3. Difuze a transport

3.1. Základní vztahy

3.1.1. Difuze a pohyblivost

srážky e⁻ – neutrál

V předchozí kapitole „~~po~~ dynamiky plazmatu" jsme viděli, že přidání „členu tření" do pohyb. rce studeného uniformního plazmatu ve vnějším el. poli vede k vodivosti:

Tento člen také vede k difuzi v případě teplého neuniformního plazmatu. Nejprve si to ukážeme na případu stacionárního problému

$$0 = qn\vec{E} - \nabla p - mn\nu_m\vec{u}$$

→ předp. neutrál. č. nemající drift. rychlost

→ srážk. frekv. pro přenos hybnosti – předp. že nezávisí na $\vec{u}$

pro izotermální plazma $\nabla p = kT\nabla n$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{q\vec{E}}{m\nu_m} - \frac{kT}{m\nu_m}\frac{\nabla n}{n} \qquad /\cdot n$$

$\boxed{\Gamma = n\cdot\vec{u}}$

$\nu_m \equiv n_g\sigma_m v$

$\sigma \sim v^{-1}$ … polarization scattering Lieberman str. 60

$$\vec{\Gamma} = \pm\mu n\vec{E} - D\nabla n$$

pohyblivost $\mu = \frac{|q|}{m\nu_m}$; $D = \frac{kT}{m\nu_m}$ → vztah mezi μ a D = Einsteinova relace

$$\mu = \frac{|q|}{kT}D$$

3.1.2 Volná difuze

bez el. pole $\Gamma = -D\nabla n$ Fickův zákon

Můžeme dosadit do rce kontinuity

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\nabla^2 n = 0$$

pro srážky tuhých koulí $\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu_m}$, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$\Rightarrow D = \frac{\pi}{8}\lambda^2\nu_m \sim \frac{(\Delta x)^2}{\tau}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta x \text{ … délka kroku} \\ \tau \text{ … doba mezi kroky}\end{array}\right\}$ pro náhodnou procházku

3.1.3 Ambipolární difuze

Vztah pro $\vec{\Gamma}$ platí pro e⁻ i ionty. Předp., že $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i$ v nějaké oblasti, takže se náboj nehromadí (platí i pro ioniz. srážky – generují e⁻-iont. pár). Protože e⁻ jsou lehčí ⇒ ↑ $\vec{u}$ (v nemag. plazmatu) a lokální pole ↑, aby udrželo rovnováhu. Na počátku tedy více e⁻ opustí plazma a vznikne náboj. rozdíl ⇒ ⇒ el. pole. Berme $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i = \vec{\Gamma}$ $\quad n_e \approx n_i = n$

$$\Gamma_i = \Gamma_e$$

$$\mu_i n\vec{E} - D_i\nabla n = -\mu_e n\vec{E} - D_e\nabla n$$

$$\vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e}\frac{\nabla n}{n}$$

$$\Gamma = \Gamma_i = \mu_i\frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e}\nabla n - D_i\nabla n = -\underbrace{\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}}_{D_a}\nabla n$$

a opět Fickův zákon $\Gamma = D_a\nabla n$

rce kont. $\frac{\partial n}{\partial t} - D_a\nabla^2 n = 0$

ambip. dif. koef. se ve slabě ioniz. výboji může zjednodušit, protože $\mu_e \gg \mu_i$ $\left(\mu = \frac{|q|}{m\nu_m}\right)$ $\Rightarrow$ $D_a \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e$

a pomocí Einst. vztahu $\mu = \frac{|q|}{kT} D$ $\quad D_a \approx D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)$

Ambip. dif. koef. je tedy vázán k pomalejším částicím (ionty ... D_i) a koef. je vyšší o faktor $1 + \frac{T_e}{T_i} \doteq \frac{T_e}{T_i} \gg 1$ a tedy e^- i ionty difundují rychleji než v případě bez iontů.

Pro případ $\mu_e \gg \mu_i$, $T_e \gg T_i$ $\quad \Gamma_i \doteq \mu_i n \vec{E}$ protože ∇p_i je oproti Γ_i a $\mu_i n \vec{E}$ zanedb.

zatímco

$\Gamma_e = -\mu_e n E - D_e \nabla n \doteq 0$ protože tok Γ_e je zanedb.

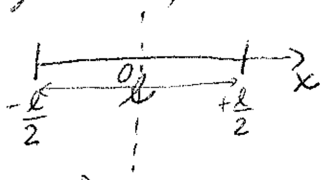
$\Rightarrow$ iont. pohyb je dominován pohyblivostí a pohb e^- je určen BKR

3.2 Řešení difuzní rovnice $\rightarrow \frac{\partial n_{e,i}}{\partial t} - D_{e,i} \nabla^2 n_{e,i} = 0 \;/\; \frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = 0$

3.2.1 1D čas. záv. řešení

v 1D jednoduše, v reci nejsou zdroje $\Rightarrow$ řešení musí klesat v čase

v této geometrii:



(homogenní deska)

separace prom. $n(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$X \frac{dT}{dt} = D T \frac{d^2X}{dx^2} \qquad /:XT$$

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{D}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$$

a tedy obě fce musí $\sim -\frac{1}{\tau}$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow T = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{X}{D\tau} \Rightarrow X = A \cdot \cos\frac{x}{\Lambda} + B \sin\frac{x}{\Lambda}$$

kde $\Lambda = \sqrt{D\tau}$ dif. délka

okraj. podm. $X = 0$ pro $x = \pm \ell/2$ a nejnižší řád řešení = symetrické řešení s $B = 0$ $\Rightarrow$ $\Lambda_0 = \sqrt{D\tau_0} = \frac{\ell}{\pi}$ $\Rightarrow$ $\tau_0 = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D}$

$$\boxed{n = n_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \cos\frac{\pi x}{\ell}}$$

$n = X \cdot T$

$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} n(0,x)\,dx = n_0$

$n_0 \left[\sin\frac{\pi \cdot \ell}{2\ell} + \sin\frac{\pi}{2}\right] = n_0$

pro lib. tvar hustoty v $-\ell/2 < x < \ell/2$ můžeme hustotu zapsat jako Four. řadu s $n\left(-\frac{\ell}{2}\right) = n\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$

$$X = \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos\frac{(2i+1)\pi x}{\ell} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin\frac{2i\pi x}{\ell}\right]$$

Půdp., že každý mód klesá s vlastní charakt. rychlostí. Symetr. i-tý mód má toto řešení $n_i = n_0 A_i e^{-t/\tau_i} \cos\frac{(2i+1)\pi x}{\ell}$

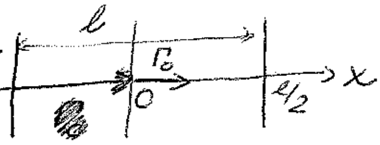
a opět z okraj. podm. $\tau_i = \left[\frac{\ell}{(2i+1)\pi}\right]^2 \frac{\ell}{D}$

Pro vyšší mód ~~...~~ $i>0$ je pokles rychlejší a tedy nejnižší mód se stává dominantní po určitém čase.

3.2.2 1D ustálené řešení

Pro ustálený výboj je zajímavější řešení dif. rce bez čas. závislosti. V tomto případě je ovšem nutné mít-buď nějaký tok do sledované oblasti
nebo -||- zdroj ve -||-

a) Nejjednodušší případ je pro tok vstupující na jedné straně desky a vystupující na druhé



$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\nabla^2 n = 0 \Rightarrow -D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$$

$$n = Ax + B$$

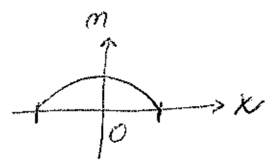
pro $\Gamma(0) = \Gamma_0$ a $n\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \Rightarrow \underline{n = \frac{\Gamma_0}{D}\left(\frac{\ell}{2} - x\right)}$

$\Gamma = -D\nabla n$ ... nezávisí na x

b) Zajímavější je ionizace uvnitř sledované oblasti

$$\cancel{\frac{\partial n}{\partial t}} - D\nabla^2 n = \nu_{iz} n$$ a opět vezme 1D případ

⇒ rovnice stejného typu jako v 3.2.1 (čas. záv. řešení, které po separaci proměnných ⇒ $\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{X}{D\tau}$)



$$n = n_0 \cos\beta x$$

kde $\beta = \sqrt{\frac{\nu_{iz}}{D}}$

Tok $\Gamma = -D\frac{dn}{dx} = D n_0 \beta \sin(\beta x)$

difuzní rychlost $u = \frac{\Gamma}{n} = D\beta\, tg(\beta x)$

Pro okrajové podm. $n\left(\frac{\ell}{2}\right) = n\left(-\frac{\ell}{2}\right) = 0$

máme $n = n_0 \cos\frac{\pi x}{\ell}$

a tedy $\beta = \sqrt{\frac{\nu_{iz}}{D}} = \frac{\pi}{\ell}$

Pro ambipolární difúzi nahradíme $D = D_a$ a el. pole $E = \underset{<0}{\frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e}} \overset{<0}{\frac{\nabla n}{n}}$

$D_i = \frac{kT_i}{m_i \nu_{mi}} \ll \frac{kT_e}{m_e \nu_{me}} = D_e$

⇒ E je kladné

tedy ve směru osy x ⇒ udržuje e^- uvnitř

což se může zdát divné, protože ν_{iz}, D jsou fce prostředí. Jsou ovšem fcí teploty a tento vztah je tedy vlastně rovnice pro teplotu.

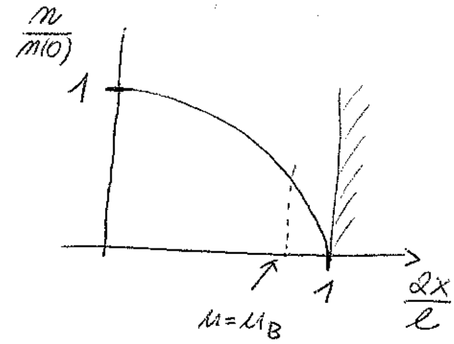
~~...~~ je třeba vzít do úvahy, že tyto okraj. podm. nejsou self-konzistentní. To vidíme když $\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right) = D n_0 \frac{\pi}{\ell}$ ale zároveň $\underset{\text{číslo}}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right)} = \underset{0}{n\left(\frac{\ell}{2}\right)} u\left(\frac{\ell}{2}\right)$ ⇒ $u \to \infty$

což nemůže nastat,

takže tyto okrajové podmínky nejsou úplně přesné!

Víme, že na okraji plazmatu $x=\frac{l'}{2}$, kde $\frac{l'}{2}=\frac{l}{2}-\Delta$ ← tloušťka stěn. vrstvy
je drift. rychlost je Bohmova rychlost

$$u_B=\sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$$



zároveň $u = D\underbrace{\sqrt{\frac{\nu_{iz}}{D}}}_{\beta}\, tg\left(\sqrt{\frac{\nu_{iz}}{D}}\frac{l'}{2}\right) = u_B$

pro velmi tenkou stěn. vrstvu $l'\approx l$
a opět jde o rovnici pro teplotu T_e

3.3 Řešení pro nízký tlak

3.3.1 Model proměnné pohyblivosti

viz Smirnov, 1981, problem 4.5

V nízkotlakých výbojích je efektivní iontová rychlost pro srážky s neutrály spíše driftová rychlost $|\vec{u}|$ než tepelná v_{thi}, protože $|\vec{u}| \gg v_{thi}$ ve většině oblasti výboje. Místo $\lambda_i=\frac{v_i}{\nu_m}$ tedy $\lambda_i\approx\frac{|\vec{u}_i|}{\nu_m}$ a tedy $\nu_m\approx\frac{|\vec{u}_i|}{\lambda_i}$
a srážk. frekvence závisí na drift. rychlosti. Místo $\mu=\frac{e}{m_i\nu_m}$ můžeme psát $\mu_i=\frac{2e\lambda_i}{\pi m_i|u_i|}$, kde λ_i v rozumném rozsahu rychlostí bude konstantní.
My jsme ale na začátku předp., že ν_m na $\vec{u}$ nezávisí!
To platí pro vyšší tlaky, kde ionty nezískají takovou drift. rychlost.
Pro nízké tlaky už to neplatí. Můžeme ovšem dále předp. $\mu_e\gg\mu_i$, $T_e\gg T_i$.

- Dále předp., že iont. driftová rychlost získaná působením el. pole dominuje nad drift. rychlostí kvůli ∇p $\Rightarrow$ $\vec{u}_i=\mu_i\vec{E}$
- Pro elektrony ~~…~~ že drift. rychlost je zanedbatelná $\Rightarrow$

$$\vec{E}=-\frac{kT_e}{e}\frac{\nabla n}{n}$$

(To odpovídá předp., že hustota e^- je dána Boltzm. faktorem – viz kap. 1: $en_eE+\nabla p_e=0$, $en_eE+kT_e\nabla n_e=0$
a řešení pro $E=\nabla\Phi$ $\quad n=n_0e^{\frac{e\Phi}{kT_e}}$)

- Pro ionty vezmeme rovnici kontinuity v ustáleném stavu

$$\nabla\cdot(n\vec{u}_i)=n\nu_{iz}$$

Řešíme opět v 1D

$$u_i=\mu_i\cdot E$$

$$u_i=\frac{2}{\pi}\frac{e\lambda_i}{m_iu_i}E=-\frac{2}{\pi}\frac{e\lambda_i}{m_iu_i}\frac{kT_e}{e}\frac{dn}{dx}\frac{1}{n}$$

$$u_i=\sqrt{-\frac{kT_e}{m_i}\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_i}{n}\frac{dn}{dx}}=u_B\sqrt{\frac{2\lambda_i}{\pi}}\sqrt{-n\frac{dn}{dx}}$$

Dosadíme do rovnice kontinuity

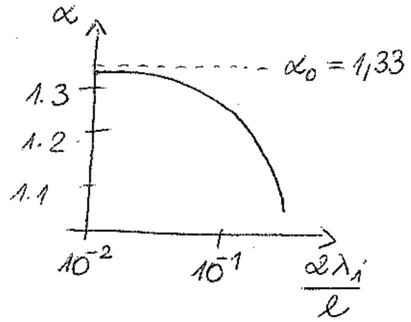
$$u_B\sqrt{\frac{2\lambda_i}{\pi}}\frac{d}{dx}\sqrt{-n\frac{dn}{dx}}=\nu_{iz}n$$

Toto je nelineární rovnice, řešení (Godyak + Maximov 1986) pro $u_i=u_B$ na okraji stěnové vrstvy

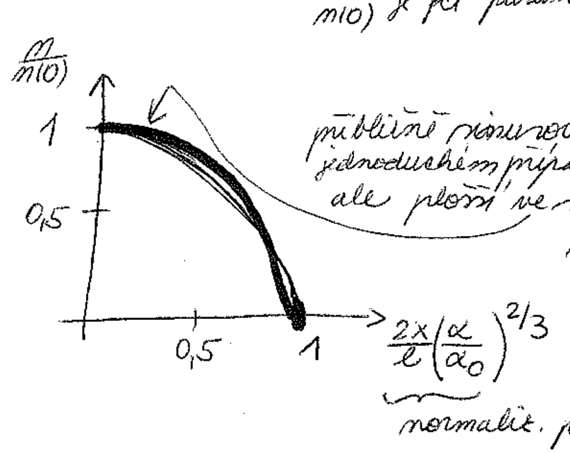
$$\alpha^{2/3}\xi = \frac{1}{2}\ln\left[(1-y^3)^{1/3}+y\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2(y^{-3}-1)^{1/3}-1}{\sqrt{3}}\right] + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

kde $\xi = \frac{2x}{l}$, $y = \frac{n}{n(0)}$ a $\alpha = \frac{\nu_{iz} l}{2u_B}\left(\frac{\pi l}{4\lambda_i}\right)^{1/2} \approx 1{,}25$ normalizovaná ioniz. rychlost

$\downarrow$ normalizovaná hustota



$\Rightarrow \frac{n}{n(0)}$ je fcí parametru $\frac{2\alpha^{1/3}x}{l}$



přibližně sinusový profil jako v jednoduchém případě ν_m není fcí u ale plošší ve středu a prudší na kraji

3.3.2 Langmuirovo řešení

Pro velmi nízký tlak můžeme předp., že se ionty nesráží $\lambda_i > l$.
Pak opět bereme Boltzm. vztah pro e^- ale iont. drift. rovnici $u_i = \mu_i E$ nahradíme ~~iont. ryc~~ z.z. energie $\frac{1}{2} m_i u_i^2 + e\phi = 0$

To je ekvivalentní tomu, že v pohyb. rovnici necháme inerc. člen $mn\frac{Du}{Dt}$ a člen s el. polem.
V rovnici z.z.E jsme zanedb. iont. tep. rychlost ve středu plazmatu, kde $\phi = 0$.
Jinde je $\phi < 0$.
Řešíme pro u_i a ϕ nahradíme z Boltzm. relace pro e^- $n = n_0 e^{\frac{e\phi}{kT_e}}$

$$\frac{d}{dx}\left[n \cdot u_i\right] = \nu_{iz} n$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{2kT_e}{m_i}\ln\frac{n}{n_0}\right)^{1/2} \cdot n\right] = \nu_{iz} n$$

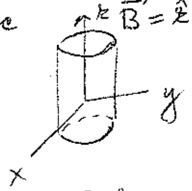
3.4 Difuze v mg. poli

3.4.1. Úvod

Uvažujme difuzi — v přítomnosti mg. pole
— el. pole
— gradientů hustoty

Ve slabě ioniz. plazmatu jsou nejdůležitější e^- / protože mají malý gyrační rádius.

Uvažujme válec $\vec{B} = \hat{z} B_0$



gradienty hustoty míří dovnitř
ambipol. el. pole —||—
(udržuje slabě magnetizované ionty!)

Když e^- rotuje kolem siločár a dojde ke srážce ⇒ změna směru ⇒ posun gyračního středu o ~ gyrační poloměr r_{ce}. Proces je náhodný = difuzní a pokud $r_{ce} \ll \lambda_e$ (střední volná dráha e^-) tak r_{ce} nahrazuje λ_e jako stř. voln. dráhu

Podél mg. pole se nic zvláštního neděje. Ve směru ⊥ napíšeme pohyb. rci

$$0 = q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_{\perp\alpha} \times \vec{B}_0) - kT \nabla n_\alpha - m_\alpha n_\alpha \nu_{m\alpha} \vec{u}_{\perp\alpha}$$

$\alpha = e$, ionty ... dále bez něj!
izotermické plazma, tedy rce energie = stav. rce a $T = \text{konst}$ ⇒
$\Rightarrow \nabla p = kT \nabla n$

inerciál člen $\frac{d\vec{u}}{dt}$ zanedbán ... předp. dostatečně velké ν_m (hodně srážek)

ve složkách

$$m n \nu_m u_x = q n E_x - kT \frac{\partial n}{\partial x} + q n u_y B_0 \qquad / : m n \nu_m$$
$$m n \nu_m u_y = q n E_y - kT \frac{\partial n}{\partial y} - q n u_x B_0$$

pomocí definice μ a D $\quad \left(\mu = \frac{|q|}{m \nu_m}, \; D = \frac{kT}{m\nu_m} \right)$ a $\omega_c = \frac{q B_0}{m}$

$$u_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\omega_c}{\nu_m} u_y$$
$$u_y = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\omega_c}{\nu_m} u_x$$

vyřešíme pro u_x a u_y:

$$[1 + (\omega_c \tau_m)^2]\, u_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial x} + (\omega_c \tau_m)^2 \frac{E_y}{B_0} - (\omega_c \tau_m)^2 \frac{kT}{q B_0} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \qquad (5.4.3a)$$

kde $\tau_m \equiv \frac{1}{\nu_m}$

$$[1 + (\omega_c \tau_m)^2]\, u_y = \pm \mu E_y - \frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial y} + (\omega_c \tau_m)^2 \frac{E_x}{B_0} + (\omega_c \tau_m)^2 \frac{kT}{q B_0} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \qquad (5.4.3b)$$

když μ a D podělíme faktorem $1 + (\omega_c \tau_m)^2$ dostáváme $\mu_\perp$ a $D_\perp$

$$\mu_\perp = \frac{\mu}{1 + (\omega_c \tau_m)^2}, \qquad D_\perp = \frac{D}{1 + (\omega_c \tau_m)^2}$$

Ve vektorové podobě máme z

$$\boxed{\vec{u}_\perp = \pm \mu_\perp \vec{E} - D_\perp \frac{\nabla n}{n} + \frac{\vec{u}_E + \vec{u}_D}{1 + (\omega_c \tau_m)^{-2}}}$$

kde $\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}_0}{B_0^2}$ ... E×B drift
$\vec{u}_D = -\frac{kT}{q B_0^2} \frac{\nabla n \times \vec{B}_0}{n}$ ... diamagnetický drift

oboje kolmé na pole a gradient hustoty

- Drifty ⊥ na pole a ⊥ ∇n ($\vec{u}_E, \vec{u}_D$) – zpomaleny srážkami
  $\nu_m \uparrow \Rightarrow \tau_m \downarrow \Rightarrow \frac{1}{1+(\omega_c \tau_m)^{-2}} \downarrow$
- Toky způsobené pohyblivostí μ a difuzí D ⊥ na pole, ALE ∥ s ∇n – existují pouze pokud ∃ srážky
  – jsou zpomaleny přítomností mg. pole
  $\omega_c = \frac{qB_0}{m} \uparrow \Rightarrow \frac{1}{1+(\omega_c \tau_m)^2} \downarrow$

Pokud jsou drifty $\vec{u}_E, \vec{u}_D$ v nějakém plazmatu důležité, vede to k nestabilitám, anomálními transportu (⊥ na ∇n) a velkým tokům proudu.

Faktor $\omega_c \tau_m$ je důležitou veličinou pro mg. udržení.
Pro $\omega_c \tau_m \gg 1$ – silné zamezení difuzi
$$D_\perp \doteq \frac{kT}{m\nu_m} \frac{1}{(\omega_c \tau_m)^2} = \frac{kT\nu_m}{m\omega_c^2}$$
zanedbání (1+)

$\Rightarrow \quad D_\perp \sim \nu_m \quad$ (zatímco $D_\parallel \sim \frac{1}{\nu_m}$)

Protože $\nu_m \sim m^{-1/2}$ (pro konst. energii a účinný průřez: $\nu = n_g \sigma v = n_g \sigma \sqrt{\frac{2E}{m}}$),
je $D_\perp \sim m^{1/2}$ a $D_\parallel \sim m^{-1/2}$ ... tedy lehčí e^- se bez mg. pole pohybují rychleji a silně je potlačen pohyb ⊥

Z hlediska principu „náhodné procházky": $\bar{v}^2 = \frac{8kT}{\pi m}$ $\quad r_c = \frac{\bar{v}}{\omega_c}$

$$D_\perp = \frac{\pi}{8} r_c^2 \nu_m$$

a pro náhodnou procházku difuze bez mg. pole jsme měli $D = \frac{\pi}{8} \lambda^2 \nu_m$ (protože $\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu_m}$)

$\Rightarrow$ r_c nahrazuje λ (střední volnou dráhu)

3.4.2 Ambipolární difuze

a) Pokud zatím o plazma přemýšleli pouze kolmo na mg. pole: rovnost toku e^- a iontů (jako předtím u amb. difuze) dává ⊥ amb. dif. koef.

$$D_{\perp a} = \frac{\mu_{\perp i} D_{\perp e} + \mu_{\perp e} D_{\perp i}}{\mu_{\perp i} + \mu_{\perp e}}$$

pro $\mu_{\perp i} \gg \mu_{\perp e}$ když je mg. pole silné, dostáváme $D_{\perp a} \doteq D_{\perp e}\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)$
(tedy obráceně než bez mg. pole, kde jsme naopak měli předp., že $\mu_i \ll \mu_e$)
$\Rightarrow$ znovu je amb. dif. koef. dán pomalejšími e^-, ale ve slabě ioniz. plazmatu $T_i \ll T_e$ takže $D_{\perp a} \doteq D_{\perp e}$

The density gradient points radially inward, and the ambipolar electric field, to contain the weakly magnetized ions, also points inward. When an electron gyrating around a line of force suffers a collision, it changes its direction, which would tend to move its center of gyration, on the average, by a gyration radius r_{ce}. This process is random, and therefore diffusive, with r_{ce} replacing λ_e as the diffusion mean free path when $r_{ce} \ll \lambda_e$.

To derive the perpendicular diffusion coefficient, we write the perpendicular component of the fluid equation for either species from (2.3.15):

$$0 = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}_0) - kT\nabla n - mn\nu_m \mathbf{u}_\perp$$

where we have again assumed an isothermal plasma and taken ν_m sufficiently large that the inertial (time-derivative) term is negligible. It is convenient to express the vector equation in terms of the rectangular components (taken to be x and y):

$$mn\nu_m u_x = qnE_x - kT\frac{\partial n}{\partial x} + qnu_y B_0 \tag{5.4.1a}$$

and

$$mn\nu_m u_y = qnE_y - kT\frac{\partial n}{\partial y} - qnu_x B_0 \tag{5.4.1b}$$

s of μ and D from (5.1.4) and (5.1.5), (5.4.1) can be rewritten:

The assumption that the diffusion takes place only across the magnetic field is almost never satisfied. Even for finite length systems in which l (along B_0) $\gg$ d (across B_0), the more rapid diffusion along B_0 is usually important. We therefore consider the regime in which $l \sim d$, as shown in Fig. 5.4. For simplicity, rectangular coordinates are used and the y direction is taken to be uniform and of infinite extent. Since the walls are conducting, it is clear that the fluxes across and along B_0 are coupled, and ambipolarity requires only that the total electron and ion fluxes integrated over the wall surfaces to be equal.

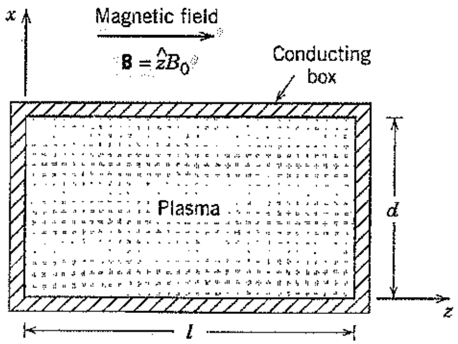


FIGURE 5.4. A plasma-filled conducting box in a dc magnetic field, illustrating the calculation of ambipolar diffusion in a magnetized plasma.

Thus, the ambipolar diffusion coefficients are

$$D_{\|a} = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \tag{5.4.16}$$

parallel to the field, and

$$D_{\perp a} = \frac{\mu_i D_{\perp e} + \mu_e D_{\perp i}}{\mu_i + \mu_e} \tag{5.4.17}$$

perpendicular to the field. We see that the parallel diffusion is the same as the case without an applied magnetic field. However, (5.4.17) and (5.4.11) are not the same. Since $\mu_e \gg \mu_i$ and normally $D_{\perp i} \gtrsim D_{\perp e}$, (5.4.17) simplifies to

$$D_{\perp a} \approx D_{\perp i} \tag{5.4.18}$$

With this approximation the diffusion equation (5.4.15) becomes

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + D_{\perp i} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{5.4.19}$$

such that the perpendicular loss of ions is by free (not ambipolar) diffusion alone. Physically this corresponds to a situation in which the electrons, flowing along field lines, almost completely remove the negative charge that produces E_x. Since electrons preferentially flow out along the field and ions flow out perpendicular to the field, $\Gamma_i \neq \Gamma_e$ and currents must flow in the wall.

If electron flow along field lines is impeded by inertial or collisional effects or if the axial sheath voltage $V_\|$ varies with x, then there can be a substantial ion acceleration potential $E_x d \gtrsim T_i$. In this case the perpendicular ion diffusion term in (5.4.14) is smaller than the mobility term and the preceding derivation of $D_{\perp a}$ is invalid. There is experimental evidence (see Lieberman and Gottscho, 1994, Section VIII.D.2) and also computer simulations (Porteous et al., 1994) that indicate the existence of these radial potentials in magnetized processing discharges such as ECR's (see Section 13.1). Measurements and simulations both show that ions are lost radially from the bulk plasma with a characteristic loss velocity of order the Bohm velocity $u_B = (eT_e/M)^{1/2}$. However, radial expansion of field lines might affect the results. If an electric field exists across field lines with magnitude $E_x \sim T_e/d$, then we can estimate $\Gamma_{\perp i} \sim \mu_{\perp i} n T_e/d$. Then defining $D_{\perp a}$ through $\Gamma_{\perp i} \equiv -D_{\perp a} dn/dx \sim D_{\perp a} n/d$, we obtain

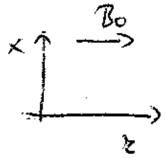
$$D_{\perp a} \sim \mu_{\perp i} T_e \sim D_{\perp i} \frac{T_e}{T_i}$$

in place of (5.4.18). For $d \sim l$, this can lead to substantial perpendicular ion losses in magnetized discharges, as observed in ECR measurements and simulations.

It is well known that plasmas not in thermal equilibrium are subject to instabilities. This is a major subject of fully ionized, near collisionless plasmas, and is treated in detail in most texts on plasma physics (see, for example, Chen, 1984). Magnetic field confinement is one source of such disequilibrium that leads to various instabilities which tend to destroy the confinement. Large-amplitude disturbances can lead to turbulent diffusion, which has the upper limit of the *Bohm diffusion* coefficient,

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{T_e}{B} \tag{5.4.20}$$

The scaling with B makes Bohm diffusion increasingly important as a source of cross-field diffusion at high magnetic fields, since from (5.4.10), we see that classical cross-field diffusion scales as $D_\perp \propto 1/B^2$. Bohm diffusion tends to be less important at high collisionality (low temperature and high pressure) both due to the comparative scaling of D_B to $D_\perp$ and also due to the fact that high collisionality tends to inhibit some of the instabilities. We have not considered nonclassical diffusion in this text. The reader wishing to explore the subject further can turn to Chen or other texts on high-temperature plasmas.



The diffusion is obtained from the continuity equations for electrons and ions:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \mu_e \frac{\partial}{\partial z}(nE_z) + D_{\perp e} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_{\perp e} \frac{\partial}{\partial x}(nE_x) \tag{5.4.13}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - \mu_i \frac{\partial}{\partial z}(nE_z) + D_{\perp i} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \mu_{\perp i} \frac{\partial}{\partial x}(nE_x) \tag{5.4.14}$$

Exact two-dimensional solutions to these two coupled nonlinear diffusion equations have not been obtained. Letting $V_{s\perp}$ and $V_{s\parallel}$ be the potential drops across the perpendicular and parallel sheaths, then because the plasma is surrounded by a conducting wall, the potential in the center can be estimated as

$$\Phi \sim V_{s\parallel} + \frac{1}{2}E_z l \sim V_{s\perp} + \frac{1}{2}E_x d$$

Two limiting cases can be considered depending on the size of E_x. For $E_x d \lesssim T_i$, the perpendicular mobility terms in (5.4.13) and (5.4.14) are small compared to the perpendicular diffusion terms. Dropping the mobility terms, as done by Simon (1959), multiplying (5.4.13) by μ_i and (5.4.14) by μ_e and adding the two equations, we obtain

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \frac{\mu_i D_{\perp e} + \mu_e D_{\perp i}}{\mu_i + \mu_e} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{5.4.15}$$

Thus, the ambipolar diffusion coefficients are

$$D_{\parallel a} = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \tag{5.4.16}$$

parallel to the field, and

$$D_{\perp a} = \frac{\mu_i D_{\perp e} + \mu_e D_{\perp i}}{\mu_i + \mu_e} \tag{5.4.17}$$

perpendicular to the field. We see that the parallel diffusion is the same as the case without an applied magnetic field. However, (5.4.17) and (5.4.11) are not the same. Since $\mu_e \gg \mu_i$ and normally $D_{\perp i} \gtrsim D_{\perp e}$, (5.4.17) simplifies to

$$D_{\perp a} \approx D_{\perp i} \tag{5.4.18}$$

With this approximation the diffusion equation (5.4.15) becomes

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + D_{\perp i} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{5.4.19}$$

such that the perpendicular loss of ions is by free (not ambipolar) diffusion alone. Physically this corresponds to a situation in which the electrons, flowing along field lines, almost completely remove the negative charge that produces E_x. Since electrons preferentially flow out along the field and ions flow out perpendicular to the field, $\Gamma_i \neq \Gamma_e$ and currents must flow in the wall.

If electron flow along field lines is impeded by inertial or collisional effects or if the axial sheath voltage $V_{s\parallel}$ varies with x, then there can be a substantial ion acceleration potential $E_x d \gtrsim T_i$. In this case the perpendicular ion diffusion term in (5.4.14) is smaller than the mobility term and the preceding derivation of $D_{\perp a}$ is invalid. There is experimental evidence (see Lieberman and Gottscho, 1994, Section VIII.D.2) and also computer simulations (Porteous et al., 1994) that indicate the existence of these radial potentials in magnetized processing discharges such as ECR's (see Section 13.1). Measurements and simulations both show that ions are lost radially from the bulk plasma with a characteristic loss velocity of order the Bohm velocity $u_B = (eT_e/M)^{1/2}$. However, radial expansion of field lines might affect the results. If an electric field exists across field lines with magnitude $E_x \sim T_e/d$, then we can estimate $\Gamma_{\perp i} \sim \mu_{\perp i} n T_e/d$. Then defining $D_{\perp a}$ through $\Gamma_{\perp i} \equiv -D_{\perp a} dn/dx \sim D_{\perp a} n/d$, we obtain

$$D_{\perp a} \sim \mu_{\perp i} T_e \sim D_{\perp i} \frac{T_e}{T_i}$$

in place of (5.4.18). For $d \sim l$, this can lead to substantial perpendicular ion losses in magnetized discharges, as observed in ECR measurements and simulations.

It is well known that plasmas not in thermal equilibrium are subject to instabilities. This is a major subject of fully ionized, near collisionless plasmas, and is treated in detail in most texts on plasma physics (see, for example, Chen, 1984). Magnetic field confinement is one source of such disequilibrium that leads to various instabilities which tend to destroy the confinement. Large-amplitude disturbances can lead to turbulent diffusion, which has the upper limit of the *Bohm diffusion* coefficient,

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{T_e}{B} \tag{5.4.20}$$

The scaling with B makes Bohm diffusion increasingly important as a source of cross-field diffusion at high magnetic fields, since from (5.4.10), we see that classical cross-field diffusion scales as $D_\perp \propto 1/B^2$. Bohm diffusion tends to be less important at high collisionality (low temperature and high pressure) both due to the comparative scaling of D_B to $D_\perp$ and also due to the fact that high collisionality tends to inhibit some of the instabilities. We have not considered nonclassical diffusion in this text. The reader wishing to explore the subject further can turn to Chen or other texts on high-temperature plasmas.

5.5 MAGNETIC MULTIPOLE CONFINEMENT

In magnetic multipole confinement, a set of alternating rows of north and south pole permanent magnets is placed around the surface of a discharge chamber. A typical configuration, with the rows arranged around the circumference of a cylindrical chamber, is shown in Fig. 5.5. In some cases, one or both cylindrical endwalls are also covered with rows of magnets. Commonly, each row is composed of a set of many permanent magnets (diameter ~ length ~ 1 inch, $B_0 \sim 1$ kG). The alternating rows of magnets generate a *line cusp* magnetic configuration in which the magnetic field strength B is a maximum near the magnets and decays with distance into the chamber, as shown in Fig. 5.5. Hence most of the plasma volume can be virtually magnetic field free, while a strong field can exist near the discharge chamber wall, inhibiting plasma loss and leading to an increase in plasma density and uniformity.

Magnetic Fields

The structure of the magnetic field can be understood by unwrapping the circumference to obtain the alternating periodic arrangement of magnet rows in rectangular geometry shown in Fig. 5.6. Assuming that each row of magnets has a width $\Delta \ll d$, the separation of the rows, then B_y at $y = 0$ can be approximated as

$$B_y(x, 0) = B_0\Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i\, \delta\left(x - id - \frac{d}{2}\right) \tag{5.5.1}$$

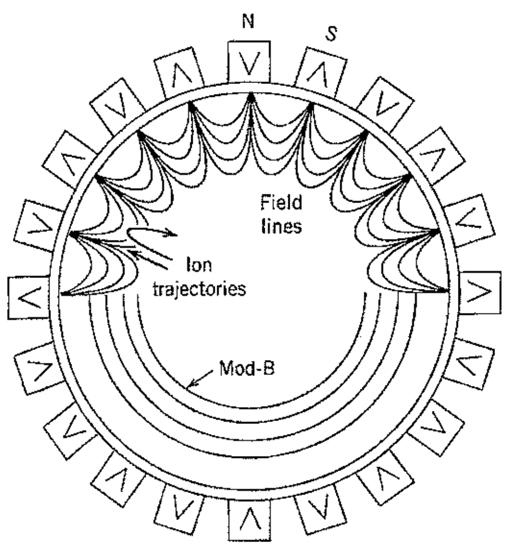


FIGURE 5.5. Magnetic multipole confinement in cylindrical geometry, illustrating the magnetic field lines and the $|\mathbf{B}|$ surfaces near the circumferential walls.

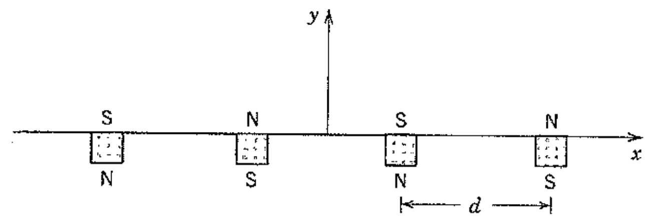


FIGURE 5.6. Schematic for determining multipole fields in rectangular geometry.

where δ is the Dirac delta function. Introducing the Fourier transform,

$$B_y(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{d} x \tag{5.5.2}$$

and equating (5.5.1) and (5.5.2), then if we multiply by $\sin(\pi x/d)$ and integrate from 0 to d, we obtain the fundamental ($m = 1$) Fourier mode amplitude A_1, such that

$$B_{y1}(x, 0) = \frac{2B_0\Delta}{d} \sin \frac{\pi x}{d} \tag{5.5.3}$$

Because $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ and $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ for $y > 0$, B_{y1} satisfies Laplace's equation:

$$\frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial y^2} = 0 \tag{5.5.4}$$

The solution to (5.5.4) with boundary conditions that $B_{y1}(x, 0)$ is given by (5.5.3) and that $B_{y1}(x, y \to \infty)$ is not infinite is

$$B_{y1}(x, y) = \frac{2B_0\Delta}{d} \sin \frac{\pi x}{d} \mathrm{e}^{-\pi y/d} \tag{5.5.5}$$

From the z component of $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, we have

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial y} = \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} \tag{5.5.6}$$

Using (5.5.5) in (5.5.6) and integrating with respect to y, we obtain

$$B_{x1}(x, y) = -\frac{2B_0\Delta}{d} \cos \frac{\pi x}{d} \mathrm{e}^{-\pi y/d} \tag{5.5.7}$$

The field amplitude is $B_1 = (B_{x1}^2 + B_{y1}^2)^{1/2}$. Using (5.5.5) and (5.5.7), we obtain

$$B_1(x,y) = \frac{2B_0\Delta}{d}e^{-\pi y/d} \qquad (5.5.8)$$

showing an exponential decay that is independent of x into the discharge column with decay length d/π. The smooth B_1 surfaces, as well as the alternating B_{y1} and B_{x1} components can be clearly seen in Fig. 5.5. The higher-order Fourier modes with nonzero coefficients ($m = 3, 5, \ldots$) have even shorter decay lengths ($d/3\pi$, $d/5\pi$, $\ldots$), and their effect is negligible a short distance from the chamber wall. Thus, we expect this picture to hold at distances significantly greater than d/π within the plasma chamber. Midway between the magnets (at $x = 0, \pm d, \ldots$), the magnetic field is zero at $y = 0$ and rises to a maximum value

$$B_{\max} = \frac{\pi^2}{8}\frac{\Delta^2}{d^2}B_0$$

at $y \approx 0.28\,d$, after which it decays exponentially with y. The diffusion across this region is important in determining the confinement properties of the multipoles.

Plasma Confinement

Experimentally (Leung et al., 1975, 1976), multipole fields have been found to have three important effects on low-pressure plasma confinement:

1. Hot electrons, having energies $\gtrsim$ dc sheath potential, can be efficiently confined, provided there is end confinement either with magnetic mirrors, multipoles, or negative electrostatic potentials. These electrons, if created and trapped at low pressures (large mean free path compared to the discharge size) can be the main ionization source for a discharge.
2. Significant (but not large) improvements can be obtained in the confinement of the bulk (low-temperature) plasma in a discharge.
3. Significant improvements in radial plasma uniformity can be obtained.

The effects can, at least partly, be understood in terms of magnetic mirroring in the cusps as governed by (4.3.15). The energetic electrons that are not lost by moving parallel to field lines are mirrored as they move into the higher field near the cusp. Their velocity vectors with respect to the magnetic field at the wall are randomized within the central plasma chamber, where (4.3.15) does not hold. The number of reflections from the cusp then depends on the size of the "loss cone" angle in velocity space compared to the possible solid angle of 4π within which the velocity vector can be found. At lower velocities (or higher pressures), the scattering can take place collisionally on the outward flight, greatly increasing the loss rate. Ambipolar fields also play a part, but in a complicated manner. The improvement in plasma uniformity

follows because the diffusion is inhibited in the region of strong magnetic field, as described in Section 5.4. Thus, most of the density gradient occurs at the plasma edge, where the diffusion coefficient is small, leading to a relatively uniform central region.

As an example (Leung et al., 1975), a low-pressure dc argon discharge was created in a 30-cm-diameter, 33-cm-long chamber by primary energetic electrons emitted from a hot filament placed inside the chamber and biased at -60 V. With multipoles and at $p = 0.8$ mTorr, the energetic electrons were confined for up to 70 bounces within the chamber, and the plasma density was increased by approximately a factor of 100. Of this increase, roughly a factor of 30 was measured to be due to the increased confinement of the energetic electrons, and an additional factor of three increase was due to the improvement in confinement for the bulk plasma. However, in most processing discharges the ionization is not produced by a class of very energetic electrons, and the second and third effects listed above are most significant.

A useful concept to discuss confinement is the *effective leak width* w of a line cusp. If there are $\mathcal{N}$ cusps of width w, then the effective circumferential loss width is $\mathcal{N}w$ and the fraction f_{loss} of diffusing electron–ion pairs that will be lost to the wall is

$$f_{\text{loss}} = \frac{\mathcal{N}w}{2\pi R}, \qquad \mathcal{N}w < 2\pi R \qquad (5.5.9)$$

The boundary condition at the wall ($y \approx 0$) for the ambipolar diffusion of plasma within the field-free discharge volume is then

$$\Gamma_{\text{wall}} = f_{\text{loss}} n_s u_B \qquad (5.5.10)$$

We return to the example in Section 5.2 of steady-state diffusion in a plasma slab of length l with an ionization source proportional to the density. The density profile is given by (5.2.15). Equating $\Gamma(l/2)$ in (5.2.17) to Γ_{wall} in (5.5.10), we obtain, for a thin sheath,

$$\frac{f_{\text{loss}} u_B}{D_a \beta} = \tan\frac{\beta l}{2} \qquad (5.5.11)$$

This transcendental equation for β must in general be solved numerically. However, if f_{loss} is not too small, such that the left-hand side of (5.5.11) still remains much greater than unity, then we can approximate $\beta \approx \pi/l$ on the left-hand side to obtain

$$\tan\frac{\beta l}{2} = \frac{f_{\text{loss}} u_B l}{\pi D_a} \qquad (5.5.12)$$

This is the usual regime for most processing discharges. Taking the ratio of $n_s \equiv n(l/2)$ to $n_0 \equiv n(0)$, and using (5.2.15) to substitute for $\tan(\beta l/2)$ in terms of n_s, we

4. Stejnoměrná stěn. vrstva

4.1. Základní úvahy a rovnice

4.1.1. Základní úvahy

a) Co je to stěnová vrstva?

Na hranici plazmatu musí existovat spád potenciálu, který udržuje v plazmatu pohyblivější nabité částice a dochází k vyrovnání toku ⊕ a ⊖ nábojů. => stěnová vrstva

Pro obvyklý případ elektropozitivního plazmatu < ⊕ ionty, e^- } stejný počet; e^- jsou mnohem pohyblivější

=> plazma se nabíjí kladně vzhledem k uzemněné stěně.

b) Základní úvahy pro slabě ioniz. plazma:

Udržení plazma díky ohřevu e^- el. zdrojem => typ. $T_e \sim eV$ } => koncentrace e^- klesá s Boltzm. faktorem

Ionty jsou téměř v rovnováze s plynem => studené } => monoenerget. ionty urychlené spádem potenciálu ve vrstvě

viz odvození pro pohyb. rci bez driftové rychlosti;

tj. $e n_e E + \nabla p_e = 0$

↳ zde teplota (pro ionty ≐ 0)

=> n_e klesá na vzdálenosti λ_D, aby byla stěna od e^- odstíněna abychom ale dostali správně rovnováhu toku nabitých částic, nemůžeme Poissonovu rovnici linearizovat (jako jsme to udělali při odvození λ_D).

Dále se ukáže nutnost existence přechodové oblasti mezi neutrál. plazmatem a nabitou stěn. vrstvou – presheath ... aby byla udržena kontinuita toku iontů

=> odtud vyplývá velikost ~~...~~ rychlosti iontů na hranici stěn. vrstvy - plazma } viz kap. 4.2

Bohmova rychlost u_B

c) Jestliže ~~v plazmatu~~ jsou do plazmatu vnořeny dvě nezávislé elektrody a mezi ně přiveden potenciál, může každá z elektrod odvádět proud, ačkoliv je dosaženo celkové rovnováhy toku nab. částic (v předchozím bodě šlo o rovnováhu toku na jednu plochu, aby se dále nenabíjela).

Nejjednodušší analýza je pro elektrodu s vysokým negat. potenciálem vzhledem k plazmatu.

- nejjednodušším příkladem je stěn. vrstva s homog. hustotou iontů, tzv. matrix sheath – viz kap. 4.3

- pro vysoké napětí je proud na elektrodu většinou jen proudem iontů. Pak ovšem (pokud neexistují srážky) není ustálená hustota iontů v self-konzistentním řešení uniformní, ale je přímo popsána Child-Langmuir. zákonem

Odchylky od idealizovaného případu :

d) 1. Idealizované podmínky stud. iontů, které se uvažovali v bodech b a c, nejsou vždy splněny a T_i nemůže být oproti T_e zanedbána, – případ silně ioniz. plasmat. Pak se musí dělat komplikovanější kinetické úvahy

2. Také je možné, že EEDF není Maxwellovská, jak jsme předpokládali ⇐ souvisí s mechanismy ohřevu e^- nebo ztrát energie (např. ↓p vf výboje CCP). Pak pokles n_e ve stěn. vrstvě není dán Boltzm. faktorem, ale musí být získán kinetickými výpočty.

3. Další problém je elektronegat. plyn, kde je e^- zachycení důležité ⇒ ⊖ náboj tvoří e^- a ⊖ ionty. Pokud je ⊖ iontů dost, mění se to podstatně pohyblivost ⊖ náboje ⇒ změna podmínek na hranici sheathu

e) Otázka srážek (další odchylka od ideal. případu):

f) Tato kapitola popisuje stěn. vrstvy konst. v čase. Existují další dva zajímavé případy – stěn. vrstvy v oscil. vf. potenciálu (Lieberman kap. 11 – CCP vf)
–„– vytvořené přechodně pulzním potenciálem (Lieberman kap. 16)

V obou případech může být problém vyřešen přibližně pokud je zde separace čas. měřítek pro e^- a ionty : $f_{pe} \gg \frac{1}{\tau} \gg f_{pi}$ ⇒ e^- reagují okamžitě, ionty pomalu

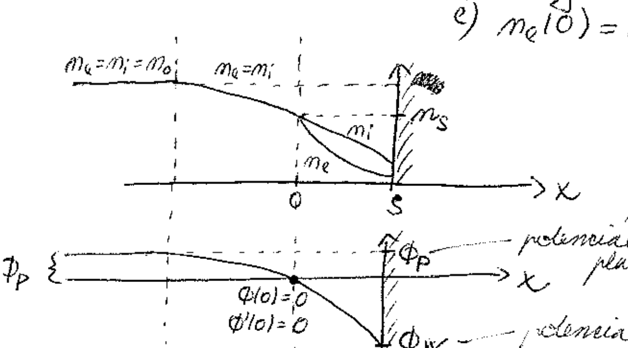
↳ perioda změn pole

plasm. frekvence

4.1.2 Základní rovnice pro idealiz. případ bezsrážk. stěn. vrstvy

předp. a) e^- Maxwell. ⇒ T_e
b) ionty studené $T_i = 0$
c) $n_e(0) = n_i(0)$ na hranici plasma – sheath $x = 0$ (viz obr.)

Definujeme nulový potenciál Φ v $x = 0$ (–„–) a uvažujeme, že ionty v $x=0$ mají rychlost u_s



Z.Z.E iontů (žádné srážky):

$$\frac{1}{2}Mu^2(x) = \frac{1}{2}Mu_s^2 - e\Phi(x) \Rightarrow u = \sqrt{u_s^2 - \frac{2e\Phi}{M}}$$

Kontinuita toku iontů (žádná ionizace v sheathu)

$$n_i(x)u(x) = n_{is}u_s$$

koncentrace iontů na hranici stěn. vrstvy

$$\Rightarrow \boxed{n_i = n_{is}\left(1-\frac{2e\Phi}{Mu_s^2}\right)^{-1/2}}$$

Pro e^- platí Boltzm. rozdělení

$$n_e(x) = n_{es}^{\frac{e\Phi}{kT_e}}$$

Položíme $n_{es} = n_{is} = n_s$ na hranici sheathu (viz obr.) a dosadíme do Poiss. rovnice

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_e - n_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{en_s}{\varepsilon_0}\left[e^{\frac{e\Phi}{kT_e}} - \left(1-\frac{\Phi}{\mathcal{E}_s}\right)^{-1/2}\right], \qquad (1)$$

kde $e\mathcal{E}_s = \frac{1}{2}Mu_s^2$ ... počáteční energie iontů

Tato rovnice je základní nelineární rovnice, která určuje potenciál a n_e, n_i v sheathu. Jak ovšem uvidíme v příští kapitole <u>má stabilní řešení jen pro dostatečně velké u_s</u> – toto u_s vznikne v neutrálním presheathu

4.2 Bohmovo kritérium stěn. vrstvy

4.2.1 Bohm. rychlost

První integrál rce (1) můžeme dostat násobením $\frac{d\Phi}{dx}$ a integrací přes x:

$$\int_0^x \frac{d\Phi}{dx'}\frac{d}{dx'}\left(\frac{d\Phi}{dx'}\right)dx' = \frac{en_s}{\varepsilon_0}\int_0^x \frac{d\Phi}{dx'}\left[e^{\frac{e\Phi}{kT_e}} - \left(1-\frac{\Phi}{\mathcal{E}_s}\right)^{-1/2}\right]dx'$$

pro $x=0$ je $\Phi=0$ i $\Phi'(0)=0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = \frac{en_s}{\varepsilon_0}\left[\frac{kT_e}{e}e^{\frac{e\Phi}{kT_e}} - \underset{\Phi=0}{\underset{\uparrow}{\frac{kT_e}{e}}} + 2\mathcal{E}_s\left(1-\frac{\Phi}{\mathcal{E}_s}\right)^{1/2} - \underset{\Phi=0}{\underset{\uparrow}{2\mathcal{E}_s}}\right]$$

Tato rovnice by se musela integrovat numericky, abychom dostali $\Phi(x)$. Je ale jasné, že <u>PS musí být kladná</u>. Fyzikálně to znamená, že n_e musí být pořád menší než n_i v oblasti sheathu ($n_e < n_i$ pro $x > 0$).

Protože předpokládame, že je to problém pro malé Φ, expandujeme PS rce Tayl. řadou do 2. řádu

$$\frac{kT_e}{e}\left(\cancel{1}+\frac{e\phi}{kT_e}+\left(\frac{e}{kT_e}\right)^2\frac{\phi^2}{2}-\cancel{1}\right)+2\mathcal{E}_s\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{\phi}{\mathcal{E}_s}\right)^{-1/2}}_{1}\cdot\left(-\frac{1}{\mathcal{E}_s}\right)\phi-\frac{1}{4}(1)^{-3/2}\cdot\left(-\frac{1}{\mathcal{E}_s}\right)^2\frac{\phi^2}{2}-\cancel{1}\right)=$$

$$=\cancel{\phi}+\frac{e}{kT_e}\frac{\phi^2}{2}-\cancel{\phi}-\frac{1}{4}\frac{\phi^2}{\mathcal{E}_s}\geq 0$$

a tedy
$$\frac{e}{kT_e}-\frac{1}{2\mathcal{E}_s}\geq 0$$

$$\mathcal{E}_s\geq\frac{kT_e}{2e}$$

$$\frac{1}{2}\frac{Mu_s^2}{e}\geq\frac{kT_e}{2e}$$

$$u_s\geq u_B=\sqrt{\frac{kT_e}{M}}\qquad \text{Bohm. sheath criterion}$$

Aby ionty získaly tuto rychlost, musí $\exists$ konečné el. pole v plasmatu ... presheath (oblast malého E ale typicky mnohem širší než sheath).

4.2.2 Vztahy pro presheath

V presheath platí $\quad n_i = n_e$

derivace logaritmu $\quad \frac{1}{n_i}\frac{dn_i}{dx}=\frac{1}{n_e}\frac{dn_e}{dx}$

dosadíme $n_i=\frac{J_i}{eu_i}$ $\quad\Rightarrow$ LS $\quad \frac{\cancel{e}u_i}{J_i}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_i}{\cancel{e}u_i}\right)=\frac{u_i}{J_i}\left(\frac{J_i' u_i-u_i'\cdot J_i}{u_i^2}\right)=\frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}-\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx}$

a $\quad n_e=n_0 e^{\frac{e\phi}{kT_e}}$ $\quad\Rightarrow$ PS $\quad \frac{1}{n_e}\cdot n_e\cdot\frac{e}{kT_e}\cdot\frac{d\phi}{dx}$

$\Rightarrow$ celá rovnice $\quad \frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}=\frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}$

předp. $u_i<u_B$ $\Rightarrow$ $\quad \frac{1}{u_B}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}<\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}=\frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}$

tedy $\quad \frac{1}{u_B}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}<\frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}$

což je splněno buď pro

a) $\cdot\ \frac{1}{u_B}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}<0\ ,\ \frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}=0$

nebo pro

b) $\cdot\ \frac{1}{u_B}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}>0\ ,\ \frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}>\frac{1}{u_B}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}$

Protože ze Z.Z.E iontů plyne $\frac{1}{u_B}\frac{du_i}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}>0$ platí případ a) jen tehdy dochází ke srážkám v presheathu (ion friction) a zároveň $J_i=$ konst $\left(\frac{1}{J_i}\frac{dJ_i}{dx}=0\right)$

Případ b) indikuje ionizaci nebo geometrické omezení plasmatu.

Z.Z.E $\quad \frac{1}{2}Mu^2=\frac{1}{2}Mu_s^2-e\phi$

$Mu\frac{du}{dx}=-e\frac{d\phi}{dx}\quad /:Mu$

$\frac{1}{u_B}\frac{du}{dx}+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}=\frac{1}{u_B}\left(-\frac{e}{Mu}\frac{d\phi}{dx}\right)+$

$+\frac{e}{kT_e}\frac{d\phi}{dx}>\frac{d\phi}{dx}\left(-\frac{e}{Mu_B^2}+\frac{e}{kT_e}\right)=$

$=0$ (protože $u_B^2=\frac{kT_e}{M}$)

Když uvážíme specifické případy tedy např. konkrétní hodnotu střední volné dráhy pro změnu hybnosti (částa elast. srážek tedy tření), ionizaci nebo geometrické omezení, mohou být řeš. pro presheath vyřešeny analyticky.

Nějaká řešení viz Riemann, J. Phys. D 24 (1991) 493 pro

a) geometrickou kontrakci proudu na sférickou sondu

b) planární kolizní presheath

c) ionizující presheath s ionizací úměrnou n_e

a) geometrická presheath, relaxuje k nerušenému plazmatu (tedy bez el. pole $E = \mathrm{grad}\,\phi$)

b) kolizní presheath vede na logaritm. tvar potenciálu → transport iontů vyžaduje silové el. pole v plazmatu

c) ionizující presheath končí s nul. el. polem ve středu symetrického plazmatu

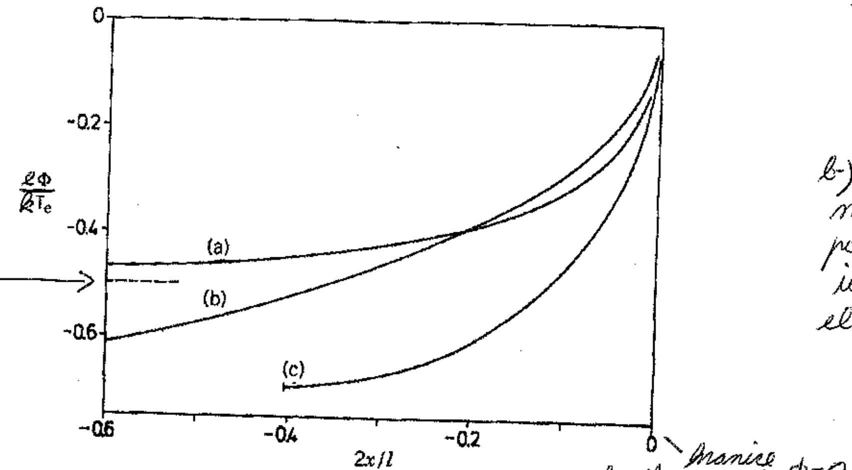


FIGURE 6.2. Φ/T_e versus position within the presheath, showing (a) the geometric presheath, (b) a planar collisional presheath, and (c) a planar ionization presheath. The sheath-presheath edge is at the right (after Riemann, 1991).

Tloušťka presheathu pro b) ~ řádově střední volná dráha pro srážky iont - neutrál

pro c) ~ řádově střední volná dráha pro e^- - neutrál. ionit. srážky

Ačkoliv řešení pro potenciál vypadají rozdílně, všechny dávají $\boxed{u_i = u_B}$ na hranici sheathu. Růst nehomog. pole v tomto místě indikuje vznik prostorového náboje (tedy $n_e \neq n_i$).

Spád potenciálu v oblasti presheathu, který urychlí ionty na u_B, je tedy

$$\frac{1}{2} M u_B^2 = e\Phi_P$$

— potenciál plazmatu vzhledem k hranici presheath-sheath

$$u_B = \sqrt{\frac{kT_e}{M}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M \frac{kT_e}{M} = e\Phi_P$$

$$\boxed{|\Phi_P| = \frac{kT_e}{2e}}$$

Poměr hustoty náboje na hranici presheath-sheath (ozn. n_s) ku hustotě v bulku plazmatu (n_b) je z Boltzman. relace

$$n_s = n_b e^{-\frac{e\Phi_P}{kT_e}} = n_b e^{-\frac{1}{2}} \doteq 0{,}61 \cdot n_b$$

zde by pro e^- mělo být ⊕ ale naše definice $\phi(0)=0$ a $\phi<0$ v presheathu zde vyžaduje ⊖ znaménko!

4.2.1 Potenciál ~~stěn. vrstvy pro~~ plovoucí stěny

Tok iontů (konst. skrze sheath) = tok e^-

potenciál stěny vzhledem k hranici presheath–sheath

$$n_s u_B = \frac{1}{4} n_s \bar{v}_e \, e^{\frac{e\Phi_W}{kT_e}}$$, kde $\bar{v}_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}}$ střední rychlost e^-

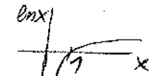
$u_B = \sqrt{\frac{kT_e}{M}}$

$$\Rightarrow n_s \sqrt{\frac{kT_e}{M}} = \frac{1}{4} n_s \sqrt{\frac{8kT_e}{2\pi m}} \, e^{\frac{e\Phi_W}{kT_e}}$$

$$e^{\frac{e\Phi_W}{kT_e}} = \left(\frac{2\pi m}{M}\right)^{1/2}$$

$$\Phi_W = \frac{kT_e}{e} \ln\left(\frac{2\pi m}{M}\right)^{1/2} = -\frac{kT_e}{e} \underbrace{\ln\left(\frac{M}{2\pi m}\right)^{1/2}}$$

neboť je to kladné číslo $M > 2\pi m$



$\Rightarrow$ Φ_W je záporné a úměrné T_e s faktorem

např. pro vodík $\ln\left(\frac{M}{2\pi m}\right)^{1/2} \doteq 2{,}8$

argon –"– $\doteq 4{,}7$ ($m_{Ar} = 40\,u$)

Na hranici presheath–sheath mají ionty počáteční energii $\mathcal{E}_s = \frac{kT_e}{2e}$ neboli $\frac{\mathrm{T}_e}{2}$ – teplota v eV

a skrze sheath (dc, bezesrážková) získají navíc

Ar^+ energii $4{,}7\,\mathrm{T}_e$ $\Rightarrow$ celkem $(4{,}7+0{,}5)\mathrm{T}_e \doteq 5{,}2\,\mathrm{T}_e$

$\mathrm{T}_e = \frac{kT_e}{e}$ $\quad (1\,\mathrm{eV} \mathrel{\hat{=}} \frac{e}{k}\,\mathrm{K})$

$T_e = \frac{e}{k}\mathrm{T}_e$ $\quad 1\,\mathrm{eV} \mathrel{\hat{=}} 11600\,\mathrm{K}$

pozn. Pokud je na stěně nějaký potenciál, získají samozřejmě mnohem vyšší energii, ale pak stěna odebírá značný proud (viz další odstavec 4.3).

pozn. Tloušťka sheathu se zjistí integrováním dif. rce pro $\Phi(x)$ ... jen numericky a pak položením $\Phi(s) = \Phi_W$

Typické $s \sim$ několik λ_D

4.3 Stěnová vrstva s vysokým ~~po~~ napětím

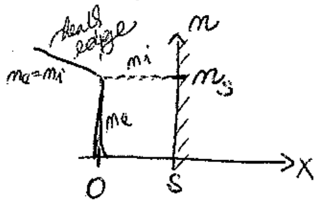
$\frac{kT_e}{e}$ ... teplota v eV

4.3.1 Matrix sheath

Potenciál ve stěn. vrstvě je často mnohem větší než řádově $\frac{kT_e}{e}$ (viz Φ_W pro plovoucí stěnu) $\Rightarrow$ $n_e \sim n_s e^{\frac{e\Phi}{kT_e}} \to 0$ $\Rightarrow$ ve vrstvě jsou pouze ionty

Nejjednodušší vysokonapěťová vrstva pro předp. konst. hustoty iontů = matrix sheath

$n_i = n_s = konst$



MR $\quad \frac{dE}{dx} = \frac{e n_s}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{e n_s}{\varepsilon_0} x \quad \text{... lineární el. pole}$$

$$E = -\frac{d\Phi}{dx}$$

$$-\int E\,dx = \Phi$$

$$\Phi = -\frac{e n_s}{\varepsilon_0} \frac{x^2}{2} \quad \text{... parabol. potenciál}$$

Pro $\Phi(s) = -V_0$ ... na stěně
máme vztah pro tloušťku sheathu $s = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 V_0}{e n_s}}$
K zjištění tloušťky sheathu relativně k $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_e}{e^2 n_s}}$ na hraně sheathu

$$s = \lambda_D \sqrt{2V_0 \frac{e}{kT_e}} \text{ teplota v eV}$$

$\Rightarrow$ tloušťka je desítky λ_D

4.3.2 Child Law Sheath

V určitém davu není matrix sheath self-konzistentní, protože neuvažuje pokles hustoty iontů jak ionty zrychlují ve stěn. vrstvě.
V limitu, že počáteční energie iontů $e\mathcal{E}_s$ je <u>malá</u> $\left(e\mathcal{E}_s = \frac{1}{2}M u_s^2 \doteq 0\right)$
je Z.Z.E $\quad \frac{1}{2}M u^2(x) = -e\phi(x)$

a $\quad J_0 = e n(x) u(x)$ konst. tok iontů

$$\Rightarrow \quad n(x) = \frac{J_0}{e}\left(-\frac{2e\phi}{M}\right)^{-1/2}$$

Použijeme Poiss. rci ($n_e = 0$) $\quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{J_0}{\varepsilon_0}\left(-\frac{2e\phi}{M}\right)^{-1/2}$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right]\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\frac{J_0}{e}\left(\frac{2e}{M}\right)^{-1/2}(-\phi)^{-1/2}\frac{d\phi}{dx}$$

vynásobíme $\frac{d\phi}{dx}$ a integrujeme od 0 do X

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = 2\frac{J_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{2e}{M}\right)^{-1/2}(-\phi)^{1/2} \qquad \int_0^x \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx = \cdots \int_0^\phi -\phi^{-1/2}\, d\phi$$

kde okraj. podmínky $\frac{d\phi}{dx} = -E = 0$ pro $x = 0$

vezmeme odmocninu a integrujeme

$$-\phi^{3/4} = \frac{3}{2}\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{2e}{M}\right)^{-1/4} x$$

Pro $\phi(s) = -V_0$ vyřešíme vztah pro J_0 $\quad \Rightarrow \quad \boxed{J_0 = \frac{4}{9}\varepsilon_0\left(\frac{2e}{M}\right)^{1/2}\frac{V_0^{3/2}}{s^2}}$

Toto je známý ~~CL~~ Child-Langm. zákon pro space-charge-limited current - dvě elektrody
= proud limitovaný prostorovým nábojem v planární diodě - dvě elektrody s fixní vzdáleností jako ve vakuové diodě.
Pro náš případ, ale platí $\quad J_0 = e n_s u_B \quad$, kde $u_B = \sqrt{\frac{kT_e}{M}}$
takže může zjistit vztah pro tloušťku stěn. vrstvy

$$e n_s \sqrt{\frac{kT_e}{M}} = \frac{4}{9}\varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{2e}{M}\right)}\frac{V_0^{3/2}}{s^2}$$

$$s = \frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon_0}{e n_s}\right)^{1/2}\left(\frac{2e}{kT_e}\right)^{1/4} V_0^{3/4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda_D\left(2V_0\frac{e}{kT_e}\right)^{3/4}$$

teplota v eV

Když to porovnáme s tloušťkou matrix sheath, vidíme, že Child law sheath je větší o faktor $\sim\left(V_0\frac{e}{kT_e}\right)^{1/4}$ $\Rightarrow$ řádově $100\times\lambda_D \sim 1\,cm$ v typ. výboji