(Fyzika plazmatu I)

Lieber. ch. 2

1. Základní rovnice v plazmatu a rovnovážný stav

1.1. Úvod

Plazma je komplikované
- nabité č. jsou ovlivněny vnějším el. a mg. polem a zároveň k němu přispívají
- srážky částic (ačkoliv mají taky elmg charakter) probíhají v prostoru a čase na mnohem kratších intervalech než aplikovaná pole nebo pole vzniklé zprůměrováním jejich pohybu

Proto musíme udělat nějaká zjednodušení
- srážky č. jsou uvažovány nezávisle na polích s velkými charakt. měřítky, aby se určilo rovnovážné rozdělení rychlostí nabitých částic
- rozdělení rychlostí je zprůměrováno přes rychlosti, aby se určil makroskop. pohyb
- makroskop. pohyb se děje v
  - vnějších apl. polích
  - a v makroskop. polích generovaných zprůměrovaným pohybem částic
- tyto self-konzistentní pole nejsou lineární, ale můžeme je linearizovat, především když budeme studovat vlny v plazmatu

přístup přes makroskopické veličiny

pozn. Když si vzpomeneme na makroskop. rce, vidíte:
- V makroskop. přístupu prostorové variace rozd. fce vedou k tlakovým silám v makrosk. rci.
- —"— se srážky projevují ve tvorbě/zániku částic a průměrné síle tření mezi různými typy částic a ve výměně energie mezi nimi

②

1.2. Maxwell. rovnice, proud, napětí, Lorentz. síla

Maxwell. rovnice ve vakuu:

pro základní veličiny, tedy $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (fundamental fields)

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

celková hustota náboje

$\rho = \rho' + \rho_{pol}$ — polarizační (vázaný náboj)

celková hustota proudu:

$\vec{J} = \vec{J}' + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_M$ — magnetizační (kruhový pohyb náboje), polarizační

pro částečné (partial) veličiny, tedy $\vec{D}$ a $\vec{H}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\nabla \cdot \vec{H} = 0$

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\nabla \times \vec{D} = - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

Maxwell. rovnice pro obecný materiál:

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ — celk. náboj

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ — celk. hustota proudu

$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho'$

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}' + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ — vektor polarizace

$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ — vektor magnetizace

a platí

$\rho = \rho' - \nabla \cdot \vec{P}$

$\vec{J} = \vec{J}' + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$

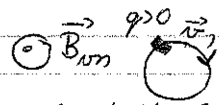
Pro lineární neizotropní materiál (dielektrikum) $\vec{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{E}$ — dielektr. tenzor ... uvažujeme v plasmatu (můžeme přejít k tomuto přístupu)

Pro —"— izotropní —"— $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$ — relat. permitivita

Pro lineární izotropní magnetikum $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$ — permeabilita vakua, mg susceptibilita ... ale plasma není lineární magnetikum, takže se to nezjistí

Proč?

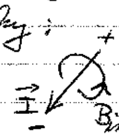
vnější pole



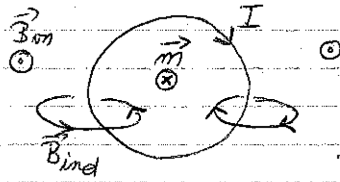
$\Rightarrow$ proudové smyčky, které indukují mg. pole (dle Ampér. zákona pravé ruky:

palec = proud

prsty ohnuté = $\vec{B}_{ind}$



tedy



uvnitř smyčky proti vn. poli, venku po směru

mg dipól

jeho mg. moment $|\vec{m}| = I \cdot A = \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B}$

$\vec{m} = - \frac{W_\perp}{B^2} \vec{B}$

vektor magnetizace $\vec{M} = \vec{m} \cdot n \rightarrow$ není $\sim |\vec{B}|$ ale nepřímo

tedy to není lineární magnetikum

Lieberman p. 27

- Maxwell. rovnice doplňuje rovnice kontinuity náboje $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0}$

- Pro úvahy el. obvodů ~~a~~ výbojů se mohou hodit Kirchhoffovi zákony

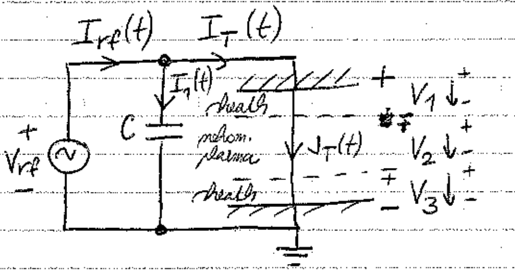
1. pro proud   MR: $\nabla\times\vec{B} = \left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\mu_0$

toto rozměr proudu, tzv. posuvný proud

$$\vec{J}_T = \vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

uděláme $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \nabla\cdot\vec{J}_T$

$$0 = \nabla\cdot\vec{J}_T$$



a v jedné ~~dimenzi~~ složce $\frac{dJ_{Tx}}{dx}=0 \Rightarrow J_{Tx}=J_{Tx}(t)$ ... nezávisí na x

⇒ celk. proud skrz prostor. nehomog. 1D výboj nezávisí na x a ještě obecněji Kirchhoff. zákon proudu (pro uzly) $I_{rf} = I_T + I_1$

2. pro napětí   Pokud je čas. změna mg. pole zanedbatelná (často v plazmatu) máme z MR $\nabla\times\vec{E}=0$ ⇒ el. pole můžeme zapsat pomocí skalárního potenciálu $\vec{E}=-\nabla\cdot\varphi$

integrujeme přes uzavř. křivku C: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\oint_C\nabla\varphi\, d\vec{l} = -\oint_C d\varphi = 0$ uzavřená

⇒ Kirchhoffův zákon pro napětí $\sum_i V_i = 0$ po myšl. křivka

$$V_{rf} = V_1+V_2+V_3$$

- Poissonova rovnice   pro $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$ $\nabla\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\nabla\cdot\varphi$

dosadíme do $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dots=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

určení potenciálu z rozložení náboje

- Lorentzova síla $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

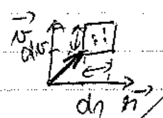
pohyb. náboje přispívají k ρ a $\vec{J}$. Pokud ρ a $\vec{J}$ lineárně úměrné $\vec{E}$ a $\vec{B}$ pak jsou rovnice pro pole lineární. Toto obecně pro plazma neplatí, ale linearizace může být možná ⇔ ~~tzv~~ rel. dielektr. konst.

Lieberman p. 31 a Appendix B

1.3. Kinetická teorie plazmatu

1.3.1. BKR

Uvažujeme 6D prostor $(\vec{r},\vec{v})$ (6 nezávislých proměnných) a na něm rozdělovací fci $f(\vec{r},\vec{v},t)$ ... hustota pravděpodobnosti výskytu částic v obj. elementu $d\vec{r}d\vec{v}$ v čase t



BKR $\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla_r f+\vec{a}\cdot\nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{sr}$ v kart. souř. $\nabla_r = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla_v = \dots$

bezsrážková BKR (neboli Vlasovova rce)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla_r f+\vec{a}\cdot\nabla_v f=0$$

polohový vektor uvažovaného obj. elementu a nikoliv vztah $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ pro jednu částici ⇒ nezávislé souřadnice

5

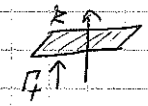
Ještě bychom mohli do předp. tvaru $\ln f$ zahrnout moment hybnosti $(B.\vec{v})$ a dostali bychom Maxwell. rozdělení tepelných rychlostí, tedy po porovnatele driftujícího rychlosti $\langle \vec{v} \rangle$

Koeficienty určíme z úvahy
- normalizace f $\quad \iiint f \, d\vec{v} = n$
- termodyn. úvahy

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_v \cdot n = \frac{3}{2} n k T$$

$$f(v) = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2kT}}$$

průměrná ~~rychlost~~ velikost rychlosti $\quad \bar{v} = \frac{\int_0^\infty v f \, dv}{n} = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$



tok částic z jedné strany plochy $\quad \Gamma_+ = \frac{1}{4} n \bar{v} \quad \Leftarrow \quad \Gamma_+ = n \langle v_{z+} \rangle$

↳ průměrování v 1D jen po rychlosti kladného směru

tok energie -||- $\quad S_+ = n \langle \frac{1}{2} m v^2 v_{z+} \rangle$

$S_+ = 2kT \, \Gamma_+ \Rightarrow$ průměrná kin. energie (částici přenesená plochou v jednom směru $E_k = 2kT$

Někdy se hodí definovat rozdělení pomocí jiných proměnných např. rozdělení energie $E = \frac{1}{2} m v^2$

$$4\pi g(E) \, dE = 4\pi f(v) v^2 dv \qquad \frac{dE}{dv} = m v \, dv$$

$$g(E) = \frac{v(E) f(v(E))}{m} \longleftarrow$$

$$\text{kde } v(E) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

↑ **1. hod**

Lieberman p. 549

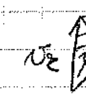
1.3.4. ~~[illegible]~~ Krookův srážk. člen

Uvažujme pouze srážky mezi e^- a neutrály:

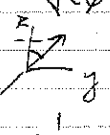
$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{c} = \int d^3 v_g \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{\pi} (f_e' f_g' - f_e f_g) \, v \, I(v, \theta_1) \sin\theta_1 \, d\theta_1$$

kde uvažujeme, že neutrály jsou nekonečně hmotné, takže $|\vec{v} - \vec{v}_g| = v = v'$ a $f_g = f_g'$. Rozvedeme el. rozděl. fci v řadu do 1. řádu odchylek od anizotropie, kterou ~~[illegible]~~ uvažujeme válc. symetrickou podél směru v_z (viz Fyz. plazmatu) – Legendrovy polynomy):

$$f_e(\cancel{\vec{r}}\, z, v, \psi, t) \approx f_{e0}(\cancel{\vec{r}}\, z, v, t) + \frac{v_z}{v} f_{e1}(\cancel{\vec{r}}, v, t)$$



$\cos\psi = \frac{v_z}{v}$



už není fcí ψ

Lieberman neuvažuje závislost na $\vec{r}$ ale jen z!

Protože $v = v' \Rightarrow f_{e1}' = f_{e1}$ a $f_{e0}' = f_{e0}$, protože tyto koef. závisí na vel. rychlosti a ta $v = v'$

$$(f_e' f_g' - f_e f_g) v = f_{e0} f_g' v + f_{e1} f_g v_z' - f_{e0} f_g v - f_{e1} f_g v_z =$$

$$= f_{e1} f_g (v_z' - v_z) \qquad \text{... vztah B.13}$$

~~Pro nekonečně hmotné neutrály~~

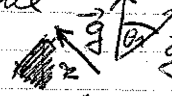
$\cancel{v_z' = v_x \cos\phi_1 \sin\theta_1 + v_y \sin\phi_1 \sin\theta_1 + v_z \cos\theta_1}$

(6)

Dosadíme (B.13) do srážk. integrálu

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{sr} = \int d^3 v_g \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{\pi} (v_z' - v_z) f_{e1} f_g \, I(v, \theta_1) \sin\theta_1 \, d\theta_1$$

~~Zde zřejmě pro obecnost můžeme osu z volit ve směru původní rychlosti a tedy i původní vzájemné rychlosti (později neuvažujeme již ve vlivě)~~

Protože rozptyl. úhel θ_1 je úhel  a $|\vec{g}| = |\vec{g}'| = |\vec{v}| = |\vec{v}'|$ ~~předpoklad~~

nekonečně hmotné neutrály

$$v_z' - v_z = (\vec{v}' - \vec{v})\hat{z} = (\vec{g}' - \vec{g})\hat{z} = g \overbrace{(\cos\theta_1 - 1)}^{\cos\psi} = v (\cos\theta_1 - 1) \cdot \cos\psi$$

sfér. souřadnice

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{sr} = 2\pi \underbrace{\int f_g \, d^3 v_g}_{n_g} \int_0^{\pi} f_{e1} (\cos\theta_1 - 1) \overbrace{v I}^{\cos\psi} \sin\theta_1 \, d\theta_1$$

rozptyl. úhel

oproti Billencourtovi Lieberman p. 550 zde má ještě $\cos\psi$, protože nemá původní rychlost ve směru $\hat{z}$

Vzpomeneme si, že účinný průřez pro přenos hybnosti σ_m je def.

$$\boxed{\sigma_m = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{\pi} (1 - \cos\theta_1) \, I(\theta_1, v) \sin\theta_1 \, d\theta_1}$$

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{sr} = 2\pi n_g \int_0^{\pi} f_{e1} (\cos\theta_1 - 1) \overbrace{v I}^{\cos\psi} \sin\theta \, d\theta$$

Billencourt ještě zobecňuje takto

takže

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{sr} = -n_g \cdot f_{e1} \cdot \overset{g \text{ (vzájemná rychlost)}}{v} \cdot \sigma_m(v) \cdot \cos\psi$$

$f_{e1}(\vec{r}, v, t)$

dále to můžeme zobecnit $\boxed{\cos\psi f_{e1} = f_e - f_{e0}}$ ~~protože máme $\vec{v}$ ve směru $\hat{z}$!! (jinak $\cos\psi f_{e1} \neq f_e - f_{e0}$)~~

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{sr} = \underbrace{-n_g \cdot v \cdot \sigma_m(v)}_{\nu_m(v)} \cdot (f_e - f_{e0})$$

... srážková frekvence pro přenos hybnosti

$dn = -\sigma n n_g \, dx$

$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = \frac{dn}{n} = -\sigma n_g \, dx$

$\Gamma = \Gamma_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$

$\lambda = \frac{1}{\sigma n_g}$

$v = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \cdot \nu$

$\nu = v \cdot \frac{1}{\lambda} = v \sigma n_g$

Ve Fyz. pl. se na začátku objevil Krook relax. ~~nebol~~ sr. člen ve zjednodušené formě

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{sr} = -\nu_m \cdot (f_e - f_{e0})$$

↳ nezávislé na rychlosti, ale to je příliš velké zjednodušení

⑥

Pro srážkový člen

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{s} = \int d^3 v_g \int_0^{2\pi} d\Phi_1 \int_0^{\pi} f_{e1} f_g (v_z' - v_z) \cdot I(v, \Theta_1) \sin\Theta_1 \, d\Theta_1$$

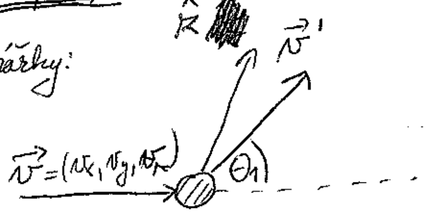
kde Θ_1 ... rozptyl. úhel
Φ_1 ... úhel roviny srážky } úhly v soust. dané prostoru

Rozvoj rozděl. fce dosadíme do srážk. členu: $f_e(z, v, \psi, t) = f_{e\phi}(z, v, t) + \underbrace{\frac{v_z}{v}}_{\cos\psi} f_{e1}(z, v, t)$

Potřebujeme ještě vyjádřit v_z'. Pro nekonečně hmotné neutrály $v = v' = g = g'$.

Nepředpokládáme, že osa z souhlasí s $\vec{v}$ (to uvažoval Billemourd)

rovina srážky:



Vektor $\vec{v}'$ je rotace vektoru $\vec{v}$ – v rovině srážky, která obsahuje osu $\hat{k}$

$\vec{v} = (v_z, v_{pom})$
$\vec{v}' = (v_z', v_{pom}')$

$\Rightarrow v_z' = v_{pom} \sin\Theta_1 + v_z \cos\Theta_1$

$$\begin{pmatrix} v_{pom}' \\ v_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{pom} \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$v_z' = v_x \cos\Phi_1 \sin\Theta_1 + v_y \sin\Phi_1 \sin\Theta_1 + v_z \cos\Theta_1$$

integrace přes Φ_1 v $\langle 0, 2\pi \rangle$ zruší první dva členy a třetí dává $2\pi v_z \cos\Theta_1$:

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{s} = 2\pi \underbrace{\int f_g \, d^3 v_g}_{n_g} \int_0^{\pi} f_{e1} (\cos\Theta_1 - 1) \cdot v_z \, I(v, \Theta_1) \sin\Theta_1 \, d\Theta_1$$

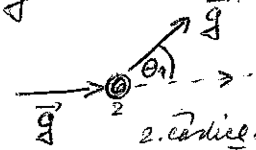
$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{s} = 2\pi \cdot n_g \cdot v \cdot \cos\psi \, f_{e1} \int_0^{\pi} (\cos\Theta_1 - 1) \cdot I(v, \Theta_1) \sin\Theta_1 \, d\Theta_1$$

oproti Billemourdovi je zde navíc $\cos\psi$, protože původní rychlost není ve směru osy $\hat{v}_z$

připomeneme si, že účinný průřez pro přenos hybnosti σ_m je definován:

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos\Theta_1) \, I(\Theta_1, v) \sin\Theta_1 \, d\Theta_1$$

↓ pro válcově sym. případ



2. částice se začne pohybovat ve směru $\vec{g}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{s} = -n_g \cdot f_{e1} \cdot v \cdot \cos\psi \, \sigma_m(v)$$

↓ $f_{e1}(z, v, t)$

dále to můžeme zobecnit pomocí $\boxed{\cos\psi f_{e1} = f_e - f_{e\phi}}$ $\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{s} = \underbrace{-n_g \cdot v \cdot \sigma_m(v)}_{\nu_m(v)} \cdot (f_e - f_{e\phi})}$

srážková frekvence pro přenos hybn.

Ve Fyz. plazmatu se na začátku objevil Krook. relax. s. člen ve zjednodušené formě:

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{s} = -\nu_m \cdot (f_e - f_{e\phi})$$

↳ nezávislé na rychlosti, ale to je příliš velké zjednodušení

$dn = -n_g \cdot \sigma \cdot n \, dx$

$\frac{dn}{n} = \frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\sigma \, n_g \, dx$

$\Gamma = \Gamma_0 \, e^{-x \sigma n_g}$

$\lambda = \frac{1}{\sigma n_g}$

$v = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \cdot \nu$

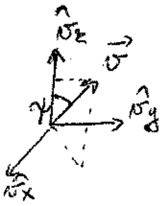
$\nu = v \cdot \sigma \cdot n_g$

7

1.3.5. Kinetická rce pro e^-

Máme BKR pro srážky pouze - elastické mezi e^- a neutrály a el. pole ve směru osy z
(z, v, ψ, t) $\quad \vec{E} = (0, 0, E_z)$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v}\cdot\underbrace{\nabla_r f_e}_{\frac{\partial f_e}{\partial x} = \frac{\partial f_e}{\partial y} = 0} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} = - \nu_m(v)\, f_{e1}(z, v, t) \cos\psi$$



$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_e}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} = - \nu_m(v) f_{e1}(z, v, t) \cos\psi$$

připomínáme, že

$$f_e(z, v, \psi, t) = f_{e0}(z, v, t) + \underbrace{\frac{v_z}{v}}_{\cos\psi} f_{e1}(z, v, t)$$

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \cos\psi \frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + \overbrace{v\cos\psi}^{v_z} \frac{\partial f_{e0}}{\partial z} + \overbrace{v\cos^2\psi}^{v_z\cos\psi} \frac{\partial f_{e1}}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} = -\nu_m(v) f_{e1} \cos\psi$$

Chceme nahradit $\frac{\partial f_e}{\partial v_z}$ pomocí $\frac{\partial f_e}{\partial v}$. Přejdeme do sfér. souř. $v_x, v_y, v_z \to v, \psi, \chi$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \quad \psi = \arccos\frac{v_z}{\sqrt{}}\,, \quad \chi = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x}$$

$$\frac{\partial A(v, \psi, \chi)}{\partial v_z} = \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_z} + \frac{\partial A}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial v_z} + \frac{\partial A}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial v_z}$$

ale $\frac{\partial f_{e0,1}(z, v, t)}{\partial \psi} = \frac{\partial f_{e0,1}}{\partial \chi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_{e0,1}}{\partial v_z} = \frac{\partial f_{e0,1}}{\partial v} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{}} \cdot \cancel{2} v_z =$

$$= \frac{\partial f_{e0,1}}{\partial v} \cdot \cos\psi$$

takže BKR (B.16)

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \cos\psi \frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + v\cos\psi \frac{\partial f_{e0}}{\partial z} + v\cos^2\psi \frac{\partial f_{e1}}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \cdot \cos\psi - \frac{e}{m} E_z \left[\underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial v_z}}_{1} \cdot \frac{f_{e1}}{v} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \left(\frac{f_{e1}}{v}\right) \cdot v_z}_{} \right] = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_{e1}}{v}\right) \cdot \cos\psi \cdot \overbrace{\cos\psi \cdot v} = v \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_{e1}}{v}\right) \cos^2\psi$$

Tuto rovnici jednou vynásobíme $\sin\psi$ a integrujeme $\int_0^\pi d\psi$
a podruhé —"— $\sin\psi\cos\psi$ —"—

(B.17)

<u>ad 1</u> $\quad \frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial f_{e1}}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 f_{e1}\right) = 0$ ... dává čas. změnu izotropní části rozdělení, pokud známe f_{e1} a nezávisí na srážkách

(B.18)

<u>ad 2</u> $\quad \frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{e0}}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} = -\nu_m(v) f_{e1}$ ... známe-li f_{e0} určíme ze srážek čas. změnu anizotropní části rozdělení

(8)

Podoba rovnice (B.17) vyplývá z úvahy elast. srážek e^- s nekonečně těžkými neutrály. Jestliže mají neutrály Maxwell. rozdělení a nejsou nekonečně těžké, objeví se srážkový člen ~~...~~ na pravé straně (B.17):

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{v}{3}\frac{\partial f_{e1}}{\partial z} - \frac{e}{m}E_z \frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 f_{e1}\right) = \frac{m}{m+M}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[v^3\nu_m(v)\left(f_{e0} + \frac{kT}{mv}\frac{\partial f_{e0}}{\partial v}\right)\right] \qquad (B.21)$$

kde T je teplota neutrálů

! Pozor Lieberman má zavedenou teplotu v eV, tedy oprav $T \to \frac{kT}{e}$

1. člen v závorce na PS $\hat{=}$ elastické ztráty energie
2. člen — " — $\hat{=}$ nenulová teplota plynu

Rovnice (B.18) a (B.17)/(B.21) jsou základní kin. rovnice pro el. rozděl. fci v aproximaci $f_e = f_{e0} + \frac{v_z}{v} f_{e1}$ pokud je anizotropie malá, $|f_{e1}| \ll |f_{e0}|$ a Coulomb. srážky jsou zanedbatelné a neuvažujeme neelastické srážky.

Obecněji platí
Hollahan str. 7

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{v}{3}\nabla_r \cdot \vec{f}_{e1} - \frac{e\vec{E}}{3mv^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 \vec{f}_{e1}\right) = \left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\right)_{coul.} + \left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\right)_{e\text{-}m} + \left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\right)_{inel.}$$

$$\frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial t} + v\nabla_r f_{e0} - \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\partial f_{e0}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial t}\right)_{coul.} + \left(\frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial t}\right)_{e\text{-}m} + \left(\frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial t}\right)_{inel.}$$

kde $f_e = f_{e0} + \frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_{e1}$ a $\vec{f}_{e1}$ míří ve směru, v němž e^- driftují v důsledku vnějších polí nebo prostorových gradientů

- Pro elastick. srážky a $m \ll M$ (tedy $\frac{m}{m+M} \doteq \frac{m}{M}$)

$$\left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\right)_{e\text{-}m} = \frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\nu_m v^3 f_{e0}\right) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\nu_m v^2 \frac{kT_g}{M}\frac{\partial f_{e0}}{\partial v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial t}\right)_{e\text{-}m} = -\nu_m \vec{f}_{e1}$$

- Coulomb. srážky, tedy interakce e–e nebo e–iont se stávají důležité pouze pokud je stupeň ionizace vysoký. U většiny laborator. plazmat je stupeň ionizace malý ($< 10^{-5}$) a Coulomb. srážky mohou být zanedbány

- Neelastické srážky přispívají především do rozdělení rychlostí a málo do transportních vlastností elektronů. Proto mohou příslušné členy aproximovány takto

$$\left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\right)_{inelast.} = \sum_i \left[\frac{\tilde{v}}{v} f_{e0}(\tilde{v})\nu_i(\tilde{v}) - f_{e0}(v)\nu_i(v)\right]$$

$$\left(\frac{\partial f_{e1}}{\partial t}\right)_{inelast} = 0$$

rychlost e^- po srážce

kde $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2 + \varepsilon_i$

hustota druhého typu částic

a srážk. frekvence pro každý proces $\nu_i = N \cdot v\, \sigma_i(v)$

⑨

1.3.6 Různé typy ~~[illegible]~~ rozdělení – řešení BKR

Uvažujme udílený dav v homog. konst. el. poli a Telast. srážky e^- – neutrál (pro slabá pole mají e^- málo energie a nedochází k excitacím, disoc., ionizaci)

z (B.18) máme $\left(\frac{\partial f_{e1}}{\partial t}=0,\ \frac{\partial f_{e\phi}}{\partial z}=0\right)$

$$f_{e1}=\frac{eE_z}{m\nu_m}\frac{df_{e\phi}}{dv}$$

Pro zjednodušení považujeme teplotu plynu T_g za zanedbatelnou a $m\ll M$

takže (B.21) vede $\left(\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial t}=0;\ \frac{\partial f_{e1}}{\partial z}=0;\ \frac{m}{m+M}\doteq\frac{m}{M};\ T_g\doteq 0\right)$

$$\frac{eE_z}{3m}\frac{d(v^2f_{e1})}{dv}=-\frac{m}{M}\frac{d(v^3\nu_m(v)f_{e\phi})}{dv}$$

Tento vztah zintegrujeme

$$\cancel{v^2}f_{e1}=-\frac{3m^2}{eE_zM}\cdot v^{\cancel{3}}\nu_m f_{e\phi}$$

a dosadíme za f_{e1} a integrujeme

$$\frac{eE_z}{m\nu_m}\frac{df_{e\phi}}{dv}=-\frac{3m^2}{eE_zM}\,v\,\nu_m f_{e\phi}$$

$$\frac{df_{e\phi}}{f_{e\phi}}=-\frac{3m^3}{e^2E_z^2M}\,v\,\nu_m^2\,dv$$

$$f_{e\phi}=A\exp\left[-\frac{3m^3}{e^2E_z^2M}\int_0^v v'\nu_m^2(v')\,dv'\right]$$

kde A určíme z norm. podm. $\int f_{e\phi}\,d^3v=n_e$

~~Pro ... dostaneme Maxwell. rozdělení~~

Pro konstantní účinný průřez (tuhé koule) $\sigma_m=konst\Rightarrow\nu_m=n_g\sigma_m v$

$$f_{e\phi}=A\exp\left[-\frac{3m^3n_g^2\sigma_m^2}{e^2E_z^2M}\int_0^v v'^3\,dv'\right]=$$

$$=A\exp\left[-\frac{3m^3n_g^2\sigma_m^2}{4e^2E_z^2M}v^4\right]\ \text{Druyvesteynovo rozdělení}$$

$$=A\exp\left[-\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)^2\cdot\frac{3n_g^2\sigma_m^2\cdot m}{e^2E_z^2M}\right]$$

Protože Druyvesteyn. rozdělení $\sim e^{-\alpha v^4}$ ocas rozdělení klesá rychleji než u Maxwell. rozdělení. Obrázek Hollahan 1.2. ukazuje, že pro stejnou střední energii Druyv. rozdělení předpovídá méně vysoce energ. e^- než Maxwel. r.

Odtud jsme zase uvažovali ustálený stav a homog. rozděl. fci $\frac{\partial f_{e1}}{\partial t}=0$, $\frac{\partial f_{e0}}{\partial r}=0$
ale vše **bez** el. pole $\vec{E}=0$ a bez neelast. srážek, pak
→ toto navíc oproti předchozímu
z obecných Hollahan. rovnic

Řešením rovnic pro f_{e0}, f_{e1} v různých případech dostaneme různé typy rozděl. fcí

Hollahan (1.20)
$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{v}{3}\nabla_r\cdot\vec{f_{e1}} - \frac{e\vec{E}}{3mv^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\vec{f_{e1}}\right) = \frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\nu_m v^3 f_{e0} + \frac{\nu_m k T_g}{m} v^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v}\right) + \sum_i \frac{\tilde{v}}{v}\tilde{f}_{e0}\tilde{\nu}_i - f_{e0}\nu_i$$

(1.21)
$$\frac{\partial \vec{f_{e1}}}{\partial t} + v\nabla_r\cdot\vec{f_{e1}} - \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\partial f_{e0}}{\partial v} = -\nu_m \vec{f_{e1}}$$

bereme (1.20)

$$0+0+0 = \cancel{\frac{m}{M}}\,\cancel{\frac{1}{v^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\nu_m v^3 f_{e0} + \frac{\nu_m k T_g}{m} v^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v}\right)$$

po integraci a $:\ \nu_m v^2$

$$v f_{e0} + \frac{kT_g}{m}\frac{\partial f_{e0}}{\partial v} = 0$$

a odtud dostáváme Maxwell. fci

[Uva]žujme homogenní, izotropní plasma v přítomnosti střídavého pole $\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ ($\nabla_r \cdot \vec{f}_{e1} = 0$)

? znaménko u $-i\omega t$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

(1.21) za předpokladu čas. závislosti $f_{e1} \sim e^{-i\omega t}$ dostaneme

$$\vec{f}_{e1}^{\,t} = \mathrm{Re}\, \vec{f}_{e1}' e^{-i\omega t}$$

$$-i\omega \vec{f}_{e1} + \nu_m \vec{f}_{e1} = \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}$$

$$\vec{f}_{e1} = \frac{e\vec{E}}{m(\nu_m - i\omega)}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}$$

a (pro časovou) střední hodnotu $\vec{f}_{e1}' = \frac{eE_0}{m(\nu_m - i\omega)}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}$

[M]usíme řešit rci (1.20). Opět jsou prostorové gradienty rovny nule ($\nabla_r \cdot \vec{f}_{e1} = 0$)

[Hle]dáme čas. závislost $f_{e\phi}$ – Margenau [3] ukázal, že pro $\omega \gg \frac{2m}{M}\nu_m$ je čas. změna [zanedb]atelná proti uvažované době ($\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial t} = 0$). Phys. Rev. 73, (1948) 309

Protože energie přenesená e^- atomům plynu přes 1 vf periodu je malá

[Do r]ce (1.20) dosadíme vyjádření $\vec{f}_{e1}$ a součin $\vec{E}\cdot\vec{f}_{e1}$ se bude interpretovat jako [střed]ní hodnota reálné části $\vec{E}\cdot\vec{f}_{e1}$

$$\overline{\vec{E}\cdot\vec{f}_{e1}} = \int_0^{2\pi} E_0 e^{i\omega t}\cdot f_{e1}' e^{-i\omega t}\, d(\omega t) = E_0 f_{e1}' \int_0^{2\pi} \cos^2\omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{2} E_0 f_{e1}'$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[v^2 \cdot \frac{e E_0}{m(\nu_m - i\omega)}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}\right] + \frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\nu_m v^2 \left(v f_{e\phi} + \frac{kT_g}{m}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}\right)\right] + \text{neelast. člen} = 0$$

$$\frac{\nu_m + i\omega}{\nu_m^2 + \omega^2}$$

[vezmeme] reálnou část $\Rightarrow \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{e^2 E_0^2 \nu_m v^2}{3m^2(\nu_m^2 + \omega^2)}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}\right] + \ldots$

[zavede]u ~~eff~~ efektivní el. pole $E_{eff}^2 = \frac{E_0^2 \nu_m^2}{2(\nu_m^2 + \omega^2)}$ a mám

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{e^2 E_{eff}^2 v^2}{3m^2 \nu_m}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v} + \frac{m}{M} v^2 \nu_m \left(v f_{e\phi} + \frac{kT_g}{m}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}\right)\right] + \text{neelast. člen} = 0}$$

[R]ovnice pak mohu dostat všechna rozdělení, stejnosměrný případ pro $E_{dc} = E_{eff}$

řešili jsme dříve a pro člen s T_g zanedb. a $\nu_m = n_g \sigma_m v$ vyšlo bez neelast. srážek Druyvesteyn. rozdělení

[T]ento člen určuje, jak je energie přenášena z el. pole na e^-

ztráta energie e^- při elast. srážkách

zisk energie e^- při srážce s rychlejším neutrálem

12

Pokud ted' z obecnější rovnice vyhodíme neelast. srážky:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{e^2E_{ef}^2v^2}{3m^2\nu_m}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}+\frac{m}{M}v^3\nu_m\left(v f_{e\phi}+\frac{kT_g}{m}\frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}\right)\right]=0$$

integrace pak => vyškrtnu v^2 a vynásobím $\frac{M}{v^2\nu_m}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_{e\phi}}{\partial v}\left(\frac{e^2E_{ef}^2M}{3m^2\nu_m^2}+kT_g\right)+mv f_{e\phi}=0$$

$$\boxed{f_{e\phi}=A\exp-\int_0^v\frac{mv\,dv}{kT_g+\frac{e^2E_{ef}^2M}{3m^2\nu_m^2}}}$$

.... Margenauovo rozdělení

Pokud el. pole je dostatečně velké můžeme člen s kT_g zanedbat a pro ↓ frekvence $\omega^2 \ll \nu_m^2$

aproximujeme

$$E_{ef}^2=\frac{E_0^2\nu_m^2}{2(\nu_m^2+\omega^2)}\doteq\frac{E_0^2}{2}$$

$$f_{e\phi}=A\exp-\int_0^v\frac{mv\,dv}{\frac{e^2E_0^2M\cancel{\nu_m^2}}{2\cancel{\nu_m^2}\cdot 3m^2\nu_m^2}}$$

$$\boxed{f_{e\phi}=A\exp-\int_0^v\frac{mv\,dv}{\frac{e^2E_0^2M}{6m^2\nu_m^2}}}$$

... aprox. vyjádření Margenauova rozděl.

Pro He, H $\sigma_m(v)\approx\frac{1}{v}$ => ν_m nezávisí na rychlosti

$$\boxed{f_{e\phi}=A\exp\left(-\frac{mv^2}{2}\cdot\frac{6m^2\nu_m^2}{e^2E_0^2M}\right)}$$

což má podobu Maxwell. pro

$$kT_e=\frac{e^2E_0^2M}{6m^2\nu_m^2}$$

↓ 3. hodina

Pro σ_m nezávisí na rychlosti => $\nu_m=n_g v\sigma_m$ integrujeme $\frac{6m^2n_g^2\sigma_m^2\cdot m}{e^2E_0^2M}\int v^3\,dv=\frac{6m n_g^2\sigma_m^2}{e^2E_0^2M}\left(\frac{mv^2}{2}\right)^2$

$$\boxed{f_{e\phi}=A\exp-\left[\left(\frac{mv^2}{2}\right)^2\frac{6m\,n_g^2\sigma_m^2}{e^2E_0^2M}\right]}$$

Druyvesteynovo rozdělení
(od předchozího Druyv. rozd. pro statické pole se liší faktor 2×, protože
$E_0^2=2.E_{ef}^2$ ale pro dc $E_{dc}^2=E_{ef}^2$

(13)

$e^{-\alpha v^2}$ $e^{-\alpha v^4}$

Obrázek (Hollahan 1.2) ukazuje rozdíl mezi Maxwell. a Druyvest. rozdělením pro stejnou střední energii $\langle \varepsilon \rangle$; Druyv. klesá rychleji

faktor přechodu k rozdělení „podle energií" $\frac{v}{m}$

vyjádření při v. obrázku $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$ $\quad f^{(\varepsilon)}_{Maxw} = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m^3}} =$

$$= A \langle \varepsilon \rangle^{-3/2} \cdot \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle}}$$

Protože ve ~~Maxwell~~ exponentech rozdělení uvažujících srážky (tedy ν_m) se vyskytuje E_0^2/ν_m^2 a $\nu_m \sim n_g \sim p$ je důležitý poměr E_0/p.

Exponenty rozdělení typu „Maxwell" a Druyvest. jsou ve tvaru $e^{-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle}}$ a $e^{-0{,}55\frac{\varepsilon^2}{\langle \varepsilon \rangle^2}}$

(i Maxwell $\rightarrow kT_e = \frac{e^2 E_0^2 M}{6 m^2 \nu_m^2}$!)

takže $\langle \varepsilon \rangle$ je funkcí E_0/p ! ... redukovaná intenzita el. pole

Margenau a Druyvesteyn. rozděl. jsou řešení BKR pro slabá el. pole, u kterých můžeme zanedbat neelastické srážky. V událeném výboji to ovšem může těžko platit! Měli jsme BKR řešit včetně neelast. srážek → numerické metody:

Výpočty pro H_2 plasma se zahrnutím neelast. srážek + náhodné binární coulombovské srážky (elast. srážky $e^- + H_2$ zanedb. protože jde o malou ztrátu energie)

↳ ale pouze $e^- - e^-$ (e^--iont zanedb. — „ — elektronů)

Obrázek (Hollahan 1.3 a 1.4) ukazuje výpočet pro $E/p = 28.3$ V/cm Torr a různou ionizaci $\frac{n}{n_g} = \frac{n}{N}$. Pro nejvyšší $\frac{n}{n_g} = 1{,}67 \times 10^{-1}$ se rozdělení blíží maxwellovskému (rychlost výměny energie coulomb. s. $e^- - e^-$ je vyšší než zisk energie od el. pole).

Pro $E/p = 48.9$ V/cm Torr je situace podobná - viz Obr. 1.5

Všimněte si, kde leží energie 1. excitované hladiny a kde ionizační energie!

1.4 Makroskopické rovnice pro ~~[illegible]~~ jeden typ částic

1.4.1 ~~Rov~~ Rovnice kontinuity – zachování částic

Jde o (nultý) nejnižší moment BKR – všechny členy se zintegrují přes rychlostní prostor:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\vec{u}) = G - L$$

pro elektron. rovnici: „gain of particles" ... obvykle díky ionizaci při srážce elektron-neutrál $G = \nu_{iz} n_e$

„loss of particles" ... objemové ztráty částic díky rekombinaci jsou často zanedbatelné

Kromě n rovnice obsahuje neznámou $\vec{u}$ => potřebujeme další rovnici

1.4.2 Pohybová rovnice – zachování ~~[illegible]~~ hybnosti

Abychom získali rovnici pro $\vec{u}$ vytvoříme 1. moment BKR – vynásobíme $\vec{v}$ a zintegrujeme přes rychlosti:

$$\underbrace{mn\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right]}_{\frac{D\vec{u}}{Dt}} = qn(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}) - \nabla\cdot\hat{P} + \underbrace{\vec{A} - m\vec{u}(G-L)}_{\text{srážkový člen } \int_v v\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)d^3v \; m}$$

$\frac{D\vec{u}}{Dt}$ ... konvektivní derivace ≙ hmotnost × zrychlení

1. člen je zrychlení díky explicitní časové změně $\vec{u}$
2. člen –"– i pro ustálené proudění kapaliny $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 0$ které má prostorové gradienty

např. pokud $\vec{u} = \hat{x}\, u_x(x)$ a roste podél x je kapalina podél x urychlována

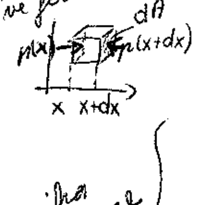
tlak: Na pravé straně jsou silové členy. Mezi ně ~~[illegible]~~ patří i divergence tlakového tenzoru $-\nabla\cdot\hat{P}$ (divergence toku hybnosti)

$$\hat{P}_{ij} = mn\left\langle (v_i - u_i)(v_j - u_j)\right\rangle_v$$

– průměrování rychlosti přes f (rozdel. fci)

Pro slabě ionizované plazma je téměř vždy možné použít izotropní formu

působení síly ve formě divergence tlaku:



síla na objem $\frac{p(x)dA - p(x+dx)dA}{dA\,dx} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$ a tedy $\nabla\cdot\hat{P} = \nabla p$,

kde skalární tlak je $p = \frac{1}{3} mn\left\langle (v-u)^2 \right\rangle$

kniha Goldstone 1995

Pokud je plazma charakterizováno rozdílným tepelným pohybem ve směru ∥ a ⊥ na $\vec{B}$ (z pohybů v mg. poli, víme že tento případ může nastat)

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix}$$ pro $\vec{B}$ v ose z

Nediagonální členy představují viskozitu – tok hybnosti v jednom směru jiným směrem: Jestliže kapalina teče např. ve směru osy x, ale tento tok má gradient ve směru osy y, pak je x-ová hybnost je přenášena ve směru y, ~~aby se pohybující kapalina~~ tam kde se kapalina pohybuje pomaleji – je nutné ji zrychlit.

Pokud je měřítko gradientu rychlosti $L \gg r_c$ (poloměr cyklotronového pohybu) jsou nediagonální členy $\hat{P}$ menší než diagonální ~~[illegible]~~ minimálně jeden řád $\frac{r_c}{L}$.

(15)

Srážkový člen představuje ~~člen~~ rychlost přenosu hybnosti na jednotk. objem v důsledku srážek s jinými částicemi. Pro e^- nebo ⊕ ve slabě ioniz. plazmatu je nejdůležitější transfer v důsledku srážky s neutrálem.

$$\int_v v\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{srr} d^3v = -\sum_\beta m n \nu_{m\beta}(\vec{u}-\vec{u}_\beta) - m\vec{u}(G-L)$$

srážk. frekvence pro přenos hybnosti

tvar vyplývá z tvaru Krook. srážk. členu odvozeného pro srážky e^- – neutrál

člen spojený se změnou hybnosti v důsledku ztráty/tvorby částic je často malý

<u>Obvyklý tvar rovnice zachování hybnosti</u> (pro laboratorní slabě ioniz. pl.): pro pomalé časové změny, zanedbání členu $(\vec{u}.\nabla)\vec{u}$ a mg. síly, $\vec{u}_\beta = 0$ v Krook. členu pro srážky s jedním typem neutrálů, zanedb. příspěvku vznik/zánik a izotropní tlak

$$0 = qn\vec{E} - \nabla p - mn\nu_m\vec{u}$$

pro rychlé časové změny musíme na levé straně ponechat člen $mn\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

Rovnice kontinuity a zachování hybnosti stále netvoří uzavřený systém, protože $\hat{P}$ (nebo skalární tlak p) není určeno. Obvyklý postup uzavření = použití termodynam. stavové rovnice, která dává vztah mezi p a n.

- <u>Izotermický</u> vztah pro rovnovážné Maxw. rozdělení $p = nkT$ a tedy $\nabla p = kT\nabla n$

Toto platí pro pomalé časové změny, kdy se teploty vyrovnávají. V tomto případě si kapalina může vyměňovat energii s okolím a potřebujeme ještě rovnici zachování energie (viz kap. 1.4.3), abychom určili p a T

- Alternativně můžeme použít adiabatickou stavovou rovnici $p = Cn^\gamma$

a tedy $\frac{\nabla p}{p} = \gamma\frac{\nabla n}{n}$,

kde γ je poměr specifického tepla při konst. tlaku a při konst. objemu

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

Pro ideální plyn $\gamma = \frac{5}{3}$ obecně $\gamma = \frac{2+N}{N}$

Pro 1D adiab. pohyb $\gamma = 3$ N... počet stupňů volnosti

Adiabat. rovnice platí pro rychlé časové změny, jako např. vlny v plazmatu, když si kapalina nestihá vyměňovat energii s okolím (změny jsou rychlejší než tok tepla) ⇒ rovnice zach. energie není třeba

Pro skoro všechny analýzy plazmatu (v rámci labor. plazmat pro materials processing tedy el. výbojů) použijeme izoterm. stav. rovnici

---

Goldston

Vztah $p = Cn^\gamma$ vlastně popisuje izoterm. i adiabat. změny, protože pro $\gamma = 1$ jde o $p = C.n$ tedy $p = \underbrace{kT}_{\text{konstanta}}.n$ izotermický děj!

(16)

~~…~~ $\boxed{1.4.3}$ Rovnice zachování energie pro 1 typ částic (Lieberman

Dostaneme jako 2. moment BKR – vynásobíme $\frac{1}{2}mv^2$ a zintegrujeme přes v

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p\right) + \nabla\cdot\frac{3}{2}(p\vec{u}) + p\,\nabla\cdot\vec{u} + \nabla\cdot\vec{q} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p\right)\Big|_{sr.}$$

$\frac{3}{2}p$ je hustota energie $\{J/m^3\}$

$\frac{3}{2}p\vec{u}$ je makroskop. tok energie $\{W/m^2\}$ představující tok vnitřní energie driftl. rychlostí kapaliny $\vec{u}$ $\{W = \frac{J}{s}\}$

$p\,\nabla\cdot\vec{u}$ $\{W/m^3\}$ dává ohřev nebo ochlazování kapaliny kvůli kompresi nebo expanzi jeho objemu

$\vec{q}$ je tok tepla $\{W/m^2\}$ představující makrosk. tok tepla

nárůst. člen: všechny nárůst. procesy, které mění hustotu energie (ionizace, excitace, elastický rozptyl, ohmický ohřev).

Rovnice energie je často uzavírána položením $\nabla\cdot\vec{q} = 0$ nebo $\vec{q} = -\varkappa_T \nabla T$, kde $\varkappa_T$ je tepelná vodivost

Pro většinu uvažovaných výbojů je makroskop. tok energie vyrovnáván nárůst. procesy, takže $\nabla\cdot\left(\frac{3}{2}p\vec{u}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p\right)\Big|_{sr.}$

$\boxed{1.4.4}$ Souhrn makroskop. rovnic popisujících e^- nebo iont. kapalinu <u>v el. výbojích</u>

Nejpoužívanější forma pro el. výboje:

rce kontinuity	$\nabla\cdot(n\vec{u}) = \nu_{iz}\, n_e$
pohyb. rce	$mn\frac{d\vec{u}}{dt} = qn\vec{E} - \nabla p - mn\nu_m\vec{u}$
izoterm. stav. rce	$p = nkT$
rce ~~…~~ zach. energie	$\nabla\cdot\left(\frac{3}{2}p\vec{u}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p\right)\Big\|_{sr.}$

! zde n_e i pro ionty
ionizace = e^- + neutrál

Tyto rovnice platí pro oba typy nabitých částic, přičemž celk. ~~náboj~~ hustota náboje a proudu ~~…~~

$$\rho = e(Zn_i - n_e)$$
$$\vec{J} = e(Zn_i u_i - n_e \vec{u}_e)$$

vystupuje v Maxwell. rcích.

$\Rightarrow$ dále je velmi těžké rovnice vyřešit bez zjednodušení

18 neznámých $n_i, n_e, p_i, p_e, T_i, T_e, \vec{u}_i, \vec{u}_e, \vec{E}$ a $\vec{B}$ $(6+4\cdot3=18)$

1.5 Boltzmannův vztah

Můžeme odvodit důležitý vztah pro hustotu e⁻ v tepelné rovnováze s teplotou T_e v závislosti na prostor. rozl. v plazmatu, na které působí prostorově proměnný potenciál.
Pokud není drift e⁻ $\vec{u}_e \equiv 0$ pak je inerciální člen $\vec{u}\nabla\vec{u}$, mg. a tření $(\vec{R}) = 0$
a z pohyb. rce pro e⁻ dostáváme $\quad e n_e E + \nabla p_e = 0$

$E = -\nabla\varphi \quad , \quad p_e = n_e k T_e$

použití stav. rce pro rovnováhu

$$\Rightarrow \quad -e n_e \nabla\varphi + kT_e \nabla n_e = 0$$

$$\nabla(\underbrace{e\varphi - kT_e \ln n_e}_{\text{konst}}) = 0$$

neboli $\quad n_e(\vec{r}) = n_0\, e^{\frac{e\varphi(\vec{r})}{kT_e}}$

Tedy elektrony jsou „přitahovány" do míst s kladnějším nábojem.

Pro kladné ionty v tepelné rovnováze s teplotou T_i

$$n_i = n_0\, e^{-\frac{e\varphi}{kT_i}}$$

a tedy jsou „odpuzovány" z míst s kladnějším nábojem.

! ale ⊕ nejsou v el. výbojích skoro nikdy v tepelné rovnováze, protože $\vec{u}_i$ je ↑, takže musíme uvažovat inerciální člen $\vec{u}\nabla\vec{u}$ nebo tření, které jsou srovnatelné s $e\vec{E}$ nebo gradientem tlaku

1.6. Debyova délka a kvazineutralita plazmatu

4. hodina ↓

1.7 Magnetohydrodynamika plazmatu / pro plazma jako jednu vodivou kapalinu (tedy makroskop. rce) (single-fluid equations) (Goldston str. 115)

– používá se především pro popis plně ionizovaného plazmatu (mnoho astrofyz. plazmat a kontrolovaná termojaderná fúze) – na toto téma je mnoho knih, např. Introduction to Plasma Physics od R. J. Goldston, P. H. Rutherford IOP 1995

– na plazma se tedy nahlíží hydrodynamicky jako na jednu kapalinu, na kterou působí el. a mg. síly = magnetohydrodynamic (MHD) model

Historicky to byl jeden z prvních modelů plazmatu, protože využíval mnoho postupů klasické hydrodynamiky. Konkrétní rovnice MHD se mohou lišit podle použitých zjednodušení, ale existují určité typické sady rovnic

1.7.1. MHD rovnice

- úplně ionizované plazma
- pro zjednodušení uvažujeme vodíkové plazma => (+) ionty náboj $+e$ (ale můžu vše násobit Ze a mám obecnější případ)
- přibližná platnost kvazineutrality $n_i \approx n_e \approx n$, ale připouštíme malou hustotu náboje
  ↳ pro prostorovou škálu $\gg \lambda_D$

Magnetohydrodynamika považuje plazma za jednu kapalinu s

- hustotou hmotnosti $\rho_m = n_i M + n_e m \approx n(M+m) \approx n.M$
- hustotou náboje $\rho = (n_i - n_e).e$ // Goldston označuje σ
- střední rychlostí kapaliny (rychlost hmotnosti) $\vec{u} = \frac{n_i M \vec{u}_i + n_e m \vec{u}_e}{\rho_m} \approx$

$$\approx \frac{M\vec{u}_i + m\vec{u}_e}{M+m} \approx \vec{u}_i + \frac{m}{M}\vec{u}_e$$

- hustotou proudu $\vec{j} = e(n_i\vec{u}_i - n_e\vec{u}_e) \approx ne(\vec{u}_i - \vec{u}_e)$

Tyto rovnice můžeme využít k vyjádření $\vec{u}_i$ a $\vec{u}_e$ pomocí $\vec{u}$ a $\vec{j}$

$$\vec{u}_i \approx \vec{u} + \frac{m}{M}\frac{\vec{j}}{ne} \qquad \vec{u}_e \approx \vec{u} - \frac{\vec{j}}{ne},$$

kde jsme zanedbali členy, které jsou určitě malé díky malosti $\frac{m}{M}$.

MHD rovnice získáme z lineárních kombinací individuálních makroskop. rovnic pro ionty a elektrony:

a) individuální rovnice kontinuity $\frac{\partial n_{i,e}}{\partial t} + \nabla\cdot n_{i,e}\vec{u}_{i,e} = 0$

vynásobíme hmotnostmi M a m a sečteme

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\vec{u}) = 0}$$

takže dostáváme „rovnici zachování hmotnosti"

zde nemusí uvažovat nulu, abych ve výsledné rovnici měl nulu, protože $\sum_\alpha S_\alpha \cdot m_\alpha = 0$ hmotnost nemůže zmizet

b) individuální rovnice kontinuity vynásobíme náboji e a −e a sečteme

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0}$$

„rovnice kontinuity proudu"

D teď mám místo dvou rcí kontinuity pro e⁻ a ⊕ dvě rovnice pro vodivou kapalinu
O

c) podobně můžeme postupovat pro pohybové rovnice

$$Mn_i \frac{D\vec{u}_i}{Dt} = en_i(\vec{E} + \vec{u}_i\times\vec{B}) - \nabla p_i + \vec{A}_{ie}$$

$$mn_e \frac{D\vec{u}_e}{Dt} = -en_e(\vec{E} + \vec{u}_e\times\vec{B}) - \nabla p_e + \vec{A}_{ei}$$

které sečteme a dostáváme „pohybovou rovnici pro vodivou kapalinu"

$$\boxed{\rho_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho_m\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right) = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} - \nabla p}$$

protože $\vec{A}_{ie} = -\vec{A}_{ei}$ ... přenos hybnosti z i→e a z e→i musí splňovat Z.Z.H

$-Mn_i\nu_{ie}(u_i - u_e) = -mn_e\nu_{ei}(u_e - u_i)$

odtud pak platí $Mn_i\nu_{ie} = mn_e\nu_{ei}$

Zbytek ovšem není tak jednoduchý (součet). Ukazuje se, že pokud $\vec{u}$ je střední rychlost celé kapaliny $\vec{u} = \frac{n_iM\vec{u}_i + n_em\vec{u}_e}{n_iM + n_em}$

a $\vec{p}$ je tlak definovaný pomocí tepelné rychlosti kolem $\vec{u}$ $\hat{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha}\langle V_{\alpha\phi}V_{\alpha\phi}\rangle$

$V_{\alpha\phi} = \vec{v}_\alpha - \vec{u}$

pak po složitějších úpravách rovnici (c) skutečně dostáváme (viz Bittencourt).

pozn. Přibližně ovšem také platí, že $\vec{u} \approx \vec{u}_i$ a e⁻ se tepelně pohybují rychle ve srovnání s jakoukoliv střední rychlostí, takže v definici tlaku bych v případě ⊕ i e⁻ mohla uvažovat střední hodnotu kolem $\vec{u}_i$. Pak je jasné, že rovnici (c) mohu získat jednoduše sečtením obou pohyb. rcí pro ⊕ a e⁻.

d) druhou rovnici z pohybových rovnic dostáváme aproximativním zapsáním pohyb. rce pro e⁻ jakoby to byla rovnice pro celou kapalinu:

– nejprve vyjádříme člen přenosu hybnosti z iontů na e⁻ pomocí parametrů celého plazmatu $(n, \vec{j})$

$$A_{ei} = -mn_e\langle\nu_{ei}\rangle(\vec{u}_e - \vec{u}_i) = -\frac{m\langle\nu_{ei}\rangle}{n_e e^2}\cdot n_e^2\cdot e^2\cdot(\vec{u}_e - \vec{u}_i) \underset{n_e\approx n}{=}$$

$$= -\frac{1}{\sigma_0}\, n\cdot e\cdot\vec{j}$$

ν_{ei} závisí na rychlosti e⁻ ale zde by to už měla být střední hodnota přes rozdělení rychlostí e⁻

kde σ_0 je vodivost bez přítomnosti mg. pole nebo podél $\vec{B}$, kde vliv $\vec{B}$ na pohyb e⁻ není $\sigma_0 = \frac{ne^2}{m\langle\nu_{ei}\rangle}$

toto jsme ukázali minulý rok

(21)

– zanedbáme setrvačnost e^-, tedy celý člen $\rho_{me}\frac{D\vec{u}}{Dt}$, a podobně jako u $\vec{A}_{ei}$ nahradíme v pohyb. rci $n_e \approx n$

$$\Rightarrow \quad 0 = -en(\vec{E}+\vec{u}_e\times\vec{B}) - \nabla p_e + \frac{ne}{\sigma_0}\vec{j} \qquad /: e.n$$

dosadíme přibližný vztah pro $\vec{u}_e \approx \vec{u} - \frac{\vec{j}}{ne}$ (viz začátek kapitoly 1.7.1)

$$\Rightarrow \quad E + \vec{u}\times\vec{B} - \frac{\vec{j}\times\vec{B}}{ne} = \frac{\vec{j}}{\sigma_0} - \frac{\nabla p_e}{e.n}$$

$$\boxed{\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\sigma_0} + \frac{\vec{j}\times\vec{B} - \nabla p_e}{e.n}}$$

„zobecněný Ohm. zákon"

pozn. Minulý rok jsme postupovali o něco korektněji vzhledem k různým zanedbáním a dostali jsme podobný vztah

$$\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} = \underbrace{\frac{m}{ne^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}} + \frac{\vec{j}}{\sigma_0} + \frac{\vec{j}\times\vec{B} - \nabla p_e}{e.n}$$

tento člen navíc – tedy pro ustálené podmínky $\frac{\partial j}{\partial t} = 0$ máme stejnou rci

pozn. Proč se tomu říká Ohmův zákon?

pro $\nabla . p_e = 0$ mám $\vec{j} = \sigma_0(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}) - \underbrace{\frac{\sigma_0}{e.n}(\vec{j}\times\vec{B})}_{\text{Hallův jev}}$

a to už vypadá podobně jako $\vec{j} = \sigma_0\vec{E}$, tedy známý Ohmův zákon

pozn. Jestliže je důležité rozlišovat mezi vodivostí σ / odporem η $\parallel$ a $\perp$ k $\vec{B}$ může být skalár $\eta = \frac{m\langle\nu_{ei}\rangle}{ne^2}$ nahrazen tenzorem $\begin{pmatrix}\eta_\perp & & \\ & \eta_\perp & \\ & & \eta_\parallel\end{pmatrix}$ protože $\langle\nu_{ei}\rangle$ bude jiné ve směru $\parallel$ a $\perp$ na $\vec{B}$

e) Abychom získali kompletní sadu rovnic musíme přidat nějakou rovnici „energie". Nejjednodušší stavová rovnice, která popíše jak se v čase mění p

nejčastěji adiabatická (nevyměňuje teplo s okolím a změna teploty jen v důsledku komprese / expanze)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) = 0 \overset{\text{viz dříve:}}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho_m^\gamma}\right) = 0$$

nebo izotermická $p = nk(T_e + T_i)$ kde $T_e, T_i = \text{konst}$

nejspíš mi úplně jednoduché jak přijít od jednoduché stav. rce k této

$\hat{=}$ (MHD jevy) komprese / expanze je rychlejší než tepelná vodivost

(MHD jevy) komprese / expanze je pomalejší než

$\gamma = \frac{5}{3}$ pro 3D plyn, tedy plyn v němž srážky vyměňující energii mezi všemi třemi směry

$\gamma = \frac{N+2}{N}$!

(22) (Goldston str. 91)

Pro ~~a~~ MHD jevy, které jsou rychlejší než srážky, ~~a dochází~~ může dojít k anizotropii:

$\parallel$ a $\perp$ směry jsou separované, $T_{\parallel}$ se může efektivně rozvíjet ($N=1, \mu=3$)

zatímco $T_{\perp}$ nikoliv ($N=2, \mu=2$).

pro $p_{\perp}$ Abychom odvodili obecnější stavové rovnice pro anizotropní případ použijeme adiabatickou invarianci magnetického momentu v silném mg. poli

$$|\vec{m}| = \frac{W_{\perp}}{B} = \text{konst} \quad (\mu)$$

(pro prostorové změny B uvnitř cyklotrony malé ve srovnání s velikostí $\vec{B}$ ... adiabat. aprox.)

vyjádříme

$$p_{\perp} = n k T_{\perp} = n k \tfrac{1}{2} m \langle v_{\perp}^2 \rangle = n k B \langle |\vec{m}| \rangle$$

pokud je komprese rychlá ve srovnání se srážkami ale pomalá ve srovnání s periodou cyklotr. $|\vec{m}|$ se zachovává

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{nkB}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{nB}\right) = 0$$

pozn. Pro případ čistě $\perp$ komprese (typicky díky $\uparrow B$) platí ~~tak~~ zachování částic a mg. toku ~~plochou A~~, jak se plocha plazma A (cross section) mění $\Rightarrow$ $n.A = \text{konst}$ $B.A = \text{konst}$ $\Rightarrow$ $n \sim B$ a vztah nahoře je $\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{n^2}\right) = 0$ tedy klasická adiabat. rce pro $\mu = 2$ (2D adiabat. komprese)

pro $p_{\parallel}$ Podobně vyjádříme $p_{\parallel} = n k \frac{1}{2} m \langle v_{\parallel}^2 \rangle$

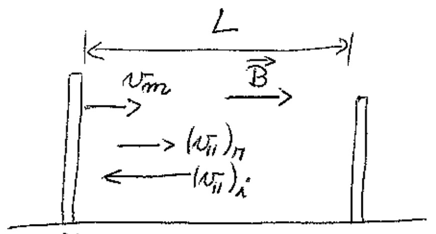
a zase potřebujeme vyjádřit rychlost pomocí nějakého invariantu.

~~[illegible]~~ Jde o tzv. podélný adiabat. invariant (Bittencourt str. 81)

nebo druhý — " — (Goldston str. 58)

odvození podle Bittencourta:

Uvažujeme částici chycenou mezi dvěma mg. zrcadly mezi nimiž osciluje.
Uvažujme, že vzdálenost těchto zrcadel se pomalu s časem mění ve srovnání s ~~dobou~~ periodou oscilace.



M_1 pohybující se zrcadlo

M_2, stabilní zrcadlo

S tímto periodickým pohybem částice mezi dvěma body, jejichž vzdálenost se pomalu mění, je asociovaný adiabat. invariant (podélný / druhý) definovaný

$$J = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint v_{\parallel} \, dl$$

~~pro~~ integrovaný přes jednu periodu oscilace tam a zpět.

jednoduchý důkaz invariance J: podle obr., uvažujeme $\vec{B}$ homog. pole ve směru osy z (vyjma bodů kolem M_1, M_2). Uvažujme přibližování zrcadla M_1 rychlostí $v_m = -\frac{dL}{dt}$ (minus protože $L \downarrow$ s časem)

Předp. $v_m \ll v_{\parallel}$ $\Rightarrow$ vzdálenost, o kterou se zrcadlo pohne během jedné periody oscilace je malá ve srovnání s L.

(23)

Protože $\vec{B}$ je homogenní, $v_\parallel = konst$ (zanedbáme malý efekt u zrcadel).
Pak
$$J = \int_0^{2L} v_\parallel \, dl = 2 v_\parallel L$$
Časová změna J je
$$\frac{dJ}{dt} = 2v_\parallel \frac{dL}{dt} + 2L\frac{dv_\parallel}{dt} = -2v_\parallel v_m + 2L\frac{dv_\parallel}{dt}$$
Musíme vyjádřit $\frac{dv_\parallel}{dt}$:
$$\frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{\Delta v_\parallel}{\Delta t} = \frac{\Delta v_\parallel}{\left(\frac{2L}{v_\parallel}\right)} \text{, kde}$$
$\Delta v_\parallel$ ozn. změnu rychlosti za periodu oscilace mezi zrcadly $\Delta t = \frac{2L}{v_\parallel}$.
(při odrazu od pohybujícího se zrcadla!)
Abychom našli $\Delta v_\parallel$, přejdeme do systému souř. pohybujícím se s M_1 rychlostí v_m.
~~Dopadá~~ Rychlost částice dopadající na M_1 ... index „i" incident
— " — odrážející se od M_1 — " — „r" reflected
a rychlost v pohybujícím se systému ozn. čárkou
$$(v_\parallel)_i' = (v_\parallel)_i + v_m$$
$$(v_\parallel)_r' = (v_\parallel)_r - v_m \qquad \text{a} \qquad (v_\parallel)_i' = (v_\parallel)_r'$$
$$\Rightarrow \quad \Delta v_\parallel = (v_\parallel)_r - (v_\parallel)_i = 2v_m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{2v_m}{\frac{2L}{v_\parallel}} = \frac{v_m v_\parallel}{L} \qquad \text{a} \qquad \frac{dJ}{dt} = -2v_\parallel v_m + 2\cancel{L}\frac{v_m v_\parallel}{\cancel{L}} = 0$$
$$\text{tedy} \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2v_\parallel L\right) = 0$$

paralelní kinet. energie $W_\parallel = \frac{1}{2} m v_\parallel^2 = \frac{mJ^2}{8L^2}$ roste jak $L \downarrow$

nemůže ale růst donekonečna – použili jsme různé aproximace
– částice mohou z mg. nádoby uniknout ztrátovým úhlem
– pohybující se zrcadlo evokuje čas. změnu $\vec{B}$ a tedy vznik $\vec{E}$

Vrátíme se zpět k vyjádření $p_\parallel$ pomocí invariantu $J = 2v_\parallel L \Rightarrow v_\parallel = \frac{J}{2L}$
$$p_\parallel = mkn\langle v_\parallel^2\rangle \qquad p_\parallel = mkn\frac{J^2}{4L^2}$$
Jestliže je adiabat. komprese ve směru $\parallel$ pomalá ve srovnání s oscilací tam a zpět je $J = konst$ a zároveň platí zachování mg. toku jak se mění L a průřez plazmatu A
(délka plazmatu)
→ tedy objem $V = A.L$ se mění a $\underbrace{V.n = konst}_{\text{počet částic}}$, $\underbrace{B.A = konst}_{\text{mg. tok}}$
$$L = \frac{V}{A} \sim \frac{B}{n}$$

$$p_\parallel = mkn\frac{J^2}{4}\cdot\frac{n^2}{B^2}$$
$$\frac{p_\parallel B^2}{n^3} = \frac{mkJ^2}{4} \qquad \text{a derivací podle času } \left(\frac{dJ}{dt}=0\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\parallel B^2}{n^3}\right) = 0$$

zopakování MHD rovnice

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m \vec{u}) = 0 \qquad (1) \text{ rovnice kontinuity}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \qquad (2) \text{ rovnice kontinuity náboje}$$

$$\rho_m \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} - \nabla p \qquad (3) \text{ pohyb. rce}$$

$$\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} = \eta\vec{j} + \frac{\vec{j}\times\vec{B} - \nabla p_e}{ne} \qquad (4) \text{ zobecn. Ohm. zákon}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \qquad (5)$$

a MR

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad \text{Ampérův zákon (bez posuvného proudu)}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Faradayův zákon}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Tyto rovnice se ovšem ještě dále zjednodušují (viz další kapitoly)!

1.7.2 Kvazineutrální aproximace

V předchozích rovnicích jsme měli nenulovou hustotu náboje ρ – rce (2), (3). Často ~~jsou~~ členy související s ρ můžeme zanedbat. Abychom mohli ukázat kdy, předvedeme postup, jak můžeme odhadovat velikost ~~členu~~ jednotlivých členů v rovnicích:

V rovnici (3) – pohyb. rce porovnáme velikost el. síly $\rho\vec{E}$ a inerciálního členu $\rho_m \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$

$$\frac{\rho\vec{E}}{\rho_m \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}} \sim \frac{\varepsilon_0 E^2/L}{\rho_m u^2/L}$$

← využili jsme MR $\nabla\cdot(\vec{E}\,\varepsilon_0) = \rho$

$$\frac{E\,\varepsilon_0}{L} = \rho$$

charakter. délka $\frac{E}{L} \approx \frac{\Delta E}{\Delta x}$

$$\sim \frac{\varepsilon_0 E^2}{\rho_m u^2} \sim \frac{\varepsilon_0 E^2}{\rho_m \cdot \left(\frac{E}{B}\right)^2}$$

← předp., že driftová rychlost je způsobená $E\times B$ driftem, tedy $|\vec{u}| \sim \left|\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\right| \sim \frac{E}{B}$

$$\sim \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho_m}$$

– tato bezrozměrná veličina je ve většině plazmat velmi malá (na druhou stranu veličina $1 + \frac{\rho_m}{\varepsilon_0 B^2}$ ... diel. konst. je velká, obvykle 10^2–10^3)

$\Downarrow$

el. síla v rci (3) je zanedbatelná

V rovnici (2) – rce kontinuity náboje porovnáme člen separace náboje $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ se členem $\nabla\vec{j}$

$$\frac{\partial\rho/\partial t}{\nabla\cdot\vec{j}} \sim \frac{\varepsilon_0 E/L\tau}{j/L} \sim \frac{\varepsilon_0 \overbrace{uB}^{\approx E}/\tau}{\rho_m u/B\tau}$$

← odhadli jsme $\vec{j}$ z rce (3) $\vec{j}\times\vec{B} \sim \rho_m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

$$j \sim \frac{\rho_m u}{B\tau}$$

a tedy opět $\sim \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho_m}$

Tedy pro $\frac{\rho}{\varepsilon_0 B^2} \gg 1$ můžeme členy $\rho\vec{E}$ a $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ vynechat z rovnic (3) a (2).

Toto je kvazineutrální aproximace.

Pro ni mohu ještě velmi podobným způsobem ukázat, že posuvný proud v MR mohu zanedbat:

$$\frac{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}{j} \sim \frac{\varepsilon_0 \frac{E}{\tau}}{j} \approx \frac{\varepsilon_0 u B/\tau}{\rho_m u/B\tau} \sim \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho_m}$$

Nemohu ale zanedbat ρ v MR $\nabla(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho$! Protože se ρ nebude vyskytovat v žádné rovnici, mohu tuto MR poté vynechat a pak případně dopočítat

Magnetohydrodyn. rovnice obvykle používají kvazineutrální aproximaci

1.7.3 Aproximace „malého Larmorova poloměru"

Ukážeme, že 2. a 3. člen na PS zobecněného Ohmova zákona (4) jsou zanedb. v případě „malého Larmorova poloměru":

$$\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{\vec{j}\times\vec{B} - \nabla p_e}{n \cdot e}$$

Opět postupujeme podobně jako v předchozí kapitole, tedy porovnáme dva členy rovnice

$$\frac{\nabla p_e / ne}{\vec{u}\times\vec{B}} \sim ?$$

$$\rho_m\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right) = \vec{j}\times\vec{B} - \nabla \vec{p} \quad (\rho\vec{E} \text{ zanedb.})$$

Abychom mohli odhadnout jeho velikost použiji nejprve pohyb. rci. Z ní pro typickou plazmodynamickou situaci: pohyb kapaliny $\vec{u}$ je způsoben ∇p a $\vec{B}$. V případě, tedy už je pohyb plně vyvinut, např. jako důsledek silné magnetohydrod. nestability bude $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ zanedb. a

$$\underbrace{\rho_m \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} \sim \nabla p}\sim \vec{j}\times\vec{B}$$

$$\rho_m \frac{u^2}{L} \sim \frac{p}{L} \quad \text{a} \quad p = nkT, \ \rho \doteq nM \quad \Rightarrow \quad u \sim v_{t,i} \sim \sqrt{\frac{kT}{M}}$$

- drift. rychlost ~ iontová termální rychlost

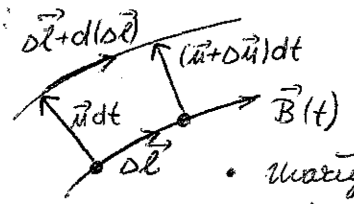
! ne všechny plazmodynam. jevy produkují drift. rychlosti tak velké jako je iont. term. rychlost, ale v plně rozvinutém magnetohydrod. proudění, kde ∇p a $\vec{j}\times\vec{B}$ jsou vyvažovány pouze setrvačností plazmatu $\rho\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$, tomu tak je. Pak je aprox. malého Larmorova poloměru přijatelná. Při slabších magnetohydrod. jevech, např. tam kde drift. rychlost tekutiny, tedy $\vec{E}\times\vec{B}$ drift, není větší než diamagnet. drift, ∇B drift nebo drift zakřivení.

Tedy jakoby částice nedělali Larmorovu pohyby, se kterou tyto drifty souvisí.

(27)

Důsledkem „nekonečné vodivosti" je, že plasma je svázáno s mg. siločárami.

Důkaz:



Ukážeme, že všechny elementy tekutiny původně umístěné na jakékoliv siločáře budou dále na této siločáře i po libovolném pohybu nekonečně vod. plazmatu.

- Uvažujme dva elementy tekutiny a určité siločáře v čase t – jsou separované vektorem $\delta\vec{l}$ $(\Delta\vec{l} \parallel \vec{B}(t))$
- Za čas dt se oba elementy pohnou o $\vec{u}\,dt$ a $(\vec{u}+\Delta\vec{u})dt$
- Musíme dokázat, že $\underbrace{\Delta\vec{l}+d(\Delta\vec{l})}$ je rovnoběžné s $\vec{B}(t+dt)$

změna δl za čas dt

- Jak se mění δl v čase?

Vyjádříme Taylor. rozvojem: $\Delta\vec{u} = (\delta l \cdot \nabla)\vec{u}$

dále
$$\Delta l + d(\Delta l) = \Delta l + (\vec{u}+\Delta\vec{u})dt - \vec{u}\,dt \quad \Big\} \quad \frac{d(\Delta l)}{dt} = \frac{\Delta\vec{u}\,dt}{dt} = (\Delta l\cdot\nabla)\vec{u}$$

- Jak se mění $\vec{B}$ v čase?

$$\underbrace{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E}}_{MR} = \nabla\times(\vec{u}\times\vec{B}) =$$

Ohm. z. pro nekonečnou vodivost $\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}=0$

$$= \vec{u}\cdot\underbrace{(\nabla\cdot\vec{B})}_{=0\ \dots\ MR} - \vec{B}(\nabla\vec{u}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{u} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{B}$$

úplný diferenciál $\vec{B}$ pro pohyb plazmatu je pak

$$\frac{d\vec{B}(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{B}}_{\text{„}\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{r}}\text{"}} = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{B}(\nabla\vec{u})$$

- Nyní vyjádříme
$$\frac{d}{dt}(\Delta\vec{l}\times\vec{B}) = \frac{d\Delta\vec{l}}{dt}\times\vec{B} + \Delta\vec{l}\times\frac{d\vec{B}}{dt} =$$
$$= [(\Delta l\cdot\nabla)\vec{u}]\times\vec{B} + \Delta\vec{l}\times[(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{B}(\nabla\vec{u})]$$

protože $\Delta\vec{l}\parallel\vec{B}$, $\Delta\vec{l}\times\vec{B}=0$
$\Rightarrow$ poslední člen $-\Delta\vec{l}\times\vec{B}(\nabla\vec{u})=0$

upravíme první dva členy: protože $\Delta l\parallel\vec{B}$ můžeme je v 1. členu prohodit

Tedy
$$\frac{d}{dt}(\Delta\vec{l}\times\vec{B}) = [(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{u}]\times\Delta\vec{l} + \Delta\vec{l}\times[(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{u}] = 0$$

$\Rightarrow$ Δl se pohybuje tak, že zůstává $\parallel$ s $\vec{B}$

Kdybychom dokázali obarvit všechny plazmové elementy na nějaké siločáře, tato „barevná" čára plazmatu by se pohybovala komplikovaným způsobem v konfig. prostoru, ale dále by souhlasila se siločárou.

! Toto platí pokud platí zjednodušený Ohm. zákon – nejen nekonečná vodivost ale i zanedbání malého Larmorova poloměru, tedy $\vec{E}\times\vec{B}$ drift mnohem důležitější než diamag. drift

(29)

Přepíšeme adiabat. rci

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho_m^{\mu}}\right) = \frac{1}{\rho_m^{\mu-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho_m}\right) - \frac{(\mu-1)p}{\rho_m^{\mu+1}}\frac{d\rho}{dt} \underset{\uparrow}{=}$$

rovnice kontin.

$$= \frac{1}{\rho_m^{\mu-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho_m}\right) + \frac{(\mu-1)p}{\rho_m^{\mu}}\nabla.\vec{u}$$

a nyní člen gradientu tlaku vynásobím

Shrnutí MHD rní v obvyklých aproximacích:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{u}) = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \qquad (2)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \qquad (3)$$

$$E + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \qquad (4)$$

a MR

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Pro ideální magnetohydrodynamiku je Ohm. zákon

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0$$

2.2 Dynamika nemagnetizovaného plazmatu

Pro soubor částic jednoho typu není pohybová rovnice tak jednoduchá jako pro jednu částici.

Zjednodušená pohyb. rce pro $\hat{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ a zjednodušený srážkový člen:

$$mn \frac{d\vec{u}}{dt} = qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla p - mn\nu_m \vec{u}$$

(pro el. výboje)
Obvykle píšeme pro e^- a uvažujeme sr. s neutrály.

- neuvažujeme generaci částic,
- srážky s jedním dalším druhem částic, jejichž $\vec{u}_\beta = 0$

2.2.1 Plazmové oscilace

opak. Bittencourt: předp. model stud. plazmatu (neuvažujeme ∇p_e)
zanedb. pohyb iontů úplně (stacionární ionty)
zanedb. srážky e^- $\qquad \rho = -e n_e'$
$n_e(\vec{r},t) = n_0 + n_e'(\vec{r},t)$ kde $|n_e'| \ll n_0$ ... malé perturbace
$\Rightarrow$ vzniklé pole $E(\vec{r},t)$ a $\vec{u}_e(\vec{r},t)$ jsou perturbace 1. řádu $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ linearizované rovnice kontin. a hybnosti (energii nepotřebujeme protože nevystupuje nikde p_e)

$$(1) \quad \frac{\partial n_e'(\vec{r},t)}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_e(\vec{r},t) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}(\vec{r},t) \qquad \text{a} \qquad (3) \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_e'$$

Divergence (2) a dosadíme z (3) $\nabla \cdot E$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{u}_e = +\frac{e}{m_e} \cdot \frac{e}{\varepsilon_0} n_e'$$

Čas. derivace (1) a dosazení $\nearrow$

$$\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0} n_e' = 0 \quad \Rightarrow \quad n_e' = \tilde{n}_e e^{-i\omega_{pe} t} \qquad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

Lieberman str. 92
Plazmová frekvence e^- leží typicky v mikrovlnné oblasti (1–10 GHz)

Pokud neuděláme předpoklad stacionárních iontů dostaneme

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}, \quad \text{kde} \quad \omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{M \varepsilon_0}} \text{ ... plazm. frekvence iontů}$$

ale protože $M \gg m_e$ je $\omega_p \approx \omega_{pe}$

Všimněme si, že $\quad \lambda_D = \dfrac{v_{th}}{\omega_{pe}} \qquad \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 kT}{n_0 e^2}} = \sqrt{\dfrac{kT}{m} \cdot \dfrac{m \varepsilon_0}{n_0 e^2}} \qquad v_{th} = \sqrt{\dfrac{kT}{m}}$

Plazmové oscilace jsou tlumeny
- srážkami
- bezsrážkově pomocí mechanismu zvaného Landaův útlum, který budeme diskutovat u elstat. vln

Většinou převažuje útlum srážkami a oscilace, pokud nejsou externě buzeny, se ztrácí v šumu.

2.2.2 Dielektr. konst a vodivost (nemagnetiz. plazma, tj. žádné stat. vnější mg. pole)

Uvažujeme uniformní plazma ~~v přítomnosti mg. po~~ v přítomnosti neutrálního plynu. Aplikujeme čas. proměnné el. pole

$$E_x(t) = \tilde{E}_x \cos\omega t = \mathrm{Re}\, \tilde{E}_x e^{i\omega t}$$

Pro zjednodušení uvažujemedalšíe – ionty ($M \to \infty$) a předp., že všechny veličiny se mění sin. v čase.

Pohyb. rce pro e^- $\quad m\dfrac{du_x}{dt} = -eE_x - m\nu_m u_x \quad$, kde ν_m srážk. frekvence e^--neutr.

! pro studené plazma ($\nabla p \equiv 0$) $\quad u_x(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{u}_x e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \tilde{u}_x = -\dfrac{e}{m}\dfrac{1}{i\omega + \nu_m}\tilde{E}_x$

Celkový proud z MR $\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} = \underbrace{\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\vec{j}_T}$: $\quad j_{Tx} = j_x + \varepsilon_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \quad$ a $\tilde{j}_x = -e n_0 \tilde{u}_x$

amplituda

Protože $\dfrac{\partial E_x}{\partial t} = \mathrm{Re}\, i\omega\tilde{E}_x e^{i\omega t}$

$$\text{amplituda } \tilde{j}_{Tx} = -e n_0 \tilde{u}_x + i\omega\varepsilon_0\tilde{E}_x =$$

$$= i\omega\varepsilon_0\left[1 + \frac{e n_0 \cdot e}{m \cdot i\omega\varepsilon_0(i\omega + \nu_m)}\right]\tilde{E}_x =$$

$$= i\omega\varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_m)}\right]\tilde{E}_x$$

- Takže M. rci můžu chápat jako pro dielektrikum

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} = \underbrace{\varepsilon_p\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}, \text{ kde } \varepsilon_p = \varepsilon_0\overbrace{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_m)}\right]}^{\varepsilon_r}$$

to se dělá především pro vysoké frekvence $\omega \gg \nu_m$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0}}$$

bezsrážk. diel. konst. $\quad \varepsilon_p = \varepsilon_0\left(1 - \dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$ neuvažuji magnetikum

- Nebo naopak se snažím přepsat MR do tvaru $\quad \dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} = \vec{j}_T = \underbrace{(\sigma_p + i\omega\varepsilon_0)\vec{E}}_{\text{Ohm. zákon}}$,

$$\text{kde } \sigma_p = -\frac{e n_0 \tilde{u}_x}{\tilde{E}_x} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m}\cdot\frac{\varepsilon_0}{i\omega + \nu_m} = \frac{\omega_{pe}^2\varepsilon_0}{i\omega + \nu_m}$$

a pro $\omega \ll \nu_m, \omega_{pe}$, tedy nízké frekvence $\quad \sigma_p \to \sigma_{dc} = \dfrac{\varepsilon_0\omega_{pe}^2}{\nu_m} = \dfrac{e^2 n_0}{m\nu_m}$

stejnosm. vod. pro apox. stud. plazmatu

$$\text{a } \sigma_p = \sigma_{dc}\frac{\nu_m}{i\omega + \nu_m}$$

pokud uvažuji e^--iont srážky mohu σ_{dc} nahradit paralelní Spitzerovou vodivostí

$$\sigma_{ei} \approx \frac{0{,}019\left(\frac{kT_e}{e}\right)^{3/2}}{\ln\Lambda}\ \Omega^{-1}m^{-1}$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{b_0};\quad b_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}mu^2\right)}$$

$\dfrac{kT_e}{e}$ ... teplota v eV

Co můžeme říct z úvah o diel. fci plazmatu?

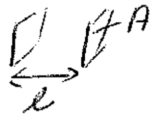
- pro vnější frekv. z mikrovlnné oblasti $\omega > \omega_{pe}$ a $\omega \gg \nu_m$ (nízkotlaký výboj)

  platí aprox. (bezsrážk. plasma) $\varepsilon_p = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$ a $\varepsilon_p > 0$, $\varepsilon_p < \varepsilon_0$

- pro o něco nižší frekvence $\omega < \omega_{pe}$ (ale $\omega \gg \nu_m$) je $\varepsilon_p < 0$

  Co vyplývá ze záporné permitivity? Impedance kondenzátoru plazmatu

běžné vf výboje!



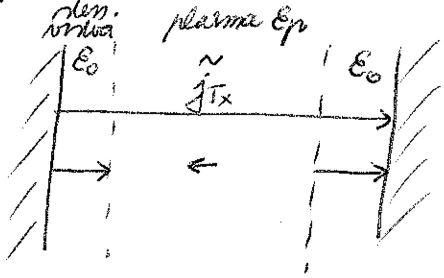
$$Z = \frac{1}{i\omega C} \quad C = \varepsilon_p \frac{A}{l} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{i\omega\varepsilon_p}\frac{l}{A} < 0 \text{ a tedy}$$

vlastně jde o induktanci $Z = i\omega L \sim Z = i\omega\left(\frac{l}{\omega^2|\varepsilon_p|A}\right)$

$\Rightarrow$ plasma se v tomto frekvenčním intervalu chová jako induktance

vf plasma $\nu_m \ll \omega \ll \omega_{pe}$ v kontaktu se stěnou:

↳ tato relace typická pro nízkotlaké výboje



$$\tilde{E}_x(\text{sheath}) = \frac{\tilde{J}_{Tx}}{i\omega\varepsilon_0} \quad \dots \text{ jen posuvný proud ve vakuu}$$

$$\tilde{E}_x(\text{plasma}) = \frac{\tilde{J}_{Tx}}{i\omega\varepsilon_p}$$

$\tilde{J}_{Tx}$ musí být stejné ve všech oblastech - kontinuita proudu we dříve odvozená pro „obvod"

zároveň $\varepsilon_p < 0$ a $|\varepsilon_p| \ll \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ el. pole v plazmatu je mnohem menší a o 180° posunuté fáze (míří obráceně) než el. pole v sheathu.

$\Rightarrow$ většina napětí je v sheathu a jen malé v plazmatu

2.2.3 Ohmický ohřev

Ačkoliv je el. pole v bulk. plazmatu malé, dává vzniku významného ohřevu plazmatu v důsledku e-neutr. srážek:

Časově vystřed. výkon na jednotku objemu absorbovaný plazmatem

$$P_{abs} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{J}_T(t)\cdot\vec{E}(t)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{J}_T\cdot\tilde{E}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{J}_T^*\cdot\tilde{E}\right)$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$; • jak doopravdy počítat

Jestliže dosadíme $\tilde{\vec{J}}_T = (\sigma_p + i\omega\varepsilon_0)\tilde{\vec{E}}$, dostaneme výkon absorb. v důsledku srážek elektronů s neutrály (ohmický ohřev) pomocí intenzity el. pole

$$P_{ohm} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\sigma_{dc}\frac{\nu_m}{\nu_m - i\omega} - i\omega\varepsilon_0\right)\right]\underbrace{|\tilde{E}|^2}_{(\tilde{E}\cdot\tilde{E}^*)} = \frac{1}{2}|\tilde{E}|^2\frac{\nu_m^2}{\nu_m^2+\omega^2}\sigma_{dc}$$

V mnoha případech známe spíše hustotu proudu než intenzitu el. pole a vztah tedy upravíme pomocí $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{J}}_T\frac{1}{\sigma_p + i\omega\varepsilon_0}$ $\Rightarrow P_{ohm} = \frac{1}{2}|\tilde{\vec{J}}_T|^2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{\omega_{pe}^2\varepsilon_0}{i\omega+\nu_m} + i\omega\varepsilon_0}\right] =$

$$= \frac{1}{2}|\tilde{\vec{J}}_T|^2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{i\omega+\nu_m}{\omega_{pe}^2 - \omega^2 + i\omega\nu_m}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}|\tilde{\vec{J}}_T|^2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{(i\omega+\nu_m)(\omega_{pe}^2-\omega^2-i\omega\nu_m)}{(\omega_{pe}^2-\omega^2)^2 + \dots}\right] = \frac{1}{2}|\tilde{\vec{J}}_T|^2\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\nu_m\omega_{pe}^2}{\dots}$$

a uvážíme-li $\omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e}$; $\sigma_{dc} = \frac{e^2 n_e}{\nu_m m_e}$

$$P_{ohm} = \frac{1}{2}|\tilde{\vec J}_T|^2 \frac{1}{\sigma_{dc}} \cdot \left(\frac{\omega_{pe}^4}{(\omega_{pe}^2-\omega^2)^2+\omega^2\nu_m^2}\right)$$

Pro $\omega \ll \omega_{pe}$ je člen v závorce ~ 1 a $P_{ohm} = \frac{1}{2}|\tilde{\vec J}_T|^2 \frac{1}{\sigma_{dc}}$

Vztahy pro ohm. absorb. výkon se nám budou hodit, když budeme hledat abs. výkon u vln v plazmatu nebo čas. proměnné pole. Samozřejmě pro vf výboje, ale zde se ukazuje, že pro nízkotlaké vf výboje není ohm. výkon hlavním zdrojem absorbce výkonu elektrony, nýbrž mechanismus „nárazů" e^- s oscilujícími stěn. oblastmi.

23.11.

2.2.4 Elmag vlny (stále pro nemagnetizované plazma, tedy žádné mg. stac. pole, které by způsobilo neizotropičnost)

Vlny v plazmatu mohou být důležité z hlediska přenosu energie z oblasti v plazmatu, kde jsou excitovány, do míst, kde jsou absorbovány.

V plazmatu
- elektromagnet. vlny ... podobně jako v dielektriku, šíří se díky výměně energie mezi el. a mg. polem
- elektrostatické vlny (další kapitolka)

Teď probereme elmag. vlny:

předp. $\vec E, \vec H$ (nemusím uvažovat $\vec B$ protože plazma nikdy nebudu považovat jako magnetikum a tedy $\vec B = \mu_0 \vec H$)

$\vec E, \vec H \sim e^{i(\omega t - \vec k\cdot\vec r)}$ $\quad \vec k$ ... vln. vektor

Pro homog., izotropní (ne dc mg. pole) plazma jsou vlny transverzální = = $\vec E, \vec H$ a $\vec k$ jsou navzájem kolmé.

Abychom dostali disperzní relaci, tedy vztah mezi ω a $\vec k$, dosadíme časově-prostorovou závislost do MR

$$\nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\vec H}{\partial t} \Rightarrow -i\,\vec k\times\tilde{\vec E}\cdot e^{i(\omega t-\vec k\vec r)} = -\mu_0 i\omega \tilde{\vec H} e^{i(\omega t - \vec k \vec r)}$$

$$\boxed{\vec k\times\tilde{\vec E} = \omega\mu_0\tilde{\vec H}}$$

a vezmeme MR pro plazma jako dielektrikum $\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec B = \vec j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\times\left[\tilde{\vec H} e^{-i\vec k\vec r}\right] = i\omega\varepsilon_p \tilde{\vec E} e^{-i\vec k\vec r}$$

$$-i\,\vec k\times\tilde{\vec H} = i\omega\varepsilon_p\tilde{\vec E}$$

$$\boxed{\vec k\times\tilde{\vec H} = -\omega\varepsilon_p\tilde{\vec E}}$$

$$\kappa_p = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_m)} \underset{\text{bez nárazů}}{\sim} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

vynásobím $\times \vec k$ a dosadím do druhé rce

$$\vec k\times(\vec k\times\tilde{\vec E}) = -\omega^2\mu_0\varepsilon_p\tilde{\vec E}$$

$$= \underbrace{(\vec k\cdot\tilde{\vec E})}_{=\emptyset \text{ protože jsou na sebe kolmé}}\vec k - k^2\tilde{\vec E}$$

a $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, $\varepsilon_p = \varepsilon_0\kappa_p$

$\mu_0\varepsilon_p = \mu_0\varepsilon_0\kappa_p = \frac{\kappa_p}{c^2}$

$$k^2\tilde{\vec E} = \kappa_p\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\vec E}$$

$\Rightarrow$ pro nenulové $\vec E$ tato rovnost platí pouze pokud $\boxed{k = \pm\frac{\sqrt{\kappa_p}\,\omega}{c}}$

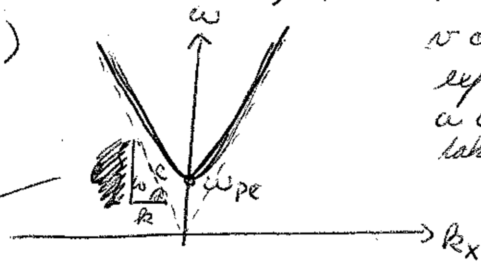
disperzní relace pro elmag vlny

Použijeme-li K_p pro studené bezsrážkové ($\omega \gg \nu_m$) plasma se stac. ionty

cold plasma approx. $\varepsilon_p = \varepsilon_0 K_p = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$

Vidíme, že vlny se šíří (tedy k je reálné) pro $K_p > 0 \Rightarrow \omega > \omega_{pe}$

Obrázek disperzní relace $\omega(k)$ elmag. vlny pro nemagnet. plasma



v obráceném případě se exponenciálně v plasmatu tlumí a obzvlášť $\omega < \omega_{pe}$ ve výboji takže se šířit nemohou

⇓

tyto úvahy jsou třeba pro indukční výboj

$k = \pm\frac{\sqrt{K_p}\,\omega}{c}$ pokud pro $\omega \to \infty$ $K_p \doteq 1 \Rightarrow k = \pm\frac{\omega}{c}$

tedy $c = \frac{\omega}{k} = \operatorname{tg}\alpha$ ... směrnice přímky

pozn. pro magnet. plasma je to vše složitější a v el. výboji, i když $\omega < \omega_{pe}$, se šířit mohou

pozn. ② Dvě nezávislé polarizace mají stejný vln. vektor k. ① Nechť $\vec{k} = \hat{x} k_x$ a obecná transv. vlna šířící se podél x má obecně eliptickou polarizaci.

$$\tilde{\vec{E}} = \hat{y}\tilde{E}_y + \hat{z}\tilde{E}_z$$

pro mg. plasma už to neplatí!

2.2.5 Elstat. vlny

až doposud jsme uvažovali aprox. stud. plasmatu, tedy nezaváděli do pohyb. rce člen tepelného pohybu $-\nabla p_e$.

V modelu teplého plasmatu tento člen uvažujeme (zjednodušujeme rci energie $\vec{q}_e = 0$ ... vektor toku tepla) a pak se ukazuje, že plasmatem se mohou šířit vlny s $\vec{k} \parallel \vec{E}$. Tyto vlny nejsou možné ve vakuu nebo dielektriku a šíří se díky přenosu energie mezi tepelnou a elektrickou formou.

Jsou podobné ~~zvuk~~ zvukovým vlnám v plynu.

plasmové oscilace ω_{pe}, které jsme odvodili z pohybové rce bez členu $-\nabla p_e$ a které jsou $\parallel \vec{E}$ se po přidání členu $-\nabla p_e$ stávají elektr. plasm. vlnami.

Vezmeme pohybovou rci $m n_e \left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla)\vec{u}_e\right] = -e n_e \vec{E} - \nabla p_e$

bez mg. pole a srážek

a adiabatickou rci energie - ekvivalentní vyjádření $\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho_m^\gamma}\right) = 0 \to \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) = 0$

$\to \frac{p}{n^\gamma} = C \to p = C n^\gamma \to \ln p = C + \gamma \ln n \to$

$\to \boxed{\frac{\nabla p_e}{p_e} = \gamma \frac{\nabla n_e}{n_e}}$ tuto budu potřebovat

$\gamma = \frac{N+2}{N}$ — $\frac{5}{3}$ 3D, 3 1D

a platí $p_e = n_e k T_e$, kde $T_e = \text{konst}$
termodyn. vztah (pro adiabat. děj)

$\Rightarrow \frac{\nabla p_e}{\nabla n_e} = \gamma \frac{p_e}{n_e} = \gamma \frac{n_e k T_e}{n_e}$

$\Rightarrow \nabla p_e = \gamma k T_e \nabla n_e$

Předp., že následující veličiny jsou malé: n_1 $(n_e = n_0 + n_1)$

E_1 $\quad \vec{E} = E_x \hat{x}$ $\quad$ a $\quad n_1, E_1, u_1 \sim e^{i(\omega t - k_x x)}$

u_{e1} $\quad \vec{u}_e = u_1 \hat{x}$

tedy, že nemáme žádné stacionární pole nebo drifty

vln. vektor

$\vec{k} \parallel \vec{E}$!

$\Leftarrow$ k MR potřebujeme pouze rci divergence

Máme tedy tyto rovnice (neuvažujeme srážky)

rce kontinuity $\quad \omega n_1 - k_x n_0 u_1 = 0$

pohyb. rce $\quad i\omega m n_0 u_1 = -e n_0 E_1 + i k_x \gamma k T_e n_1$

MR diverg. $\quad i k_x \varepsilon_0 E_1 = e n_1$

Když tyto rovnice použijeme dostáváme $\boxed{\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k_x^2 c_\gamma^2}$

$n_1 = \frac{i k_x \varepsilon_0 E_1}{e}$, $\quad u_1 = \frac{\omega}{k_x n_0} n_1 = \frac{\omega}{n_0} \frac{i \varepsilon_0 E_1}{e}$

a dosadíme do 2. rce

$-\frac{\omega^2 m \varepsilon_0 \cancel{E_1}}{e} = -e n_0 \cancel{E_1} - k_x^2 \frac{\gamma k T_e \varepsilon_0}{e} \cancel{E_1}$

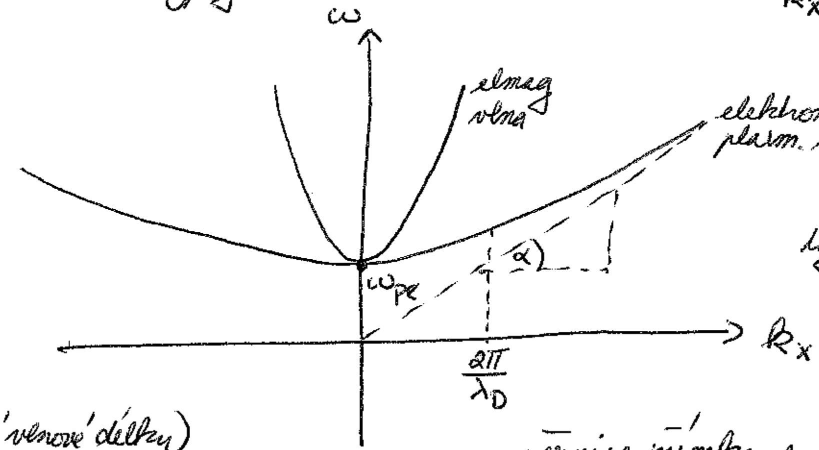
kde $\Rightarrow$ $c_\gamma = \sqrt{\frac{\gamma k T_e}{m}}$ je adiabat. elektronová rychlost zvuku

$\gamma = 3$ protože uvažujeme 1D pohyb!

Disperzní relace pro oba typy vln:

$k_x^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{c_\gamma^2}$

$k_x = 0 \Rightarrow \omega = \omega_{pe}$



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\omega}{dk_x} = c_\gamma^2$

(v Lieberman. obr. chyba ?!)

směrnice přímky z ~~der~~ diferencování disperzní relace $\quad 2d\omega = 2dk_x \cdot c_\gamma^2$

(tedy krátké vlnové délky)

Pro $k_x \gtrsim \frac{2\pi}{\lambda_D}$ jsou vlny tlumeny tepelným pohybem, který rozrušuje kolektivní pohyby $\Rightarrow$ Landauův útlum (bezsrážkový)

2.3 Pohyb (drift) gyračního středu

38

TABLE 4.1. Summary of Guiding Center Drifts ($\mathbf{R}_c/R_c^2 = -\nabla B/B$)

General force drift	$\mathbf{v}_F = \dfrac{(\mathbf{F}/q)\times\mathbf{B}}{B^2}$
Electric field drift	$\mathbf{v}_E = \dfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}$
Curvature drift	$\mathbf{v}_R = \dfrac{2W_\parallel}{q}\dfrac{\mathbf{R}_c\times\mathbf{B}}{R_c^2B^2}$ $= -\dfrac{2W_\parallel}{qB^4}[(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}]\times\vec{B}$
Grad-B drift	$\mathbf{v}_{\nabla B} = \dfrac{W_\perp}{q}\dfrac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^3}$
Polarization drift	$\mathbf{v}_p = \dfrac{m}{qB^2}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

$$|\vec{m}| = \frac{W_\perp}{B}$$

2.4 Dynamika magnetizovaného plazmatu

Chování plazmatu vloženého do stac. uniformního mg. pole $\vec{B}_0$ za přítomnosti čas. proměnného el. a mg. pole je velmi komplikované:

- gyroskopický pohyb vlastně konvertuje pohyb v jednom směru, na který působí mg. pole, do komponenty rychlosti v jiném směru => „gyrotropický" dielektr. tenzor, který má komplexně ~~st~~ sdružené nediagonální členy
- omezení pohybu e^- $\perp$ na $\vec{B}_0$ způsobí odezvu v pohybu iontů, která je důležitá především při $\downarrow f$ (když to ionty „stíhají")
- případné srážkové procesy vše dále komplikují

Pokud uvažujeme elmag. vlny, je jejich rychlost šíření nejčastěji většinou mnohem větší než tepelné rychlosti, takže efekty spojené s e^- a iont. tepelnými rychlostmi můžeme ignorovat. V předchozí části nemagnetiz. plazmatu jsme viděli, že elstat. vlny se šíří díky výměně tepelné × el. formě energie, takže šíření silně závisí na teplotě. Podobně v magnetiz. plazmatu existují <u>elstat. vlny</u>, které se šíří skrz mg. pole a <u>jejich šíření souvisí s tepel. poh.</u> Tyto vlny nejsou však [illegible] pro slabě ioniz. plazma důležité => <u>nebudeme je uvažovat</u>

2.4.1 Dielektr. tenzor

Vezmeme linearizovanou pohyb. rci pro e^- $\quad +i\omega m_e \vec{u}_e = -e(\vec{E}+\vec{u}_e\times\vec{B}_0) - m_e\nu_m\vec{u}_e$

a) neuvažujeme srážky (∅ poslední člen) ani pohyb iontů (∅ rovnici pro ionty) $\qquad \vec{B}_0=(0,0,B_0)$!

$$\Rightarrow \quad i\omega\tilde{u}_{ex} = -\frac{e}{m_e}\tilde{E}_x - \underbrace{\frac{eB_0}{m}}_{\omega_{ce}}\tilde{u}_y \qquad \tilde{u}_{ex} = \frac{e}{m}\,\frac{i\omega\tilde{E}_x - \omega_{ce}\tilde{E}_y}{\omega^2-\omega_{ce}^2}$$

$$i\omega\tilde{u}_{ey} = -\frac{e}{m_e}\tilde{E}_y + \omega_{ce}\tilde{u}_{ex} \qquad \tilde{u}_{ey} = \frac{e}{m}\,\frac{i\omega\tilde{E}_y + \omega_{ce}\tilde{E}_x}{\omega^2-\omega_{ce}^2}$$

$$i\omega\tilde{u}_{ez} = -\frac{e}{m_e}\tilde{E}_z$$

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m} \qquad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}}$$

a $\vec{j} = -e n_0 \vec{u}_e$, MR $\quad \nabla\times\tilde{\vec{H}} = i\omega\varepsilon_0\tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{j}} = i\omega\hat{\varepsilon}_p\cdot\tilde{\vec{E}}$ (matice)

$$\hat{\varepsilon}_p = \varepsilon_0\hat{\kappa}_p = \varepsilon_0\begin{pmatrix}\kappa_\perp & -i\kappa_H & 0\\ i\kappa_H & \kappa_\perp & 0\\ 0 & 0 & \kappa_\parallel\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\kappa_\perp &= 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_{ce}^2}\\ \kappa_H &= \frac{\omega_{ce}}{\omega}\,\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_{ce}^2}\end{aligned}\right\}\ \text{charakter. pro bezsrážk. gyrotropické médium}$$

$$\kappa_\parallel = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad \text{— stejné jako } \kappa_p \text{ bez } \vec{B}_0$$

b) uvažujeme srážky => transformace $\omega \to \omega - i\nu_m$ tam, kde ω pochází z pohyb. rce a ne MR

$$\kappa_\perp = 1-\frac{\omega-j\nu_m}{\omega}\,\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega-j\nu_m)^2-\omega_{ce}^2} \qquad (4.4.6a)$$

$$\kappa_\times = \frac{\omega_{ce}}{\omega}\,\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega-j\nu_m)^2-\omega_{ce}^2} \qquad (4.4.6b)$$

$$\kappa_\parallel = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega-j\nu_m)} \qquad (4.4.6c)$$

c) vezmeme v úvahu pohyb iontů (náboj ale ne) – tedy musíme vzít v úvahu i iont. pohyb. rci. Protože el. a iont. proud se sčítá, můžeme transformovat jednoduché vztahy z a) ~~jako~~ součty e^- a iont. příspěvků

$$\kappa_\perp = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \qquad (4.4.7a)$$

$$\kappa_\times = \frac{\omega_{ce}}{\omega}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \qquad (4.4.7b)$$

$$\kappa_\parallel = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (4.4.7c) \quad \rightarrow \omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$$

? Když se podíváme na vztah (4.4.7a) a velikosti členů v něm:
často $\omega_{pe} \sim \omega_{ce}$ $\quad \sqrt{\frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}} \sim \frac{eB}{m} \Rightarrow \frac{n}{\varepsilon_0} \sim \frac{B^2}{m}$

2.4.2 Disperzní vztahy

Podobně jako dříve uvažujeme vlny $\sim e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

pak MR přejdou do rovnic pro amplitudy $\quad \vec{k}\times\tilde{\vec{E}} = \omega\mu_0\tilde{\vec{H}} \quad \left(\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

$\vec{k}\times\tilde{\vec{H}} = -\omega\varepsilon_0\hat{\kappa}_p\cdot\tilde{\vec{E}} \quad \left(\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

diel. tenzor

1. rci $\times\vec{k}$ a dosadíme za $\vec{k}\times\vec{H}$ z 2. $\Rightarrow$

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}) + k_0^2\hat{\kappa}_p\cdot\tilde{\vec{E}} = 0,$$

(použili jsme $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$)

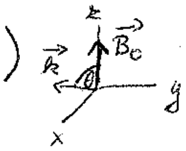
kde $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ... vlnový vektor rovinné vlny o frekvenci ω ve volném prostoru s rychlostí c

vztah je velmi podobný dřívějšímu bez $\vec{B}_0$ $\quad \vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) + \omega^2\varepsilon_0\kappa_p\mu_0\vec{E} = 0$

skalár

ale teď je situace komplikovanější, protože $\hat{\kappa}_p$ je matice a komponenty $\tilde{\vec{E}}$ jsou navzájem provázané (dříve jsme také jakosi a-priori předp., že $\vec{k}\perp\vec{E}$ ... transverzální vlny)

Uvažujme bez újmy na obecnosti, že $\vec{k}$ leží v rovině $x-z$ $\quad (\vec{B}_0 \parallel z)$



$\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_z^2 & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k_x^2+k_z^2 & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\\ \tilde{E}_z\end{pmatrix} = -k_0^2\begin{pmatrix}\kappa_\perp & -i\kappa_H & 0\\ i\kappa_H & \kappa_\perp & 0\\ 0 & 0 & \kappa_\parallel\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\\ \tilde{E}_z\end{pmatrix}$$

$k_z = k\cos\theta$
$k_x = k\sin\theta$

zavedeme veličinu index lomu $N = \frac{k}{k_0}$

aby měla rce řešení netriviální musí být determ. roven nule

$$\det\begin{pmatrix} k^2\cos^2\theta - k_0^2\kappa_\perp & ik_0^2\kappa_H & -k^2\cos\theta\sin\theta \\ & k^2 - \kappa_\perp k_0^2 & \\ & \cdots & \end{pmatrix} = 0$$

vytkneme k_0^2:

$$\det\begin{pmatrix} N^2\cos^2\theta - \kappa_\perp & i\kappa_H & -N^2\cos\theta\sin\theta \\ -i\kappa_H & N^2 - \kappa_\perp & 0 \\ -N^2\cos\theta\sin\theta & 0 & N^2\sin^2\theta - \kappa_\parallel \end{pmatrix} = 0$$

.. toto je rovnice disperze – vztah $k = k_0 N$, θ a ω

%

2.5 Vlny v magnetic. plazmatu

- popíšeme obecné vlastnosti vln v magnet. plazmatu
- probereme detaily hlavních (principal) vln, tj. těch které se šíří $\parallel$ a $\perp$ k $\vec{B}_0$
- kvalitativně si popíšeme šíření vln pod libovolným úhlem v různých oblastech frekvencí, hustoty a mg. pole

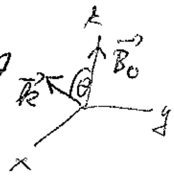
Jestliže vyřešíme předchozí rci $\det[\dots]=0$ dostáváme

$$aN^4 - bN^2 + c = 0,$$

kde

$$a = \kappa_\perp \sin^2\theta + \kappa_\parallel \cos^2\theta$$
$$b = (\kappa_\perp^2 - \kappa_H^2)\sin^2\theta + \kappa_\parallel \kappa_\perp (1+\cos^2\theta)$$
$$c = (\kappa_\perp^2 - \kappa_H^2)\kappa_\parallel$$

~~Odtud~~ je zřejmé, že existují dvě různé řešení rovnice N^2 pro daný úhel θ



Tyto řešení odpovídají dvěma dovoleným polarizacím el. pole vlny.

$$N^2 = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Protože diskriminant

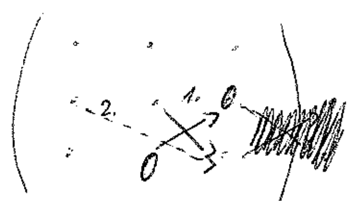
$$b^2-4ac = (\kappa_\perp^2-\kappa_H^2)^2\sin^4\theta + \kappa_\parallel^2\kappa_\perp^2(1+\cos^2\theta)^2 + 2(\kappa_\perp^2-\kappa_H^2)\kappa_\parallel\kappa_\perp \cdot \sin^2\theta(1+\cos^2\theta) - 4\kappa_\parallel(\kappa_\perp^2-\kappa_H^2)(\kappa_\perp\sin^2\theta+\kappa_\parallel\cos^2\theta)$$

$$\overset{?}{=} \;\%. + \%. - 2(\kappa_\perp^2-\kappa_H^2)\kappa_\parallel\kappa_\perp\sin^2\theta$$

$$> 0$$

$\Rightarrow$ N^2 je reálné (dvě řešení!) pro N^2
- N reálné a vlna se šíří
- N imaginární a vlna je exp. utlumena (cutoff frekvence)

Dvě různé polarizace vlny mají různé poměry složek el. pole. Poměry vyjádříme pomocí determinantů submatice libovolného ~~řádku~~ řádku. Vezmeme např. 1. řádek matice



$$\tilde{E}_x : \tilde{E}_y : \tilde{E}_z \approx (\kappa_\perp - N^2)(\kappa_\parallel - N^2\sin^2\theta) : i\kappa_H(N^2\sin^2\theta - \kappa_\parallel) : (N^2-\kappa_\perp)N^2\cos\theta\sin\theta$$

což dává dva různé poměry pro dvě různé hodnoty N^2

Protože dvě různé vlny mají různý vln. vektor ($k = k_0 N$) a jejich el. pole má různé směry v prostoru, nemůžeme je složit do vlny, která by měla výslednou polarizaci konstantní podél šíření se vlny $\rightarrow$ uvažujeme je zvlášť.

Můžeme vyřešit rci $aN^4 - bN^2 + c = 0$ $\Rightarrow$ $N^2(\theta)$, ale to není moc názorné

$\Rightarrow$ $\theta(N^2)$ je lepší!

Nejdříve ale označíme $\kappa_r = \kappa_\perp - \kappa_H$ a $\kappa_l = \kappa_\perp + \kappa_H$ $\Rightarrow$ $\kappa_\perp^2 - \kappa_H^2 = \kappa_r\kappa_l$

Ze vztahů pro relat. permitivity (neuvažujeme srážky a pohyb iontů) dostaneme

$$\kappa_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega-\omega_{ce})} \quad a \quad \kappa_l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega+\omega_{ce})}$$

Vztahy pro srážky dostaneme nahrazením $\omega \pm \omega_{ce} \to \omega \pm \omega_{ce} - i\nu_m$
a vztahy pro pohybl. ionty přičtením ~~členů~~ iontových členů

$$\kappa_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})} \qquad (4.5.6a)$$

$$\kappa_l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{ci})} \qquad (4.5.6b)$$

Vyřešíme rovnici pro N^2, θ $\quad aN^4 - bN^2 + c = 0$

$a = \kappa_\perp \sin^2\theta$
$b = \kappa_r \kappa_l \sin^2\theta + \kappa_\parallel \kappa_\perp (\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)$
$c = \kappa_r \kappa_l (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

a celou ji podělíme $\cos^2\theta$

$\Downarrow$

$$\tan^2\theta = -\frac{\kappa_\parallel (N^2 - \kappa_r)(N^2 - \kappa_l)}{(N^2 - \kappa_\parallel)(\kappa_\perp N^2 - \kappa_r \kappa_l)} \qquad (4.5.7)$$

2.5.1 Hlavní elektr. vlny

a) $\vec{k} \parallel \vec{B}_0 \Rightarrow \theta = 0$ $\quad \mathrm{tg}\,\theta = 0 \Rightarrow \kappa_\parallel (N^2 - \kappa_r)(N^2 - \kappa_l) = 0$

1. řešení $\kappa_\parallel = 0$ jsou plazmové oscilace (ne vlny) pro $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$

$$\kappa_\parallel = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 0$$
$$\omega = \omega_{pe}$$

další dvě řešení jsou el. vlny:

$$N_r^2 = \kappa_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \quad \text{a} \quad N_l^2 = \kappa_l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})}$$

zde může dojít k rezonanci pro $\omega = \omega_{ce}$
$N_r \to \infty$ ... vlna rotuje synchronně s gyrací elektronů kolem $\vec{B}_0$, což vede k rezonanční absorbci energie

pozn.
rezonance když $v_{fázová} = \frac{\omega}{k} = 0$ tedy $k, N \to \infty$
odraz vlny (evanescentní vlna, která exponenc. klesá) „cutoff" $\quad v_{fázová} \to \infty$ tedy $k, N = 0$

odraz pro $\quad 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_R(\omega_R - \omega_{ce})} = 0$

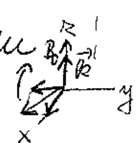
a bereme pouze řešení dávající kladnou frekvenci: $\quad \omega_R = \frac{\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}}{2}$

(RHP) Tato vlna je pravotočivě kruhově polarizovaná: vidíme z poměru amplitud složek $\vec{E}$

$$\tilde{E}_x : \tilde{E}_y = (\kappa_\perp - \kappa_r)\cancel{\kappa_\parallel} : -i\kappa_H \cancel{\kappa_\parallel}$$
$$\tilde{E}_x : \tilde{E}_y = \kappa_H : -i\kappa_H$$

Tedy $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\tilde{E}_r (\hat{x} - i\hat{y}) e^{i(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}\right]$

a pro $\vec{r}$ = konst. má vlna konst. amplitudu a rotuje pravotočivě kolem $\vec{B}_0$ frekvencí ω (po směru hod. ručiček)



pro tuto vlnu k rezonanci dojít nemůže

odraz vlny nastává pro

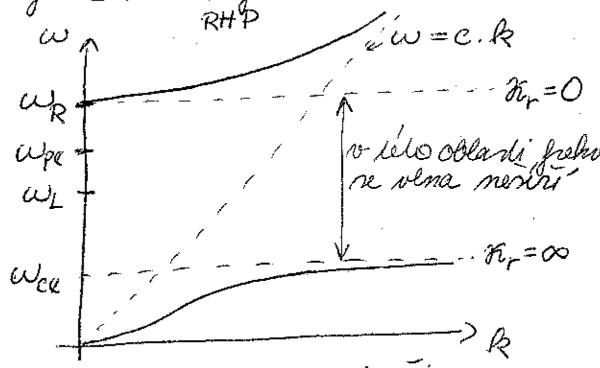
$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} = 0$$

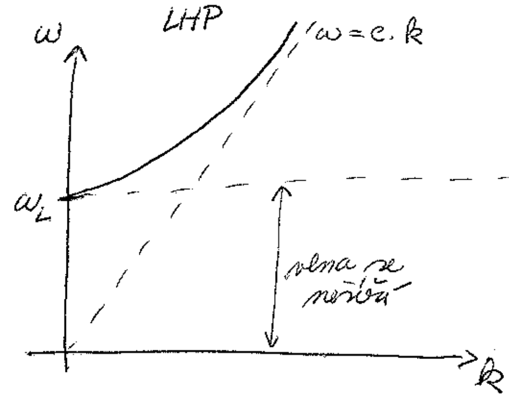
a bereme pouze řešení dávající kladnou frekvenci $\quad \omega_L = \frac{-\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}}{2}$

(LHP) Jde o levotočivě kruhově polarizovanou vlnu $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\tilde{E}_l (\hat{x} + i\hat{y}) e^{i(\omega t - \vec{k}_l \vec{r})}\right]$

⇒ Obecně se podél $\vec{B}_0$ může šířit součet RHP a LHP vln.

Když jsme určili frekvence rezonance a odrazu, můžeme načrtnout disperzní relace





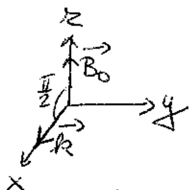
⇓ dvě větve

obecně: $N^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$

RHP

$$\underbrace{N_r^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}}_{\omega(k)}$$

b) $\vec{k} \perp \vec{B}_0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



a tedy $\operatorname{tg}\theta \to \infty$

a jmenovatel zlomku musí být nula $(N^2 - \kappa_\parallel)(\kappa_\perp N^2 - \kappa_r \kappa_l) = 0$

1. řešení

$N^2 = \kappa_\parallel$

tedy vlna šíří se i v nemagnetizovaném plasmatu

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$$

odraz ($k=0$) pro $\omega = \omega_{pe}$

Vlna odpovídá lineárně polarizované vlně s $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$, jejíž pohyb není ovlivněn B_0, nazývá se <u>řádná</u> (ordinary ⇒ zkr. O)

2. řešení

$$N^2 = \frac{\kappa_r \kappa_l}{\kappa_\perp} = \frac{\kappa_\perp^2 - \kappa_H^2}{\kappa_\perp}$$

vlna s el. polem kolmým na $\vec{B}_0$ a dvěma složkami ∥ a ⊥ s $\vec{k}$ (tedy v ose x a y) nazývá se mimořádná (extraordinary – ozn. X)

$$N_X^2 = \frac{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}\right]\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})}\right]}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}}$$

toto jsme mohli zjistit z poměrů amplitud $\tilde{E}_x : \tilde{E}_y : \tilde{E}_z$

pro $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow (\kappa_\perp - N^2)(\kappa_\parallel - N^2) : i\kappa_H (N^2 - \kappa_\parallel) : 0$

pro $N^2 = \kappa_\parallel$ 0:0:0 ⇒ nemohu nic říct o velikostech $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z$ a musím řešit tu rovnici s maticí!

zde je tedy jasné $\tilde{E}_z = 0$

odraz ($N_X = 0$) pro frekvence nalezené již dříve: ω_R, ω_L

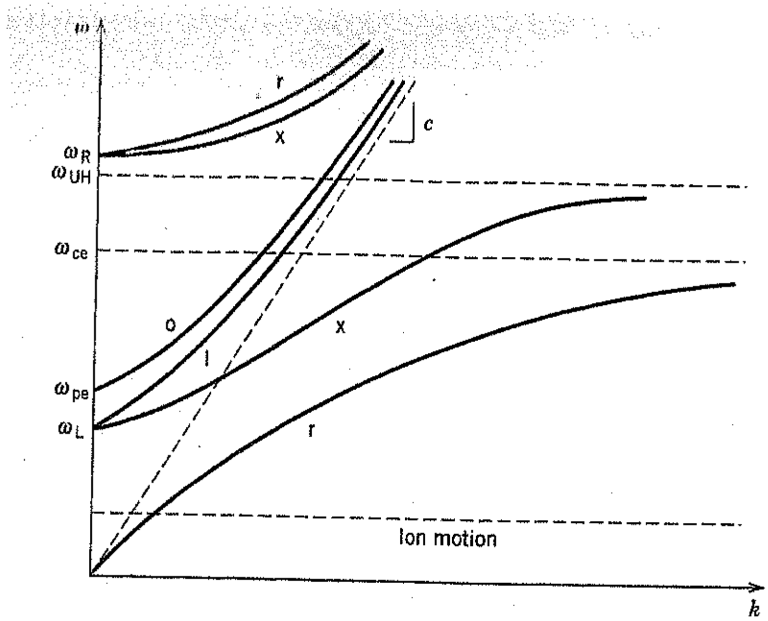
rezonance pro $1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} = 0$

tedy $\omega^2 - \omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2 = 0$

UH $\omega_{UH}^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2$

upper hybrid frekvence

Nyní tedy můžeme namalovat disperzní vztahy pro všechny hlavní vlny



~~Vraťme ještě~~
Rozebereme ještě podrobněji RHP vlnu pro $\omega < \omega_{ce}$ (spodní větev r).
Vlna se šíří, pokud $\omega < \frac{eB_0}{m_e}$. Co se stane když B_0 snažíme pomalu zvětšovat?
V určitém ~~okamžiku~~ místě $\omega = \omega_{ce}(z)$ a dojde k rezonanci $k_r = \infty$,
$v_{\text{fázová}} = \frac{\omega}{k}$ i $v_{\text{grupová}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \to 0$ a vlna je silně absorbována (musí být ještě splněny určité podmínky prostor. změn pole a hustoty plazmatu) – princip výbojů buzených elmag. vlnou!

2.5.2 Hlavní vlny při uvažování dynamiky iontů

a) $\vec{k} \parallel \vec{B_0}$

$$N_r^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})} \qquad (4.5.16a)$$

$$N_l^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{ci})} \qquad (4.5.16b)$$

což dále upravíme, když uvážíme $n_e = n_i$ v $\omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}$ a $\omega_{pi} = \dots$

pro RHP:

$$N_r^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})} \qquad (4.5.17)$$

pro LHP: Similarly for the LHP wave, we have

$$N_l^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})} \qquad (4.5.18)$$

obě mají rezonance $\omega = \omega_{ce}$, $\omega = \omega_{ci}$

b) $\vec{k} \perp \vec{B_0}$

pro mimořádnou vlnu

$$N_x^2 = \frac{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})}\right]\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{ci})}\right]}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}}$$

Ze vztahu pro mimořádnou vlnu vyplývá, že má opět stejné cutoff frekvence jako RHP, LHP. Rezonance nastává pro

$$(\omega^2-\omega_{ce}^2)(\omega^2-\omega_{ci}^2)-\omega_{pe}^2\,(\omega^2-\omega_{ci}^2)-\omega_{pi}^2\,(\omega^2-\omega_{ce}^2)=0$$

$\Rightarrow$ dvě řešení

horní hybridní rezonance $\omega_{UH}^2 \approx \omega_p^2+\omega_{ce}^2$

spodní —"— $\frac{1}{\omega_{LH}^2}\approx\frac{1}{\omega_{pi}^2}+\frac{1}{\omega_{ce}\omega_{ci}}$ pro $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{ci}^2$

(tu jsme před tím neměli) (typicky pro materiál, inženýrství ~~pro~~ ve výbojích)

Energie nízkofrekvenční vlny může být v plazmatu silně absorbována.

Přehledná tabulka frekvencí ořezu a rezonance:

TABLE 4.2. Summary of Cutoffs and Resonances for the Principal Waves

Wave	Cutoffs ($k = 0$)	Resonances ($k = \infty$)
r wave	$(\omega-\omega_{ce})(\omega+\omega_{ci})=\omega_p^2$ or $\omega\approx\frac{\omega_{ce}+\sqrt{\omega_{ce}^2+4\omega_p^2}}{2}$	$\omega=\omega_{ce}$
l wave	$(\omega+\omega_{ce})(\omega-\omega_{ci})=\omega_p^2$ or $\omega\approx\frac{-\omega_{ce}+\sqrt{\omega_{ce}^2+4\omega_p^2}}{2}$	$\omega=\omega_{ci}$
x wave	Both as above	$\omega_{UH}^2\approx\omega_p^2+\omega_{ce}^2$ and $\frac{1}{\omega_{LH}^2}\approx\frac{1}{\omega_{pi}^2}+\frac{1}{\omega_{ce}\omega_{ci}}$ for $\omega_{pi}\gg\omega_{ci}$
o wave	$\omega=\omega_p$	None

Pomocí těchto frekvencí a zjištění kdy se $\vec{k}$ mění z reálného na imaginární můžeme nakreslit disperzní relace:

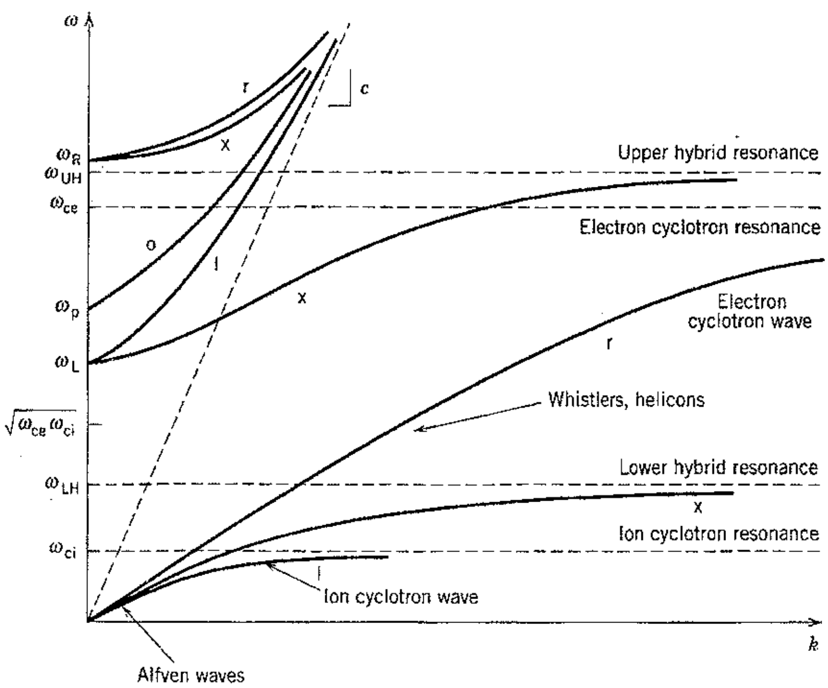


FIGURE 4.10. Dispersion ω versus k for the principal waves in a magnetized plasma with mobile ions.

Ve srovnání s diagramem pro nehybné ionty se pro ↑ ω nic nemění, ALE oblast ↓ ω je jiná, což je logické. ($\omega \leq \omega_{pi}$)

Pro velmi malé ω, $\omega \ll \omega_{ci}$ je disperze RHP, LHP a x-vlny stejná:

$$k^2 = k_0^2\left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}\right) \qquad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

a tato vlna se šíří i pro $\omega \to 0$. Člen v závorce je nízkofrekvenční kolmá diel. konstanta.

Pro rozumně vysoké hustoty plazmatu $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$ => $k^2 \doteq k_0^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}$ $\qquad v_{fáz} = \frac{\omega}{k}$

$$\frac{\omega^2}{v_{fáz}^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}$$

$$v_{fáz} = c \cdot \frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}} \equiv v_A$$

Alfvén. rychlost

Alfvénovy vlny byly poprvé popsány v souvislosti se šíření vln v zemské magnetosféře a mají důležitou roli v ~~jevech~~ nízkofrekvenčních jevech magnetiz. plazmatu.

2.5.3 CMA diagram

: pro obecný úhel šíření θ je situace podstatně komplikovanější ⇒ potřebujeme nějakou schematickou reprezentaci

- vlnové normalizované povrchy ... co to je? = povrch normaliz. fázové rychlosti

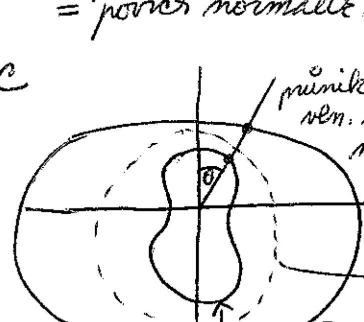
normalizace k rychlosti světla $v_{fáz}/c$

a jde o polární diagram těchto $v_{fáz}/c$:

typická ukázka pro dvě řešení N^2 disperzní rovnice

$$aN^4 + bN^2 + c = 0$$

$$N^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_{fáz}^2}$$



Řešení s ↑ N^2 dává „pomalou" vlnu

—ıı— ↓ N^2 —ıı— „rychlou" vlnu

Obvykle má rychlá vlna fáz. rychlost větší než c (rychlost světla) $v_{fáz} > c$

a pomalá vlna $v_{fáz} < c$

- CMA (Clemmow–Mullaly–Allis) diagram: kompaktní způsob, jak prezentovat řešení disperzní relace.

Relativní fáz. rychlost $\frac{v_{fáz}}{c} = \frac{\omega}{kc}$ obou vln, jež jsou řešením disper. relace (viz výše) je zakreslena v polárním diagramu jako nahoře, ale pro různé oblasti $\vec{B}_0$ a n. Na ose y je totiž $\frac{\omega_{ce}\omega_{ci}}{\omega^2}$ a na ose x $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Velikosti těchto dvou parametrů tedy rozčleňuje plochu na různé oblasti, které mají jiná schémata vlnových normaliz. povrchů:

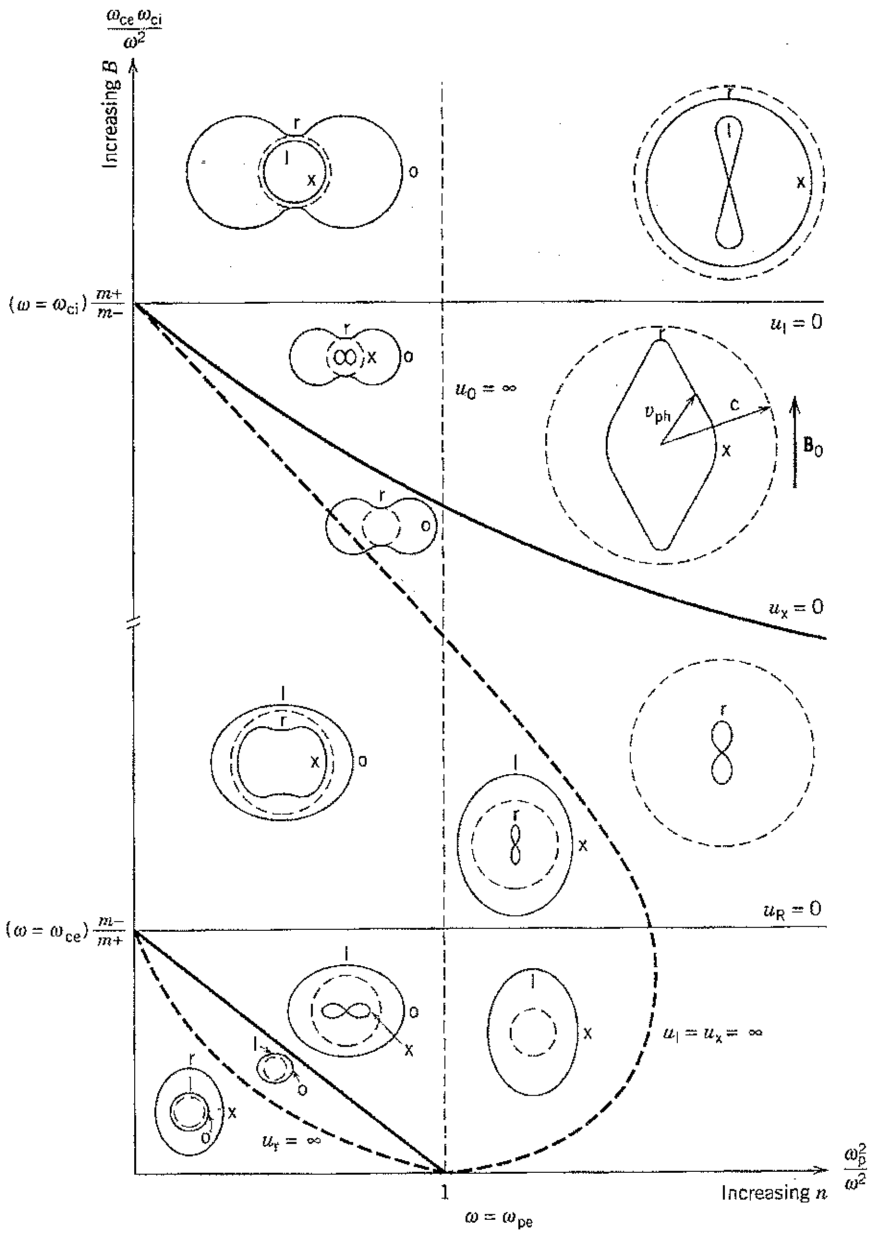


FIGURE 4.11. The CMA diagram for waves in a magnetized plasma. The cutoffs and resonances are indicated by the lines labeled $u = \infty$ and $u = 0$, respectively, where u denotes the phase velocity and the subscripts label the principal waves (after Allis et al., 1963).

V diagramech vln. norm. povrchů jsou vždy písmeny označeny hlavní ~~[illegible]~~ druhy vlny, tedy

r, l pro $\theta = 0$
o, x pro $\theta = \frac{\pi}{2}$

Rychlost světla je označena čárkovaně – kvůli měřítku fázové rychlosti.

~~[illegible]~~ Cutoff frekvence (odraz vlny) jsou označeny $u = \infty$

Rezonance $u = 0$