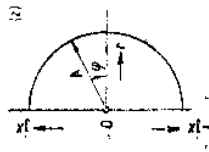
takže po úpravě lze psát

$$\frac{p-1}{p+1} = \frac{|r-1|}{r+1} \quad (12.45)$$

Z porovnání vztahů (12.45) a (12.43) vyplývá, že měřitko poloměru kružnic konstantního činitele p je shodné s normovanými reálnými složkami impedanční v oblasti $r > 1$. Je tedy stupnice reálných částí impedance r od 1 do ∞ na reálné ose kruhového diagramu ($x = 0$) současně i stupnicí činitele stojatých vln (obr. 12.10).



Obr. 12.10. Měřitko kružnic konstantního činitele stojatých vln



Obr. 12.11. Konstantní amplituda a konstantní fáze impedance

Kružnice konstantního činitele stojatých vln se zakreslují do impedančního diagramu až při řešení konkrétních úloh (viz dále). Při častém používání impedančního diagramu je výhodné nakreslit měřitko činitele stojatých vln na průhledné raménko, které je otočné kolem středu diagramu. Stupnice činitele stojatých vln p může být doplněna též stupnicí modulů činitele odrazu $|\varrho|$ a stupnicí hodnot konstantního útlumu βl .

12.2.5. Zobrazení konstantní fáze a konstantní absolutní hodnoty impedance

Kromě výše uvedených zobrazení je pro některé aplikace výhodné zakreslit do impedančního diagramu průběhy konstantní fáze a konstantní absolutní hodnoty impedance.

Pro normovanou hodnotu impedance v rovině (z) ve tvaru

$$z = r + jx$$

platí

$$|z|^2 = r^2 + x^2 \quad (12.46)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} \quad (12.47)$$

V rovině (z) se zobrazí konstantní absolutní hodnoty impedancí kružnicemi, určenými rovnicí (12.46), obr. 12.11. Označíme-li určitou hodnotu konstantní amplitudy A , je

$$|z|^2 = A^2$$

neboli

$$zz^* = A^2$$

Dosadíme-li za z transformační vztah (12.22), platí

$$\frac{1-w}{1+w} \frac{1-w^*}{1+w^*} = A^2$$

což můžeme napsat po úpravě ve tvaru

$$ww^* + w \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1} + w^* \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1} + 1 = 0 \quad (12.48)$$

Z porovnání této rovnice s obecnou rovnicí kružnice

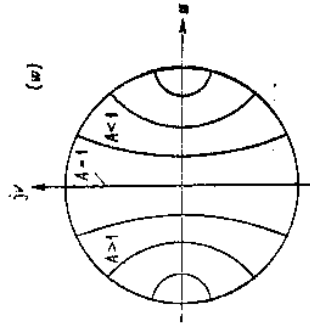
$$zz^* - z(m - jn) - z^*(m + jn) + m^2 + n^2 - R^2 = 0$$

je zřejmé, že

$$m = -\frac{A^2 + 1}{A^2 - 1}; \quad n = 0 \quad (12.49)$$

$$R = \frac{2A}{A^2 - 1} \quad (12.50)$$

V rovině kruhového impedančního diagramu (w) se tedy konstantní amplitudy zobrazí kružnicemi s poloměrem určeným rovnicí (12.50) a se souřadnicemi středu, určenými rovnicemi (12.49), viz obr. 12.12.



Obr. 12.12. Kružnice konstantních amplitud normované impedance

(12.47). Označíme-li

$$\operatorname{tg} \varphi = B = \text{konst}$$

platí

$$B = \frac{x}{r}$$

takže při použití vztahů (12.24c) a (12.24b) dostaneme rovnici

$$\frac{z - z^*}{z + z^*} = jB \quad (12.51)$$

Dosadíme-li za z transformační vztah (12.22), můžeme upravit rovnici (12.51) do tvaru

$$ww^* + j \frac{w}{B} - j \frac{w^*}{B} - 1 = 0$$

z něhož po porovnání s obecnou rovnicí kružnice získáme rovnice pro určení souřadnic středu a poloměru kružnice konstantní fáze v rovině (w). Pro souřadnice středu platí

$$m = 0; \quad n = -\frac{1}{B}$$

neboli

$$m = 0; \quad n = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\operatorname{cotg} \varphi \quad (12.52)$$

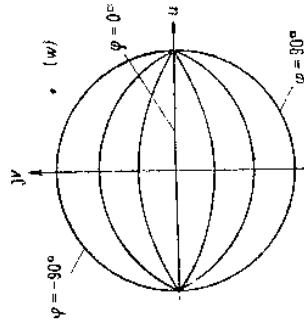
a pro poloměr kružnice platí

$$R = \frac{\sqrt{B^2 + 1}}{B}$$

neboli

$$R = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \quad (12.53)$$

V rovině kruhového impedančního diagramu (w) se zobrazí konstantní fáze impedancí kružnicemi určenými rovnicemi (12.52) a (12.53), viz obr. 12.13.

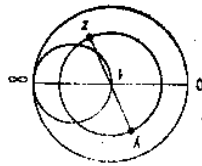


Obr. 12.13. Kružnice konstantních fází normované impedance

ních fází tvoří v rovině (w) ortogonální soustavu. Pro praktické použití je výhodné nakreslit tuto soustavu kružnic na průsvítku, kterou lze v případě potřeby na impedanční diagram přiložit.

Při řešení některých úloh je výhodnější používat místo impedančního diagramu *admitanční kruhový diagram*. Admitanční diagram bychom mohli odvodit analogickým způsobem jako u impedančního diagramu, můžeme jej však získat jednodušeji přímo z impedančního diagramu, a to inverzí kolem bodu 1 (středu diagramu), viz obr. 12.14, neboť platí

$$y = \frac{1}{z}$$



Obr. 12.14.

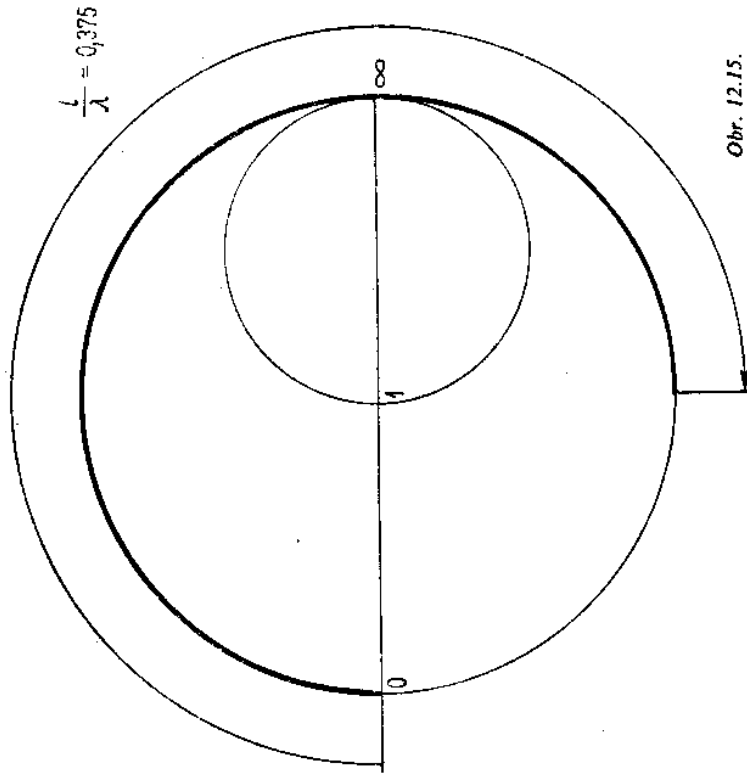
Nalezení příslušné admitance k dané impedanci je pak velmi jednoduché. Admitanční diagram je na pohled shodný s diagramem impedančním, rozdíl je však v označení. Místo $z = Z/Z_0$ dostaneme $y = Y/Y_0$, místo $r = R/Z_0$ dostaneme $g = G/Y_0$, místo $x = X/Z_0$ dostaneme $b = B/Y_0$, místo označení reaktance napíšeme označení susceptance. Přitom je třeba si uvědomit, že kladná susceptance má kapacitní charakter, záporná susceptance má indukční charakter.

12.3. PŘÍKLADY POUŽITÍ KRUHOVÉHO IMPEDANČNÍHO DIAGRAMU

V tomto článku uvedeme několik typických příkladů použití kruhového impedančního diagramu. Je však třeba zdůraznit, že těmito příklady není rozsah použití kruhového diagramu zcela vyčerpán. Jeho použití je např. možné rozšířit i na oblast aktivních impedancí (tj. se zápornou reálnou částí), používá se při řešení vlastností mikrovlnných generátorů apod. Blížší podrobnosti lze najít ve speciální literatuře.

12.3.1. Transformace impedance podél vedení

PŘÍKLAD 1: Bezeztrátové vedení je zakončeno zkratem. Máme určit normovanou hodnotu impedance ve vzdálenosti $l = 3\lambda/8$ od místa zkratu.
ŘEŠENÍ: Zkrat je nulová impedance, takže výchozím bodem na kruhovém diagramu je bod nulové impedance. Z tohoto bodu se budeme pohybovat směrem



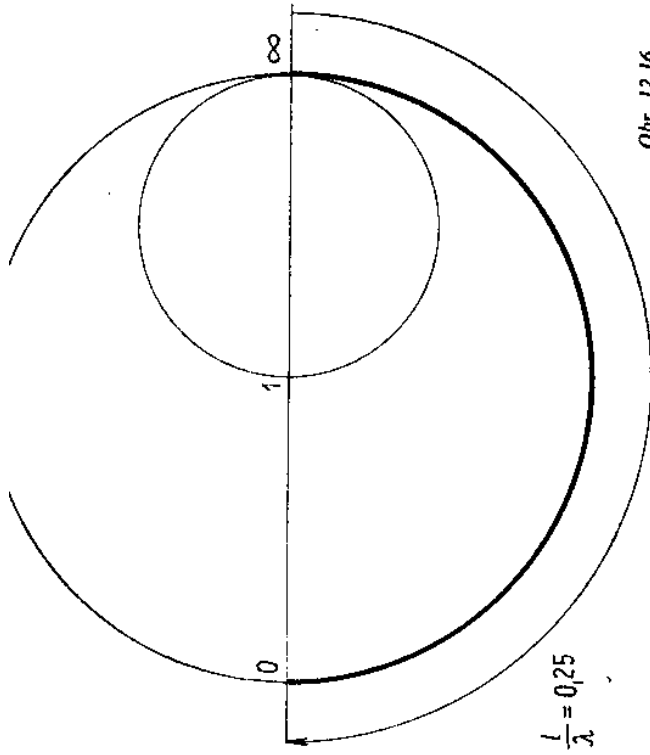
Obr. 12.15.

ke zdroji po kružnici konstantního činitele stojatých vln až do vzdálenosti $l = 3\lambda/8$, čili $l/\lambda = 0,375$. V této vzdálenosti přečteme normovanou hodnotu impedance $z = 0 - j$. Vedení nakrátko má tedy při délce $l = 3\lambda/8$ charakter jednotkové kapacity (absolutní hodnota reaktance je stejně velká jako impedance vedení), viz obr. 12.15.

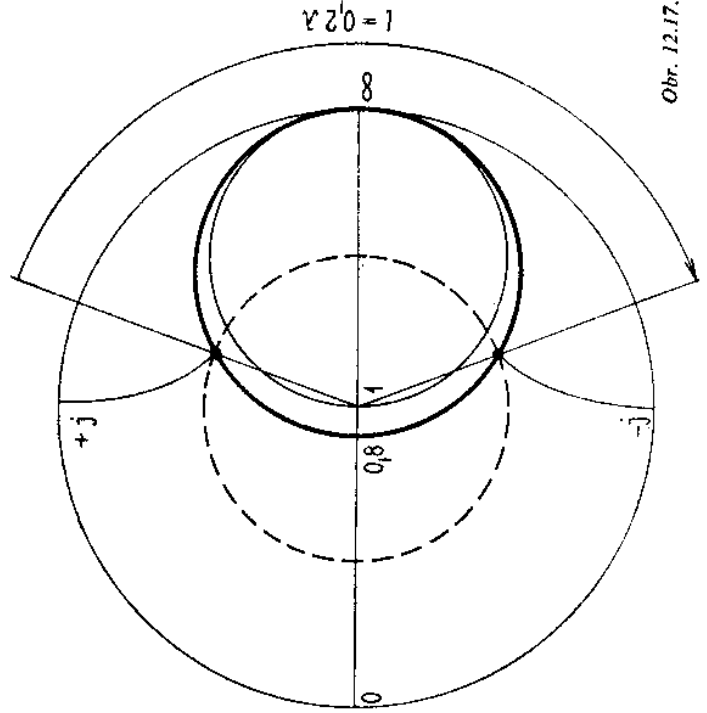
PŘÍKLAD 2: Bezeztrátové vedení je zakončeno naprázdno. Máme určit normovanou hodnotu impedance ve vzdálenosti $l = \lambda/4$ od konce.

ŘEŠENÍ: Vedení zakončené naprázdno si představíme jako vedení zakončené nekonečně velkou impedancí, takže výchozím bodem na kruhovém diagramu je bod nekonečné impedance. Z tohoto bodu se budeme pohybovat směrem ke zdroji po kružnici konstantního činitele stojatých vln o délku $l = \lambda/4$, čili $l/\lambda = 0,25$. Bod ∞ leží na přímce $l/\lambda = 0,25$, takže po přičtení $l = \lambda/4$ se dostaneme na přímku $l/\lambda = 0,5$, čili do bodu nulové impedance. Vedení naprázdno má tedy při délce $\lambda/4$ nulovou vstupní impedanci, viz obr. 12.16.

PŘÍKLAD 3: Bezeztrátové vedení je zakončeno normovanou hodnotou impedance $z_k = 0,8 + j$. Máme určit normovanou hodnotu impedance ve vzdálenosti $l = 0,2\lambda$ od konce vedení.



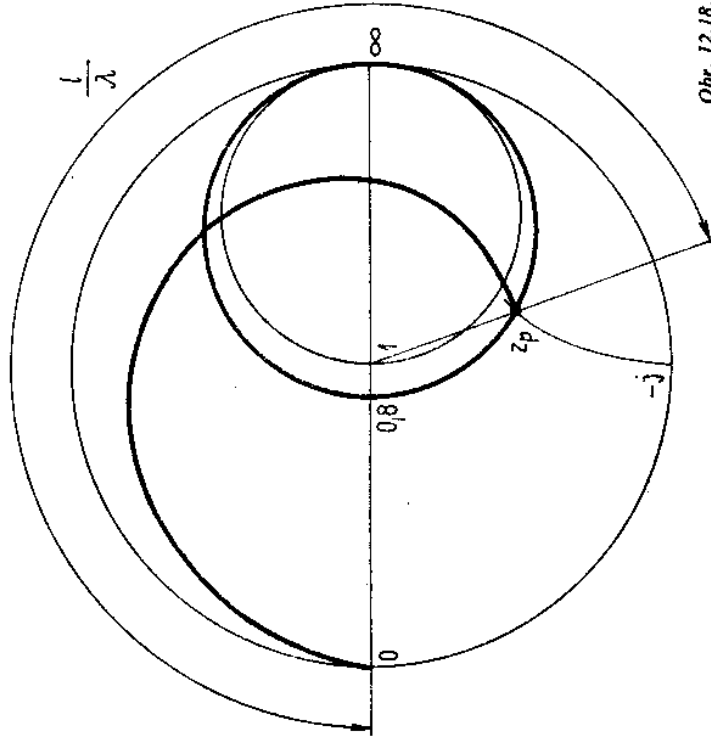
Obr. 12.16.



Obr. 12.17.

impedanci $z_k = 0,8 + j$. Bodem z_k proložíme přímkou konstantního αl a přečteme na obvodu diagramu příslušnou hodnotu l/λ . Z bodu z_k se budeme pohybovat po kružnici konstantního p směrem ke zdroji o délku $l = 0,2\lambda$, kde přečteme hodnotu normované impedance $z_p = 0,8 - j$ (obr. 12.17).

PŘÍKLAD 4: Jaké vlastnosti (délku a útlum) by muselo mít vedení nakrátko, aby na svém vstupu vytvořilo impedanci $z_p = 0,8 - j$ (stejnou jako v předcházejícím příkladu).



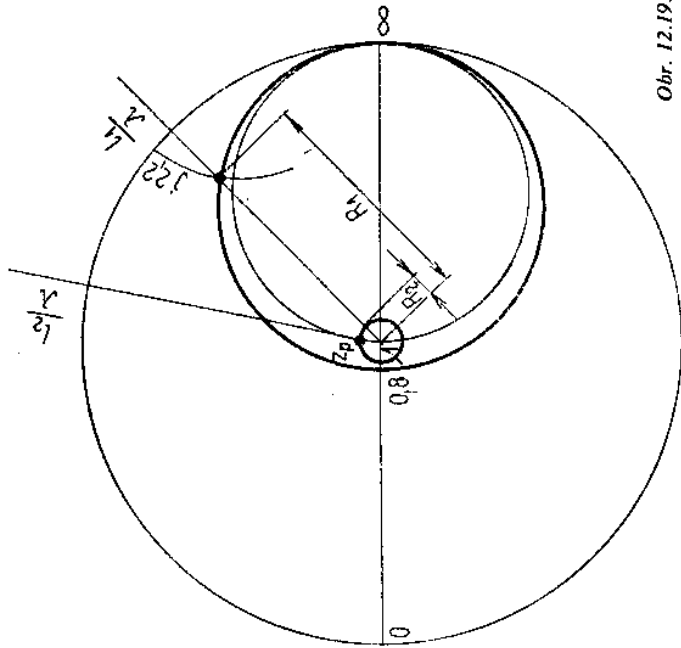
Obr. 12.18.

ŘEŠENÍ: Potřebnou délku l určíme z rozdílu vzdáleností, odpovídajících konstantním hodnotám αl pro $z_p = 0,8 - j$ a $z_k = 0$. Z diagramu přečteme, že tento rozdíl je $l = 0,35\lambda$. Pro poloměr kružnice konstantního útlumu platí $R = e^{-2\beta l}$. Má-li kruhový diagram jednotkový poloměr, pak změřením zjistíme, že z_p je na poloměru $R = 0,496$. Platí tedy $0,496 = e^{-2\beta l}$, takže

$$\beta l = 0,35 = 3,04 \text{ dB}$$

Impedanci $z_p = 0,8 - j$ lze vytvořit vedením nakrátko s délkou $l = 0,35\lambda$ a s útlumem 3,04 dB. Z příkladu je zřejmé, že geometrickým místem činitele stojatých vln u zkratového vedení je spirála (obr. 12.18).

je zakončeno normovanou impedancí $z_k = 0,8 + j2,2$. Má se určit normovaná vstupní impedance z_p a činitel stojatých vln, je-li $l = 0,44$ m.



Obr. 12.19.

ŘEŠENÍ: Nejprve určíme přímkou konstantního sw , na níž bude ležet vstupní impedance. Z kruhového diagramu zjistíme, že impedance z_k leží na přímkě konstantního sw při $l_1/\lambda = 0,188$. Na počátku vedení bude tedy hodnota $l_2/\lambda = 0,188 + 20/0,44 = 45,642$. Vzhledem k tomu, že posuv o $l/2$ je na diagramu otočení o 360° , znamená posuv o $l = 20$ m otočení fáze více než 90krát oproti původní poloze. Odečteme-li celistvý počet půlvln ($l/\lambda = 45,5$), dostaneme pro vstupní impedance polohu $l_2/\lambda = 0,142$. Poloměr, na němž bude ležet, vstupní impedance z_p , dostaneme ze vztahu

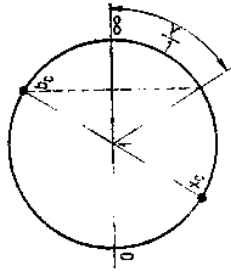
$$R_2 = R_1 R = R_1 e^{-2\alpha l}$$

kde R_1 je poloměr impedance z_k . Pro poměrný útlum $0,5$ dB \cdot m⁻¹ je útlum vedení 10 dB při délce vedení $l = 20$ m, a tedy $R = 0,1$. Platí tedy

$$R_2 = 0,1 R_1$$

takže odpovídající impedance je $z_p = 1,02 + j0,15$ při činiteli stojatých vln $p = 1,16$ (obr. 12.19).

$= 300 \Omega$, má-li toto vedení vytvořit s připojeným kondenzátorem s kapacitou $C = 1,0$ pF rezonanční obvod při frekvenci $f = 1\,000$ MHz, tj. $\lambda = 0,3$ m.



Obr. 12.20.

ŘEŠENÍ: Rezonanční podmínku vyjádříme vztahem

$$y_c + y_L = 0$$

(celková admittance v místě připojení kondenzátoru musí být v rezonanci nulová). Reaktance kondenzátoru při frekvenci $f = 1\,000$ MHz je

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -159 \Omega$$

takže normovaná hodnota reaktance je

$$x_c = \frac{X_C}{Z_0} = -0,53$$

Odpovídající normovanou susceptanci dostaneme pomocí kruhového diagramu inverzí kolem jeho středu, popř. výpočtem

$$y_c = jb = j1,886$$

Vedením nakrátko je třeba vytvořit susceptanci stejné velikosti, ale opačného znaménka. Podle obr. 12.20 určíme potřebnou hodnotu

$$\frac{l}{\lambda} = 0,078$$

takže při $l = 0,3$ m musí být délka vedení nakrátko

$$l = 0,078 \cdot 0,3 = 0,0234 \text{ m}$$

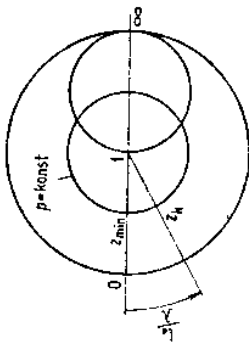
12.3.2. Určení zakončovací impedance

Známe-li činitel stojatých vln p a vzdálenost prvního minima stojatých vln od konce vedení l_0 , je snadné určit pomocí kruhového diagramu neznámou zakončovací impedanci. Postup při určování zakončovací impedance je tento (viz obr. 12.21):

a) Do kruhového diagramu nakreslíme kružnici odpovídající naměřenému činiteli stojatých vln p .

7) z uvedeného vzájemně s příslušnou hodnotou impedancí v leve polovině diagramu udává velikost normované impedance Z_{\min} ve vzdálenosti l_0 od konce vedení.

c) Abychom mohli určit normovanou hodnotu impedance na konci vedení, je nutné se z bodu Z_{\min} potočit po kružnici konstantního p směrem k zátěži o hodnotu l_0/λ .



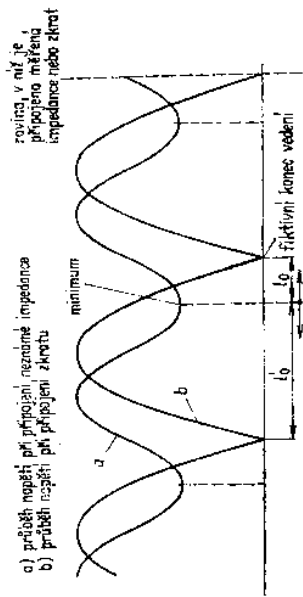
Obr. 12.21.

Není-li z jakéhokoliv důvodu možné určit vzdálenost prvního minima od konce vedení, pak si pomůžeme tím, že na konec vedení místo měřené impedance připojíme zkrat. Napěťová minima jsou při tomto zkratu vzdálena od konce vedení o celistvý násobek půlvln, takže na měřicím vedení označí celou řadu míst (fiktivních konců vedení), která mají elektricky stejnou vlastnost jako konec vedení. Vzdálenost minima stojatých vln při zapojení měřené impedance můžeme pak odměřovat od těchto míst. V takovém případě je lhostejné, určujeme-li vzdálenost minima impedance od fiktivního konce, který je blíže zátěži nebo ke zdroji (viz obr. 12.22). Hodnotu l_0/λ budeme vynášet směrem ke zdroji, hodnotu l_0/λ směrem k zátěži. Na kruhovém diagramu se dostaneme vždy do stejného místa (Z_k), neboť platí (obr. 12.23)

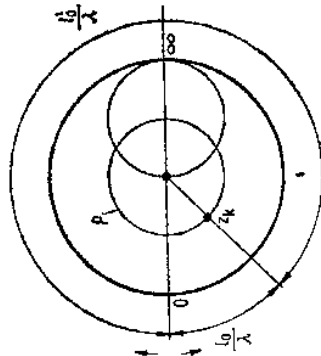
$$l_0 + l_0' = \frac{\lambda}{2}$$

12.3.3. Přizpůsobování impedancí

Jedna z nejčastějších úloh, které se řeší pomocí kruhového impedančního diagramu, je tzv. přizpůsobování impedancí. Zatěžovací impedance se snažíme přizpůsobovat hlavně proto, abychom do nich dostali co největší výkon. Princip impedančního přizpůsobování neboli kompenzace je velmi jednoduchý. Na vedení najdeme takové místo, ve kterém je reálná složka impedance rovna vlnové impedanci a v tomto místě vykompenzujeme jalovou složku impedance reaktancí stejné velikosti, ale opačného znaménka. Zavedení kompenzační reaktance se dá provádět nejrůznějšími způsoby. Používá se hlavně vedení nakrátko nebo naprázdno, připojené k hlavnímu vedení paralelně nebo sériově, ve vlnovodu se používají též kapacitní nebo indukční clonky nebo kolkity. Kromě těchto způsobů se k přizpůsobení impedancí používají též tzv. impedanční transformátory.



Obr. 12.22.



Obr. 12.23.

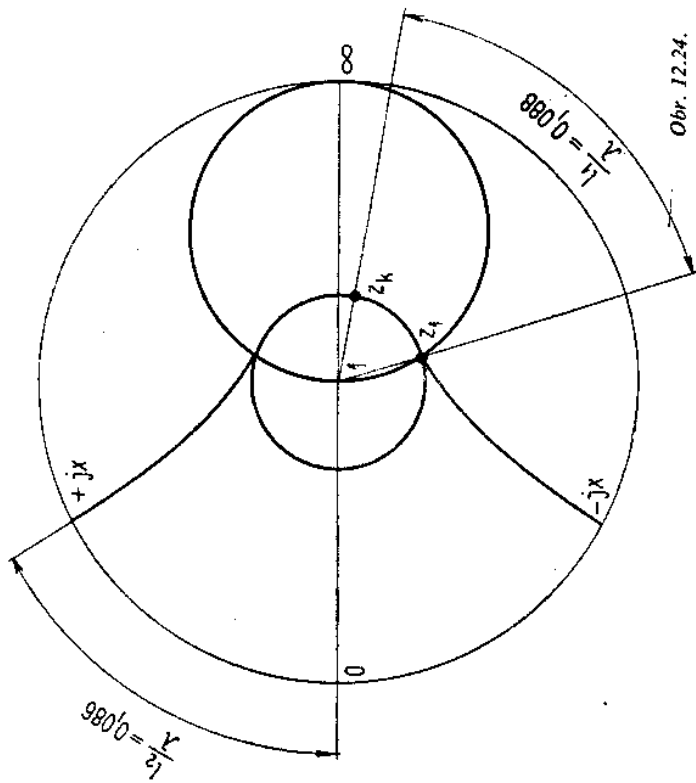
PŘÍKLAD 1: Přizpůsobení sériovým členem. Vedení s vlnovou impedancí $Z_0 = 300 \Omega$ je zakončeno impedancí $Z_k = (540 - j60) \Omega$. Tuto impedanci máme přizpůsobit sériově připojeným vedením nakrátko tak, aby výsledný činitel stojatých vln byl $p = 1$. Vlnová délka je $\lambda = 0,5$ m.

ŘEŠENÍ: Nejprve určíme vzdálenost l_1 , ve které má impedance na vedení jednotkovou reálnou složku (reálná složka impedance je stejně velká jako vlnová impedance), $z_1 = 1 - jx$. V této vzdálenosti připojíme sériově vedení nakrátko s takovou délkou l_2 , aby jeho vstupní impedance byla $z_2 = 0 + jx$. Výsledná impedance bude pak rovna $z = z_1 + z_2 = 1$, takže vedení bude přizpůsobeno. Z kruhového diagramu určíme (viz obr. 12.24) pro $z_k = 1,8 - j0,2$

$$l_1 = 0,088 \lambda; \quad l_1 = 0,044 \text{ m}$$

$$l_2 = 0,086 \lambda; \quad l_2 = 0,043 \text{ m}$$

Pro přizpůsobení jsme mohli zvolit též místo, kde je $z_1 = 1 + jx$. Toto místo by však bylo méně vhodné, neboť je od zátěže dále (z toho vyplývá větší frekvenční závislost) a kompenzační vedení nakrátko by muselo být k vytvoření reaktance $z_2 = -jx$ zbytečně dlouhé (delší než $\lambda/4$).



Obr. 12.24.

PŘÍKLAD 2: Přizpůsobení paralelním členem. K přizpůsobení vedení z předcházejícího příkladu použijeme místo sériového členu vedení nakrátko připojené paralelně.

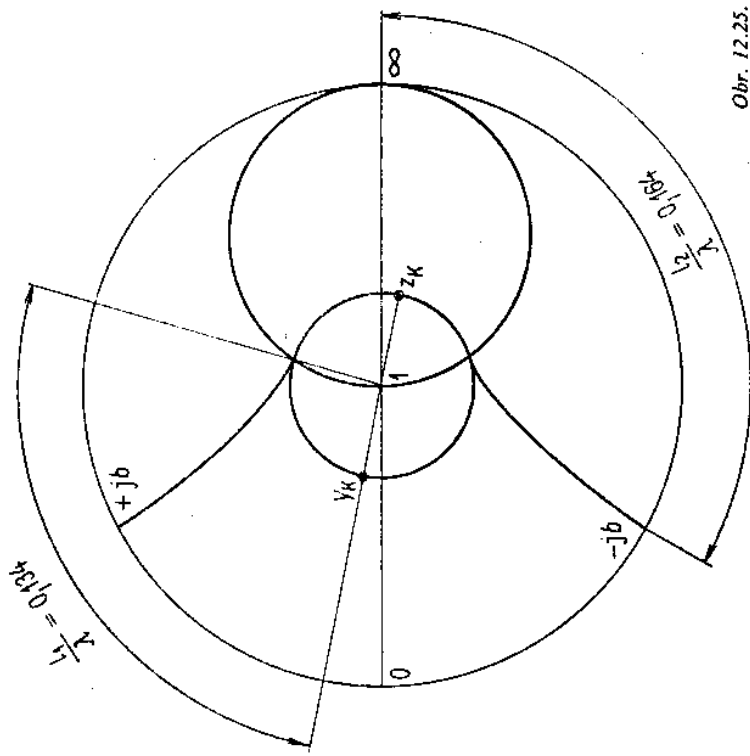
ŘEŠENÍ: Normovanou impedanci z_k převedeme na admitanci y_k , určíme vzdálenost l_1 , ve které je admitance vedení $y_1 = 1 \pm j b$ a v této vzdálenosti připojíme paralelně vedení nakrátko s takovou délkou l_2 , aby jeho vstupní admitance byla $y_2 = 0 \mp j b$. Výsledná admitance pak bude $y = y_1 + y_2 = 1$. Zvolíme-li pro přizpůsobení místo, kde je $y_1 = 1 + j b$, pak z kruhového diagramu přečteme (obr. 12.25)

$$\frac{l_1}{\lambda} = 0,134; \quad l_1 = 0,067 \text{ m}$$

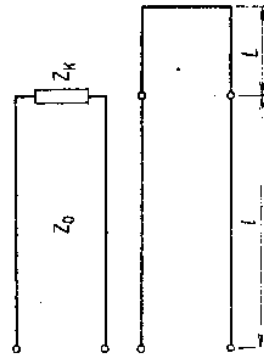
$$\frac{l_2}{\lambda} = 0,164; \quad l_2 = 0,082 \text{ m}$$

12.4. MĚŘENÍ IMPEDANCÍ

Určení neznámé impedance patří k nejčastějším úlohám v mikrovlňné laboratorní i provozní praxi. Pro tyto účely jsou dnes na trhu speciální měřicí přístroje, umožňující rychlá a širokopásmová měření. Klasické metody určování



Obr. 12.25.



Obr. 12.26.

impedancí pomocí stojatých vln se dnes již používají méně často, mají však stále svůj význam při vytváření správných představ o impedančních poměrech na vedení.

12.4.1. Určení impedance z průběhu stojatých vln na vedení

Tato metoda je obdobou metody uvedené v odst. 12.3.2, kde jsme použili k určení neznámé impedance kruhový impedanční diagram. Jestliže vedení s délkou l , vlnovou impedancí Z_0 a se zanedbatelnými ztrátami je zakončeno neznámou impedancí Z_k , kterou nahradíme vedením nakrátko se součinitelem přenosu

$g = b + ja$, s délkou L a s vlnovou impedancí Z_0 (analogicky jako v čl. 12.2, obr. 12.26), platí pro normovanou hodnotu vstupní impedance vztah (12.21)

$$z_p = \operatorname{tgh}(gL + \gamma l)$$

Při zanedbatelných ztrátách lze předpokládat $\beta = 0$, takže $\gamma = jx$, a tedy

$$z_p = \operatorname{tgh}(gL + jx l)$$

neboli

$$z_p = \frac{\operatorname{tgh} bL + j \operatorname{tgh}(aL + \alpha l)}{1 + j \operatorname{tgh} bL \operatorname{tgh}(aL + \alpha l)}$$

a po úpravě

$$z_p = \frac{\operatorname{tgh} bL [1 + \operatorname{tgh}^2(aL + \alpha l)] + j \operatorname{tgh}(aL + \alpha l) (1 - \operatorname{tgh}^2 bL)}{1 + \operatorname{tgh}^2 bL \operatorname{tgh}^2(aL + \alpha l)} \quad (12.54)$$

Extrémní hodnoty tohoto výrazu jsou čistě reálné a nastanou při

$$\operatorname{tgh}(aL + \alpha l_0) = 0 \quad (12.55)$$

a při

$$\operatorname{tgh}(aL + \alpha l_1) = \infty \quad (12.56)$$

Z podmínek (12.55) vyplývá

$$aL = -\alpha l_0 \quad (12.55a)$$

takže pro normovanou hodnotu vstupní impedance dostaneme po dosazení do (12.54)

$$z_p = \operatorname{tgh} bL \quad (12.57)$$

Protože ze vztahu (12.57) je zřejmé, že $z_p < 1$, je ve vzdálenosti l_0 od konce vedení minimum impedance a tedy též minimum napětí.

Z podmínky (12.56) vyplývá

$$aL + \alpha l_1 = \frac{\pi}{2} \quad (12.56a)$$

takže pro normovanou hodnotu vstupní impedance po dosazení do (12.54) dostaneme

$$z_p = \frac{1}{\operatorname{tgh} bL} \quad (12.58)$$

Je zřejmé, že $z_p > 1$, takže ve vzdálenosti l_1 je maximum impedance a tedy též maximum napětí. Ze vztahů (12.56a) a (12.55a) vyplývá

$$l_1 = l_0 + \frac{\lambda}{4}$$

V místě maximální impedance je maximální napětí a minimální proud, v místě minimální impedance je minimální napětí a maximální proud. Platí tedy

$$Z_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}}; \quad Z_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}}$$

$$\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \frac{I_{\max}}{I_{\min}}$$

Víme, že poměr

$$\frac{U_{\max}}{U_{\min}} = p$$

Protože mezi napětím a proudem je lineární závislost, je zřejmé možné vyjádřit činitel stojatých vln i pomocí proudů, takže platí též

$$p = \frac{I_{\max}}{I_{\min}}$$

a tedy

$$\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} = \frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} = p^2$$

Dosadíme-li za Z_{\max} a Z_{\min} výrazy (12.57) a (12.58), dostaneme

$$p^2 = \frac{1}{\operatorname{tgh}^2 bL}$$

takže

$$p = \frac{1}{\operatorname{tgh} bL}$$

Vzdálenost l ve výrazu (12.54) je libovolná vzdálenost měřená od konce vedení. Položíme-li $l = 0$, je $Z_p = Z_k$, takže podle (12.54)

$$Z_k = z_k Z_0 = \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha l_0 - j \operatorname{tgh} \alpha l_0 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{1 + \frac{1}{p^2} \operatorname{tgh}^2 \alpha l_0} Z_0$$

přítom jsme dosadili

$$\operatorname{tgh} bL = \frac{1}{p}; \quad aL = -\alpha l_0; \quad l = 0$$

Protože $Z_k = R_k + jX_k$, platí

$$R_k = Z_0 \frac{p(1 + \operatorname{tgh}^2 \alpha l_0)}{p^2 + \operatorname{tgh}^2 \alpha l_0} \quad (12.59)$$

$$X_k = -Z_0 \frac{\operatorname{tgh} \alpha l_0 (p^2 - 1)}{p^2 + \operatorname{tgh}^2 \alpha l_0} \quad (12.60)$$

Z rovnic (12.59) a (12.60) určíme reálnou a imaginární složku zakončovací impedance, známe-li činitel stojatých vln p a vzdálenost prvního minima stojatých vln od konce vedení l_0 .

12.4.2. Určení impedance pomocí můstkového T

Rozptylovou matici můstkového T můžeme napsat ve tvaru (9.136)

$$s = \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

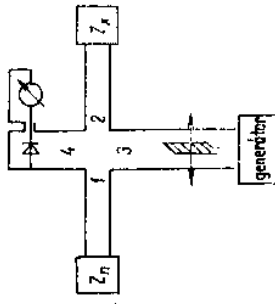
takže s použitím vztahu

$$\mathbf{b} = \mathbf{s}\mathbf{a}$$

dostaneme pro výstupní signály v jednotlivých ramenech

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= K(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) \\ \mathbf{b}_2 &= K(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4) \\ \mathbf{b}_3 &= K(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{b}_4 &= K(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \end{aligned}$$

kde $K = e^{j\phi}/\sqrt{2}$ (při vhodné volbě referenčních rovin je $\phi = 0$) a \mathbf{a}_1 až \mathbf{a}_4 jsou vstupní signály.



Obr. 12.27. Měření impedance porovnávací metodou

Předpokládejme, že podle obr. 12.27 je detektor v rameni 4 impedančně přizpůsoben a že ramena 1 a 2 jsou zakončena zátěžemi s činiteli odrazu ϱ_n, ϱ_x . Budeme-li napájet můstkové T do ramene 3 signálem s jednotkovou amplitudou, dostaneme (položíme $\mathbf{a}_1 = \varrho_n \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 = \varrho_x \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 = 1, \mathbf{a}_4 = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{2}} (\varrho_n \mathbf{b}_1 + \varrho_x \mathbf{b}_2) \\ \mathbf{b}_4 &= \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{2}} (\varrho_n \mathbf{b}_1 - \varrho_x \mathbf{b}_2) \end{aligned}$$

a po úpravě

$$\mathbf{b}_4 = \frac{e^{j2\phi}}{2} (\varrho_n - \varrho_x) \quad (12.61)$$

Protože při $\varrho_n = \varrho_x$ je signál v detektoru nulový, můžeme můstkové T použít k určení neznámé impedance s činitelem odrazu ϱ_x . Pořebnou hodnotu činitele odrazu ϱ_n je možné realizovat např. pomocí absorpčního zeslabovače a posuvného zkratu, neboť platí

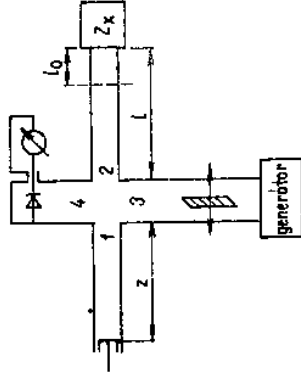
$$\varrho_n = |\varrho_n| e^{j\phi}$$

přičemž modul činitele odrazu souvisí s poměrným útlumem vztahem (12.41)

$$|\varrho| = e^{-2\beta l}$$

a argument činitele odrazu je závislý na poměru l/λ

$$\phi = 2\pi \frac{l}{\lambda}$$



Obr. 12.28. Můstkové měření impedance pomocí posuvného zkratu

Jestliže místo proměnné impedance připojíme k rameni 1 posuvný zkrat s činitelem odrazu $|\varrho_n| = 1$ (viz obr. 12.28), potom při nastavení zkratu do takové polohy z_{\max} , kdy indikátor v rameni 4 má maximální výchylku, platí podle (12.61)

$$P_{\max} = \frac{1}{4} (1 + |\varrho_x|)^2 P_0$$

Naopak, při takové poloze zkratu z_{\min} , kdy je výchylka indikátoru minimální, platí

$$P_{\min} = \frac{1}{4} (1 - |\varrho_x|)^2 P_0$$

Z toho vyplývá, že poměr maximálního a minimálního výkonu můžeme vyjádřit vztahem

$$\frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \left(\frac{1 + |\varrho_x|}{1 - |\varrho_x|} \right)^2 = P^2 \quad (12.62)$$

Vyjádříme-li tento poměr v decibelech, je

$$L = 10 \log \frac{P_{\max}}{P_{\min}} = 20 \log P \quad (\text{dB}) \quad (12.63)$$

Z toho je zřejmé, že činitel stojatých vln zátěže (neznámé impedance) můžeme určit z poměru výkonů P_{\max}/P_{\min} .

Budeme-li mít k dispozici kalibrovaný zeslabovač, pak zařadíme zeslabovačem takový útlum L až výkon P_{\max} bude stejně velký jako byl výkon P_{\min} . Činitel stojatých vln určíme pak z výrazu (12.63).

Položku minima stojatých vln (tj. minima impedance) v rameni 2 určíme z té polohy zkratovacího pístu, kdy je výkon v rameni 4 minimální. V tom případě musí být splněna podmínka

$$\frac{2\pi}{\lambda} z_{\min} = \frac{2\pi}{\lambda} (l - l_0) \pm 2n\pi$$

kde n je celé číslo, takže platí

$$l_0 = l - z_{\min} \pm n\lambda$$

Po určení p a l_0 můžeme zjistit impedanci Z_x např. pomocí kruhového impedančního diagramu, popř. ze vztahů uvedených v odst. 12.4.1.

12.5. URČENÍ PRVKŮ NÁHRADNÍHO OBVODU MIKROVLNĚHO ČTYŘPÓLU

Oblast nespojitosti mezi dvěma libovolně zvolenými referenčními rovinami T_1 a T_2 může být popsána pomocí napětí a proudů jednoduchými vztahy

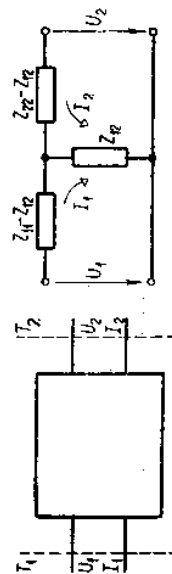
$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (12.64)$$

kde U_1, I_1 jsou napětí a proud v rovině T_1 ,

U_2, I_2 napětí a proud v rovině T_2 ,

Z koeficienty s rozměrem impedance.

Těmto rovnicím odpovídá náhradní schéma na obr. 12.29.



Obr. 12.29. Náhradní schéma odpovídající rovnicím (12.64)

Je zřejmé, že k určení vlastností čtyřpólu musíme určit tři nezávislé parametry. K určení těchto parametrů postačí tři na sobě nezávislá měření vstupní impedance. Je výhodné provést tato měření při výstupu (rovina T_2) zakončeném naprázdno, nakrátko a bezodrazově (vlnovou impedancí Z_2).

Pro výpočet zavedeme normované normy impedanci

$$z_{\text{vst}} = \frac{Z_{\text{vst}}}{Z_1}; \quad z_{\text{výst}} = \frac{Z_{\text{výst}}}{Z_2}$$

kde $Z_{\text{vst}}, Z_{\text{výst}}$ jsou vstupní a výstupní impedance, Z_1, Z_2 jsou vlnové impedance vedení na vstupu a na výstupu.

Pro vlastní čtyřpól dále platí

$$z_{11} = \frac{Z_{11}}{Z_1}; \quad z_{22} = \frac{Z_{22}}{Z_2}; \quad z_{12} = \frac{Z_{12}^2}{Z_1 Z_2}$$

a) Bude-li čtyřpól zakončen v rovině T_2 naprázdno, pak je zřejmé $I_2 = 0$, takže z rovnic (12.64) dostaneme

$$U_1 = Z_{11}I_1; \quad U_2 = Z_{12}I_1$$

a tedy

$$z_{\text{vst}} = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11}$$

Vzhledem k tomu, že jsme vstupní impedanci Z_{vst} změřili při výstupu naprázdno, označíme ji jako impedanci Z_n . Platí tedy

$$Z_n = Z_{11}$$

neboli

$$z_{11} = z_n \quad (12.65)$$

b) Uzavřeme-li čtyřpól v rovině T_2 zkratem, bude $U_2 = 0$, takže z rovnic (12.64) dostaneme

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \quad 0 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2$$

Z těchto dvou rovnic dostaneme po úpravě pro vstupní impedanci

$$z_{\text{vst}} = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

Označíme-li tuto vstupní impedanci Z_k (při výstupu nakrátko), platí

$$Z_{22} = \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} - Z_k}$$

neboli

$$z_{22} = \frac{z_{12}^2}{z_{11} - z_k} \quad (12.66)$$

c) Zakončíme-li čtyřpól v rovině T_2 bezodrazovou impedancí, je

$$z_{\text{výst}} = Z_2 = -\frac{U_2}{I_2}$$

takže z rovnic (12.64) dostaneme po úpravě

$$z_{\text{vst}} = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_2 + Z_{22}}$$

$$Z_{12}^2 = (Z_{11} - Z_{\text{vst}})(Z_2 + Z_{22})$$

Protože jsme vstupní impedanci určili při bezodrazové zátěži, označme ji Z_0 , takže

$$Z_{12}^2 = (Z_{11} - Z_0)(Z_2 + Z_{22})$$

a pro normované hodnoty platí

$$z_{12}^2 = (z_{11} - z_0)(1 + z_{22}) \quad (12.67)$$

S použitím vztahů (12.65) a (12.66) dostaneme po úpravě

$$z_{12}^2 = \frac{(z_n - z_0)(z_n - z_k)}{z_0 - z_k} \quad (12.68)$$

a dále

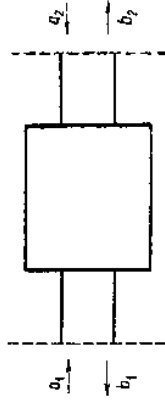
$$z_{22} = \frac{z_n - z_0}{z_0 - z_k} \quad (12.69)$$

Je-li čtyřpól včetně referenčních rovin symetrický, platí

$$z_{11} = z_{22} = z_n$$

takže s použitím rovnice (12.66) můžeme vyjádřit normovanou hodnotu z_{12} pouze z měření naprázdno a nakrátko

$$z_{12}^2 = z_n(z_n - z_k) \quad (12.70)$$



Obr. 12.30.

Téže metody můžeme použít i k určení rozptylových koeficientů čtyřpólu. Pro čtyřpól zobrazený na obr. 12.30 platí podle (9.45) rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= s_{11}\mathbf{a}_1 + s_{12}\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= s_{21}\mathbf{a}_1 + s_{22}\mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (12.71)$$

Podle označení na obr. 12.30 můžeme vyjádřit činitele odrazu na vstupní a výstupní straně vztahy

$$\rho_{\text{vst}} = \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_1}; \quad \rho_{\text{vyst}} = \frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_2} \quad (12.72)$$

takže s použitím rovnic (12.71) můžeme po úpravě vyjádřit činitel odrazu na vstupní straně výrazem

$$\rho_{\text{vst}} = s_{11} + s_{12}^2 \frac{1}{\rho_{\text{vyst}} - s_{22}} \quad (12.73)$$

$$\rho_{\text{vst}} = s_{11} \quad (12.74)$$

Analogicky jako při určování impedancí označme tuto hodnotu činitele odrazu indexem 0, takže

$$s_{11} = \rho_0 \quad (12.75)$$

Jestliže zakončíme měření čtyřpól zkratem, $\rho_{\text{vst}} = -1$, dostaneme úpravou vztahu (12.73)

$$(s_{22} + 1)(s_{11} - \rho_k) = s_{12}^2 \quad (12.76)$$

kde ρ_k je vstupní činitel odrazu při zkratovaném výstupu ($\rho_{\text{vst}} = \rho_k$, $\rho_{\text{vyst}} = -1$).

Zakončíme-li čtyřpól na výstupní straně naprázdno (tj. nekonečně velkou impedancí), je $\rho_{\text{vyst}} = +1$, takže úpravou vztahu (12.73) dostaneme

$$(s_{22} - 1)(s_{11} - \rho_n) = s_{12}^2 \quad (12.77)$$

kde ρ_n je vstupní činitel odrazu při zakončení výstupní strany nekonečně velkou impedancí (při zakončení naprázdno, $\rho_{\text{vst}} = \rho_n$, $\rho_{\text{vyst}} = +1$).

Z rovnic (12.75), (12.76) a (12.77) lze určit rozptylový koeficient s_{22}

$$s_{22} = \frac{2\rho_0 - \rho_n - \rho_k}{\rho_k - \rho_n} \quad (12.78)$$

Rozptylový koeficient s_{12} můžeme pak určit z rovnice (12.76) a (12.77)

$$s_{12}^2 = \frac{2(\rho_0 - \rho_n)(\rho_0 - \rho_k)}{\rho_k - \rho_n} \quad (12.79)$$

Jestliže je čtyřpól symetrický, potom platí

$$s_{11} = s_{22} = \rho_0$$

takže

$$s_{22} = \frac{\rho_n + \rho_k}{2 + \rho_n - \rho_k} \quad (12.80)$$

$$s_{12}^2 = (\rho_0 + 1)(\rho_0 - \rho_k) \quad (12.81)$$

$$s_{12}^2 = (\rho_0 - 1)(\rho_0 - \rho_n) \quad (12.82)$$

Určení prvků náhradních obvodů podle této metody je jednoduché, nedostatkem je však okolnost, že každá nepřesnost v určení jednoho parametru způsobí při výpočtu velké chyby, jak je vidět ze vzorců (12.75) až (12.82). Mezi koeficienty Z obvodu a rozptylovými koeficienty s platí vztahy

$$\frac{Z_{11}}{Z_1} = \frac{1 + s_{11} - s_{22} - \{s\}}{1 - s_{11} - s_{22} + \{s\}} \quad (12.83)$$

$$\frac{Z_{22}}{Z_2} = \frac{1 - s_{11} + s_{22} - \{s\}}{1 - s_{11} - s_{22} + \{s\}} \quad (12.84)$$

$$\frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_1 Z_2}} = \frac{2s_{12}}{1 - s_{11} - s_{22} + \{s\}} \quad (12.85)$$

$$s_{11} = \frac{\{Z\} - Z_{22}Z_1 + Z_{11}Z_2 - Z_1Z_2}{\{Z\} + Z_{22}Z_1 + Z_{11}Z_2 + Z_1Z_2} \quad (12.86)$$

$$s_{22} = \frac{\{Z\} + Z_{22}Z_1 - Z_{11}Z_2 - Z_1Z_2}{\{Z\} + Z_{22}Z_1 + Z_{11}Z_2 + Z_1Z_2} \quad (12.87)$$

$$s_{12} = \frac{2Z_{12}\sqrt{Z_1Z_2}}{\{Z\} + Z_{22}Z_1 + Z_{11}Z_2 + Z_1Z_2} \quad (12.88)$$

kde

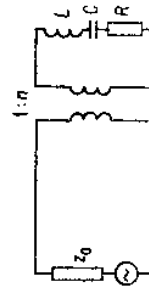
$$\{s\} = s_{11}s_{22} - s_{12}^2$$

$$\{Z\} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2$$

Pomocí rovnic (12.83) až (12.88) je tedy možné převést rozptylové koeficienty čtyřpólu na koeficienty náhradního obvodu T nebo naopak.

12.6. MĚŘENÍ ČINITELE JAKOSTI REZONANČNÍCH OBVDŮ

Je-li frekvenční rozsah v okolí rezonance dostatečně malý (tj. takový, aby v rezonátoru nevznikly jiné, nežádoucí vidy kmitání), mají mikrovlnné rezonanční obvody při rezonanci a jejím blízkém okolí stejné vlastnosti jako obvody se soustředěnými parametry L , R , C a k jejich popisu můžeme použít stejná náhradní schémata. Rezonátor bývá navázán na vedení elektrickým nebo magnetickým polem a při určování jeho vlastností bude záležet na poloze referenční roviny, v níž tyto vlastnosti určujeme. Zvolíme-li např. při měření vstupní impedance rezonátoru polohu referenční roviny v takovém místě, kde je při značném rozložení rezonátoru uzel napětí, chová se rezonátor (bez ohledu na způsob vazby) jako paralelní rezonanční obvod, kdežto ve vzdálenosti $\lambda/4$ od této roviny má charakter sériového rezonančního obvodu. Bez ohledu na způsob vazby můžeme tedy použít v náhradním schématu sériový nebo paralelní rezonanční obvod.



Obr. 12.31. Náhrada vazebního prvku ideálním transformátorem

Nahradíme rezonátor sériovým rezonančním obvodem, připojeným pomocí ideálního transformátoru ke zdroji s vnitřní impedancí Z_0 (obr. 12.31). Ideální transformátor s převodem $1:n$ představuje v náhradním schématu vazbu mezi rezonátorem a vedením s vlnovou impedancí Z_0 (vazba může být při tom realizována elektrickým nebo magnetickým polem).

Vlastnosti rezonančního obvodu můžeme charakterizovat třemi hodnotami činitele jakosti

a) *činitelem jakosti nezatiženého rezonančního obvodu* Q_0 , počítáme-li pouze ztráty ve vlastním rezonátoru

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (12.89)$$

b) *činitelem jakosti zatiženého rezonančního obvodu* Q_z , když se ke ztrátám v rezonančním obvodu přičítají ztráty způsobené napájecím vedením (podle náhradního schématu převedeme vlnovou impedanci Z_0 přes vazební prvek – ideální transformátor – do rezonančního obvodu)

$$Q_z = \frac{\omega_0 L}{R + n^2 Z_0} \quad (12.90)$$

c) *vnějším činitelem jakosti* Q_v , když místo ztrát ve vlastním rezonátoru počítáme pouze ztráty způsobené napájecím vedením

$$Q_v = \frac{\omega_0 L}{n^2 Z_0} \quad (12.91)$$

Zavedeme-li činitel vazby x vztahem

$$x = \frac{n^2 Z_0}{R} \quad (12.92)$$

je možné napsat vztahy (12.90) a (12.91) s použitím (12.89) ve tvaru

$$Q_z = \frac{Q_0}{1 + x} \quad (12.93)$$

$$Q_v = \frac{Q_0}{x} \quad (12.94)$$

12.6.1. Určení činitele jakosti rezonančního obvodu impedanční metodou

Předpokládejme, že budeme určovat vlastnosti rezonančního obvodu v takové referenční rovině (1), kde jeho vlastnosti odpovídají sériovému rezonančnímu obvodu. Impedanci sériového rezonančního obvodu můžeme vyjádřit výrazem

$$Z_T = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

takže s použitím vztahu

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

lze psát

$$Z_T = R + j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$Z_r = R \left(1 + j \frac{\omega_0 L}{R} 2\delta \right)$$

kde δ je tzv. *poměrné rozložení*, pro které platí

$$2\delta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$



Obr. 12.32.

Impedanci rezonančního obvodu převedeme na vedení vztahem (v náhradním schématu prostřednictvím ideálního transformátoru, viz obr. 12.32)

$$Z_1 = \frac{Z_r}{n^2}$$

neboli

$$Z_1 = \frac{R}{n^2} (1 + j 2Q_0\delta)$$

takže pro normovanou hodnotu vstupní impedance platí

$$z_1 = \frac{R}{n^2 Z_0} (1 + j 2Q_0\delta)$$

a s použitím (12.92)

$$z_1 = \frac{1}{x} + j \frac{2Q_0\delta}{x} \quad (12.95)$$

V rovině komplexních normovaných impedancí (z) budou ležet koncové body těchto impedancí na přímce konstantní reálné hodnoty, kterou je určena velikost činitele vazby rezonančního obvodu ($\text{Re}[z] = 1/x$). Na tuto přímku je možné nakreslit i lineární měřítko poměrného rozložení δ (obr. 12.33).

Určíme-li při měření takové hodnoty poměrného rozložení $\delta_{1,2}$, při nichž platí

$$2Q_0\delta_1 = 1$$

$$2Q_0\delta_2 = -1$$

platí pro činitel jakosti Q_0 vztah

$$Q_0 = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{f_0}{f_1 - f_2} \quad (12.96)$$

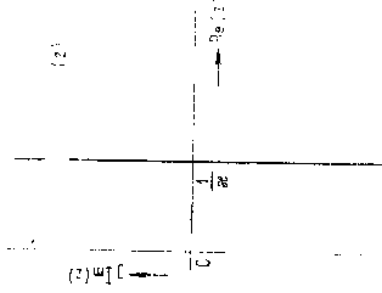
přičemž pro normovanou hodnotu vstupní impedance platí

$$z_1 = \frac{1}{x} \pm j \frac{1}{x} \quad (12.97)$$

$$\text{Re}[z_1] = |\text{Im}[z_1]| \quad (12.97a)$$

Dosadíme-li do vztahu pro normovanou hodnotu vstupní impedance vztah (12.93), dostaneme

$$z_1 = \frac{1}{x} + j \frac{2Q_0\delta}{x} (1 + x) \quad (12.98)$$



Obr. 12.33. Geometrické místo normovaných vstupních impedancí rezonátoru

Určíme-li při měření takové hodnoty poměrného rozložení $\delta_{3,4}$, při nichž platí

$$2Q_0\delta_3 = 1$$

$$2Q_0\delta_4 = -1$$

platí pro činitel jakosti Q_z vztah

$$Q_z = \frac{1}{\delta_3 - \delta_4} = \frac{f_0}{f_3 - f_4} \quad (12.99)$$

přičemž pro normovanou hodnotu vstupní impedance platí

$$z_1 = \frac{1}{x} \pm j \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \quad (12.100)$$

Je zřejmé, že při frekvencích f_3 a f_4 , potřebných k určení činitele jakosti Q_z , platí

$$|\text{Im}[z_1]| = \text{Re}[z_1] + 1 \quad (12.100a)$$

Jestliže dosadíme do vztahu pro normovanou hodnotu vstupní impedance vztah (12.94), dostaneme

$$z_1 = \frac{1}{x} + j 2Q_0\delta \quad (12.101)$$

Určíme-li takové hodnoty poměrného rozložení $\delta_{5,6}$, při nichž platí

$$2Q_0\delta_5 = 1$$

$$2Q_0\delta_6 = -1$$

plati pro činitele jakosti Q_1 , vzítan

$$Q_1 = \frac{1}{\delta_5 - \delta_6} = \frac{f_0}{f_5 - f_6} \quad (12.102)$$

přičemž pro normovanou hodnotu vstupní impedance platí

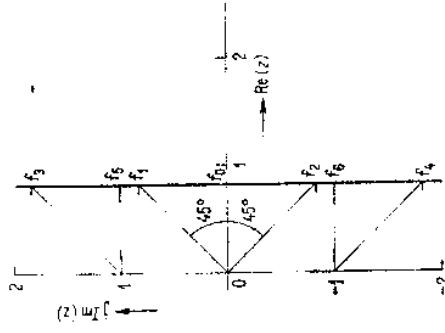
$$z_1 = \frac{1}{x} \pm j \quad (12.103)$$

Z toho je zřejmé, že při frekvencích f_5 a f_6 , potřebných k určení činitele jakosti Q_1 , platí

$$|\operatorname{Im}[z_1]| = 1 \quad (12.103a)$$

Určení jednotlivých činitelů jakosti je s použitím výše uvedených vztahů velmi jednoduché a můžeme je shrnout do tohoto postupu:

1. Při dvou různých, libovolných frekvencích (v okolí rezonance) určíme normované hodnoty vstupních impedancí, zakreslíme je do komplexní roviny (z) a proložíme jimi přímku konstantní reálné složky, na kterou interpolujeme frekvenci měřítka.



Obr. 12.34. Určení frekvencí pro výpočet činitele jakosti

2. Frekvence f_1 a f_2 , potřebná k určení činitele jakosti Q_0 , stanovíme podle (12.96) konstrukcí uvedenou v obr. 12.34.

3. Frekvence f_3 a f_4 , potřebné k určení činitele jakosti Q_2 , stanovíme podle (12.99) konstrukcí uvedenou v obr. 12.34.

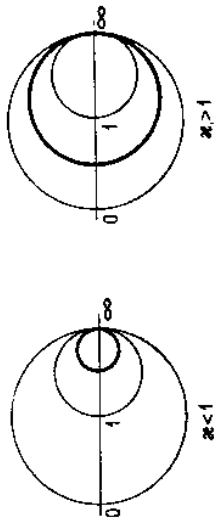
4. Frekvence f_5 a f_6 , potřebné k určení činitele jakosti Q_1 , stanovíme podle (12.102) konstrukcí uvedenou v obr. 12.34.

Protože z polohy přímky konstantní reálné složky normované impedance můžeme určit velikost činitele vazby, je též možné stanovit činitele jakosti Q_2 a Q_1 pomocí Q_0 a činitele vazby x .

Podle velikosti činitele vazby rozeznáváme:

$$\begin{aligned} \text{volnou vazbu} & \text{ při } x < 1 & (Q_0 < Q_1) \\ \text{těsnou vazbu} & \text{ při } x > 1 & (Q_0 > Q_1) \\ \text{kritickou vazbu} & \text{ při } x = 1 & (Q_0 = Q_1) \end{aligned}$$

Použijeme-li k zobrazení normovaných hodnot vstupních impedancí rezo-



Obr. 12.35. Geometrická místa normovaných hodnot vstupních impedancí rezonátoru

Protože na reálné ose kruhového diagramu je měřítko normovaných hodnot reálných složek impedancí shodné s měřítkem činitele stojatých vln, je zřejmé, že

$$\text{při } x < 1 \quad \text{je } p_0 = \frac{1}{x}$$

$$\text{při } x > 1 \quad \text{je } p_0 = x$$

kde p_0 je činitel stojatých vln při rezonanci.

Lineární frekvenční měřítko leží na přímce procházející středem kruhového diagramu a je kolmé k ose reálných hodnot impedancí. Že tomu tak je, můžeme se přesvědčit z této úvahy: Činitel odrazu rezonančního obvodu vyjádříme podle (2.126)

$$\rho = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{z - 1}{z + 1}$$

a s použitím vztahu (12.95)

$$\rho = \frac{1 - x + j2Q_0\delta}{1 + x + j2Q_0\delta} \quad (12.104)$$

neboli

$$\rho = \frac{1 - x^2 + (2Q_0\delta)^2}{(1 + x)^2 + (2Q_0\delta)^2} + j \frac{4Q_0\delta x}{(1 + x)^2 + (2Q_0\delta)^2} \quad (12.105)$$

V komplexní rovině činitele odrazu (obr. 12.36) platí

$$a = R \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \phi; \quad (R = 1)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{Im}[\rho]}{1 - \operatorname{Re}[\rho]}$$

a podle (12.105)

$$1 - \operatorname{Re}[q] = \frac{2x(1+x)}{(1+x)^2 + (2Q_0\delta)^2}$$

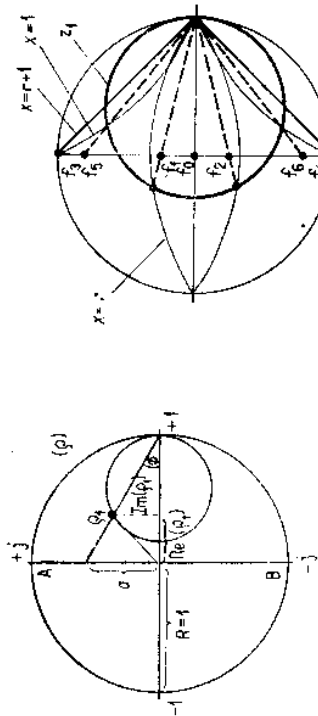
tedy

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2Q_0\delta}{1+x}$$

takže

$$a = \frac{2Q_0\delta}{1+x}$$

Z toho je zřejmé, že frekvenční měřítko na ose \overline{AB} v kruhovém diagramu je lineární (obr. 12.37).



Obr. 12.36.

Obr. 12.37. Určení frekvenci pro výpočet činitele jakosti

Jednotlivé druhy činitelů jakosti určíme v kruhovém diagramu též ze vztahů (12.96), (12.99) a (12.202). Jestliže normovanou vstupní impedanci vyjádříme výrazem

$$z = r + jx$$

musí být splněny vztahy

$$\begin{aligned} |x| = r & \text{ pro určení } Q_0 \\ |x| = r + 1 & \text{ pro určení } Q_z \\ |x| = 1 & \text{ pro určení } Q_v \end{aligned}$$

Vztah $|x| = r$ se zobrazí v kruhovém diagramu jako kružnice konstantní fáze 45° .

Vztah $|x| = r + 1$ se zobrazí jako přímka spojující body ∞ a $\pm j$.

Vztah $|x| = 1$ se zobrazí jako kružnice konstantní reaktance.

Příklad zobrazení normovaných hodnot vstupních impedancí s určením frekvencí, potřebných pro výpočet jednotlivých činitelů jakosti, je uveden na obr. 12.37.

Kdybychom místo referenční roviny (1), v níž se rezonátor chová jako sériový

rezonanční obvod, použili rovinnu (2), vzdálenou o $\lambda/4$, zobrazily by se normované vstupní impedance vztahem

$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{x}{1 + j2Q_0\delta}$$

což je rovnice kružnice s průměrem rovným činiteli vazby x . K zobrazení v rovině (2) je výhodnější použít admitanční diagram, neboť platí

$$y_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x} + j\frac{2Q_0\delta}{x}$$

při němž je měřítko poměrných rozložení (v pravouhlém diagramu) lineární.

12.6.2. Určení činitele jakosti z výkonu odraženého od rezonančního obvodu

Tato metoda je výhodná při použití rozmitaného generátoru, když průběh odraženého signálu zobrazíme na osciloskopu. Protože měříme rezonanční obvod, který je určitým způsobem navázán na napájecí vedení, je odražený signál závislý na činiteli zatíženého rezonátoru Q_z .

Činitel odrazu rezonančního obvodu s činitelem jakosti Q_z můžeme vyjádřit podle (2.126) a pomocí (12.98) vztahem

$$\varrho = \frac{1-x+j2Q_z(1+x)\delta}{1+x+j2Q_z(1+x)\delta}$$

takže platí

$$|\varrho|^2 = \frac{(1-x)^2 + (2Q_z\delta)^2(1+x)^2}{(1+x)^2 + (2Q_z\delta)^2(1+x)^2}$$

Při rezonanci, tj. při $\delta = 0$, dostaneme

$$|\varrho|^2 = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{P_1}{P_0} \quad (12.106)$$

kde P_0 je výkon, dodávaný do rezonančního obvodu,

P_1 výkon, odražený od rezonančního obvodu při rezonanci.

Při rozložení, kdy $2Q_z\delta_{1,11} = 1$ dostaneme

$$|\varrho|^2 = \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1+x)^2 + (1+x)^2} = \frac{P_2}{P_0} \quad (12.107)$$

kde P_2 je výkon odražený od rezonančního obvodu při rozložení $\delta_{1,11}$.

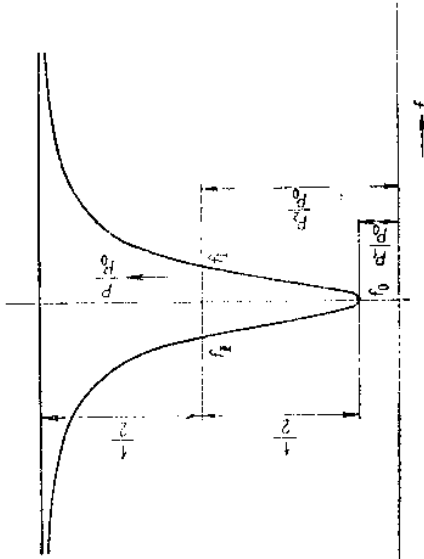
Dosadíme-li vztah (12.106) do (12.107), dostaneme po úpravě vztah mezi úrovní odraženého výkonu při frekvencích f_1 a f_{11} a úrovní odraženého výkonu při rezonanci

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1}{P_0} + 1 \right) \quad (12.108)$$

$$Q_z = \frac{f_0}{f_1 - f_H}$$

Činitel vazby můžeme určit ze vztahu (12.106), neboť platí

$$\frac{1-x}{1+x} = \pm \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}$$



Obr. 12.38. Určení frekvencí pro výpočet činitele jakosti

Takže po úpravě dostaneme dvě možná řešení

$$x = \frac{1 - \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}}{1 + \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}} \quad \text{pro } x < 1$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}}{1 - \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}} \quad \text{pro } x > 1$$

Není-li možné odhadnout, zda je vazba volná nebo těsná, je nutné ji určit jinou metodou (např. změřením vstupní impedance).

12.7. MĚŘENÍ VÝKONU

Měření výkonu patří mezi základní mikrovlnná měření. U většiny metod používaných k měření výkonu se převádí výkon na teplo, které se pak měří buď přímo některou z kalorimetrických metod, nebo se využívá ke změně elektrického odporu vhodného rezistoru (bolometrické metody).

vysokefrekvencni vykony dělíme obvykle podle velikosti na *výkony malé* (menší než 10 mW), *střední* (10 mW až 1 W) a *velké* (větší než 1 W). Kalorimetrické metody jsou typické pro měření velkých výkonů, pro měření malých výkonů je naopak typické použití bolometrických metod. Oblast středních výkonů bývá překrývána jak kalorimetrickými, tak bolometrickými metodami. Předfází-li se před bolometrický prvek vhodný útum známé velikosti, je možné měřit bolometricky i výkony velké. Při všech těchto měřeních určíme tzv. střední hodnotu výkonu. Při měření *impulsového výkonu* je nutné impulsový výkon vypočítat z naměřené hodnoty středního výkonu, z opakovací frekvence a z délky impulsu podle vztahu

$$P_1 = \frac{P}{\tau f_1}$$

kde P_1 je impulsový výkon (W),

P střední hodnota výkonu (W),

τ délka impulsu (s),

f_1 opakovací frekvence impulsů (Hz).

12.7.1. Bolometrické metody měření výkonu

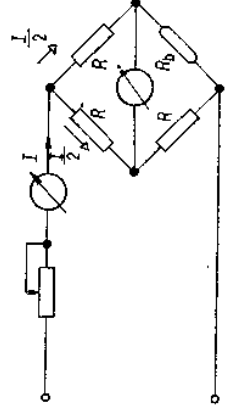
Tyto metody používají odporové prvky, tzv. *bolometry*, jejichž odpor je značně závislý na teplotě. Nejčastěji používanými bolometry jsou dnes *termistory*. Termistor, používaný k měření mikrovlnného výkonu, je obvykle tvořen malou polovodičovou perličkou z kyslíčnicku mědi, niklu, manganu nebo kobaltu, která je opatřena tenkými přívodními drátky.

Při měření výkonu se bolometrický prvek umístí do vedení tak, aby se v něm výkon plně absorboval. Změnu odporu bolometrického prvku určíme pak v můstkovém zapojení. Napájení můstku může být stejnosměrné i střídavé. Principiálně je možné rozdělit bolometrické metody na metody měření s vyváženým můstkem a na metody měření s nevyváženým můstkem.

Měření s vyváženým můstkem

Můstek se nejprve vyváží při vypnutém vysokofrekvenčním zdroji. Při rovnováze můstku je výkon ztracený v bolometrickém prvku (obr. 12.39)

$$P = R \left(\frac{I_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} R I_1^2 \quad (12.110)$$



Obr. 12.39. Můstkové zapojení bolometrického členu

Zavedením vf výkonu se rovnováha můstku poruší, neboť bolometr je přiříván též vf výkonem. Po opětovném vyrovnání můstku (při proudu I_2) bude celkový výkon ztracený v bolometrickém prvku

$$P = P_{\text{vf}} + \frac{1}{4} R I_2^2 \quad (12.111)$$

kde P_{vf} je výkon, dodávaný vysokofrekvenčním zdrojem. Z porovnání rovnic (12.110) a (12.111) vyplývá, že vf výkon je

$$P_{\text{vf}} = \frac{1}{4} R (I_1^2 - I_2^2) \quad (12.112)$$

Měření s nevyváženým můstkem

Při použití této metody vyrovnáme můstek při vypnutí vf zdroji. Po zavedení vf výkonu se rovnováha můstku poruší a protože výchylka indikátoru vyvážení je úměrná převládání vf výkonu, je možné kalibrovat indikátor v jednotkách výkonu.

Citlivost můstku lze zvýšit tím, že se můstek napájí střídavým proudem a indikátor vyvážení je selektivní voltmetr s velkou citlivostí, laděný na frekvenci zdroje střídavého proudu.

Při zvyšování citlivosti můstku se začíná nepříznivě projevovat vliv kolísání okolní teploty. Mění-li se teplota okolí, mění se i odpor bolometru a měření je nepřesné. Aby se vliv změny teploty okolí omezil, zavádí se teplotní kompenzace můstku. *Můstek s teplotní kompenzací* má obvykle dva termistory a jeho zapojení je již podstatně složitější než u můstku bez teplotní kompenzace. Můstek bývá proveden jako dvojitý a je napájen střídavým i stejnosměrným proudem. Kompenzační termistor je umístěn co nejblíže měřícího termistoru. Velikost střídavého napětí, dodávaného oscilátorem, se automaticky reguluje zpětnovazební smyčkou napětím z měřícího můstku.

12.7.2. Kalorimetrické metody měření výkonu

Tyto metody jsou typické pro měření velkých výkonů, je ovšem možné je používat i při měření středních a výjimečně i při měření malých výkonů. Jsou založeny na úplné přeměně energie dopadající elektromagnetické vlny v teplo. Pomocí kalorimetrických metod se určí vf výkon přímo ze základních fyzikálních veličin – hmotnosti, času a teploty. Teplo, vzniklé absorpcí vysokofrekvenčního výkonu, může být určeno buď z přírůstku teploty absorbujícího prostředí, nebo z přestupu tepla z absorbujícího prostředí do okolí.

Kalorimetrické metody dělíme dále na metody statické a průtokové podle toho, zda je absorbující prostředí v klidu nebo zda cirkuluje.

Statické kalorimetrické metody

Je-li vf výkon přiváděn k tepelně izolovanému absorpčnímu prostředí, které nemá tepelné ztráty do okolí, pak je zvýšení teploty absorpčního prostředí přímo úměrné vf výkonu a době, po kterou působí vf výkon. Výkon můžeme určit jako součin rychlosti přírůstku teploty kalorimetrického prostředí a jeho tepelné kapacity. Můžeme tedy psát

$$P = C \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (12.113)$$

kde C je tepelná kapacita absorbujícího prostředí ($J \cdot K^{-1}$),

T teplota (K),

P výkon (W).

Předpokládáme-li, že v okamžiku $t = t_0$ je teplota absorbujícího prostředí T_0 , potom na základě vztahu (12.113) platí

$$P = C \frac{T - T_0}{t - t_0} \quad (12.114)$$

kde $T - T_0$ je rozdíl teplot absorbujícího prostředí na konci a na počátku měření, $t - t_0$ doba trvání měření.

Vzorec pro určení vf výkonu (12.114) můžeme psát též ve tvaru

$$P = mc_p \frac{T - T_0}{t - t_0} \quad (12.115)$$

kde m je hmotnost prostředí (kg),

c_p měrná tepelná kapacita prostředí ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$).

Průtokové metody

V těchto kalorimetrických měřících výkonu protéká absorbující prostředí konstantní rychlostí prostorem, v němž je zahříváno vf elektromagnetickou energií. Důsledkem toho je, že teplota protékajícího absorpčního prostředí je na výstupu z kalorimetru vyšší než na jeho vstupu. Střední výkon můžeme pak určit z rozdílu těchto teplot podle vztahu

$$P = v \rho c_p \Delta T \quad (12.116)$$

kde P je výkon (W),

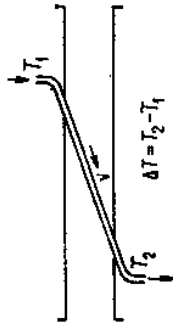
v rychlost průtoku absorbujícího prostředí ($m \cdot s^{-1}$),

ρ hustota absorbujícího prostředí ($kg \cdot m^{-3}$),

c_p měrná tepelná kapacita absorbujícího prostředí ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$),

ΔT rozdíl teplot na výstupu a vstupu (K).

U vlnovodů lze použít jako absorpci prostoru používa nejčastěji vlnu, která protéká vlnovodem v šikmo umístěné trubici (viz obr. 12.40).



Obr. 12.40. Schematické zobrazení průtokového měřiče výkonu

Literatura ke kapitole 12

- [1] Barlow, H. M. — Cullen, A. L.: Micro-wave measurements. London, Constable 1950.
- [2] Tischer, J. F.: Mikrowellen-Messtechnik. Springer-Verlag 1958.
- [3] Ginzton, E. L.: Microwave Measurements. New York, Mc Graw — Hill 1957.
- [4] Vrba, J.: Měření na centimetrových vlnách I. Praha, SNTL 1958.
- [5] Vrba, J.: Měření na centimetrových vlnách II. Praha, Nakladatelství dopravy a spojů 1978.
- [6] Sucher, M. — Fox, J.: Handbook of Microwave Measurements. Brooklyn, Polytechnic Press 1963.
- [7] Týstl, V.: Obvody a technika velmi vysokých kmitočtů II. Skriptum. Praha, Ediční středisko ČVUT 1983.

Matematicka priiona

A. VEKTOROVÝ POČET

1. VEKTOROVÁ ALGEBRA

V pravouhlé soustavě souřadnic x, y, z je vektor A

$$A = A_x x + A_y y + A_z z \quad (\text{A.1})$$

kde x, y, z jsou jednotkové vektory ve směru souřadných os.

Složky vektoru v pravouhlé soustavě jsou jeho průměty do os

$$A = A_x + A_y + A_z \quad (\text{A.2})$$

Velikost vektoru

$$|A| = A; \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{A.3})$$

Polohový vektor (radiusvektor) bodu (x, y, z) je

$$r = xx + yy + zz; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad r_0 = \frac{r}{r} \quad (\text{A.4})$$

kde r_0 je jednotkový vektor ve směru r .

Skalární součin dvou vektorů

$$A \cdot B = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{A.5})$$

kde α je úhel mezi nimi. Jiné značení skalárního součinu

$$A \cdot B \equiv (AB) \equiv (A \cdot B)$$

Pro skalární součin platí

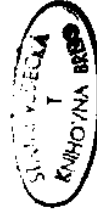
$$A \cdot B = B \cdot A; \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{A.6})$$

$$kA = kA_x x + kA_y y + kA_z z \quad (\text{A.7})$$

$$k(A \cdot B) = kA \cdot B = A \cdot kB \quad (\text{A.8})$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \quad (\text{věta kosinová}) \quad (\text{A.9})$$

$$A \cdot A = A^2 \quad (\text{A.10})$$



$$x^2 = 1; \quad y^2 = 1; \quad z^2 = 1; \quad (A.11)$$

$$x \cdot y = 0; \quad y \cdot x = 0; \quad z \cdot x = 0; \quad y \cdot z = 0 \quad \text{atd.} \quad (A.12)$$

Složky vektoru vypočítáme pomocí součinů

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}; \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}; \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \quad (A.13)$$

Vektorový součin dvou vektorů

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}; \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \alpha \quad (A.14)$$

Vektorový součin je velikostí roven obsahu rovnoběžníku tvořeného oběma vektory. Výsledný vektor je kolmý k rovině rovnoběžníku a tvoří pravotočivý trojúhelník ABC . Jiné označení vektorového součinu $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [\mathbf{AB}]$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{z} \quad (A.15)$$

Vyjádření vektorového součinu pomocí determinantu

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (A.15a)$$

Pro vektorové součiny platí

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}; \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (A.16)$$

$$k(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = k\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times k\mathbf{B} \quad (A.17)$$

Vektorové součiny jednotkových vektorů

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{x} &= 0; & \mathbf{y} \times \mathbf{y} &= 0; & \mathbf{z} \times \mathbf{z} &= 0 \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathbf{z}; & \mathbf{y} \times \mathbf{z} &= \mathbf{x}; & \mathbf{z} \times \mathbf{x} &= -\mathbf{y} \\ \mathbf{y} \times \mathbf{x} &= -\mathbf{z}; & \mathbf{z} \times \mathbf{y} &= -\mathbf{x}; & \mathbf{x} \times \mathbf{z} &= -\mathbf{y} \end{aligned} \quad (A.18)$$

Složené součiny vektorů

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (A.19)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (A.20)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (A.21)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \quad (A.22)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}] \cdot \mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}] \cdot \mathbf{D} \quad (A.22a)$$

Derivace vektoru podle skalární proměnné t

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = A'_x \mathbf{x} + A'_y \mathbf{y} + A'_z \mathbf{z}; \quad A'_x = \frac{dA_x}{dt};$$

$$A'_y = \frac{dA_y}{dt}; \quad A'_z = \frac{dA_z}{dt} \quad (A.23)$$

Diferenciál vektoru

$$d\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}'(t) dt \quad (A.24)$$

Je-li $|\mathbf{A}| = \text{konst}$, je diferenciál vektoru $d\mathbf{A} \perp \mathbf{A}$.

Diferenciály součinnů vektorů

$$d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{B} \quad (A.25)$$

$$d(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = d\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times d\mathbf{B} \quad (A.26)$$

Derivace polohového vektoru $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{x} + y(t)\mathbf{y} + z(t)\mathbf{z}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = x' \mathbf{x} + y' \mathbf{y} + z' \mathbf{z}; \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = x dx + y dy + z dz \quad (A.27)$$

Derivace podle oblouku. Nezávisle proměnnou je oblouk prostorové křivky, který opisuje hrot vektoru \mathbf{r} . Derivace ve směru vyčteném elementem oblouku ds je

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{x} + \frac{dy}{ds} \mathbf{y} + \frac{dz}{ds} \mathbf{z} = \mathbf{t} \quad (A.28)$$

kde \mathbf{t} je jednotkový vektor ve směru tečny a ve smyslu rostoucí délky oblouku.

Gradient skalárního pole

Část trojrozměrného prostoru, v němž je definována skalární funkce $\varphi(x, y, z)$, se nazývá skalární pole. Plochy $\varphi(x, y, z) = \text{konst}$ se nazývají hladiny skalárního pole. Ve skalárním poli definujeme vektor derivace ve směru normály k hladině $\partial\varphi/\partial n$ s názvem **gradient**.

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{z} \quad (A.29)$$

nebo symbolicky

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z} \right) \varphi = \nabla\varphi \quad (A.29a)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z} \quad (\text{A.30})$$

je symbolický vektor. Gradient skalární funkce je vektor kolmý v každém bodě k ploše hladiny, má směr největšího vzrůstu a jeho souřadnice jsou parciální derivace podle souřadnic. Je nezávislý na volbě soustavy souřadnic. Gradienty skalárního pole tvoří vektorové pole.

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } \varphi (x dx + y dy + z dz) \quad (\text{A.31})$$

$$\text{grad } C\varphi = C \text{ grad } \varphi \quad (\text{je-li } C \text{ skalární konstanta}) \quad (\text{A.32})$$

$$\text{grad}(\varphi + \psi + \dots) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi + \dots \quad (\text{A.33})$$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi \quad (\text{A.34})$$

$$\text{grad } r = \frac{r}{r} = \mathbf{r}_0; \quad \text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}, \text{ je-li } \mathbf{c} = \text{konst} \quad (\text{A.35})$$

$$\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{ grad } r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad \text{grad } f(r) = f'(r) \mathbf{r}_0 \quad (\text{A.36})$$

Derivace skalární funkce φ ve směru normály k hladině

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n}; \quad d\mathbf{r} = \mathbf{n} dn \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = |\text{grad } \varphi| = \left| \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \right| \quad (\text{A.37a})$$

Derivace skalární funkce v libovolném směru \mathbf{s}

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{s}; \quad d\mathbf{r} = \mathbf{s} ds \quad (\text{A.38})$$

Divergence vektorového pole

Část prostoru, v němž existuje vektor $\mathbf{A}(x, y, z)$ jako funkce polohy (x, y, z) , se nazývá vektorové pole, $|\mathbf{A}|$ je jeho intenzita. Vektorové křivky (např. siločáry) mají v každém bodě směr příslušného vektoru. Je-li \mathbf{r} radiusvektor křivky, je tečna rovnoběžná s diferenciálem $d\mathbf{r}$, takže

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (\text{A.39})$$

Divergence vektoru $\mathbf{A}(x, y, z)$ je definována vztahem

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.40})$$

Divergence je skalár nezávislý na volbě soustavy souřadnic; fyzikálně znamená tok vektorového pole objemovou jednotkou.

Další vztahy pro divergenci

$$\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B} \quad (\text{A.41})$$

$$\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{ div } \mathbf{A} + \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.42})$$

$$\text{div } \mathbf{r} = 3$$

Rotor vektorového pole

Rotor (rotace) vektorové funkce $\mathbf{A}(x, y, z)$ je vektor nezávislý na volbě soustavy souřadnic

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{z} \quad (\text{A.43})$$

nebo při vyjádření pomocí determinantu

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.43a})$$

Další vztahy pro rotor

$$\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B} \quad (\text{A.44})$$

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{ rot } \mathbf{A} + (\text{grad } \varphi) \times \mathbf{A} \quad (\text{A.45})$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{A.46})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} \quad (\text{A.47})$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A} \quad (\text{A.48})$$

Laplaceův operátor delta

$$(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \quad (\text{A.49})$$

$$\nabla^2 \varphi = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi \quad (\text{A.50})$$

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x) \mathbf{x} + (\Delta A_y) \mathbf{y} + (\Delta A_z) \mathbf{z} \quad (\text{A.51})$$

rot rot $\mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ (A.53)

div rot $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (A.54)

$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2(\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi)$ (A.55)

$\Delta(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \Delta\mathbf{A} + \Delta\mathbf{B}$ (A.56)

$\Delta \text{ grad } \varphi = \text{grad } \Delta\varphi$ (A.57)

$\Delta \text{ rot } \mathbf{A} = \text{rot } \Delta\mathbf{A}$ (A.58)

Vektorové operátory v křivočarých ortogonálních souřadnicích

Označíme obecné křivočaré souřadnice u_1, u_2, u_3 . Vztahy $u_1 = \text{konst}, u_2 = \text{konst}, u_3 = \text{konst}$ jsou rovnice ploch, které se v případě ortogonálních souřadnic proínají pod pravými úhly. Označíme elementární oblouky průsečnic těchto ploch ds_1, ds_2, ds_3 a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ necht jsou jednotkové vektory ve směru tečen průsečnic. Potom element oblouku libovolné křivky v těchto souřadnicích je vektor

$ds = ds_1 + ds_2 + ds_3 = h_1 du_1 \mathbf{u}_1 + h_2 du_2 \mathbf{u}_2 + h_3 du_3 \mathbf{u}_3$ (A.60)

kde h_1, h_2, h_3 jsou Laméovy koeficienty křivočarých souřadnic. Tyto koeficienty mohou být funkcemi souřadnic u_1, u_2, u_3 .

Velikost elementárního oblouku je

$|ds| = ds = \sqrt{h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2}$ (A.61)

Velikost elementárního objemu je

$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ (A.62)

V pravotočivém systému křivočarých ortogonálních souřadnic platí pro jednotkové vektory

$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$ (A.63)

Vektor v křivočarých souřadnicích

$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{u}_1 + A_2 \mathbf{u}_2 + A_3 \mathbf{u}_3$ (A.64)

Gradient, divergenci, rotor a Laplaceův operátor v obecných ortogonálních křivočarých souřadnicích lze vyjádřit vztahy

$\text{grad } U = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \mathbf{u}_3$ (A.65)

$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$ (A.66)

$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial u_2}{\partial u_3} (h_3 A_3) - \frac{\partial u_3}{\partial u_2} (h_2 A_2) \right] \mathbf{u}_1 +$
 $+ \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{u}_2 +$
 $+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{u}_3$ (A.67)

nebo ve tvaru determinantu

$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 u_1 & h_2 u_2 & h_3 u_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$ (A.67a)

$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \right.$
 $\left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right]$ (A.68)

Válcové souřadnice: $u_1 = r, u_2 = \varphi, u_3 = z$. S pravotočivými souřadnicemi jsou vázány vztahy

$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z$ (A.69)

Délky elementárních oblouků: $ds_1 = dr, ds_2 = r d\varphi, ds_3 = dz$, takže

$h_1 = 1; \quad h_2 = r; \quad h_3 = 1$ (A.70)

Sférické souřadnice: $u_1 = r, u_2 = \vartheta, u_3 = \varphi$. S pravotočivými souřadnicemi jsou vázány vztahy

$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta$ (A.71)

Délky elementárních oblouků: $ds_1 = dr, ds_2 = r d\vartheta, ds_3 = r \sin \vartheta d\varphi$, takže

$h_1 = 1; \quad h_2 = r; \quad h_3 = r \sin \vartheta$ (A.72)

Integrace vektoru

Křivkový integrál vektoru $\mathbf{A}(x, y, z)$ podél křivky s , kterou opisuje hrot vektoru od bodu 1 do bodu 2. Označíme-li element oblouku křivky $ds = \mathbf{t} ds$, je

$\int_1^2 \mathbf{A} \cdot ds = \int_1^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_1^2 (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$ (A.73)

Křivkový integrál vektoru \mathbf{A} podél oblouku. Křivkový integrál je skalár; je-li křivka uzavřená, nazývá se cirkulace a značí se symbolem \oint .

Je-li rot $\mathbf{A} = 0$, je cirkulace nulová. Je-li rot $\mathbf{A} \neq 0$, závisí integrál na tvaru křivky.

$$\int_1^2 (\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{s}) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (\text{A.74})$$

je na integrační dráze nezávislý. Je-li křivka dráhy uzavřená, je cirkulace nulová

$$\oint (\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{s}) = 0 \quad (\text{A.75})$$

Plošný integrál vektoru $\mathbf{A}(x, y, z)$ po ploše S s elementem $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor směru vnější normály.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy) \quad (\text{A.76})$$

je plošný integrál vektoru nebo tok vektoru plochou S .

Transformace integrálů

Věta Stokesova

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}; \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS; \quad d\mathbf{s} = \mathbf{t} ds \quad (\text{A.77})$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor normály plochy takového smyslu, že ze strany, k níž normála směřuje, se jeví oběh křivky kladně (proti směru pohybu hodinových ručiček),

Věta Gaussova

$$\int_V \text{div } \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}; \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (\text{A.78})$$

kde V je objem uzavřený plochou S ; \mathbf{n} je jednotkový vektor normály směřující z uzavřeného prostoru ven, \mathbf{A} je vektorová funkce mající divergenci a rotor.

Je-li φ skalární funkce polohy, která je v oboru S a V jednoznačná a s prvními derivacemi spojitá, pak

$$\int_V \text{grad } \varphi dV = \int_S \varphi d\mathbf{S} \quad (\text{A.79})$$

Věty Greenovy

Jsou-li φ a ψ skalární funkce dvou proměnných, S je uzavřená plocha omezená křivkou s a \mathbf{n} jednotkový vektor kolmý k s , je 1. věta Greenova dána vztahem

$$\int_S \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi dS + \int_S \varphi \Delta \psi dS = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \quad (\text{A.80})$$

Záměnou φ za ψ a odečtením obou rovnic dostaneme 2. větu Greenovu

$$\int_S (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dS = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds \quad (\text{A.81})$$

Jsou-li opět φ a ψ skalární funkce polohy, S uzavřená plocha obklopující objem V a \mathbf{n} jednotkový vektor kolmý k S , pak 1. věta je

$$\int_V \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi dV + \int_V \varphi \Delta \psi dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (\text{A.82})$$

Zaměníme-li v této rovnici φ za ψ a obě rovnice od sebe odečteme, bude mít 2. věta tvar

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (\text{A.83})$$

Věty Greenovy ve vektorovém vyjádření: 1. věta má tvar

$$\int_V \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} dV - \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} dV = \int_S (\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.84})$$

Zaměníme-li v této rovnici vektor \mathbf{A} za vektor \mathbf{B} a takto nově získanou rovnici odečteme od původní, dostaneme opět 2. větu

$$\int_V \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A} dV - \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} dV = \int_S (\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_S (\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.85})$$

Gradient, divergence a rotor jsou nezávislé na soustavě souřadnic a jako prostorové derivace jsou definovány výrazy

$$\text{grad } \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \varphi dS \quad (\text{A.86})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.87})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{A} \times d\mathbf{S} \quad (\text{A.88})$$

B. BESSELOVY FUNKCE

Diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R \left(\Gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

kterou můžeme převést substitucí $\Gamma r = x$ na rovnici

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + R \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) = 0$$

(neboť $dx = \Gamma dr$, $dx^2 = \Gamma^2 dr^2$) je Besselova diferenciální rovnice druhého řádu, má dvě lineárně nezávislá řešení, která se mohou vyjádřit tzv. *Besselovými funkcemi*.

Při řešení problémů v mikrovlnné technice budeme nejčastěji používat obecné řešení ve tvaru

$$R = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x) \quad (\text{B.2})$$

kde $J_m(x)$ je Besselova funkce 1. druhu m -tého řádu,

$N_m(x)$ Besselova funkce 2. druhu m -tého řádu, která bývá označována jako funkce Neumannova,

C_1, C_2 jsou konstanty.

Pro tyto funkce platí řada důležitých identit. Označíme-li

$$Z_m(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x) \quad (\text{B.3})$$

platí

$$Z_{m-1}(x) + Z_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} Z_m(x) \quad (\text{B.4})$$

$$Z_{m-1}(x) - Z_{m+1}(x) = 2Z'_m(x) \quad (\text{B.5})$$

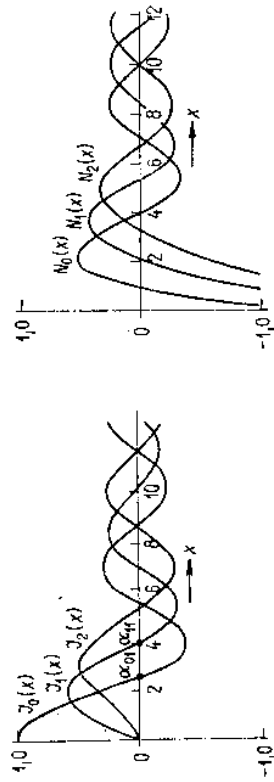
$$\frac{d}{dx} [x^m Z_m(x)] = x^m Z_{m-1}(x) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} Z_m(x)] = -x^m Z_{m-1}(x) \quad (\text{B.7})$$

$$Z_{-m}(x) = (-1)^m Z_m(x) \quad (\text{B.8})$$

$$Z'_0(x) = -Z_1(x) \quad (\text{B.9})$$

Průběhy Besselových funkcí 2. druhu $J_m(x)$ a Besselových funkcí 2. druhu $N_m(x)$ jsou znázorněny na obr. B.1 (pro řád $m = 0$ až $m = 2$).



Obr. B.1. Průběhy Besselových funkcí $J_m(x)$ a $N_m(x)$

Z průběhu Besselových funkcí je zřejmé, že mají nekonečně mnoho nulových hodnot (α_{mn} , popř. α'_{mn}). K rozlišení argumentů nulových hodnot jim přiřazujeme indexy m, n , přičemž m označuje řád Besselových funkcí a n označuje pořadí nulové hodnoty. Například α_{02} je v pořadí druhá nulová hodnota Besselovy funkce nultého řádu apod. Analogicky se označují i nulové hodnoty derivací Besselových funkcí α'_{mn} .

Jestliže v Besselově diferenciální rovnici zavedeme vztah

$$r^2 = -g^2$$

neboli

$$r = jg$$

dostaneme rovnici

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - R \left(g^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Označíme-li $gr = y$, můžeme napsat tuto rovnici ve tvaru

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR}{dy} - R \left(1 + \frac{m^2}{y^2} \right) = 0$$

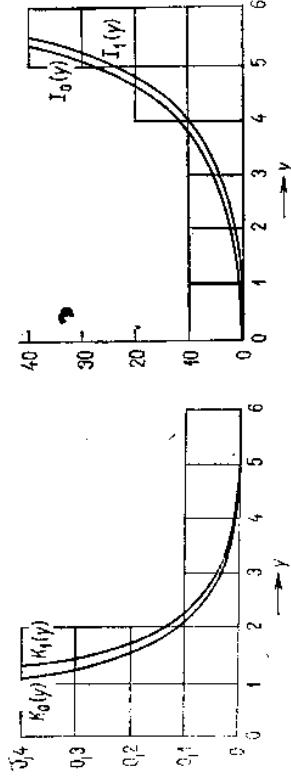
jejíž řešení lze vyjádřit tzv. modifikovanými Besselovými funkcemi

$$R = C_1 I_m(y) + C_2 K_m(y) \quad (\text{B.11})$$

kde $I_m(y)$ je modifikovaná Besselova funkce 1. druhu, m -tého řádu,

$K_m(y)$ modifikovaná Besselova funkce 2. druhu, m -tého řádu.

Na rozdíl od funkcí $J_m(x)$ a $N_m(x)$ nemají modifikované Besselovy funkce oscilační charakter, ale jejich průběhy jsou monotónní, podobně průběhům exponenciálních funkcí (obr. B.2).



Obr. B.2. Průběhy funkcí $K_0(y), K_1(y)$ a $I_0(y), I_1(y)$ (na obr. vpravo $I_0(y)$ nabývá hodnoty 1 pro $y = 0$)

Pro funkce $I_m(y)$ a $K_m(y)$ platí rekurentní vztahy

$$I_{m-1}(y) + I_{m+1}(y) = \frac{2m}{y} I_m(y) \quad (\text{B.12})$$

$$I_{m-1}(y) - I_{m+1}(y) = 2I'_m(y) \quad (\text{B.13})$$

$$I'_m(y) = I_{m-1}(y) - \frac{m}{y} I_m(y) \quad (\text{B.14})$$

$$I'_m(y) = I_{m+1}(y) + \frac{m}{y} I_m(y) \quad (\text{B.15})$$

$$K_{m-1}(y) - K_{m+1}(y) = -\frac{2m}{y} K_m(y) \quad (\text{B.16})$$

$$K_{m-1}(y) + K_{m+1}(y) = -2K'_m(y) \quad (\text{B.17})$$

$$K'_m(y) = -K_{m-1}(y) - \frac{m}{y} K_m(y) \quad (\text{B.18})$$

$$K'_m(y) = -K_{m+1}(y) + \frac{m}{y} K_m(y) \quad (\text{B.19})$$

Některé limitní vztahy pro funkce $J_m(x)$, $N_m(x)$, $I_m(y)$ a $K_m(y)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_m(x) = \frac{x^m}{2^m m!} \left(1 - \frac{x^2}{4(m+1)} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) = -\infty \quad (\text{B.21})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} K_0(y) = -\ln 0,89y \quad (\text{B.22})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} K_m(y) = \frac{2^{m-1}}{y^m} (m-1)! \quad (m \geq 1) \quad (\text{B.23})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{K_0(y)}{y K_1(y)} = -\ln 0,89y \quad (\text{B.24})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{K_{m-1}(y)}{y K_m(y)} = \frac{1}{2(m-1)} \quad (m \geq 2) \quad (\text{B.25})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} I_m(y) = \frac{y^m}{2^m m!} \quad (\text{B.26})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K_0(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \quad (\text{B.27})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I_0(y) = \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \quad (\text{B.28})$$

Při řešení problémů mikrovlnné techniky se často setkáváme s *Lommelovými integrály*

$$\int_0^a x J_m^2(kx) dx = \frac{1}{2} a^2 \left[J_m^2(ka) + \left(1 - \frac{m^2}{k^2 a^2} \right) J_m^2(ka) \right] \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \int_0^a J_m(k_1 x) J_m(k_2 x) x dx &= \\ &= \frac{a}{k_1^2 - k_2^2} [k_2 J_{m-1}(k_2 a) J_m(k_1 a) - k_1 J_{m-1}(k_1 a) J_m(k_2 a)] \quad (\text{B.30}) \end{aligned}$$

1. *Maticí* nazýváme soustavu čísel (reálných nebo komplexních) uspořádaných do tabulky s m řádky a n sloupci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Jiný zápis matice

$$A = [a_{ij}]; \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C.2})$$

2. *Matice řádková (řádkový vektor)*

$$\vec{a} = [a_1 a_2 a_3 \dots a_n]$$

3. *Matice sloupcová (sloupcový vektor)*

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

4. *Matice diagonální*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

5. *Matice jednotková*

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Jiný zápis jednotkové matice

$$1 = [\delta_{ij}] \quad (\text{C.6})$$

kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad \text{je Kroneckerův symbol}$$

6. *Rovnost matic:*

$$A = B, \quad \text{když} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad \text{když} \quad a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij} \quad (\text{C.8})$$

Pro součet a rozdíl platí zákon komutativní a asociativní, tj.

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{B} \pm \mathbf{A} \quad (\text{C.9})$$

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \pm \mathbf{C} = \mathbf{A} \pm (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) \quad (\text{C.10})$$

8. *Násobení matice skalárem k*
 $k\mathbf{A} = \mathbf{B}$, když $ka_{ij} = b_{ij}$ (C.11)

9. *Součin čtvercových matic*
 $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, kde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ (C.12)

a) Součin je obecně nekomutativní:
 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (C.13)

b) Platí zákon asociativní:
 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (C.14)

c) Platí zákon distributivní:
 $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (C.15)

10. *Matice transponovaná $\tilde{\mathbf{A}}$ (nebo \mathbf{A}^T) se získá záměnou sloupců za řádky. Diagonální prvky zůstávají nedotčeny.*

11. *Součin čtvercové matice \mathbf{A} se sloupcovým vektorem \mathbf{a} je sloupcový vektor \mathbf{b}*
 $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$, kde $b_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_k$ (C.16)

12. *Součin řádkového vektoru $\tilde{\mathbf{a}}$ se čtvercovou maticí \mathbf{A} je řádkový vektor $\tilde{\mathbf{b}}$*
 $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{b}}$, kde $b_j = \sum_{k=1}^n a_k a_{kj}$ (C.17)

13. *Součin řádkového vektoru $\tilde{\mathbf{a}}$ se sloupcovým vektorem \mathbf{b} je číslo, tj.*
 $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ (C.18)

14. *Nejsou definovány součiny matic $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}$, \mathbf{aA} , $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}$.*

15. *Dělení matic není definováno. Matici je však možné dělit číslem [viz (C.11)].*

10. *Determinant matice. Nazývá se číslo Δ příslušným určitým vyvozením z jejích prvků. Označíme jej $\det \mathbf{A}$. Determinant matice $\det \mathbf{A}$ je číslo určené známými pravidly pro výpočet hodnot determinantů.*

17. *Minor matice prvku a_{ij} je determinant získaný vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce matice \mathbf{A} .*

18. *Algebraický doplněk A_{ij} prvku a_{ij} je minor prvku a_{ij} vynásobený činitelem $(-1)^{i+j}$.*

19. *Adjungovaná matice $\text{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$. Prvky a'_{ij} adjungované matice jsou algebraické doplňky prvků a_{ji} v determinantu původní matice. Danou maticí \mathbf{A} nejdříve transponujeme a pak místo každého prvku této transponované matice píšeme jeho doplněk v determinantu transponované matice.*

20. *Inverzní matice \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} je taková, pro níž platí $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$; je dána vztahem*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}' \quad (\text{C.19})$$

21. *Vlastnosti inverzní matice*

$$\det \mathbf{A}^{-1} = [\det \mathbf{A}]^{-1} \quad (\text{C.20})$$

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{C.21})$$

$$(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}) = (\tilde{\mathbf{A}})^{-1} \quad (\text{C.22})$$

22. *Vlastnosti transponovaných matic*

$$\text{Je-li } \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}, \text{ je } \tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{A} \quad (\text{C.23})$$

$$\text{Je-li } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ je } \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}} \quad (\text{C.24})$$

$$\text{Je-li } \mathbf{AB} = \mathbf{C}, \text{ je } \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}} \quad (\text{C.25})$$

23. *Matice \mathbf{B} komplexně sdružená k matici \mathbf{A} , $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ má prvky $b_{ij} = a_{ij}^*$.*

24. *Hermitovská matice \mathbf{A} je taková, pro níž platí*
 $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}^*$, tj. $a_{ij} = a_{ji}^*$ (C.26)

25. *Ortogonální matice má prvky reálné a platí pro ni*
 $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ (C.27)

26. *Unitární matice \mathbf{A} je taková, pro níž platí*
 $\tilde{\mathbf{A}}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (C.28)

a) pro vektory vytvořené z řádků platí:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ik}^* = 0; \quad \text{pro } i \neq j \quad (\text{C.29})$$

b) pro vektory vytvořené ze sloupců platí:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^* = 0; \quad \text{pro } i \neq j \quad (\text{C.30})$$

c) pro každý řádek platí:

$$\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ik}^* = 1 \quad (\text{C.31})$$

d) pro každý sloupec platí:

$$\sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{ik}^* = 1 \quad (\text{C.32})$$

e) minory nulových prvků unitární matice jsou rovny nule.

28. Velikost reálného vektoru \mathbf{a} je

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (\text{C.34})$$

29. Velikost komplexního vektoru \mathbf{a} je

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2} \quad (\text{C.35})$$

30. Sloupcové vektory $\mathbf{a}^{(1)}$ a $\mathbf{a}^{(2)}$ jsou ortogonální platí-li

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(1)} \mathbf{a}^{(2)} = 0 \quad (\text{C.36})$$

31. Vektory $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, ..., $\mathbf{a}^{(n)}$ jsou lineárně nezávislé, platí-li

$$\sum_{j=1}^n c_j a^{(j)} = 0 \quad \text{pouze pro } c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \quad (\text{C.37})$$

Ke snadnějšímu pochopení lineárně nezávislých vektorů zvolíme příklad. V odstavci 9.3.1. jsou určeny dva vektory

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(1)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]; \quad \tilde{\mathbf{a}}^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

které mají být lineárně nezávislé. Musí tedy pro ně platit

$$c_1 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + c_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = [0; 0]$$

nebo

$$\left[c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + c_2 \frac{1}{\sqrt{2}}; c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = [0; 0]$$

odtud dostaneme dvě rovnice s neznámými c_1 a c_2

$$c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \quad c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Řešení obou rovnic je zřejmě triviální, protože determinant soustavy $D = -1$. Oba vektory $\mathbf{a}^{(1)}$ a $\mathbf{a}^{(2)}$ jsou tedy lineárně nezávislé.

32. Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \quad (\text{C.38})$$

nazývá rovnici vlastní hodnot. Vektor \mathbf{x} je vlastní vektor a α je vlastní hodnota. Tato rovnice může být splněna pouze pro zcela určité hodnoty α . K tomu účelu ji přepíšeme na tvar

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{1})\mathbf{x} = 0 \quad (\text{C.39})$$

Tato rovnice je stručným zápisem n rovnic s n neznámými. Netriviální řešení vzhledem k \mathbf{x} existuje pouze tehdy, je-li determinant soustavy nulový, tedy

$$\det(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{1}) = 0 \quad (\text{C.40})$$

Získaná rovnice se nazývá charakteristickou rovnicí. Rozvinutím tohoto determinantu dostaneme pro α polynom n -tého stupně, tzv. charakteristický polynom. Tento polynom má n kořenů (vlastních hodnot), z nichž některé si mohou být rovny. Je-li m -kořenů stejných, říkáme, že vlastní hodnoty jsou m -násobně degenerované. Jsou-li všechny kořeny různé, říkáme jim nedegenerované vlastní hodnoty.

a) *Nedegenerované vlastní hodnoty*

Věta 1. n vlastních vektorů matice \mathbf{A} odpovídajících n nedegenerovaným hodnotám jsou vektory lineárně nezávislé.

Věta 2. Libovolný n -rozměrný vektor může být vyjádřen jako lineární kombinace n lineárně nezávislých vektorů

$$\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{x}^{(j)} \quad (\text{C.41})$$

Z obou vět vyplývá, že každé vlastní hodnotě (nedegenerované) odpovídá pouze jeden vlastní vektor lineárně nezávislý. Další vlastní vektory (odpovídající této nedegenerované vlastní hodnotě) mohou být získány z tohoto vektoru jeho vynásobením konstantami.

b) *Degenerované vlastní hodnoty*

Vlastní vektory odpovídající degenerovaným vlastním hodnotám nejsou určeny jednoznačně. Každá jejich lineární kombinace je opět vlastním vektorem odpovídajícím této vlastní hodnotě. Existuje tedy neomezený počet vlastních vektorů odpovídajících degenerovaným vlastním hodnotám.

Věta 3. Je-li matice **A** hermitovská, pak její vlastní hodnoty jsou reálné.

Věta 4. Je-li matice **A** hermitovská, pak její vlastní vektory odpovídající nedegenerovaným vlastním hodnotám jsou ortogonální.

Věta 5. Je-li matice **A** reálná a symetrická, jsou všechny její vlastní hodnoty reálné a vlastní vektory mohou být zvoleny reálné.

Věta 6. Vlastní hodnoty ryze imaginární symetrické matice jsou ryze imaginární a vlastní vektory mohou být reálné.

d) **Zaměnitelné matice**

Pro zaměnitelné matice (**AB = BA**) platí velmi důležitá věta:

Věta 7. Jsou-li **A** a **B** zaměnitelné matice a **Aa⁽ⁱ⁾ = α_ia⁽ⁱ⁾**, kde α_i jsou nedegenerované vlastní hodnoty matice **A**, pak vlastní vektory **a⁽ⁱ⁾** matice **A** jsou také vlastními vektory matice **B**.

Je zřejmé, že

$$\mathbf{BAa}^{(i)} = \alpha_i \mathbf{Ba}^{(i)}$$

nebo

$$\mathbf{A(Ba}^{(i)}) = \alpha_i (\mathbf{Ba}^{(i)}) \tag{C.42}$$

Vektor **Ba⁽ⁱ⁾** je tedy vlastním vektorem matice **A** odpovídající nedegenerované vlastní hodnotě α_i. Vektor **Ba⁽ⁱ⁾** se může lišit od **a⁽ⁱ⁾** nanejvýš multiplikační konstantou, neboť

$$\mathbf{Ba}^{(i)} = \beta_i \mathbf{a}^{(i)} \tag{C.43}$$

Je tedy **a⁽ⁱ⁾** vlastním vektorem matice **B** (vlastní hodnoty β_i jsou však odlišné od α_i).

D. SCHWARZOVO – CHRISTOFFELOVO ZOBRAZENÍ

Schwarzovo – Christoffelovo zobrazení zprostředkuje konformní zobrazení vnitřku polygonální oblasti z roviny (z) komplexní proměnné z = x + jy na horní polorovinu roviny (ξ) komplexní proměnné ξ = ξ + jη. Hranice polygonu se přitom zobrazí na reálnou osu roviny (ξ), viz obr. D.1.



Obr. D.1.

ve tvaru

$$\frac{dz}{d\xi} = K_1 (\xi - \zeta_1)^{\alpha_1/\pi-1} (\xi - \zeta_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (\xi - \zeta_n)^{\alpha_n/\pi-1} \tag{D.1}$$

kde K₁ je komplexní konstanta,

ζ_n jsou body na reálné ose ξ v rovině (ξ); těmto bodům odpovídají v rovině (z) vrcholy Z_n,

α_n vnitřní úhly polygonu Z₁Z₂... Z_n v rovině (z).

Integrací zobrazovacího vztahu dostaneme tzv. Schwarzův – Christoffelův integrál

$$z = K_1 \int_{\xi} (\xi - \zeta_1)^{\alpha_1/\pi-1} (\xi - \zeta_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (\xi - \zeta_n)^{\alpha_n/\pi-1} d\xi + K_2 \tag{D.2}$$

Vlastnosti zobrazení:

1. Polohu tří z bodů ζ₁ až ζ_n lze volit libovolně. Ostatní body spolu s integračními konstantami K₁ a K₂ se určí z podmínek zobrazení.
2. Konstanta K₁ způsobuje natočení o úhel rovný arg K₁ a ovlivňuje rozměr zobrazení K₁-krát. Konstanta K₂ způsobuje posuv zobrazení.
3. Vnitřní úhly polygonu musí splňovat podmínku

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2)\pi$$

4. Zobrazovací vztah je platný i tehdy, když jsou některé vrcholy polygonu v nekonečnu. Za vnitřní úhel α_k při vrcholu Z_k = ∞ bereme záporně vzaty úhel sevřený příslušnými stranami v konečném průsečíku (pro nesouhlasně rovnoběžné strany α_k = -π, pro souhlasně rovnoběžné strany α_k = 0).
5. Jestliže přiřadíme některý z vrcholů mnohoúhelníku Z_k nevlastnímu bodu ζ_k = ∞ v rovině (ξ), zobrazovací vztah zůstává v platnosti, ale vymizí z něj činitel (ξ - ζ_k)^{α_k/π-1}.

E. STŘEDNÍ HUSTOTA TOKU VÝKONU

Při používání komplexních veličin musíme mít na zřeteli, že některé fyzikální veličiny (např. výkon) je nutné vyjádřit reálnými funkcemi. Předpokládejme např. komplexní veličinu A ve tvaru

$$A = (a + jb) e^{-j\omega t} = a \cos \omega t + b \sin \omega t + j(b \cos \omega t - a \sin \omega t) \tag{E.1}$$

takže pro komplexně sdruženou veličinu A* platí

$$A^* = (a - jb) e^{j\omega t} = a \cos \omega t + b \sin \omega t - j(b \cos \omega t - a \sin \omega t) \tag{E.2}$$

Z toho je zřejmé, že platí

$$\text{Re}[A] = \frac{A + A^*}{2} \tag{E.3}$$

rovnice můžeme vyjádřit jme komplexní veličiny B a B^* ve tvaru

$$B = (c + jd)e^{-j\omega t}; \quad B^* = (c - jd)e^{j\omega t} \quad (E.4)$$

takže analogicky platí

$$\operatorname{Re}[B] = \frac{B + B^*}{2} \quad (E.5)$$

Lze tedy psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[A] \operatorname{Re}[B] &= \frac{1}{4} (A + A^*)(B + B^*) = \\ &= \frac{1}{4} (AB + A^*B + AB^* + A^*B^*) \end{aligned} \quad (E.6)$$

Z toho vyplývá

$$\begin{aligned} AB &= (a + jb)(c + jd)e^{-2\omega t} \quad (E.7) \\ A^*B^* &= (a - jb)(c - jd)e^{j2\omega t} \quad (E.8) \\ A^*B &= (a - jb)(c + jd) = ac + bd - j(bc - ad) \quad (E.9) \\ AB^* &= (a + jb)(c - jd) = ac + bd + j(bc - ad) \quad (E.10) \end{aligned}$$

Vyjádříme-li časově střední hodnotu součinu reálných složek veličin A , B , lze psát

$$\langle \operatorname{Re}[A] \operatorname{Re}[B] \rangle = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) \quad (E.11)$$

neboť pro ryze harmonické časové funkce platí, že jejich časově střední hodnoty jsou rovny nule

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (AB) dt = 0 \quad (E.12)$$

$$\langle A^*B^* \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (A^*B^*) dt = 0 \quad (E.13)$$

Protože z uvedených vztahů dále vyplývá

$$AB^* + A^*B = 2 \operatorname{Re}[AB^*] \quad (E.14)$$

lze psát

$$\langle \operatorname{Re}[A] \operatorname{Re}[B] \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[AB^*] \quad (E.15)$$

Střední hustotu toku výkonu harmonického elektromagnetického pole s komplexními amplitudami vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} lze tedy vyjádřit vztahem

$$\langle P \rangle = \langle \operatorname{Re}[\mathbf{E}] \times \operatorname{Re}[\mathbf{H}] \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (E.16)$$

F. ORTOGONALNÍ VLASTNOSTI VLASTNÍCH FUNKCÍ VLNOVODU

Označme určitou kombinaci vidových čísel m , n řeckým písmenem ν a jinou kombinaci písmenem μ . Pak vlastní funkce $T_{1\nu}$ popisuje příčné uspořádání ν -tého vidu ve vlnovodu a vlastní funkce $T_{1\mu}$ uspořádání μ -tého vidu. Obě funkce $T_{1\nu}$ a $T_{1\mu}$ samozřejmě splňují odpovídající vlnovou rovnici s příslušnou okrajovou podmínkou. Dosadíme-li do (A.81) $\psi = T_{1\nu}$ a $\varphi = T_{1\mu}$, dostaneme

$$\int_S (T_{1\mu} \Delta T_{1\nu} - T_{1\nu} \Delta T_{1\mu}) dS = \int_S \left(T_{1\mu} \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial n} + T_{1\nu} \frac{\partial T_{1\mu}}{\partial n} \right) dS \quad (F.1)$$

V této rovnici je S plocha průřezu vlnovodu a s obrysová křivka průřezu vlnovodu. Se zřetelem k okrajovým podmínkám pro vlny TM a TE je pravá strana této rovnice nulová. Dosadíme-li z dílčích vlnových rovnic pro vlastní funkce $T_{1\nu}$ a $T_{1\mu}$, dostaneme

$$(F_\nu^2 - F_\mu^2) \int_S T_{1\mu} T_{1\nu} dS = 0 \quad (F.2)$$

Tento vztah definuje ortogonální vlastnosti vlastních funkcí vlnovodu, neboť pro $\mu \neq \nu$ je $F_\nu \neq F_\mu$, takže musí být

$$\int_S T_{1\mu} T_{1\nu} dS = 0 \quad (F.3)$$

Pro $\mu = \nu$ je $F_\mu = F_\nu$ a z (F.2) vyplývá

$$\int_S T_{1\nu}^2 dS \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \int_S T_{1\nu}^2 dS = M, \quad (F.4)$$

kde veličina M , je tzv. norma vlastní funkce $T_{1\nu}$.

Podobným způsobem lze ukázat, že i vlastní funkce rezonátorů E_ν a H_μ jsou ortogonální. Ortogonální vlastnosti vlastních funkcí vlnovodu a rezonátoru se využívají při řešení teoretických úloh v mikrovlnných obvodech.

G. ROVNICE KRUŽNICE V KOMPLEXNÍM TVARU

Obecná rovnice kružnice v rovině (z) je (obr. G.1)

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2 \quad (G.1)$$

neboli

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 = R^2 \quad (G.2)$$

Zavedeme-li komplexní proměnnou

$$z = x + jy \quad (G.3)$$

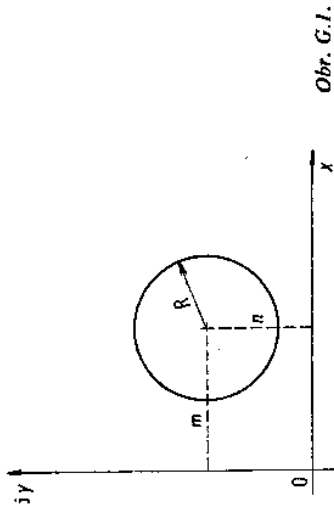
$$z^* = x - jy \quad (G.4)$$

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*) \tag{G.5}$$

$$y = \frac{1}{2j}(z - z^*) \tag{G.6}$$

a rovnici kružnice můžeme napsat ve tvaru

$$zz^* - z(m - jn) - z^*(m + jn) + m^2 + n^2 - R^2 = 0 \tag{G.7}$$



Obr. G.1.

H. SILOVÉ ČÁRY ELEKTRICKÉHO A MAGNETICKÉHO POLE

Směr vektoru intenzity elektrického nebo magnetického pole je obecně určen třemi složkami tohoto vektoru. Rovnici silové čáry ve vektorovém tvaru můžeme určit z podmínky, že vektor intenzity elektrického nebo magnetického pole musí mít směr jednotkového vektoru ve směru tečny silové čáry, přičemž směr tečny je totožný se směrem elementárního oblouku silové čáry. Předpokládáme-li ortogonální souřadnice u_1, u_2, u_3 , pak pro elementární oblouk platí

$$ds = ds_1 u_1 + ds_2 u_2 + ds_3 u_3$$

kde ds_1, ds_2, ds_3 jsou elementární oblouky křivočarých souřadnic ve směru jednotkových vektorů u_1, u_2, u_3 .

Pro elementární oblouky platí

$$ds_1 = h_1 du_1; \quad ds_2 = h_2 du_2; \quad ds_3 = h_3 du_3$$

kde h_1, h_2, h_3 jsou Laméovy koeficienty, takže

$$ds = h_1 du_1 u_1 + h_2 du_2 u_2 + h_3 du_3 u_3$$

Aby směr vektoru intenzity pole byl totožný se směrem elementárního oblouku ds silové čáry, musí platit

$$E \times ds = 0$$

$$\nabla \times us = u$$

Rozvedeme-li vektorový součin do jednotlivých složek ve směru u_1, u_2, u_3 , pak např. pro elektrické pole dostaneme

$$\begin{aligned} E \times ds &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ E_{u_1} & E_{u_2} & E_{u_3} \\ h_1 du_1 & h_2 du_2 & h_3 du_3 \end{vmatrix} = \\ &= u_1(E_{u_2}h_3 du_3 - E_{u_3}h_2 du_2) + u_2(E_{u_3}h_1 du_1 - E_{u_1}h_3 du_3) + \\ &+ u_3(E_{u_1}h_2 du_2 - E_{u_2}h_1 du_1) = 0 \end{aligned}$$

Tato rovnice bude splněna tehdy, budou-li koeficienty u jednotlivých složek jednotkových vektorů nulové, takže musí platit

$$E_{u_2}h_3 du_3 - E_{u_3}h_2 du_2 = 0$$

$$E_{u_3}h_1 du_1 - E_{u_1}h_3 du_3 = 0$$

$$E_{u_1}h_2 du_2 - E_{u_2}h_1 du_1 = 0$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\frac{E_{u_1}}{h_1 du_1} = \frac{E_{u_2}}{h_2 du_2} = \frac{E_{u_3}}{h_3 du_3}$$

Pro magnetické pole bychom dostali analogicky

$$\frac{H_{u_1}}{h_1 du_1} = \frac{H_{u_2}}{h_2 du_2} = \frac{H_{u_3}}{h_3 du_3}$$

- admitance dvojpólu 265
- apertura clony 253, 255
- aproximace kvazi-TEM 347, 349, 353
- cirkulátor 322, 336, 340, 369, 370
 - clona indukční 249, 250, 257
 - kapacitní 249, 257, 258
 - tlustá ve vlnovodu 282
- činitel jakosti 207, 413
- odrazu 78, 247, 250, 262, 379, 382
- přenosu 247, 251
- reflexních ztrát 242
- stojaté vlny 380, 381, 383
- vazby 413
- ztrát 20
- číslo Fresnelovo 240
- vlnové 32
- člen T v rovině „E“ 288, 291
- — — „H“ 278, 288
- Y v rovině „H“ 278, 288
- čtyřbran mikrovlnný 291
- délka vlny mezní 39
- — na vedení 40
- dělic výkonu třídecibellový 291
- diagonalizace tenzoru permeability 329
- diagram admítanční 394
- impedanční Smithův 385, 394
- vidů dutinového rezonátoru 221
- dipól elektrický 304
- magnetický 304
- dvojbřan mikrovlnný 282, 318
- dvojlom 334
- dvojpól mikrovlnný 263, 267
- energie elektrického pole 210
- elektromagnetického pole 73, 207, 210
- magnetického pole 210
- ferity 321
- frekvence úhlová komplexní 211
- — mezní 39
- graf orientovaný 313
- grupa operátorů symetrie 280
- gyrátor 322, 335
- hloubka vniku 57
- charakteristika disperzní 191, 196
- impedance dvojpólu 265
- charakteristická 45, 46
- příčná 152
- vlnová 69, 76, 379
- — mikropáskového vedení 348, 353, 359, 374
- vodiče 58
- , transformace na vedení 78
- identita, symetrická transformace 277, 280
- indukčnost vedení 72, 74
- induktor páskový 372
- spirálový 372
- inverze, symetrická transformace 277, 280
- izolace směrové-odboňnice 365
- izolátor 322, 336, 338, 369
- jev Faradayův 332, 335, 336
- jevy disperzní 348, 349
- kapacita vedení 71, 74
- kapacitor interdigitální 376
- sendvičový
- knuty degenerované 222
- magnetizace vlastní 324
- — vynucené 325
- kolik rezonanční 260
- konstanta Faradayova 333
- fázová 38
- útlumu 38
- průřezu vedení 37
- inicializace 339, 367
- — reciproční 367
- princip reciprocity Lorentzův 267
- prostředí gyrotropní 321
- ztrátové dielektrické 67
- proud fiktivní 263, 264
- přenos přímé cesty 314
- smyčky 314
- přechod, mikropásek — štěrbinové vedení 359
- , sousedě vedení — mikropásek 357
- , vlnovod — mikropásek 358
- přízpůsobení totální 273, 298
- reflexe, symetrická transformace 277, 278, 288, 292
- rezistor v MIO 374
- rezonance feromagnetická 200, 323
- — příčná 333, 334
- příčná 152
- rezonátor 201
- , pracovní oblast 222
- dielektrický 242
- diskový 362
- dutinový 209
- feritový 245
- mikropáskový 362
- otevřený 237
- rotace Faradayova 336, 337
- rovina polarizace 305
- rovnice disperzní 176
- charakteristická 284
- rozložení pole nerekiproční 339
- rychlost šíření energie 50
- — fázová 40
- — skupinová 40
- signál uzlový 313
- směrůvost odboňnice 298, 300, 364, 365
- součinitel přenosu 38, 73
- — komplexní 38
- struktura feritů 321
- břebínková 86, 187
- interdigitální 186, 187
- periodická 186, 191
- substrát feritový 355, 367
- , GaAs 342
- , požadavky 343
- svorky fiktivní 263
- symetrie mikrovlnných obvodů 277
- inicializace 265, 281, 283
- ortogonální 286
- rozptylová 269
- vlnová přenosová 274
- metoda orientovaných grafů 313
- mnohobran mikrovlnný 262
- moment dipólový elektrický 27
- — magnetický 27
- napětí fiktivní 263, 264
- n-bran mikrovlnný 266
- nespojitosť na vedení 247
- obvod integrovaný hybridní 343
- — monolitický 341
- odboňnice Bethého 302
- křížová 303
- Schwingerova 301
- směrová 296
- odpor v poměrný 59
- okénko rezonanční 258
- operátor identity 280, 281
- inverze 280
- reflexe 279, 282
- rotace 279
- ortogonálnost vlastních funkcí vlnovodu 253
- permeabilita efektivní 331, 367
- relativní 19
- , tenzor 20
- permutivita dynamická 364
- efektivní 348
- komplexní 20
- relativní 19
- , tenzor 20
- podmínka Lorentzova 25, 27
- rezonanční 206, 399
- polarizace elektrická 21
- eliptická 306, 331
- horizontální 305
- kruhová 305, 306, 331, 368
- magnetická 21
- vertikální 305
- vnučená 22
- polarizátor kruhový 308
- půlvlnný 311
- pole elektromagnetické LE 33
- — LM 33
- — TE 33
- — TM 33
- admitance dvojpólu 207, 413
- odrazu 78, 247, 250, 262, 379, 382
- přenosu 247, 251
- reflexních ztrát 242
- stojaté vlny 380, 381, 383
- vazby 413
- ztrát 20
- číslo Fresnelovo 240
- vlnové 32
- člen T v rovině „E“ 288, 291
- — — „H“ 278, 288
- Y v rovině „H“ 278, 288
- čtyřbran mikrovlnný 291
- délka vlny mezní 39
- — na vedení 40
- dělic výkonu třídecibellový 291
- diagonalizace tenzoru permeability 329
- diagram admítanční 394
- impedanční Smithův 385, 394
- vidů dutinového rezonátoru 221
- dipól elektrický 304
- magnetický 304
- dvojbřan mikrovlnný 282, 318
- dvojlom 334
- dvojpól mikrovlnný 263, 267
- energie elektrického pole 210
- elektromagnetického pole 73, 207, 210
- magnetického pole 210
- ferity 321

- kruhové 296
- magické 291, 292, 319
- můstkové 292
- paralelní 288, 291
- prstencové 296
- sériové 291
- tenzor permeability 20, 327, 328
- susceptibility 326, 328
- transformace symetrická 277
- transformátor impedancí 260, 400
- trojbran mikrovlnný 288
- úhlim odbočný směrové odbočnice 300
- poměrný 38, 60, 62, 67, 73
- vložný mikropáskové odbočnice 365
- vazba směrová 301
- odbočnice mikropáskové 365
- vedení deskové 121
- dvoudrátové 126
- hřebinkové 196
- meandrové mikropáskové 368, 369
- měřicí 383
- mikropáskové 36, 342, 344
- — koplanární 345, 352
- — nesymetrické 344, 347, 348, 355
- — symetrické 344
- — šěrbinové 344, 350
- páskové nesymetrické 139
- — symetrické 131
- radiální 154
- šroubovicové 186, 187, 191
- zpomalovací 186
- vektor Hertzův elektrický 28
- — magnetický 30
- vlastní 284
- věta Floquetova 190
- Poyntingova 264
- vid elektromagnetické vlny 89, 91, 101, 105, 105, 250
- dominantní 91, 105, 181
- vlna elektromagnetická zpomalená 161
- hybridní 140, 173, 179, 346, 347, 349, 351
- kvazi-TEM 140, 353, 354, 356
- mimořádná ve feritu 334
- , prostorová harmonická 189, 190
- příčně elektrická 43, 45, 49, 65
- — magnetická 42, 44, 47, 62
- řádná ve feritu 334
- TEM 68, 275, 346
- vedená okrajem 356
- vlny pomalé 186, 196
- povrchové 186, 188, 189
- v gyrotropním prostředí 330
- vlnovod dielektrický 160, 172
- koaxiální 116
- kruhového průřezu 97
- obdélníkového průřezu 86
- π 358
- výkon komplexní 211
- přenášený vedením s vlnou TEM 72
- — vlnovodem 46
- ztracený ve vodiči 58, 62
- vzorec Masonův 316, 318, 319, 320
- zákon Snellův 55, 170
- zeslabovač mezní 82
- stavitelný 383
- ztráty, mikropáskové vedení 349
- nepřízůsobením 383

Prof. Ing. Václav Tysl, DrSc.,
doc. Ing. Vladimír Růžička, CSc.

Teoretické základy mikrovlnné techniky

DT 621.37/39 (075.8)

Vydalo SNITL — Nakladatelství technické literatury, n. p., Spálená 51, 113 02 Praha 1

v roce 1989 jako svou 10899. publikaci

Redakce elektrotechnické literatury

Odpovědný redaktor Ing. Milan Dufek, CSc.

Vazbu navrhl Josef Kalousek

Grafická úprava a technická redakce Šárka Panošová

Výtisk Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 1

452 stran, 279 obrázků, 5 tabulek

Typové číslo L26-C3-IV51/58642. Vydání první

Náklad 800 výtisků. 33,25 AA, 33,99 VA

05/38

Cena vázaného výtisku Kčs 31,—

104/21,852

Publikace je určena studentům elektrotechnických fakult studijního oboru radioelektronika. Mohou ji však využít všichni inženýři pracovníci, kteří se zabývají mikrovlnnou technikou

04-543-89

Kčs 31,—

