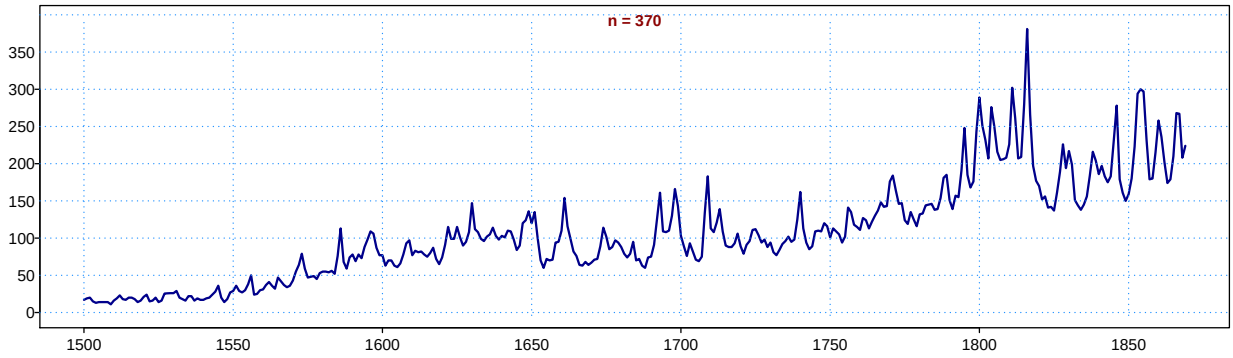
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Stochastické modely časových řad

RNDr. Marie Forbelská, Ph.D.

Beveridge Wheat Price Index, 1500-1869



Ústav matematiky a statistiky

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity Brno

říjen 2013

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

KAPITOLA 1

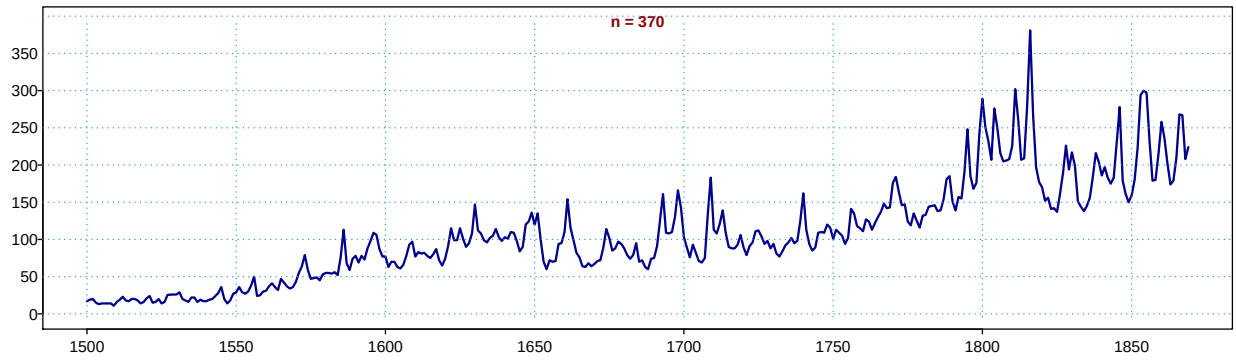
Teoretické základy náhodných procesů

1. Úvod

V praktickém životě se setkáváme s velkým množstvím náhodných jevů, které se uskutečňují v čase. Matematickým modelem těchto jevů mohou být náhodné procesy.

Pojem **náhodného procesu** je zobecněním pojmu náhodné veličiny. Zatímco náhodná veličina je reálná funkce jedné proměnné – elementárního jevu, je náhodný proces reálnou funkcí dvou proměnných – elementárního jevu a jedné reálné proměnné. Tou obvykle bývá **čas**.

K nejstarším záznamům ve tvaru časových řad patří *astronomická pozorování*. Grafická znázornění časových řad v podobě, na kterou jsme zvyklí teď, se začala objevovat na počátku 19. století (např. záznamy zemědělské produkce - známá Beveridgeova řada popisující cenový index pšenice v západní Evropě v letech 1500-1869).



Obrázek 1. *Beveridge Wheat Price Index, 1500-1869*

V praktických situacích se setkáváme s mnoha náhodnými procesy. Například

- ve *fyzikálních a technických vědách:*
  seismický záznam v geofyzice,
  řada nejvyšších denních teplot v meterologii,
  průběh výstupního signálu určitého elektrického přístroje,
  tenzometrické měření povrchového napětí v provozu namáhané strojní součástky,
  změny v tloušťce drátu v průběhu jeho délky,
  změny v počtu výzev na určité telefonní lince, atd.;
- v *biologických vědách:*
  sledování různých parametrů znečištění ovzduší,
  EEG, EKG záznamy v medicině,
  procesy množení (např. bakterií), apod.
- ve *společenských vědách:*
  změny v počtu obyvatelstva,
  procesy mortality a invalidity obyvatelstva, aj.;
- v*ekonomice*
  změny poptávky po určitém výrobku,
  analýza vývoje kursu akcií na burze,
  objem zemědělské produkce,
  počet čekajících v letecké dopravě, atd.

Tyto procesy, napohled rozmanité, lze jednotně popsat matematickým pojmem **náhodného (stochastického) procesu**. Ta část matematické statistiky, která se zmíněnými procesy zabývá, se také nazývá statistickou dynamikou.

Cílem analýzy náhodných procesů je konstrukce odpovídajícího modelu, což umožní porozumět mechanismu, na jehož základě jsou generovány sledované údaje. Znalost modelu dále umožňuje předpovídat budoucí vývoj a je-li možné řídit a optimalizovat činnost příslušného systému (vhodnou volbou vstupních parametrů a počátečních podmínek).

2. Definice náhodného procesu

DEFINICE 2.1. Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indexová množina $T \subseteq \mathbb{R}$ a reálná funkce $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ definovaná pro $\forall \omega \in \Omega$ a $\forall t \in T$.

Jestliže pro $\forall t \in T$ je $X(\omega, t)$ borelovsky měřitelná funkce vzhledem k $\mathcal{A}$ (tj. pro $\forall B \in \mathcal{B}, \forall t \in T$ platí $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{A}$, kde $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských podmnožin), pak tuto funkci nazýváme (n-rozměrným) **náhodným procesem**.

Náhodný proces $X(\omega, t)$ při pevném $\omega \in \Omega$ se nazývá **realizace (trajektorie) procesu**. Pravděpodobnostní míru $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ nazýváme **rozdělení pravděpodobností náhodného procesu** $X(\omega, t)$.

POZNÁMKA 2.2. Obdobně jako u **náhodných veličin**, kdy místo $X(\omega), \omega \in \Omega$ píšeme pouze X, u **náhodných procesů** místo $\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ píšeme $\{X_t, t \in T\}$.

DEFINICE 2.3. Pokud indexová množina $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$, mluvíme o **procesu s diskrétním časem** nebo o **časové řadě** či **náhodné posloupnosti**. Pokud indexová množina $T = \langle t_1, t_2 \rangle$, kde $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$, říkáme, že $\{X_t, t \in T\}$ je **náhodný proces se spojitým časem**. Dvojice $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$, kde $\mathbb{S}$ je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin $\mathbb{S}$, se nazývá **stavový prostor** procesu $\{X_t, t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o **proces s diskrétními stavy**. Nabývá-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o **procesu se spojitými stavy**.

Rozdělení pravděpodobností P_X náhodného procesu $\{X_t, t \in T\}$ jednoznačně definuje rozdělení každého n-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})'$, kde $t_1, \ldots, t_n$ jsou libovolné body z množiny T.

DEFINICE 2.4. Nechť T^n je množina všech vektorů

$$T^n = \{\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)' : t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n; t_i \in T; i = 1, \ldots, n\}.$$

Pak (konečně dimenzionální) **distribuční funkcí** náhodného procesu rozumíme funkci

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) \\ &= P_{\mathbf{X_t}}((-\infty, x_1>, \ldots, (-\infty, x_n>) \end{aligned}$$

pro $\forall \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)' \in T^n$ a $\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.

Pro různá n a pro různé hodnoty $t_1, \ldots, t_n$ dostáváme celý **systém distribučních funkcí**, označme jej $\mathcal{F}$, který nemůže být úplně libovolný, ale zřejmě musí splňovat tzv. **Kolmogorovy podmínky konzistence**

(K1) **Podmínka symetrie**: pro libovolnou permutaci $i_1, \ldots, i_n$ čísel $1, \ldots, n$ platí

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

(K2) **Podmínka konzistence**:

$$F_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, \infty) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Každému náhodnému procesu lze tedy přiřadit konzistentní systém distribučních funkcí. K danému konzistentnímu systému distribučních funkcí existuje vždy takový náhodný proces, že jeho systém distribučních funkcí je totožný se zadaným systémem, což říká následující věta, kterou uvedeme bez důkazu (lze najít v knize Neubrunn, Riečan, 1981, [**20**]).

VĚTA 2.5. ***Kolmogorova věta***
K systému distribučních funkcí, které splňují Kolmogorovy podmínky konzistence, existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ tak, že $\mathcal{F}$ je jeho systémem distribučních funkcí.

Příklad 2.1. ***Výpočet distribuční funkce náhodného procesu***. Mějme náhodnou veličinu

$$U \sim N(0, 1)$$

a označme

$$\Phi(u) = P(U \leq u); \quad u \in \mathbb{R}.$$

Pro $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ zaveďme

$$X_t = U \cdot t.$$

Vypočítejme **distribuční funkci**

$$F_t(x) = P(X_t \le x) = P(U \cdot t \le x) = \begin{cases} 0 & t = 0,\ x \le 0, \\ 1 & t = 0,\ x > 0, \\ P(U \ge \frac{x}{t}) = 1 - \Phi(\frac{x}{t}) & t < 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ P(U \le \frac{x}{t}) = \Phi(\frac{x}{t}) & t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

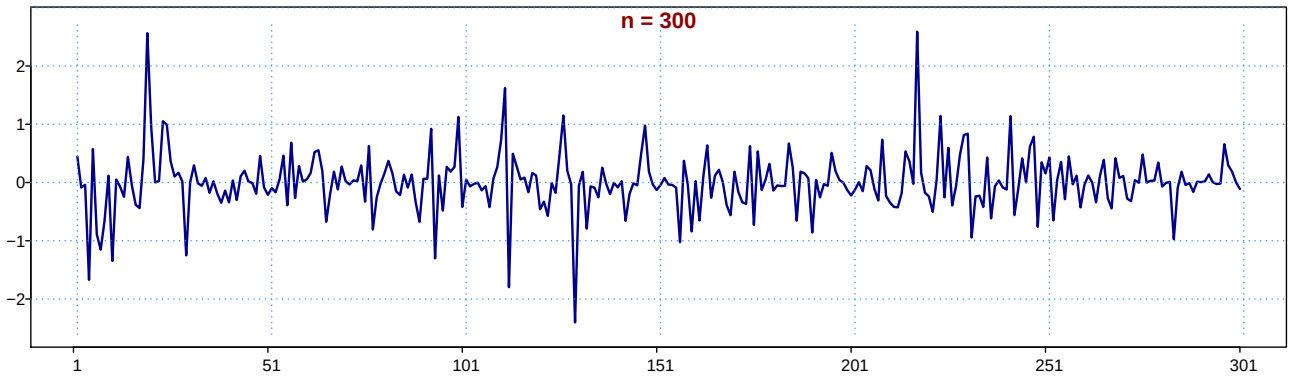
2.1. Příklady náhodných procesů.

Příklad 2.2. ***Sinusoida s náhodnou fází a amplitudou***. Nechť A a θ jsou **nezávislé** náhodné veličiny

- A je nezáporná náhodná veličina: $A \ge 0$,
- θ má rovnoměrné rozdělení: $\theta \sim Rs(0, 2\pi)$.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ může být definován takto:

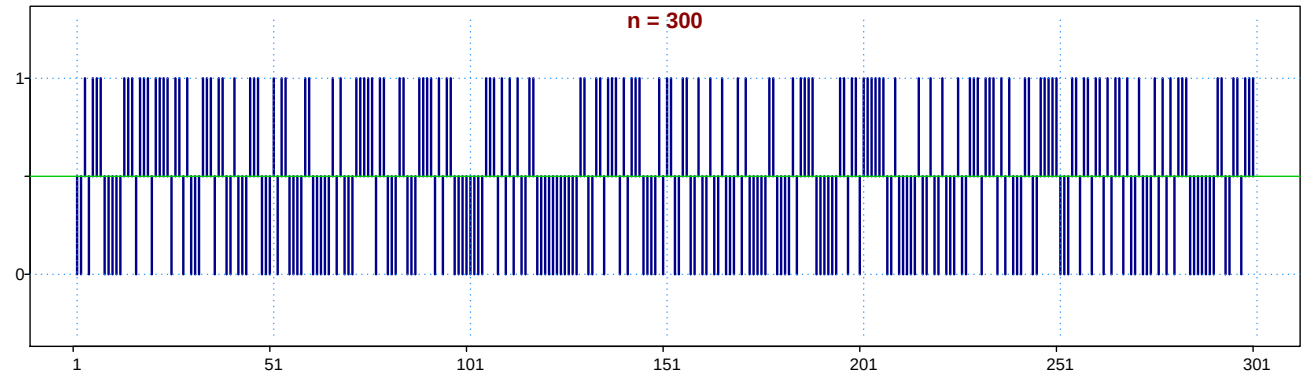
$$X_t = r^{-1} A \cos(\nu t + \theta), \qquad \nu \ge 0, r > 0.$$



Obrázek 2. *Sinusoida s náhodnou fází a amplitudou* ($A \sim \chi^2(2)$, $r = 4$, $\nu = \frac{\pi}{2}$).

Příklad 2.3. ***Binární proces*** $\{X_t, t = 1, 2, \ldots\}$ je posloupnost **nezávislých** alternativních náhodných proměnných:

$$X_t \sim A\left(\tfrac{1}{2}\right).$$



Obrázek 3. *Binární proces*: $X_t \sim A\left(\frac{1}{2}\right)$.

Příklad 2.4. ***Náhodná procházka*** $\{X_t, t = 1, 2, \ldots\}$ je definována takto:

$$X_0 = 0, \quad X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde ε_t jsou **nezávislé** stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem, tj. $\varepsilon_t \sim \mathcal{L}(0, \sigma^2)$.

Obrázek 4. *Náhodná procházka*: $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

3. Stochastické procesy druhého řádu

3.1. Striktní a slabá stacionarita.

Definice 3.1. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **striktně stacionární**, jestliže pro $\forall \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ a pro $\forall \boldsymbol{\tau} = (t_1 + h, \ldots, t_n + h) \in T^n$ platí

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}).$$

Rovnost lze interpretovat tak, že základní pravděpodobnostní charakteristiky procesu se nemění při posunutí v čase.

Definice 3.2. Existuje-li pro $\forall t \in T$ střední hodnota EX_t, pak nazýváme funkci

$$\mu_t = EX_t$$

střední hodnotu náhodného procesu.

Definice 3.3. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme **procesem druhého řádu**, jestliže pro $\forall t \in T$ platí

$$EX_t^2 < \infty$$

a říkáme, že náhodný proces má **konečné druhé momenty**.

Poznámka 3.4. Pokud $EX_t^2 < \infty$, pak ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$E|X_t| \leq (E|1|^2 \cdot E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = (E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

tj. **existuje střední hodnota** $EX_t = \mu_t$
a **rozptyl** $DX_t = EX_t^2 - (EX_t)^2 = \sigma_t^2$.

Definice 3.5. Uvažujme náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$, který má konečné druhé momenty. Pak funkci

$$\gamma(s,t) = C(X_s, X_t) = E(X_s - EX_s)(X_t - EX_t)$$

nazveme **autokovarianční funkcí** a funkci

$$\rho(s,t) = \frac{C(X_s, X_t)}{\sqrt{DX_s DX_t}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}}$$

nazveme **autokorelační funkcí**.

Poznámka 3.6. Tyto reálné funkce dvou proměnných dávají informaci o **lineárním vztahu** mezi jakoukoliv dvojicí náhodných veličin X_s a X_t. Autokavariační funkce nabývá hodnoty od mínus do plus nekonečna a její velikost závisí na měrných jednotkách náhodných veličin. Naproti tomu autokorelační funkce je normovanou autokovariancí, nabývá hodnot od mínus jedné do jedné a není závislá na měrných jednotkách.

Definice 3.7. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme **stacionární ve střední hodnotě**, pokud pro $\forall t \in T$ je střední hodnota konstantní, tj. $EX_t = \mu$. Pokud $EX_t = 0$, náhodný proces nazýváme **centrovaným**.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá **kovariančně stacionární**, pokud pro $\forall t, s \in T$ platí

$$\gamma(s,t) = \gamma(0, |s-t|) \qquad \text{což budeme také psát ve formě} \qquad \gamma(s,t) = \gamma(s-t),$$

tj. autokovarianční funkce závisí na svých argumentech pouze prostřednictvím jejich rozdílů.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá **(slabě) stacionární**, je-li **stacionární ve střední hodnotě** a **kovariančně stacionární**.

Poznámka 3.8. Bez újmy na obecnosti můžeme pracovat s centrovanými náhodnými procesy, neboť pro libovolná reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} C(X_s + a, X_t + b) &= E[(X_s + a) - E(X_s + a)][(X_t + b) - E(X_t + b)] \\ &= E(X_s - EX_s)(X_t - EX_t) = C(X_s, X_t) = \gamma(s, t) \end{aligned}$$

Poznámka 3.9. Protože $C(X_s, X_t) = C(X_t, X_s)$, pak pro kovariančně stacionární procesy platí $\gamma(-t) = \gamma(t)$ a všechny náhodné veličiny X_t mají tentýž konečný rozptyl

$$DX_t = C(X_t, X_t) = \gamma(t - t) = \gamma(0).$$

Ze Schwarzovy nerovnosti dále plyne

$$|\gamma(t)| = |C(X_0, X_t)| \leq \sqrt{DX_0 DX_t} = \gamma(0).$$

Poznámka 3.10. Přívlastek slabě se většinou vynechává. Lze snadno ukázat, že je-li proces striktně stacionární, je také stacionární. Opačná implikace však neplatí.

Poznámka 3.11. Nechť náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je stacionární. Označme

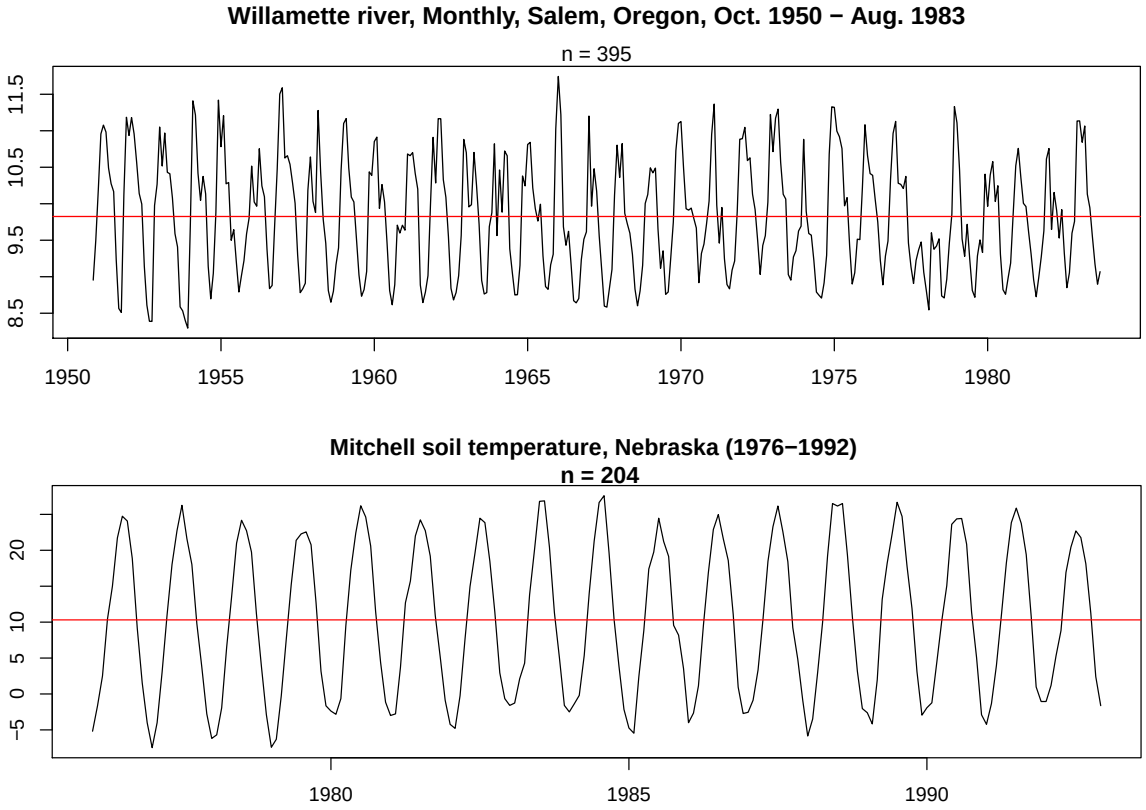
$$\gamma(0) = \sigma^2,$$

pak **autokorelační funkce** stacionárního náhodného procesu bude mít tvar

$$\varrho(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma^2} = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)}.$$

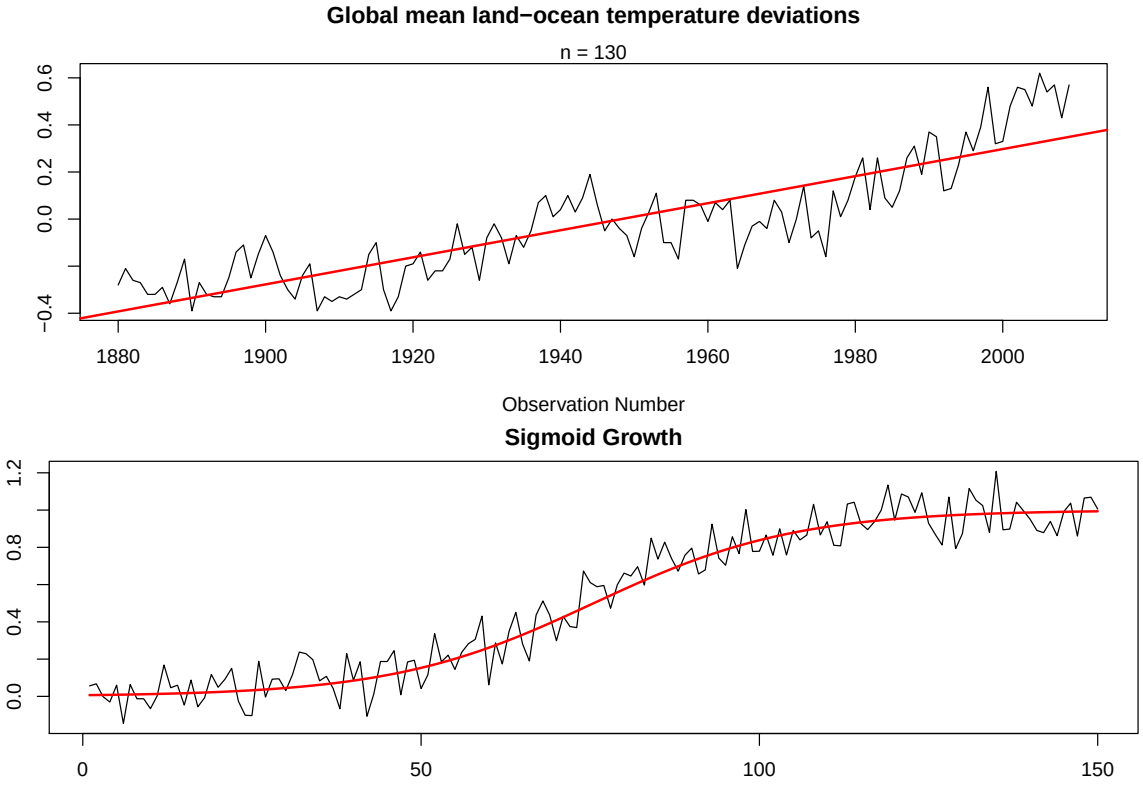
3.2. Grafické ukázky náhodných procesů.

Příklad 3.5. ***Ukázky (slabě) stacionárních časových řad***. Na následujících dvou grafech jsou vykresleny dvě slabě stacionární časové řady.



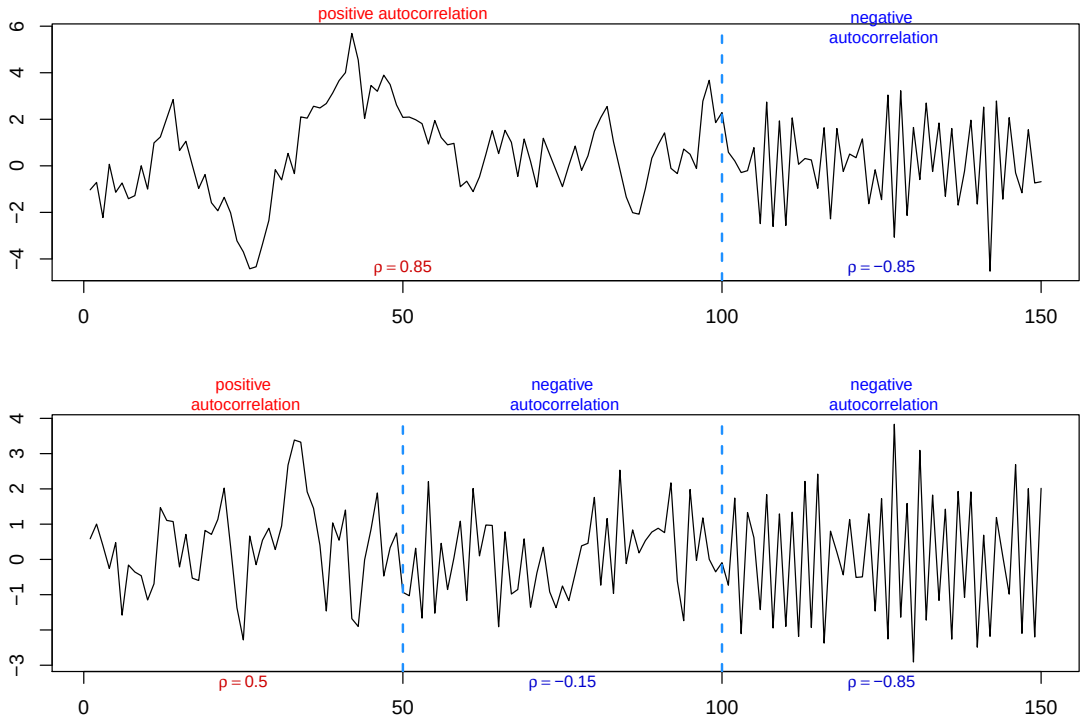
Obrázek 5. *Stacionární časové řady*

Příklad 3.6. ***Ukázky nestacionarity ve střední hodnotě***. Dva další grafy zobrazují typické časové řady, které mají nestacionární střední hodnotu. První se vyznačuje lineárním trendem, u druhé je tzv. sigmoidní trend (tzv. růstová křivka).



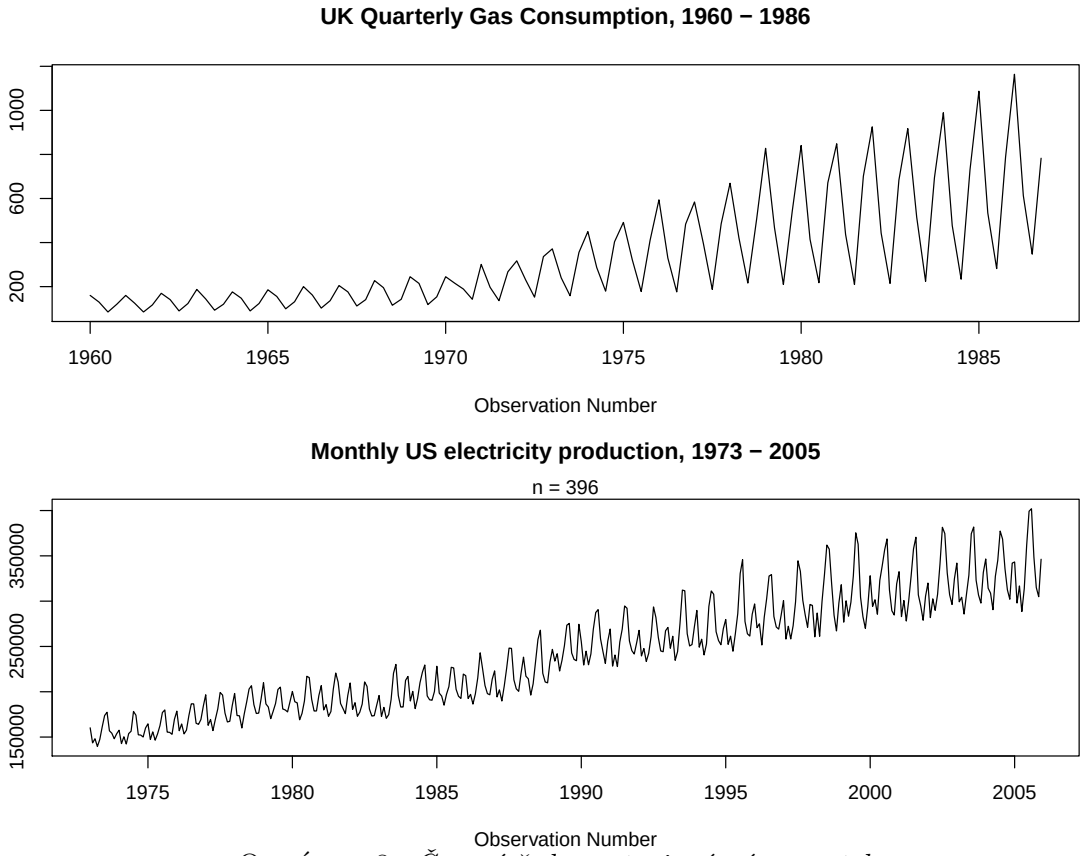
Obrázek 6. *Časové řady nestacionární ve střední hodnotě.*

Příklad 3.7. ***Ukázka nestacionarity v autokovariační funkci***. V dalších dvou grafech je vyobrazena nestacionarita v korelaci, kdy dochází ke skokové změně autokorelační funkce.



Obrázek 7. *Časové řady nestacionární v autokovariační funkci.*

Příklad 3.8. ***Ukázky nestacionarity v rozptylu***. Velmi častými jsou případy, kdy dochází ke změně rozptylu během času.



Obrázek 8. *Časové řady nestacionární v rozptylu.*

Definujme nyní náhodné procesy, které budou hrát důležitou roli v aplikacích.

Definice 3.12. Řekneme, že náhodný proces $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ je **bílým šumem** (*White Noise*), jestliže ε_t jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou, tj.

$$E\varepsilon_t = 0, \quad D\varepsilon_t = \sigma^2, \quad C(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad (s \neq t),$$

značíme

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Pokud jsou navíc nejen nekolerované, ale i **nezávislé**, značíme je symbolem **IID** (independent identical defined), píšeme

$$\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2).$$

Věta 3.13. *Náhodné procesy $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ a $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ jsou stacionárními náhodnými procesy.*

Důkaz. Zřejmý. □

Definice 3.14. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá **gaussovským** (**normálním**), jestliže pro každé přirozené n a libovolná čísla $t_j \in T,\ j = 1, \ldots, n$, je jeho n-rozměrná distribuční funkce $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ distribuční funkcí n-rozměrného normálního rozdělení.

Věta 3.15. *Gaussův náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je stacionární, právě když je striktně stacionární.*

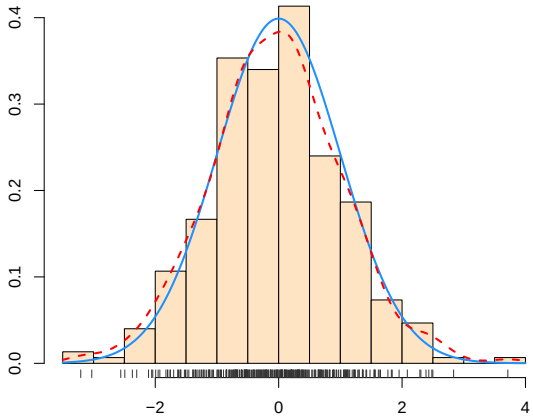
Důkaz. Je triviální a plyne z vlastností normálního rozdělení. □

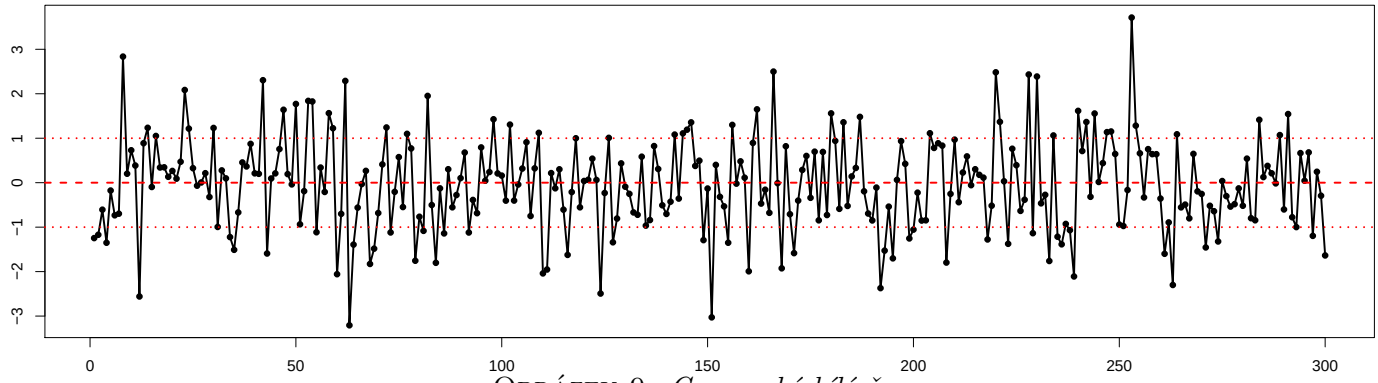
Příklad 3.9. ***Grafická ukázka simulovaného bílého šumu s normálním rozdělením.***

$$\varepsilon_t = \eta_t - \mu \ \sim \ WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

---

kde	$\eta_t \ \sim \ N(\mu = 1, \sigma^2 = 1)$
hustota:	$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\}$ pro $x \in \mathbb{R}$
střední hodnota:	$E\eta_t = \mu$
rozptyl:	$D\eta_t = \sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$





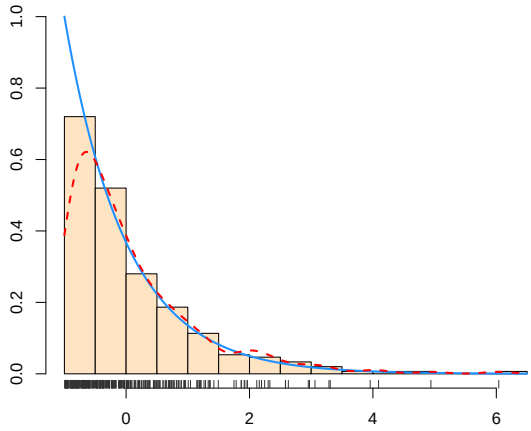
Obrázek 9. *Gausovský bílý šum.*

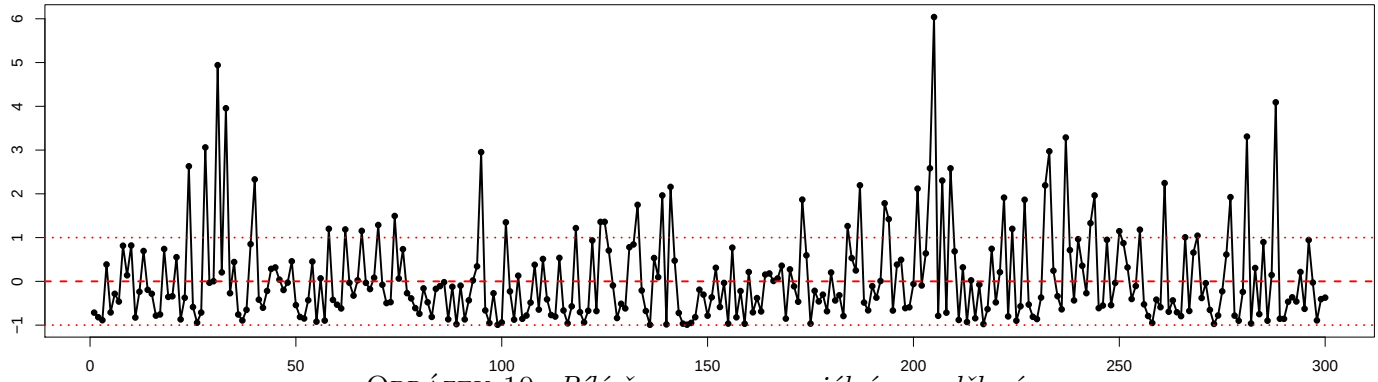
Příklad 3.10. ***Ukázka bílého šumu s exponenciálních rozdělením.***

$$\varepsilon_t = \eta_t - \mu \ \sim \ WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

---

kde	$\eta_t \ \sim \ Exp(\mu = 1)$
hustota:	$f_\eta(x) = \frac{1}{\mu} \exp\{-\frac{1}{\mu}x\}$ pro $x \geq 0$
střední hodnota:	$E\eta_t = \mu$
rozptyl:	$D\eta_t = \mu^2 = \sigma_\varepsilon^2$





Obrázek 10. *Bílý šum s exponenciálním rozdělením.*

Příklad 3.11. ***Bílý šum s Beta rozdělením.***

$$\varepsilon_t = \eta_t - \mu \ \sim \ WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

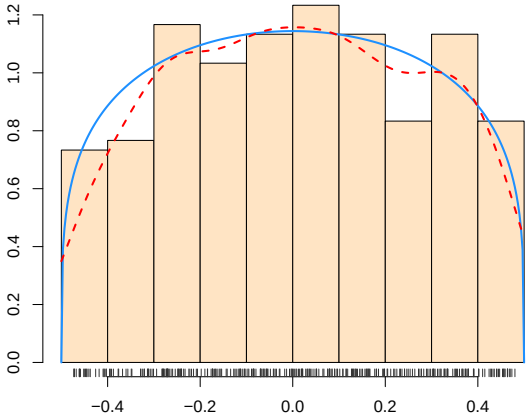
---

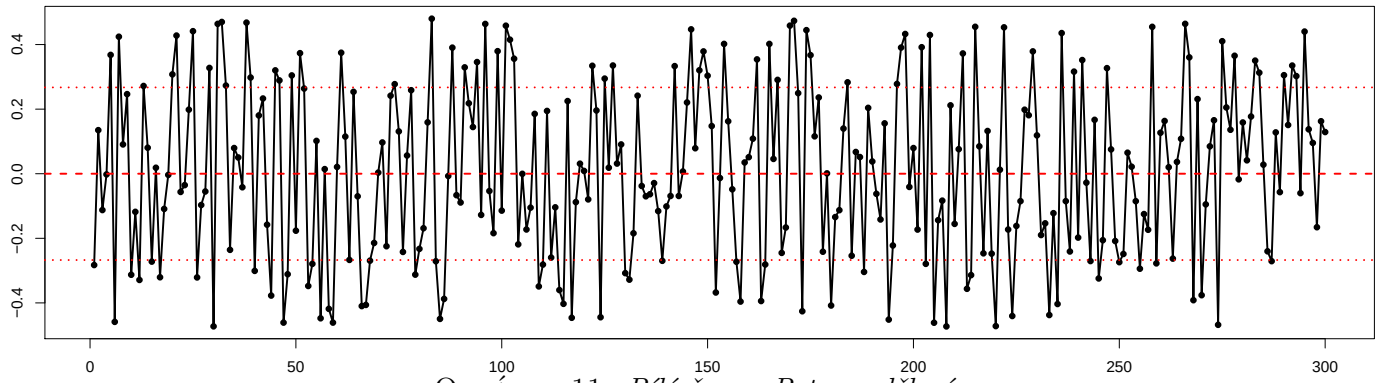
kde $\eta_t \ \sim \ Beta(a = 1.25, b = 1.25)$

hustota: $f_\eta(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ pro $x \in (0,1)$

střední hodnota: $E\eta_t = \mu = \frac{a}{a+b}$

rozptyl: $D\eta_t = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = \sigma_\varepsilon^2$





Obrázek 11. *Bílý šum s Beta rozdělením.*

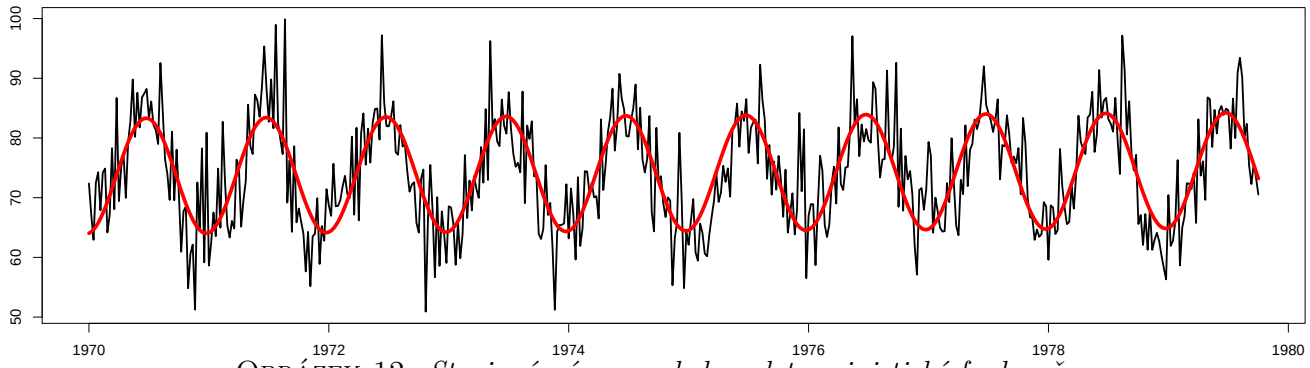
Definice 3.16. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ splňuje **lineární regresní model**, pokud pro jeho střední hodnotu platí

$$\forall t \in T: \quad EX_t = \mu_t = \sum_{j=0}^{m} \beta_j f_j(t),$$

kde $f_0, \ldots, f_m$ jsou známé funkce definované na T, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_m)'$ je neznámý vektor **regresních koeficientů**.

Příklad 3.12. ***Stacionární proces kolem deterministického trendu.***

Týdenní teploty v LA se střední hodnotou: $EX_t = \beta_0 + \beta_1 cos(2\pi t/52) + \beta_2 sin(2\pi t/52)$



Obrázek 12. *Stacionární proces kolem deterministické funkce času.*

3.3. Příklady slabě stacionárních procesů.

Příklad 3.13. ***Příklad procesu s konečnými 2. momenty.*** Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro něž platí:

$$X_t \sim \begin{cases} N(1,1) & \text{je-li t liché,} \\ Ex(1) & \text{je-li t sudé.} \end{cases}$$

Proces je **(slabě) stacionární**, neboť

$$EX_t = 1, \quad DX_t = 1 \quad \text{a} \quad \gamma(s,t) = 0 \quad \text{pro} \quad s \neq t \text{ (jsou nezávislé).}$$

Tento proces však **není striktně stacionární**, neboť pro liché a sudé t je distribuční funkce rozdílná.

Příklad 3.14. ***Kovarianční stacionarita ale nestacionárita ve střední hodnotě***. Mějme stacionární náhodný proces $\{Y_t, t \in Z\}$ a definujme

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \text{je-li t liché,} \\ Y_t + 1 & \text{je-li t sudé.} \end{cases}$$

I když

$$\gamma_X(t+h,t) = C(X_{t+h}, X_t) = C(Y_{t+h}, Y_t) = \gamma_Y(h),$$

tj. proces je kovariančně stacionární, přesto **není (slabě) stacionární**, protože střední hodnota není konstantní.

Příklad 3.15. ***Stacionární sinusoida s náhodnou fází a amplitudou***. Mějme náhodný proces $\{X_t, t \in Z\}$, který je definován takto

$$X_t = A\cos\theta t + B\sin\theta t,$$

kde A, B jsou nekorelované náhodné veličiny, pro něž

$$EA = EB = 0, \quad DA = DB = 1, \quad \theta \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Zjistěme, zda je proces (slabě) stacionární. Protože náhodné veličiny A a B jsou nekolerované, pak

$$C(A,B) = E(A \cdot B) = 0.$$

Vypočítejme nejprve **střední hodnotu** procesu:

$$EX_t = E(A\cos\theta t + B\sin\theta t) = \cos\theta t \cdot \underbrace{EA}_{=0} + \sin\theta t \cdot \underbrace{EB}_{=0} = 0.$$

Autokovarianční funkce:

$$\begin{aligned}
\gamma(t+h,t) &= C(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h} \cdot X_t) \\
&= E\{[A\cos\theta(t+h) + B\sin\theta(t+h)] \cdot [A\cos\theta t + B\sin\theta t]\} \\
&= E\{A^2\cos\theta(t+h)\cos\theta t + AB\cos\theta(t+h)\sin\theta t \\
&\quad + AB\sin\theta(t+h)\cos\theta t + B^2\sin\theta(t+h)\sin\theta t\} \\
&= \cos\theta(t+h)\cos\theta t \cdot \underbrace{EA^2}_{=1} + \cos\theta(t+h)\sin\theta t \cdot \underbrace{EAB}_{=0} \\
&\quad + \sin\theta(t+h)\cos\theta t \cdot \underbrace{EAB}_{=0} + \sin\theta(t+h)\sin\theta t \cdot \underbrace{EB^2}_{=1} \\
&= \cos\theta(t+h)\cos\theta t + \sin\theta(t+h)\sin\theta t \\
&= \cos[\theta(t+h) - \theta t] \\
&= \cos\theta h = \gamma(h)
\end{aligned}$$

Tedy $\gamma(t+h,t)$ nezávisí na t, proto proces je **(slabě) stacionární**.

Příklad 3.16. ***Náhodná procházka***. Nechť

$$X_0 = 0, \quad X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde ε_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny $\varepsilon_t \sim \mathcal{L}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Zjistěme, zda tento je proces (slabě) stacionární. Vypočtěme nejprve **střední hodnotu** procesu:

$$EX_t = E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \underbrace{E\varepsilon_i}_{=0} = 0,$$

takže proces je konstantní ve střední hodnotě. Dále počítejme **autokovarianční funkci**:

$$\begin{aligned}
\gamma(t+h,t) &= C(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h} \cdot X_t) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{t+h} \varepsilon_i\right)\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{t} E\varepsilon_i^2 = t \cdot \sigma_\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

která závisí na t, tedy proces **není (slabě) stacionární**.

Příklad 3.17. ***MA(1) proces*** je dán následující rekurentní definicí

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},\ \ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Střední hodnota: $EX_t = E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \underbrace{E\varepsilon_t}_{=0} + \theta\ \underbrace{E\varepsilon_{t-1}}_{=0} = 0.$

Autokovarianční funkce

$$\begin{aligned}\gamma(t+h,t) = \gamma(t+h,t) &= C(X_{t+h}, X_t)\\ &= E(X_{t+h}\cdot X_t) = E(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\\ &= E\varepsilon_{t+h}\cdot\varepsilon_t + \theta E\varepsilon_{t+h-1}\cdot\varepsilon_t + \theta E\varepsilon_{t+h}\cdot\varepsilon_{t-1} + \theta^2 E\varepsilon_{t+h-1}\cdot\varepsilon_{t-1}\\ &= \left\{\begin{array}{ll}\sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2) & h=0\\ \theta\sigma_\varepsilon^2 & h=\pm1\\ 0 & \text{jinak}\end{array}\right\} = \gamma(h)\end{aligned}$$

Tedy MA(1) proces je **(slabě) stacionární**. Nakonec vyjádříme ještě **autokorelační funkci**:

$$\rho(h) = \left\{\begin{array}{ll}1 & h=0,\\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & h=\pm1,\\ 0 & \text{jinak.}\end{array}\right.$$

Příklad 3.18. ***Markovovův skokový proces vzniku a zániku***. Mějme náhodný proces $\{X_t, t \in R\}$, pro který platí

$$\begin{aligned}P(X_t=0) &= \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}\\ P(X_t=1) &= \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} && \lambda>0,\ \ \mu>0,\\ P(X_t=x|X_s=y) &= p_{yx}(t-s) && -\infty < s \le t < \infty,\end{aligned}$$

přičemž

$$\begin{aligned}p_{00}(h) = 1 - p_{01}(h) &= \tfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)h} && h\ge0,\\ p_{11}(h) = 1 - p_{10}(h) &= \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)h} && h\ge0.\end{aligned}$$

Konstanty λ a μ se interpretují jako intenzity vzniku a zániku. Rozhodněme, zda je proces stacionární. Proto postupně počítejme střední hodnotu a autokovariační funkci:

$$\begin{aligned}EX_t &= \sum_{x=0,1} xP(X_t=x) = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\\ \gamma(t,t+h) &= C(X_t, X_{t+h}) = E(X_tX_{t+h}) - (EX_t)(EX_{t+h})\\ &= E(X_tX_{t+h}) - \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\\ E(X_tX_{t+h}) &= \sum_{x=0,1}\sum_{y=0,1} xyP(X_t=x, X_{t+h}=y) = 1\cdot1\cdot P(X_t=1, X_{t+h}=1)\\ &= P(X_t=1)\underbrace{P(X_{t+h}=1|X_t=1)}_{p_{11}(h)} = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)h}\right]\\ \gamma(t,t+h) &= \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 + \tfrac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)h} - \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\\ &= \tfrac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)h} = \gamma(h)\end{aligned}$$

Protože pro každou kovarianční funkci platí

$$\gamma(t) = \gamma(-t),$$

dostáváme

$$\gamma(t) = \tfrac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)|t|} \qquad \text{pro} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Proces je tedy **slabě stacionární**. Zbývá dopočítat autokorelační funkci:

$$\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)} = e^{-(\lambda+\mu)|t|} \qquad \text{pro} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Korelace mezi náhodnými veličinami tohoto procesu pro $|t| \to \infty$ exponenciálně klesá k nule.

4. Vlastnosti autokovariační funkce

Třebaže v praktických situacích máme co činit jen s reálnými náhodnými veličinami, v teorii bývá výhodné pracovat někdy s **komplexními náhodnými veličinami**. Komplexní veličinou rozumíme veličinu

$$X = Y + iZ,$$

kde Y a Z jsou reálné náhodné veličiny. **Komplexním náhodným procesem** nazveme systém komplexních náhodných veličin

$$\{X_t, t \in T\}.$$

Mnoho dalších úvah se bude týkat právě komplexních procesů. Slovo „komplexní“ se bude vynechávat, když bude zřejmé ze souvislosti.

Existují-li střední hodnoty EY a EZ, definuje se **střední hodnota komplexní náhodné veličiny** $X = Y + iZ$

$$EX = EY + iEZ.$$

Budeme se nyní zabývat základními vlastnostmi autokovarianční funkce

$$\gamma(s,t) = C(X_s, X_t) = E(X_s - EX_s)\overline{(X_t - EX_t)}.$$

Přitom se samozřejmě předpokládá, že jde o proces s konečnými druhými momenty.

Jelikož autokovarianční funkce procesu zůstává stejná při změně střední hodnoty, budeme také pro jednoduchost předpokládat, že střední hodnota procesu je rovna nule, tj. že **proces je centrován**.

Věta 4.1. *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je centrovaný proces s autokovarianční funkcí $\gamma(s,t)$. Pak platí:*

*(1) Autokovarianční funkce $\gamma(s,t)$ je **pozitivně semidefinitní** funkce.*

*(2) Autokovarianční funkce $\gamma(s,t)$ je **hermitovsky symetrická**, tj. pro $s,t \in T$ platí*

$$\gamma(s,t) = \overline{\gamma(t,s)}$$

(3) Je-li funkce $\gamma(s,t)$ pozitivně semidefinitní a hermitovsky symetrická, existuje takový náhodný proces (dokonce normální), že $\gamma(s,t)$ je jeho autokovarianční funkcí.

(4) Pro autokovarianční funkci $\gamma(s,t)$ platí nerovnosti

$$\gamma(s,s) \geq 0 \qquad a \qquad |\gamma(s,t)| \leq \sqrt{\gamma(s,s)}\sqrt{\gamma(t,t)}.$$

(5) Součet dvou autokovariačních funkcí je opět autokovarianční funkcí.

(6) Reálná část autokovarianční funkce je též autokovarianční funkcí. Imaginární část je autokovarianční funkcí jen tehdy, je-li rovna identicky nule.

Důkaz. Postupně dokazujme jednotlivá tvrzení.

(1) Nejprve připomeneme definici tzv. pozitivně semidefinitní funkce. Nechť $f(s,t)$ je funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$. Říkáme, že f je **pozitivně semidefinitní**, platí-li pro jakékoli přirozené číslo n, pro libovolná komplexní čísla $c_1, \ldots, c_n$ a libovolné body $t_1, \ldots, t_n \in T$ vztah

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_j, t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0. \tag{1}$$

Funkce jedné proměnné $g(t)$, $t \in T$ se nazývá **pozitivně semidefinitní**, platí-li pro každé přirozené n, libovolná komplexní čísla $c_1, \ldots, c_n$ a libovolné body $t_1, \ldots, t_n \in T$ a $t_j - t_k \in T$ pro $j,k = 1, \ldots, n$ vztah

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g(t_j - t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0. \tag{2}$$

Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je centrovaný proces s autokovarianční funkcí $\gamma(s,t)$. Pak zřejmě platí

$$0 \leq E\left|\sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j}\right|^2 = E\left[\sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j} \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k \bar{X}_{t_k}\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \bar{c}_k E(X_{t_j} \bar{X}_{t_k}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \bar{c}_k \gamma(t_j, t_k).$$

(2) Platí $\gamma(s,t) = E(X_s \bar{X}_t) = \overline{E(X_t \bar{X}_s)} = \overline{\gamma(t,s)}$, takže autokovarianční funkce je hermitovsky symetrická.

(3) Důkaz třetího tvrzení lze najít například v knize Doob (1953, [**10**]).

(4) První nerovnost $\gamma(s,s) \geq 0$ plyne z definice autokovarianční funkce a druhá $|\gamma(s,t)| \leq \sqrt{\gamma(s,s)}\sqrt{\gamma(t,t)}$ je důsledkem Schwarzovy nerovnosti.

(5) Abychom mohli dokázat páté tvrzení, připomeňme si, že součet dvou pozitivně semidefinitních hermitovsky symetrických funkcí je opět funkce pozitivně semidefinitní a hermitovsky symetrická.

Nechť $f_1(s,t)$ a $f_2(s,t)$ jsou pozitivně semidefinitní. Položme

$$f(s,t) = f_1(s,t) + f_2(s,t).$$

Pro libovolná komplexní čísla $c_1, \ldots, c_n$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k f(t_j,t_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k f_1(t_j,t_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k f_2(t_j,t_k).$$

Každý z obou výrazů na pravé straně je nezáporný. Musí být tudíž nezáporný i výraz vlevo, čímž je zaručena pozitivní semidefinitnost funkce f. Odtud plyne páté tvrzení věty.

(6) Nechť $\{Z_t, t \in T\}$ je komplexní náhodný proces s autokovariační funkcí

$$\gamma(s,t) = C(Z_s, Z_t) = E(Z_s - EZ_s)\overline{(Z_t - EZ_t)}.$$

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že náhodný proces má nulovou střední hodnotu, tj.

$$0 = EZ_t = E(X_t + iY_t) = EX_t + iEY_t,$$

což implikuje, že

$$EX_t = EY_t = 0.$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\gamma_Z(s,t) &= EZ_s\bar{Z}_t = E(X_s + iY_s)(X_t - iY_t)\\ &= EX_sX_t + EY_sY_t + i(EY_sX_t - EX_sY_t)\end{aligned}$$

Reálná část $\gamma_Z(s,t)$ je rovna

$$Re(\gamma_Z(s,t)) = EX_sX_t + EY_sY_t = \gamma_X(s,t) + \gamma_Y(s,t).$$

Je tedy rovna součtu autokovariační funkce procesu $\{X_t, t \in T\}$ a autokovariační funkce procesu $\{Y_t, t \in T\}$ a je podle pátého tvrzení autokovarianční funkcí.

Imaginární část $\gamma_Z(s,t)$ je rovna

$$Im(\gamma_Z(s,t)) = EY_sX_t - EX_sY_t.$$

Připomeňme, že pro libovolnou autokovarianční funkce $\gamma(s,t)$ musí platit:

$$(i)\ \gamma(s,s) \geq 0 \qquad (ii)\ 0 \leq |\gamma(s,t)| \leq \sqrt{\gamma(s,s)}\sqrt{\gamma(t,t)}.$$

V bodech $s = t$ dostaneme

$$Im(\gamma_Z(s,s)) = EY_sX_s - EX_sY_s = 0.$$

Druhá nerovnost však je splněna jen tehdy, je-li stále rovna nule. Na druhé straně funkce identicky rovná nule je autokovariační funkcí např. procesu, který je stále roven nule.

□

Příklad 4.19. ***Harmonický proces s náhodnou fází***. Mějme náhodný proces: $\boxed{Y_t = r\ \cos(t\omega_0 + \theta)}$,

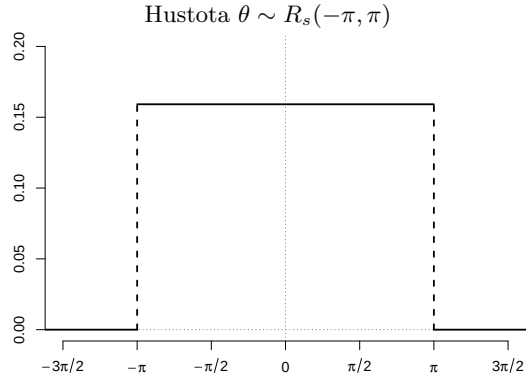
kde $r \in \mathbb{R}$ je *amplituda*,
$\omega_0 \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je *frekvence*
$\theta \sim R_s(-\pi, \pi)$ je *náhodná fáze*

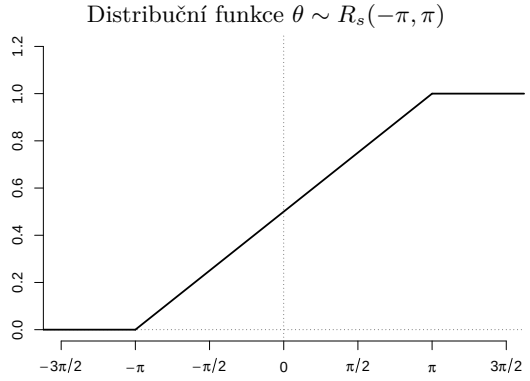
Má-li náhodná veličina X spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle a, b\rangle$ $(a < b)$, tj. $X \sim R_s(a, b)$, pak

hustota	distribuční funkce
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b\rangle \\ 1 & x > b \end{cases}$
střední hodnota	rozptyl
$EX = \frac{a+b}{2}$	$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

Protože v našem případě $\theta \sim R_s(-\pi, \pi)$, pak

hustota	distribuční funkce
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{pro } x \in \langle -\pi, \pi\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2\pi} & \text{pro } x \in \langle a, b\rangle \\ 1 & x > b \end{cases}$
střední hodnota	rozptyl
$EX = 0$	$DX = \frac{\pi^2}{3}$





Náhodný proces $Y_t = r\ \cos(t\omega_0 + \theta)$ vyjádřeme s využitím součtových vzorců pro cos ekvivalentním způsobem, vhodnějším pro další výpočty:

$$\begin{aligned} Y_t = r\ \cos(t\omega_0 + \theta) &= \underbrace{r\cos\theta}_{=U}\cos t\omega_0 + \underbrace{(-r\ \sin\theta)}_{=V}\sin t\omega_0 \\ &= U\cos t\omega_0 + V\sin t\omega_0. \end{aligned}$$

Nejprve ukážeme, že náhodné veličiny U a V jsou centrované:

$$EU = E(r\cos\theta) = r\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\frac{1}{2\pi}dx = \frac{r}{2\pi}\left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$EV = E(-r\sin\theta) = r\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\frac{1}{2\pi}dx = \frac{r}{2\pi}\left[\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Výpočtem druhých momentů náhodných veličin U a V zjistíme jejich nekorelovanost a stejné rozptyly:

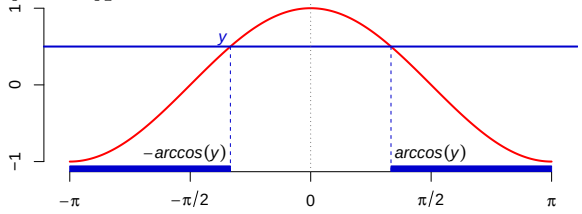
$$C(U,V) \overset{\text{centr.}}{=} E(UV) = E(-r^2\cos\theta\sin\theta) = -r^2 E\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$
$$= -\frac{r^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\frac{1}{2\pi}dx = \frac{r^2}{4\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{r^2}{8\pi}\left[\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$EU^2 = E(r^2\cos^2\theta) = r^2 E\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right] = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}E\cos 2\theta$$
$$= \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\frac{1}{2\pi}dx = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4\pi}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{r^2}{2}$$

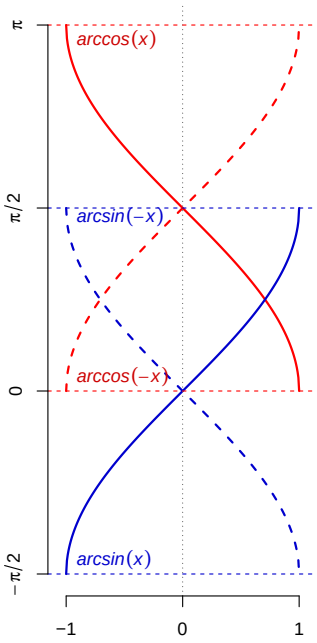
$$EV^2 = E(r^2\sin^2\theta) = r^2 E\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right] = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}E\cos 2\theta$$
$$= \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\frac{1}{2\pi}dx = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4\pi}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{r^2}{2}$$

Pro úplnost odvodíme rozdělení obou náhodných veličin U a V.

$\boxed{U = r\cos\theta \quad \text{pro} \quad \theta \sim R_s(-\pi,\pi) \quad \Rightarrow\ U \in \langle -r, r\rangle}$. Počítejme nejprve **distribuční funkci** náhodné veličiny U:



$$F_U(u) = P(U \le u) = P(r\cos\theta \le u)$$
$$= P\left(U \in (-\pi, -\arccos\tfrac{u}{r}\rangle \cup \langle \arccos\tfrac{u}{r}, \pi)\right)$$
$$= 1 - P\left(U \in \langle -\arccos\tfrac{u}{r}, \arccos\tfrac{u}{r}\rangle\right)$$
$$= 1 - \int_{-\arccos\frac{u}{r}}^{\arccos\frac{u}{r}}\frac{1}{2\pi}dx = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[x\right]_{-\arccos\frac{u}{r}}^{\arccos\frac{u}{r}} = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{u}{r} \quad \text{pro} \quad u \in \langle -r, r\rangle.$$

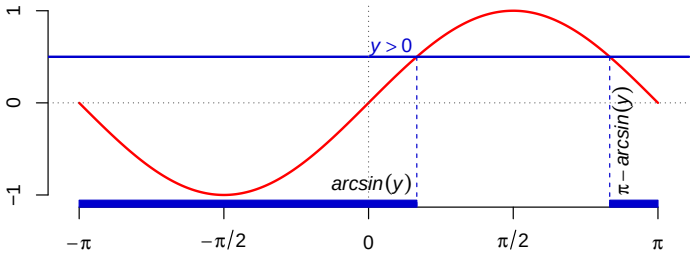


Hustotu dostaneme derivací distribuční funkce, proto pro $u \in \langle -r, r\rangle$ platí

$$f_U(u) = (F_U(u))' = -\frac{1}{\pi}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{r}\right)^2}}\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi r\sqrt{\frac{r^2-u^2}{r^2}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{r^2-u^2}}.$$

Pro ostatní hodnoty je hustota nulová.

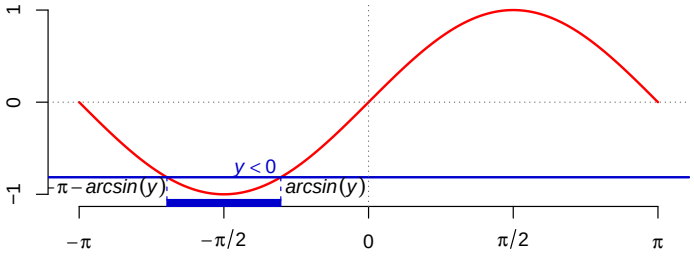
$\boxed{V = -r\sin\theta \quad \text{pro} \quad \theta \sim R_s(-\pi,\pi) \quad \Rightarrow V \in \langle -r, r\rangle}$. Počítejme **distribuční funkci** náhodné veličiny V:



(a) $y \in \langle 0, 1\rangle$

$$F_V(v) = 1 - P(\sin\theta \le y)$$
$$= 1 - P\left(V \in (-\pi, \arcsin y\rangle \cup \langle \pi - \arcsin y, \pi)\right)$$
$$= P(\theta \in \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y\rangle) = \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \frac{1}{2\pi} dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\right]_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{v}{r}$$

.



(b) $y \in \langle -1, 0\rangle$

$$F_V(v) = 1 - P(\sin\theta \le y)$$
$$= 1 - P\left(V \in \langle -\pi - \arcsin y, \arcsin y\rangle\right)$$
$$= 1 - \int_{-\pi - \arcsin y}^{\arcsin y} \frac{1}{2\pi} dx = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[x\right]_{-\pi - \arcsin y}^{\arcsin y}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{v}{r}$$

$$f_V(v) = (F_V(v))' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{r}\right)^2}}\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi r\sqrt{\frac{r^2-v^2}{r^2}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{r^2-v^2}} \quad \text{pro } v \in \langle -r, r\rangle.$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

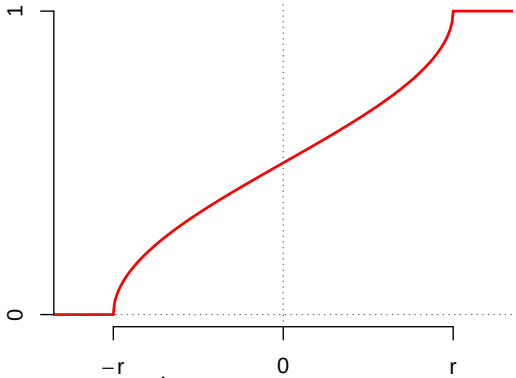
dostaneme pro $u \in \langle -r, r\rangle$

$$F_U(u) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{u}{r} = 1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{u}{r}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{v}{r}.$$

Tedy obě dvě náhodné veličinu U a V mají stejné rozdělení.

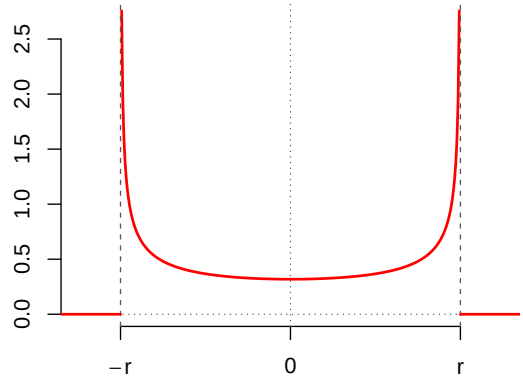
Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -r \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r} & \text{pro } x \in \langle -r, r\rangle \\ 1 & \text{pro } x > r \end{cases}$$



Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{r^2-x^2}} & \text{pro } x \in \langle -r, r\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Obrázek 13. *Distribuční funkce $F(x)$ a hustota $f(x)$ náhodných veličin U a V.*

Pomocí prvních a druhých momentů náhodných veličin U a V vypočítáme první a druhé momenty procesu $Y_t = r\ \cos(t\omega_0 + \theta)$:

$$
\begin{aligned}
EY_t &= E(U\cos\omega_0 t + V\sin\omega_0 t) = \cos\omega_0 t \cdot EU + \sin\omega_0 t \cdot EV = 0 \\
\gamma(t+h,t) &= C(Y_{t+h}, Y_t) \overset{\text{centr.}}{=} E(Y_{t+h}\cdot Y_t) \\
&= E\{[U\cos\omega_0(t+h) + V\sin\omega_0(t+h)]\cdot[U\cos\omega_0 t + V\sin\omega_0 t]\} \\
&= E\{U^2\cos\omega_0(t+h)\cos\omega_0 t + UV\cos\omega_0(t+h)\sin\omega_0 t \\
&\quad + UV\sin\omega_0(t+h)\cos\omega_0 t + V^2\sin\omega_0(t+h)\sin\omega_0 t\} \\
&= \cos\omega_0(t+h)\cos\omega_0 t\cdot\underbrace{EU^2}_{=\frac{r^2}{2}} + \cos\omega_0(t+h)\sin\omega_0 t\cdot\underbrace{EUV}_{=0} \\
&\quad + \sin\omega_0(t+h)\cos\omega_0 t\cdot\underbrace{EUV}_{=0} + \sin\omega_0(t+h)\sin\omega_0 t\cdot\underbrace{EV^2}_{=\frac{r^2}{2}} \\
&= \tfrac{r^2}{2}\left[\cos\omega_0(t+h)\cos\omega_0 t + \sin\omega_0(t+h)\sin\omega_0 t\right] \\
&= \tfrac{r^2}{2}\left\{\cos[\omega_0(t+h) - \omega_0 t]\right\} = \tfrac{r^2}{2}\cos\omega_0 h = \gamma(h)
\end{aligned}
$$

Tedy $\gamma(t+h,t)$ nezávisí na t, proto proces je **(slabě) stacionární**.

$r \in \mathbb{R}$ je *amplituda*, $\omega_0 \in \langle 0, \pi\rangle$ je *frekvence*
$\theta \sim R_s(-\pi,\pi)$ je ***náhodná fáze*** s hustotou $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in \langle -\pi, \pi\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Momenty:

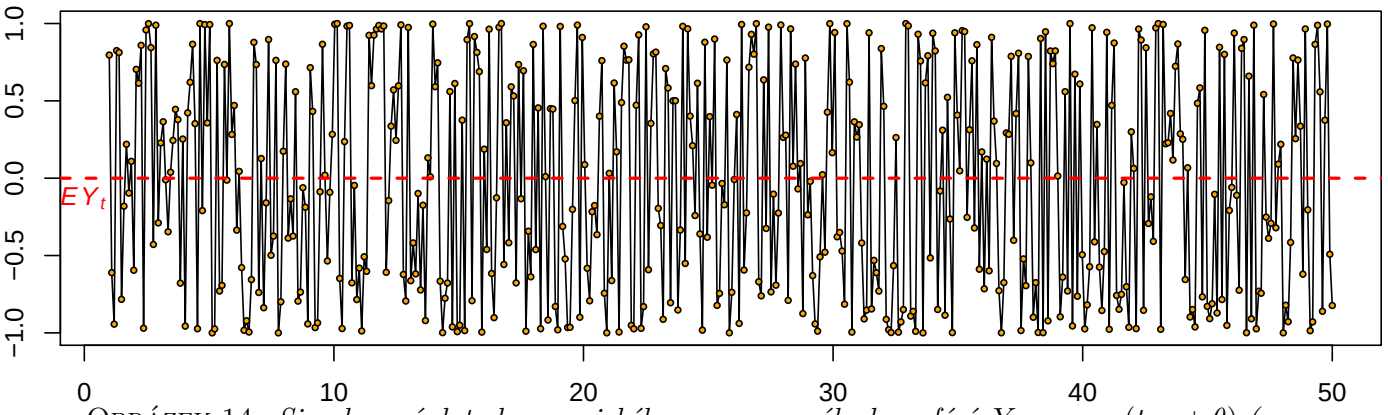
střední hodnota	$EY_t = 0,$
autokovarianční funkce	$\gamma(h) = C(Y_t, Y_{t+h}) = \frac{1}{2}r^2\cos h\omega_0,$
rozptyl	$DY_t = \frac{1}{2}r^2.$

Ekvivalentně lze psát

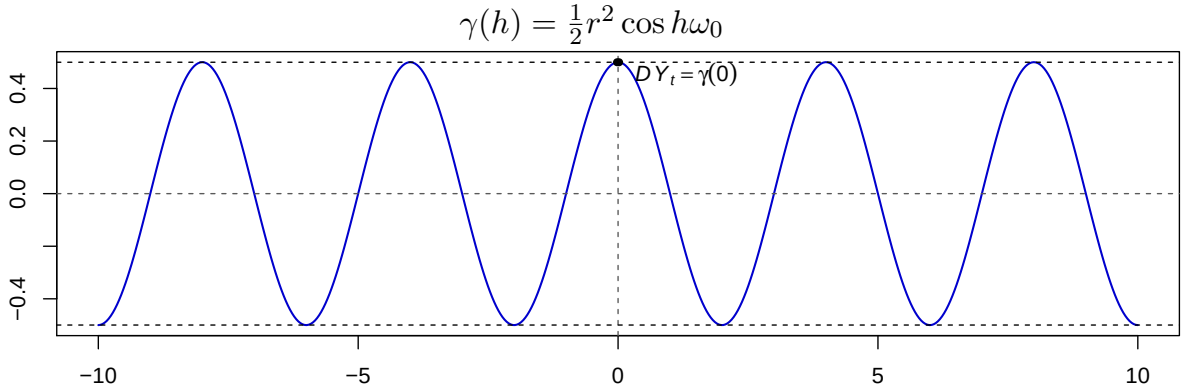
$\boxed{Y_t = U\cos t\omega_0 + V\sin t\omega_0,}$ kde

$U = r\ \cos\theta$ a $V = -r\ \sin\theta$ jsou ***náhodné amplitudy*** s vlastnostmi

$$EU = EV = 0, \quad C(U,V) = 0,$$
$$DU = DV = \tfrac{1}{2}r^2 = \sigma^2.$$



Obrázek 14. *Simulovaná data harmonického procesu s náhodnou fází:* $Y_t = r\ \cos(t\omega_0 + \theta)$ *(realizace náhodných fází* $(\theta_1, \ldots, \theta_5) = (-2.220, 0.503, 0.924, -1.433, -2.810)$*).*



OBRÁZEK 15. *Autokovarianční funkce harmonického procesu s náhodnou fází*: $Y_t = r\cos(t\omega_0 + \theta)$

Příklad 4.20. ***Harmonický proces řádu*** m.

DEFINICE 4.2. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **harmonický proces řádu** m, jestliže ho lze psát ve formě

$$X_t = \sum_{j=1}^{m} [U_j \cos t\omega_j + V_j \sin t\omega_j] \qquad \forall t \in T,$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_m$ navzájem různé konstanty z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu lze ukázat, že

$$\begin{aligned} EU_j &= EV_j = 0 \\ EU_j^2 &= EV_j^2 = \sigma_j^2 > 0 \\ EU_jU_k &= EV_jV_k = EU_jV_k = 0 \quad \text{pro} \quad k \neq j \end{aligned}$$

což implikuje, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **centrovaný stacionární náhodný proces**, neboť

$$\begin{aligned} EX_t &= 0 \\ EX_tX_{t+h} &= \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \cos h\omega_j = \gamma(h) \end{aligned}$$

Příklad 4.21. ***Rozšířený harmonický proces řádu*** m.

DEFINICE 4.3. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **rozšířený harmonický proces řádu** m, jestliže ho lze psát ve formě

$$X_t = \sum_{j=1}^{m} [U_j \cos t\omega_j + V_j \sin t\omega_j] + \varepsilon_t \qquad \forall t \in T,$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_m$ navzájem různé konstanty z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$, který je nekorelovaný se všemi U_j a V_j.

I pro tento rozšířený harmonický proces lze ukázat, že jde o **centrovaný stacionární náhodný proces**, neboť

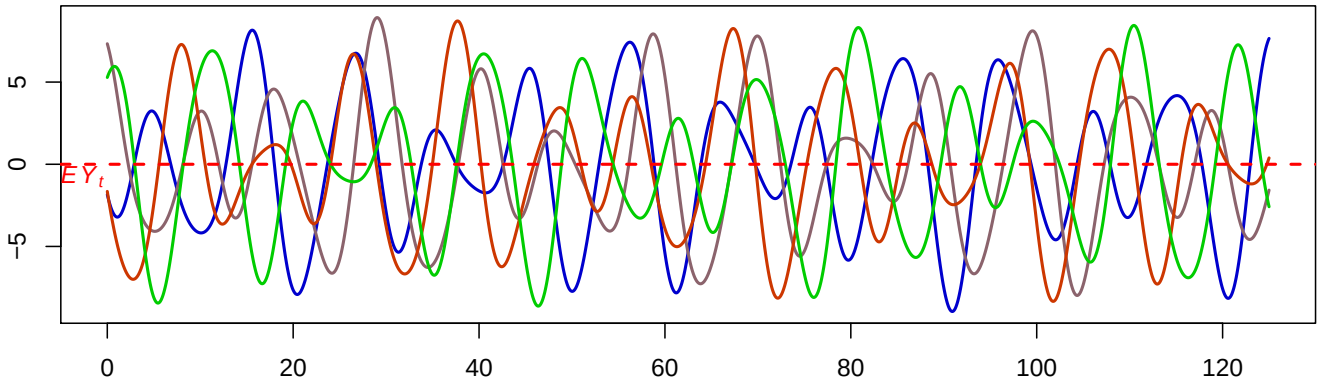
$$\begin{aligned} EX_t &= 0 \\ EX_tX_{t+h} &= \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \cos h\omega_j + \sigma_\varepsilon^2 \delta(h) = \gamma(h), \end{aligned}$$

kde $\delta(h) = \begin{cases} 1 & \text{pro } h = 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

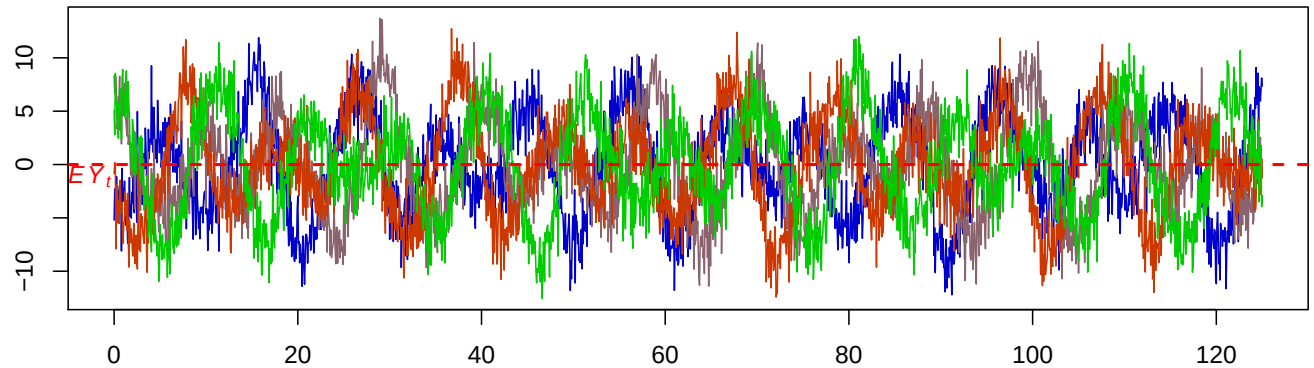
Příklad 4.22. ***Simulace 4 trajektorií harmonického procesu řádu 3***

$Y_t = \cos(\frac{\pi}{3} + \theta_1) + 5\cos(\frac{\pi}{5} + \theta_2) + 3\cos(\frac{\pi}{7} + \theta_3)$ realizace náhodných fází:

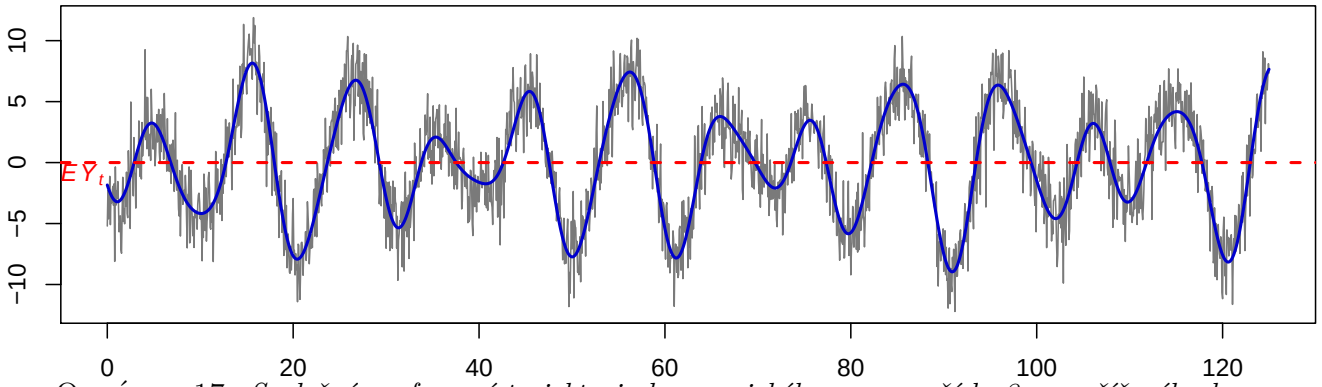
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
θ_1	2.004	1.320	−2.204	−2.010
θ_2	2.653	0.499	1.682	−0.602
θ_3	−0.030	−0.456	1.740	1.014



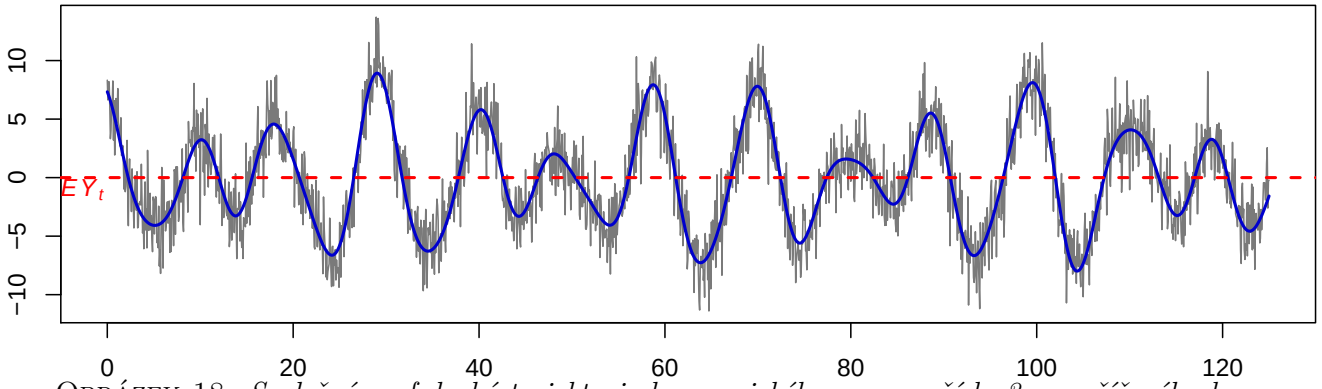
$Y_t = \cos(\frac{\pi}{3} + \theta_1) + 5\cos(\frac{\pi}{5} + \theta_2) + 3\cos(\frac{\pi}{7} + \theta_3) + \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim WN(0, 2^2)$



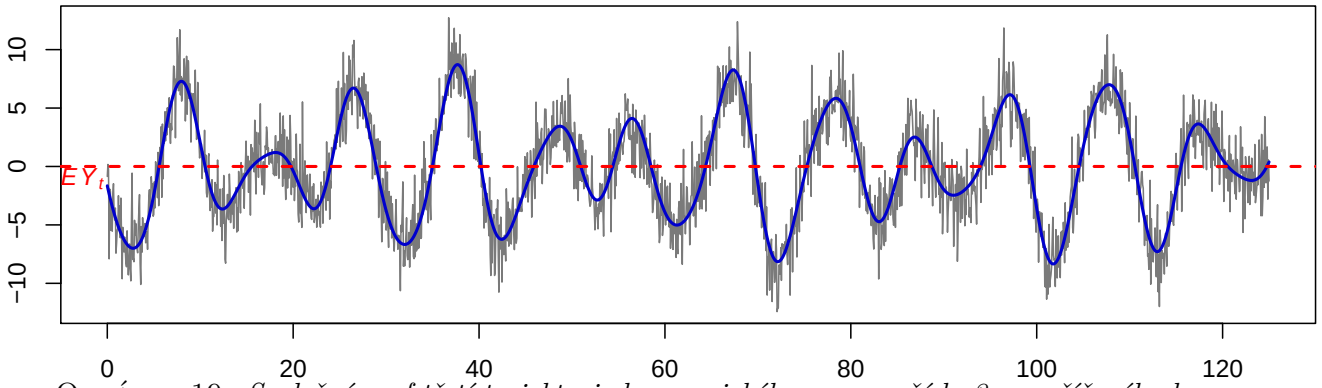
Obrázek 16. *Simulace 4 trajektorií harmonického procesu řádu 3 a rozšířeného harmonického procesu řádu 3.*



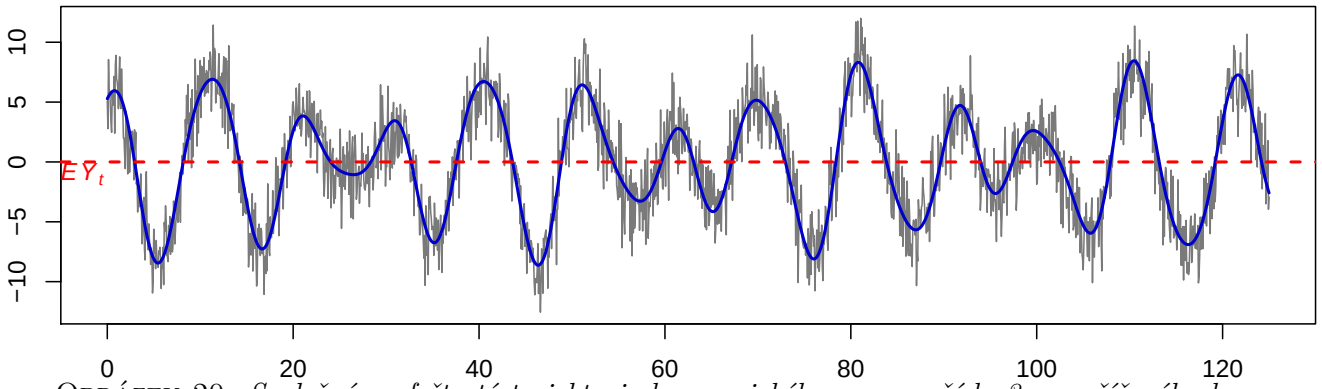
Obrázek 17. *Společný graf první trajektorie harmonického procesu řádu 3 a rozšířeného harmonického procesu řádu 3.*



Obrázek 18. *Společný graf druhé trajektorie harmonického procesu řádu 3 a rozšířeného harmonického procesu řádu 3.*

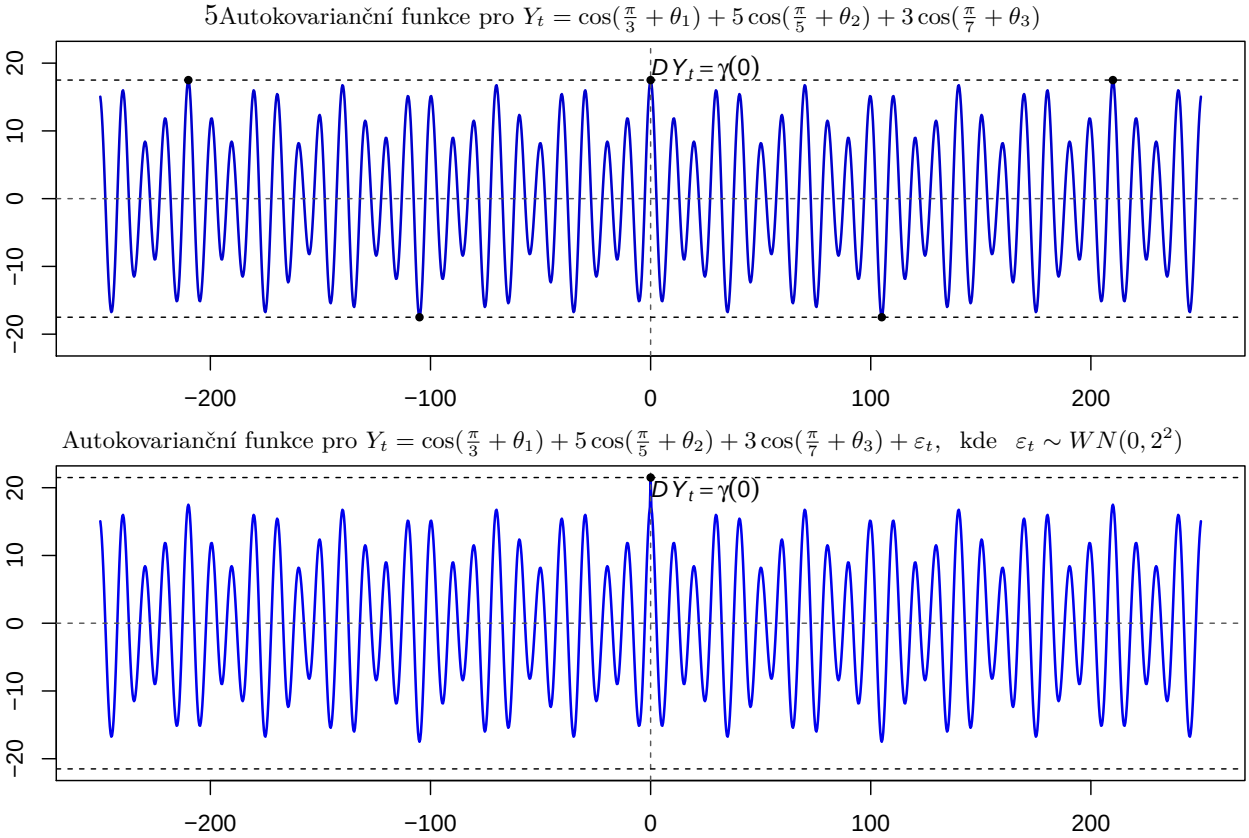


Obrázek 19. *Společný graf třetí trajektorie harmonického procesu řádu 3 a rozšířeného harmonického procesu řádu 3.*



Obrázek 20. *Společný graf čtvrté trajektorie harmonického procesu řádu 3 a rozšířeného harmonického procesu řádu 3.*

Příklad 4.23. ***Autokovarinační funkce harmonických procesů***



Obrázek 21. *Autokovarianční funkce harmonického procesu řádu 3 a rozšířeného harmonického procesu řádu 3.*

Příklad 4.24. ***Periodický charakter autokovarianční funkce harmonického náhodného procesu.***

VĚTA 4.4. *Pokud* $|\gamma(t)| = \gamma(0)$ *pro nějaké* $t \neq 0$*, pak* $\gamma(t)$ *je* ***periodická funkce.***

DŮKAZ. Nejprve dokážeme pomocný vztah:

$$\begin{aligned} D(Y_{t+h} \pm Y_t) &= DY_{t+h} + DY_t \pm 2C(Y_{t+h}, Y_t) = \gamma(0) + \gamma(0) \pm 2\gamma(h) \\ &= 2(\gamma(0) \pm \gamma(h)) \end{aligned}$$

(a) platí–li $\gamma(h) = \gamma(0)$, pak $D(Y_{t+h} - Y_t) = 0$, takže $Y_{t+h} = Y_t$ pro $\forall t$, tj. náhodný proces Y_t je periodický s periodou h.

(b) platí–li $\gamma(h) = -\gamma(0)$, pak $D(Y_{t+h} + Y_t) = 0$, takže $Y_{t+h} = -Y_t$ pro $\forall t$, tj. náhodný proces Y_t je periodický s periodou $2h$.

Ukázali jsme tedy v obou případech, že náhodný proces Y_t je periodický, což automaticky implikuje, že i autokovarianční funkce musí být periodická.

□

5. Spojitost a derivace náhodného procesu

5.1. Spojitost náhodného procesu. Pokud se zajímáme o **spojitost procesu** $\{X_t, t \in T\}$ **v bodě** $t_0 \in T$, budeme studovat chování náhodných veličin X_t při $t \to t_0$.

Jestliže X_t konvergují v nějakém smyslu k X_{t_0}, je možno mluvit o spojitosti procesu X_t v bodě t_0. Z různých typů konvergencí se ukazuje v tomto případě jako nejužitečnější konvergence podle kvadratického středu.

DEFINICE 5.1. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **spojitý podle středu v bodě** $\boxed{t_0 \in T}$, jestliže při $t \to t_0$ konvergují X_t k X_{t_0} podle kvadratického středu, tj. když

$$E|X_t - X_{t_0}|^2 \to 0 \qquad \text{pro} \qquad t \to t_0.$$

V tom případě píšeme

$$X_{t_0} = \underset{t \to t_0}{\text{l.i.m.}}\, X_t$$

(zkratka z anglického "limit in the mean").

Je-li proces $\{X_t, t \in T\}$ spojitý **v každém bodě množiny** $\boxed{T}$, říkáme stručně, že je **spojitý**.

POZNÁMKA 5.2. Z teorie pravděpodobnosti je známo, že konvergence podle kvadratického středu implikuje konvergenci podle pravděpodobnosti.

VĚTA 5.3 (kritérium spojitosti procesu). *Proces* $\{X_t, t \in T\}$ *je spojitý právě tehdy, když je jeho autokovarianční funkce* $\gamma(s,t)$ *spojitá v bodech* (s,t)*, pro něž* $s = t$*.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že proces je centrovaný.

$\Rightarrow$ Je-li proces $\{X_t, t \in T\}$ spojitý, pak platí pro $\forall s, t, s_0, t_0 \in T$

$$\begin{aligned} 0 \leq & |\gamma(s,t) - \gamma(s_0,t_0)| = |EX_s\bar{X}_t - EX_{s_0}\bar{X}_{t_0}| \\ &= |\underbrace{E(X_s - X_{s_0})(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})}_{(1)} + \underbrace{EX_{s_0}(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})}_{(2)} + \underbrace{E(X_s - X_{s_0})\bar{X}_{t_0}}_{(3)}| \\ &\overset{\text{trojúhel.ner.}}{\leq} |E(X_s - X_{s_0})(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})| + |EX_{s_0}(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})| + |E(X_s - X_{s_0})\bar{X}_{t_0}| \\ &\overset{\text{Schwarz.ner.}}{\leq} \left(\underbrace{E|X_s - X_{s_0}|^2 E|\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0}|^2}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\underbrace{E|X_{s_0}|^2 E|\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0}|^2}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\underbrace{E|X_s - X_{s_0}|^2 E|\bar{X}_{t_0}|^2}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\text{pro} \qquad s \to s_0,\ t \to t_0 \end{aligned}$$

(využili jsme vlastnosti spojitosti skalárního součinu). Funkce $\gamma(s,t,)$ je tudíž spojitá všude, a tedy také na diagonále $s = t$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nyní, že $\gamma(s,t,)$ je spojitá na diagonále $s=t$. Máme

$$\begin{aligned} E|X_s - X_t|^2 &= E(X_s - X_t)(\bar{X}_s - \bar{X}_t) \\ &= EX_s\bar{X}_s - EX_s\bar{X}_t - EX_t\bar{X}_s + EX_t\bar{X}_t \\ &= \gamma(s,s) - \gamma(s,t) - \gamma(t,s) + \gamma(t,t) \end{aligned}$$

Při pevném t a při $s \to t$ z našeho předpokladu vyplývá

$$\gamma(s,s) \to \gamma(t,t), \qquad \gamma(s,t) \to \gamma(t,t), \qquad \gamma(t,s) \to \gamma(t,t),$$

takže

$$E|X_s - X_t|^2 \to 0 \qquad \text{pro} \quad s \to t,$$

tj. konverguje podle kvadratického středu.

□

5.2. Derivace náhodného procesu. Derivaci náhodného procesu budeme definovat obdobně, jako se definuje derivace funkce.

Definice 5.4. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ **má v bodě** $\boxed{t_0 \in T}$ **derivaci** $\boxed{X'_{t_0}}$, jestliže platí

$$\text{l.i.m.}_{h\to 0} \frac{X_{t_0+h} - X_{t_0}}{h} = X'_{t_0} \qquad \text{pro} \qquad t_0 + h \in T.$$

Má-li náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ derivaci ve všech bodech $t \in T$, říkáme stručně, že **má derivaci**.

Věty, které dávají nutnou a postačující podmínku pro existenci derivace náhodného procesu, lze najít v knize Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. Praha. SNTL 1976

6. Spektrální rozklad autokovariančních funkcí stacionárních procesů

6.1. Herglotzova a Bochnerova věta. V celém odstavci budeme předpokládat, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **stacionární**, **centrovaný** a **druhého řádu** (tj. s konečnými druhými momenty).

Významnou vlastností stacionárních náhodných procesů je vlastnost, že jeho autokovariační funkci lze vyjádřit jako (nespočetný) součet harmonických funkcí s různými frekvencemi a amplitudami.

Věta 6.1 (Herglotzova věta). *Je-li $\{X_t, t \in Z\}$ stacionární posloupnost, pak se její autokovarianční funkce $\gamma(t)$ dá vyjádřit ve tvaru*

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

kde $F(\lambda)$ je neklesající, zprava spojitá funkce taková, že

$$F(-\pi) = 0 \qquad a \qquad F(\pi) = \gamma(0).$$

Přitom $F(\lambda)$ je jediná.

Důkaz. Lze najít například v Forbelská (2009). □

Věta 6.2 (Bochnerova věta). *Je-li $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ stacionární proces spojitý podle středu, pak se jeho autokovarianční funkce $\gamma(t)$ dá vyjádřit ve tvaru*

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

kde $F(\lambda)$ je taková neklesající, zprava spojitá funkce, že

$$F(-\infty) = 0 \qquad a \qquad F(\infty) = \gamma(0).$$

Přitom $F(\lambda)$ je jediná.

Důkaz. Lze najít například v Forbelská (2009). □

Vzorci

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda) \qquad \text{resp.} \qquad \gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

se říká **spektrální rozklad kovarianční funkce**. Funkce $F(\lambda)$ se nazývá **spektrální distribuční funkce**.

Je-li $F(\lambda)$ **absolutně spojitá**, pak existuje taková funkce $f(\lambda)$, že pro náhodné stacionární posloupnosti, resp. pro stacionární náhodné procesy platí

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(x)dx \qquad \text{resp.} \qquad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x)dx. \tag{3}$$

Jelikož $F(\lambda)$ je neklesající, je $f(\lambda)$ skoro všude nezáporná. Je-li třeba, pozměníme ji na množině míry nula tak, aby byla všude nezáporná. Tím se integrál (3) nezmění. Funkce $f(\lambda)$ se nazývá **spektrální hustota**. Existuje-li spektrální hustota, pak můžeme psát

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda)d\lambda \qquad \text{resp.} \qquad \gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda)d\lambda. \tag{4}$$

Všimněme si ještě, zda a jak se dá na základě nějaké jednoduché vlastnosti kovarianční funkce $\gamma(t)$ poznat, zda vůbec spektrální hustota existuje.

VĚTA 6.3. *K existenci spektrální hustoty stacionární náhodné posloupnosti stačí, aby pro její kovarianční funkci platilo*

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| < \infty$$

K existenci spektrální hustoty spojitého stacionární náhodného procesu stačí, aby pro její kovarianční funkci platilo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)|dt < \infty.$$

DŮKAZ. Lze najít například v publikaci autorů Gichman a Skorochod (1971, viz [**13**]). □

V následujících dvou větách je zodpovězena otázka, jak vypočítat spektrální hustotu z kovarianční funkce.

VĚTA 6.4. *Existuje-li spektrální hustota $f(\lambda)$ stacionární posloupnosti a má-li variaci konečnou na $\langle -\pi, \pi \rangle$, pak platí*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \gamma(t) \tag{5}$$

ve všech bodech spojitosti funkce $f(\lambda)$, což je skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

DŮKAZ. Ze vzorce (4) na straně 23 vidíme, že až na normující konstantu $\frac{1}{2\pi}$ jsou $\gamma(t)$ Fourierovy koeficienty funkce $f(\lambda)$ vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí $\{e^{-it\lambda}\}$. Zbytek tvrzení plyne z faktu, že funkce s konečnou variací má nejvýše spočetně bodů nespojitosti (variace je difinována takto $\bigvee_a^b(f) = \sup_{D_n} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$, kde $D_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$.) □

VĚTA 6.5. *Existuje-li spektrální hustota $f(\lambda)$ spojitého stacionárního procesu a je-li autokovarianční funkce absolutně integrovatelná, tj.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)|dt < \infty,$$

pak

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \gamma(t)\, dt. \tag{6}$$

DŮKAZ. Ze vzorce (4) na straně 23 vidíme, že až na normující konstantu $\frac{1}{2\pi}$ je mezi $\gamma(t)$ a $f(\lambda)$ stejný vztah jako mezi charakteristickou funkcí a hustotou rozdělení. Proto lze přímo převzít vzorec pro výpočet hustoty z charakteristické funkce. □

VĚTA 6.6. *Spektrální hustota $f(\lambda)$ reálného spojitého stacionárního procesu nebo reálné stacionární posloupnosti je sudá funkce v tom smyslu, že pro ni platí*

$$f(\lambda) = f(-\lambda) \tag{7}$$

skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

Důkaz. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je spojitý stacionární proces. Jelikož je reálný, platí pro každé $t \in T$, že $\gamma(t) = \gamma(-t)$. Proto vzhledem k (4)

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \gamma(-t).$$

Substitucí se snadno zjistí, že pravá strana je rovna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(-\lambda) d\lambda$ takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(-\lambda) d\lambda. \tag{8}$$

Je-li $f(\lambda) = 0$ skoro všude, je tvrzení věty zřejmé. Předpokládejme tedy, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = C > 0.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme položit $C = 1$ (jinak stačí místo $f(\lambda)$ uvažovat $\frac{f(\lambda)}{C}$). Pak vzorec (8) ukazuje, že charakteristické funkce příslušející hustotám $f(\lambda)$ a $f(-\lambda)$ jsou totožné. Vzhledem k vzájemně jednoznačnému vztahu mezi rozdělením pravděpodobnosti a charakteristickou funkcí odtud vyplývá tvrzení věty.

Pro stacionární posloupnosti je důkaz obdobný. □

7. Odhady středních hodnot a autokovariancí

Stochastický proces je matematickým modelem reálného děje náhodného charakteru, který probíhá nepřetržitě v čase. Můžeme jej však pozorovat jen v konečných časových intervalech a na základě těchto pozorování určit odhady hodnot charakteristik tohoto procesu - střední hodnoty, rozptylu, autokovarianční funkce, atd.

Jestliže máme k dispozici dostatečný počet pozorování realizací náhodného procesu, můžeme

(1) Přibližně určit charakteristiky každé realizace náhodného procesu.
(2) Přibližné celkové charakteristiky lze získat zprůměrováním předchozích.

Tato metoda zpracování je však poměrně složitá a vzniká otázka, či by nebylo možné pro **stacionární** náhodný proces zaměnit tento složitý přístup za mnohem jednodušší, který se zakládá na předpokladu, že střední hodnota nezávisí na čase a korelační funkce na začátku výpočtu. Kromě toho vzniká otázka, zda při zpracování pozorování stacionárního náhodného procesu je třeba disponovat několika jejich realizacemi. Protože náhodný proces je stacionární a homogenní v čase, je přirozené předpokládat, že jedna jediná realizace s dostatečnou délkou je postačujícím materiálem na získání charakteristik náhodného procesu. Při podrobnějším zkoumání této otázky se ukázalo, že existuje takováto možnost, ale ne pro všechny stacionární náhodné procesy.

Tedy jestliže **jediná realizace** náhodného procesu pozorovaná v dostatečně dlouhém čase může být považovaná za určitého reprezentanta všech možných realizací, říkáme, že takovéto stacionární stochastické procesy **mají ergodickou vlastnost**.

Jestliže určitý náhodný proces nemá tuto vlastnost ergodičnosti, i když je stacionární, potom jeho různé realizace, které se vyskytují s určitými pravděpodobnostmi, mají různý charakter průběhů. V tomto duchu, jako by šlo o realizace různých jednodušších stacionárních procesů, které mají svoje individuální charakteristiky.

V některých případech na neergodičnost stacionárního procesu může působit už jen výskyt jediného náhodného sčítance (tj. náhodné proměnné nezávislé na čase).

Poznámka 7.1. Nechť

$$\{Y(t) = X(t) + Z, t \in \mathbb{R}\}$$

je náhodný proces, kde $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ je ergodický stacionární proces definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a Z náhodná veličina definovaná na témže pravděpodobnostním prostoru se střední hodnotou μ_Z, rozptylem σ_Z^2 a pro niž pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$C(X(t), Z) = 0.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\mu_Y(t) &= \mu_X + \mu_Z \\
\gamma_Y(t) &= C(Y(s), Y(s+t)) = C(X(s) + Z, X(s+t) + Z) = \\
&= \underbrace{C(X(s), X(s+t))}_{\gamma_X(t)} + \underbrace{C(X(s+t), Z)}_{=0} + \underbrace{C(Z, X(s+t))}_{=0} + \underbrace{C(Z, Z)}_{\sigma_Z^2} \\
&= \gamma_X(t) + \sigma_Z^2.
\end{aligned}$$

Tedy náhodný proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ je stacionární proces, ale nemůžeme ho považovat za ergodický, neboť se dá očekávat, že každá jeho realizace se bude charakterem svého průběhu lišit od jiných - v závislosti od toho jakou hodnotu při dané realizaci nabyla náhodná veličina Z.

Autokovarianční funkce stacionárního procesu $Y(t), t \in \mathbb{R}$ se od autokovarianční funkce stacionárního ergodického procesu $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ liší o kladnou složku σ_Z^2. Takže pro $t \to \infty$ se hodnoty $\gamma_Y(t)$ nezmenšují k nule, ale od určitého času t_m zůstávají konstantní $(= \sigma_Z^2)$.

Nyní budeme definovat ergodičnost stacionárních procesů přesněji matematicky v souvislosti s konstrukcí odhadů některých charakteristik stacionárních procesů.

7.1. Odhady střední hodnoty. Nechť $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ je stochastický proces 2. řádu, který pozorujeme v časovém intervalu $\langle 0, T\rangle$. Nechť jeho konstantní střední hodnota μ je neznámá a je třeba ji odhadnout.

Definice 7.2. Odhad střední hodnoty $\hat{\mu}$ stacionárního náhodného procesu $\{Y(t), t \in \langle 0, T\rangle\}$ pomocí **metody nejmenších čtverců** (LS – *Least Squares*) je definován vztahem:

$$\hat{\mu} = \arg\min_{\mu \in \mathbb{R}} \int_0^T (Y(t) - \mu)^2 \, dt.$$

Poznámka 7.3. Stále budeme předpokládat, že integrály vystupující v jednotlivých vztazích existují a dají se v nich zaměnit pořadí integrování a střední hodnoty.

Snadno lze odvodit, že odhad střední hodnoty pomocí LS–metody je roven

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{LS} = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \tag{9}$$

neboť

$$0 = \frac{d}{d\mu} \int_0^T \left(Y(t)^2 - 2\mu Y(t) + \mu^2 \right) \, dt = -2 \int_0^T Y(t) dt + 2 \underbrace{\mu \int_0^T dt}_{=T}$$

$$= 2T\mu - 2 \int_0^T Y(t) \, dt.$$

Věta 7.4. *Odhad střední hodnoty pomocí metody nejmenších čtverců je* ***nestranný*** *a jeho* ***střední kvadratická chyba*** *je rovna*

$$MSE(\hat{\mu}) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) \gamma_Y(u) \, du. \tag{10}$$

Důkaz. **Nestrannost**:

$$E\hat{\mu} = E\left(\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt\right) = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{EY(t)}_{=\mu(\text{stac.})} \, dt = \mu \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T dt}_{=T} = \mu.$$

Střední kvadratická chyba v případě nestranného odhadu je rozptylem tohoto odhadu

$$MSE(\hat{\mu}) = E\left[(\hat{\mu} - \mu)^2\right] = E\left[(\hat{\mu} - E\hat{\mu})^2\right] = D(\hat{\mu}).$$

Počítejme

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\mu}) = E\left[(\hat{\mu}-\mu)^2\right] &= E\left\{\left[\frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,dt - \mu\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\frac{1}{T}\int_0^T (Y(t)-\mu)\,dt\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{T^2}E\left\{\int_0^T\int_0^T (Y(s)-\mu)(Y(t)-\mu)\,ds\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \underbrace{E\left[(Y(s)-\mu)(Y(t)-\mu)\right]}_{\gamma_Y(t-s)(\text{stac.})}\,ds \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \gamma_Y(t-s)\,ds\,dt
\end{aligned}$$

Uvažujme transformaci

$$\begin{aligned}
u &= t-s \\
v &= t
\end{aligned}$$

s Jakobiánem $|J|=1$. Protože $s,t\in\langle 0,T\rangle$, pak platí

$$\begin{array}{ccccc}
-T & \leq & u & \leq & T \\
0 & \leq & v=t & \leq & T
\end{array}$$

a tudíž

$$u \leq v = s+u \leq T+u,$$

tedy

$$\max\{0,u\} \leq v \leq \min\{T, T+u\}.$$

Tak dostaneme

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\mu}) &= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\left(\int_{\max\{0,u\}}^{\min\{T,T+u\}}\gamma_Y(u)\,dv\right)du \\
&= \frac{1}{T^2}\left[\int_{-T}^{0}\left(\gamma_Y(u)\int_0^{T+u}dv\right)du + \int_0^T\left(\gamma_Y(u)\int_u^T dv\right)du\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\left[\int_{-T}^{0}\gamma_Y(u)(T+u)\,du + \int_0^T\gamma_Y(u)(T-u)\,du\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\gamma_Y(u)(T-|u|)\,du = \frac{2}{T^2}\int_0^T(T-u)\gamma_Y(u)\,du \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\gamma_Y(u)\,du = D(\hat{\mu}) = D\left[\frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,dt\right].
\end{aligned}$$

□

Pro další studium ergodických procesů je vhodné vyslovit následující definici:

DEFINICE 7.5. Řekneme, že stacionární proces $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ je **ergodický ve střední hodnotě**, pokud platí

$$\lim_{T\to\infty} D\left[\frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,dt\right] = 0. \tag{11}$$

VĚTA 7.6. *Nechť pro stacionární proces $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ s autokovariančí funkcí $\gamma_Y(t)$ platí*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)|\gamma_Y(u)|\,du = 0.$$

Potom je náhodný proces $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ ergodický ve střední hodnotě.

Důkaz. Tvrzení věty plyne ze vztahů (10), (11) a nerovnosti

$$\left|\int_0^T \left(1-\frac{u}{T}\right)\gamma_Y(u)du\right| \le \int_0^T \left(1-\frac{u}{T}\right)|\gamma_Y(u)|\,du.$$

□

Důsledek 7.7. *Nechť* $\lim_{t\to\infty}\gamma_Y(t)=0$. *Pak stacionární proces s autokovariančí funkcí* $\gamma_Y(t)$ ***je ergodický ve střední hodnotě.***

Důkaz. Jestliže

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_Y(t)=0,$$

pak také

$$\lim_{t\to\infty}|\gamma_Y(t)|=0.$$

Pak pro libovolně malé $\varepsilon>0$ existují dostatečné velká $T, T_0\in\mathbb{R}$ $(T_0<T)$ taková, že pro každé $t>T_0$, platí

$$|\gamma_Y(t)|<\varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} D\left[\frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,dt\right] &= \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\gamma_Y(u)\,du\\
&\le \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)|\gamma_Y(u)|\,du\\
&\le \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T|\gamma_Y(u)|\,du\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\left[\int_0^{T_0}\underbrace{|\gamma_Y(u)|}_{\le\gamma_Y(0)}\,du+\int_{T_0}^{T}\underbrace{|\gamma_Y(u)|}_{<\varepsilon}\,du\right]\\
&\le \lim_{T\to\infty} 2\left[\frac{T_0}{T}\gamma_Y(0)+\left(1-\frac{T_0}{T}\right)\varepsilon\right]=0
\end{aligned}$$

ergodicita ve střední hodnotě.

□

Poznamenejme, že jestliže platí

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_Y(t)=0,$$

pak také pro autokorelační funkci platí

$$\lim_{t\to\infty}\rho_Y(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma_Y(t)}{\gamma_Y(0)}=0,$$

což znamená, že **síla lineárních vazeb** mezi jednotlivými náhodnými veličinami, které tvoří daný stacionární proces $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$, jakmile se tyto od sebe neustále **vzdalují**, **postupně slábne**, tj. jejich korelační koeficient $\to 0$.

7.1.1. *DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ PROCESY.* Při pozorování stacionárních procesů $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ druhého řadu se spojitým časem nejčastěji pozorujeme jen určitou jejich konečnou diskrétní část, tj. pro $n\in\mathbb{N}$ v diskrétních časových okamžicích $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ pozorujeme jen náhodný vektor

$$\mathbf{Y}=(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})'=(Y_1,\dots,Y_n)',$$

který nazýváme **diskrétním pozorováním náhodného procesu** $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ (anebo diskretizací náhodného procesu $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ se spojitým časem), kde jsme položili

$$t_i=i,\ i=1,\dots,n.$$

Pak lze snadno ukázat, že obdobným diskrétním ekvivalentem **odhadu střední hodnoty** je odhad

$$\bar{Y}=\tfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{Y_{t_i}\cdot\tfrac{T}{n}}_{\approx\int_{t_i-\Delta t/2}^{t_i+\Delta t/2}Y(t)dt}=\tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Y_t,\quad \text{kde}\quad \Delta t=\tfrac{T}{n}.$$

7.2. Odhady autokovarianční a autokorelační funkce. Odhad autokovarianční funkce lze analogicky jako v případě střední hodnoty nalézt ve tvaru

$$\hat{\gamma}_Y(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \left[(Y(t)-\hat{\mu})\,(Y(t+\tau)-\hat{\mu})\right] dt.$$

Podobně jak jsme výše definovali ergodičnost ve střední hodnotě pro stacionární proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$, můžeme definovat i jeho **ergodičnost v rozptylu**, pokud platí

$$\lim_{T\to\infty} D\left[\frac{1}{T}\int_0^T (Y(t)-\mu)^2\, dt\right] = 0$$

a jeho **ergodičnost v autokovarianční funkci**, jestliže platí

$$\lim_{T\to\infty} D\left[\frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} (Y(\tau+t)-\mu)\,(Y(t)-\mu)\, dt\right] = 0.$$

Snadno lze ukázat, že obdobnými diskrétními ekvivalenty jsou následující odhady:

Odhad autokovarianční funkce:

$$c_k = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+k}-\bar{Y})$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Odhad autokorelační funkce ACF:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Aby tyto odhady měly praktický význam, požaduje se obvykle

$$n > 50$$

a

$$k < \tfrac{n}{4},$$

neboť odhady

$$\left\{c_k\right\}_{k=0}^{n-1} \qquad \text{resp.} \qquad \left\{r_k\right\}_{k=0}^{n-1}$$

nejsou lineárně nezávislé a s rostoucím k roste i jejich rozptyl.

8. Odhady spektrální hustoty

8.1. Úvod. Pojem spektra se vyskytuje nejen v teorii náhodných procesů, ale také v matematice, fyzice a technice. Jestliže nějaký proces vlnění je součtem harmonických vlnění (tzv. *harmonik*), tak spektrum procesu vlnění se nazývá funkce, která popisuje rozdělení amplitud podle jednotlivých frekvencí. Spektrum ukazuje, která vlnění převládají v daném procesu a jaká je jeho vnitřní struktura. Spektrum v případě stacionárního náhodného procesu dává rozdělení rozptylů náhodných amplitud podle různých frekvencí vlnění.

V celém tomto odstavci proto budeme předpokládat, že náhodný proces $\{Y_t, t \in T\}$ je **stacionární**, **centrovaný** a **druhého řádu** (tj. s konečnými druhými momenty).

8.2. Periodogram. V dalším budeme předpokládat, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **centrovaná stacionární náhodná posloupnost**.

Definice 8.1. Nechť $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou pozorování náhodné posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Pak **periodogram** definujeme vztahem

$$I_n(\omega) = \tfrac{1}{2\pi n}\left|\sum_{t=1}^{n} Y_t e^{-it\omega}\right|^2 \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi\rangle.$$

LEMMA 8.2. *Položme*

$$A_n(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^{n} Y_t \cos t\omega \qquad B_n(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^{n} Y_t \sin t\omega,$$

pak platí

$$I_n(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[A_n^2(\omega) + B_n^2(\omega) \right].$$

DŮKAZ.

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^{n} Y_t e^{-it\omega} \right|^2 = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^{n} Y_t \cos t\omega - i \sum_{t=1}^{n} Y_t \sin t\omega \right|^2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos t\omega \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin t\omega \right)^2 \right] = \frac{1}{4\pi} \left[A_n^2(\omega) + B_n^2(\omega) \right].$$

□

POZNÁMKA 8.3. Někteří autoři definují periodogram poněkud jinak:

$$I_n^*(\omega) = \frac{2}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} Y_t e^{-it\omega} \right|^2 = \left[A_n^2(\omega) + B_n^2(\omega) \right] = 4\pi I_n(\omega).$$

LEMMA 8.4. *Pokud označíme pro* $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$C_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}$$
$$C_k^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}$$

pak platí

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \tfrac{k}{n}\right) C_k \cos k\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \left[C_0^* + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \cos k\omega \right].$$

DŮKAZ.

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos t\omega \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin t\omega \right)^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos t\omega \right) \left(\sum_{s=1}^{n} Y_s \cos s\omega \right) + \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin t\omega \right) \left(\sum_{s=1}^{n} Y_s \sin s\omega \right) \right]$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} Y_t Y_s \left(\cos t\omega \cos s\omega + \sin t\omega \sin s\omega \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} Y_t Y_s \cos \omega(s-t)$$

Zavedeme-li dále substituci $k = s - t$, pak $-n+1 \le k \le n-1$ a

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \le & t & \le & n \\ 1 & \le & s{=}t{+}k & \le & n \\ 1{-}k & \le & t & \le & n{-}k \end{array} \quad \Rightarrow \quad \max(1, \underbrace{1-k}_{\text{týká se záporných } k}) \le t \le \min(n, \overbrace{n-k}^{\text{týká se kladných } k}).$$

a pak platí

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \cos k\omega \sum_{t=\max(1,1-k)}^{\min(n,n-k)} Y_t Y_{t+k}.$$

Nyní vezměme zvlášť případy, kdy $k = 0$ a ostatní, přičemž využijme faktu, že funkce cos je sudou funkcí. Dostaneme proto

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t^2}_{C_0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n+1}^{-1} \frac{n-|k|}{n} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1-k}^{n} Y_t Y_{t+k}}_{C_{-k}=C_k}$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}_{C_k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) C_k \cos k\omega = \frac{1}{2\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) C_k \cos k\omega \right]$$

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t^2}_{C_0^*} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n+1}^{-1} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1-k}^{n} Y_t Y_{t+k}}_{C_{-k}^*=C_k^*}$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}_{C_k^*} = \frac{1}{2\pi} \left(C_0^* + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \cos k\omega \right).$$

□

Poznámka 8.5. K **numerickému výpočtu** hodnot periodogramu se často používají právě předchozí vzorce.

Poznámka 8.6. Pro **teoretické účely** bývá výhodnější tato varianta

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \tfrac{|k|}{n}\right) C_k \cos k\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* \cos k\omega.$$

Pro **náhodnou posloupnost** $\{Y_t, t \in T \subseteq \mathbb{Z}\}$ platí

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t) \cos t\omega.$$

Veličiny $\left(1 - \frac{k}{n}\right) C_k$, (resp. C_k^*) můžeme považovat za jakýsi odhad $\gamma(k)$ a **periodogram** se tudíž dá považovat za **empirický odhad spektrální hustoty**.

Vlastnosti tohoto odhadu udává následující věta.

Věta 8.7. *Jestliže $\{Y_t, t \in T \subseteq \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodná posloupnost s nulovou střední hodnotou a se spojitou spektrální hustotou $f(\omega)$, pak má periodogram $I_n(\omega)$ následující vlastnosti:*

$$\lim_{n\to\infty} EI_n(\omega) = f(\omega) \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

$$\lim_{n\to\infty} DI_n(\omega) = \begin{cases} f^2(\omega) & \omega \neq 0, \omega \in (-\pi, \pi), \\ 2f^2(\omega) & \omega = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

Důkaz. viz Forbelská(2009). □

Z předchozí věty vyplývá

(1) Periodogram $I_n(\omega)$ je asymptoticky nestranným odhadem spektrální hustoty.
(2) Periodogram $I_n(\omega)$ není konzistentním odhadem spektrální hustoty, neboť jeho rozptyl nekonverguje k nule, vzrůstá-li neomezeně délka posloupnosti n.

8.3. Neparametrické odhady spektrální hustoty (Window Spectral Estimation). Neparametrické odhady spektrální hustoty **centrované stacionární náhodné posloupnosti** $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou založeny na **zlepšení vlastností periodogramu**.

Periodogram je empirickým odhadem spektrální hustoty, který je asymptoticky nestranný, avšak nekonzistentní. Připomeňme, že platí (viz lemma 8.4)

$$I_n(\omega) = \tfrac{1}{2\pi n}\left|\sum_{t=1}^{n} Y_t e^{-it\omega}\right|^2 = \tfrac{1}{2\pi}\left[C_0^* + 2\sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \cos k\omega\right].$$

Využijme dále vztahů

$$C_k^* = C_{-k}^*, \quad \text{kde} \quad C_k^* = \tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k} \quad \text{pro} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm(n-1)$$

a

$$\cos k\omega = \tfrac{1}{2}\left(e^{ik\omega} + e^{-ik\omega}\right).$$

Upravujme postupně

$$\begin{aligned} I_n(\omega) &= \tfrac{1}{2\pi}\left[C_0^* + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* e^{ik\omega} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* e^{-ik\omega}\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\left[C_0^* + \sum_{s=-(n-1)}^{-1} C_{-s}^* e^{-is\omega} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* e^{-ik\omega}\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* e^{-ik\omega}. \end{aligned}$$

Periodogram (jakožto odhad spektrální hustoty) je založen na všech možných odhadech autokovariační funkce v bodech $k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm(n-1)$, tj.

$$\begin{aligned} C_0^* &= \tfrac{1}{n}\underbrace{\left(Y_1^2 + \cdots + Y_n^2\right)}_{n \text{ členů}} \\ C_1^* = C_{-1}^* &= \tfrac{1}{n}\underbrace{\left(Y_1Y_2 + \cdots + Y_{n-1}Y_n + Y_3Y_n\right)}_{n-1 \text{ členů}} \\ &\vdots \\ C_{n-3}^* = C_{-(n-3)}^* &= \tfrac{1}{n}\underbrace{\left(Y_1Y_{n-2} + Y_2Y_{n-1} + Y_3Y_n\right)}_{3 \text{ členy}} \\ C_{n-2}^* = C_{-(n-2)}^* &= \tfrac{1}{n}\underbrace{\left(Y_1Y_{n-1} + Y_2Y_n\right)}_{2 \text{ členy}} \\ C_{n-1}^* = C_{-(n-1)}^* &= \tfrac{1}{n}\underbrace{Y_1Y_n}_{1 \text{ člen}} \end{aligned}$$

a tedy je založen i na velmi málo kvalitních odhadech. K určitému zlepšení jistě dojde, pokud budeme používat jen $m \ll n$ nejkvalitnějších odhadů. Mluvíme pak o **prostém useknutém periodogramu**

$$\hat{f}_n(\omega) = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} C_k^* \cos k\omega = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} C_k^* e^{-ik\omega},$$

což lze také zapsat takto

$$\hat{f}_n(\omega) = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* \cos k\omega = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* e^{-ik\omega},$$

kde

$$w(k) = \begin{cases} 1 & |k| \le m \\ 0 & |k| > m \end{cases}.$$

Označme **Fourierovu transformaci** funkce $w(k)$

$$W(\omega) = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) e^{-ik\omega} = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} e^{-ik\omega}$$

a řadu přeindexujeme tak, aby indexy šly od 1 do $2m+1$, tj. položme $s = k+m+1$, pak $k = s-m-1$ a

(a) pro $\omega \neq 2k\pi$ je $W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2m+1} e^{-i(s-m-1)\omega}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i(m+1)\omega} \sum_{s=1}^{2m+1} e^{-is\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{im\omega} \frac{1-e^{-i(2m+1)\omega}}{1-e^{-i\omega}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{im\omega} \frac{e^{-i\frac{2m+1}{2}\omega}\left(e^{i\frac{2m+1}{2}\omega} - e^{-i\frac{2m+1}{2}\omega}\right)}{e^{-i\frac{1}{2}\omega}\left(e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega} = D_m(\omega),$$

kde $D_m(\omega)$ je tzv. **Dirichletovo jádro**,

(b) pro $\omega = 2k\pi$ je $W(\omega) = 2m + 1$.

Vzhledem k tomu, že lze psát

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* e^{-ik\omega},$$

vidíme, že $I_n(\omega)$ je Fourierovou transformací C_k^*, takže naopak lze pomocí **inverzní Fourierovy transformace** psát

$$C_k^* = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) e^{ik\theta} d\,\theta.$$

Počítejme postupně

$$\hat{f}_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* e^{-ik\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) e^{ik\theta} d\,\theta e^{-ik\omega}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) e^{-ik(\omega-\theta)}}_{W(\omega-\theta)} d\,\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) W(\omega-\theta) d\,\theta.$$

Jde o tzv. **vyhlazený periodogram** (*smoothed periodogram*).

Funkce $W(\omega)$ se nazývá **spektrální okénko** (*spectral window*). Tato funkce má do jisté míry aproximovat Diracovu δ funkci a platí pro ni

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) d\omega = 1.$$

Takto počítat odhad spektrální hustoty by však bylo (vzhledem k málo hladkému průběhu periodogramu) nepohodlné, proto se obvykle odhad počítá podle vzorce

$$\hat{f}_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* e^{-ik\omega},$$

přičemž inverzní Fourierova transformace

$$w(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\theta) e^{ik\theta} d\theta, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (n-1)$$

se nazývá **korelační okénko** (*covariance lag window*, nebo *time-domaing window*).

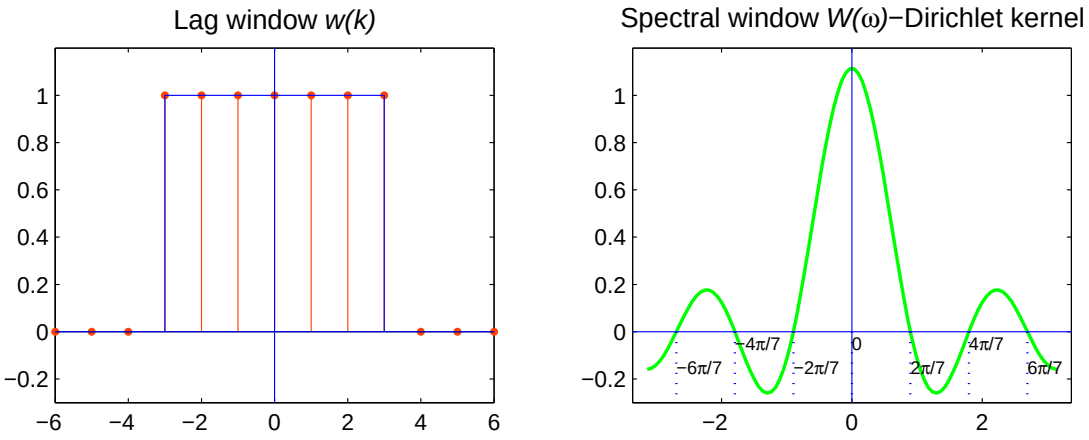
Typickými korelačními okénky jsou tzv. **useknutá** okénka, pro která existuje takové přirozené číslo m (bod useknutí, *truncation point*) tak, že $w(k)=0$ pro $|k|>m$ (m se obvykle volí v rozmezí od $\frac{n}{6}$ do $\frac{n}{5}$).

Příklady korelačních a spektrálních okének

Prostý useknutý odhad:

$$w(k) = \begin{cases} 1 & 0 < |k| \le m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$$



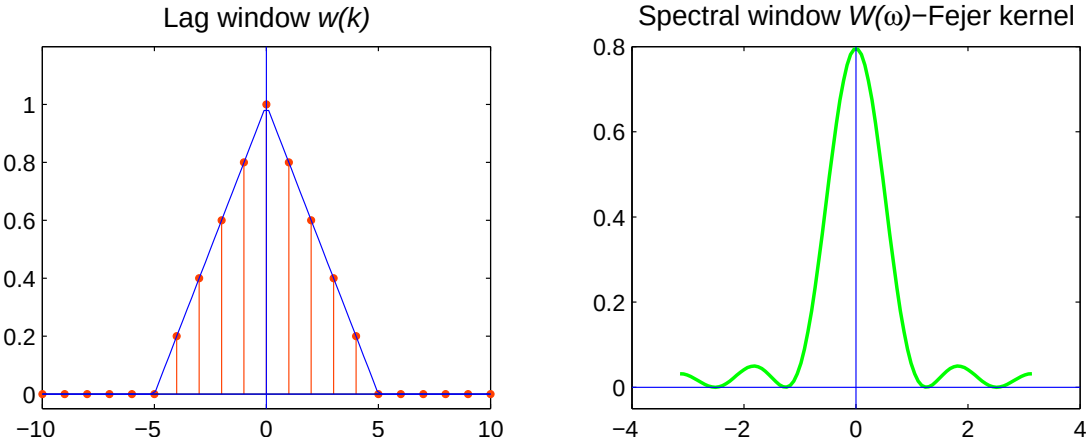
Obrázek 22. Korelační a spektrální okénko pro prostý useknutý odhad.

Bartletovo okénko:

$$w(k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|k|}{m}\right) & 0 < |k| \le m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi m} \frac{\sin^2 m\frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} = F_m(\omega)$$

$W(\omega)$ je v tomto případě Fejérovým jádrem.



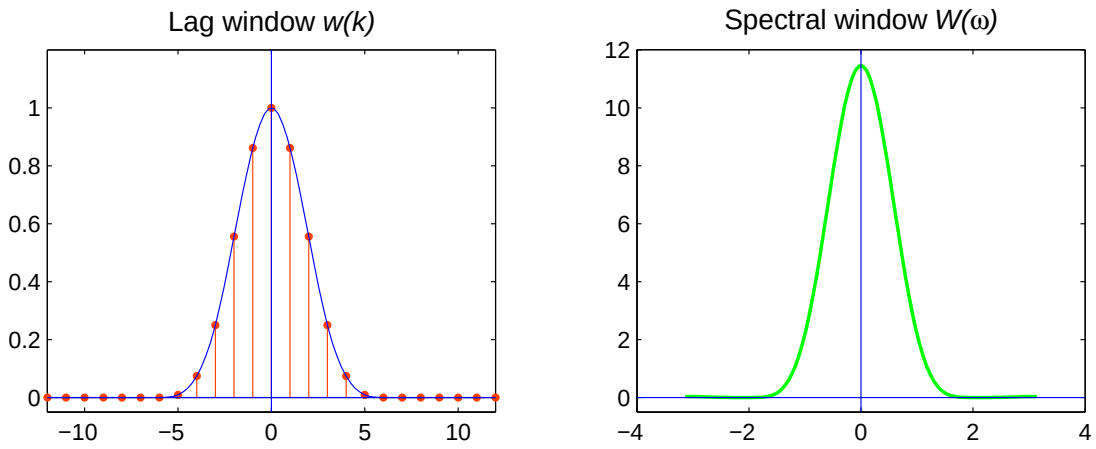
Obrázek 23. Bartletovo korelační a spektrální okénko.

Parzenovo okénko:

$$w(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 6\left(\frac{|k|}{m}\right)^3 & |k| < \frac{m}{2} \\ 2\left(1 - \frac{|k|}{m}\right)^3 & \frac{m}{2} < |k| \le m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = \frac{3}{8\pi m^3} \left(\frac{\sin m\frac{\omega}{4}}{\frac{1}{2}\sin \frac{\omega}{2}}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$$

kde m je nějaké sudé číslo.



Obrázek 24. Parzenovo korelační a spektrální okénko.

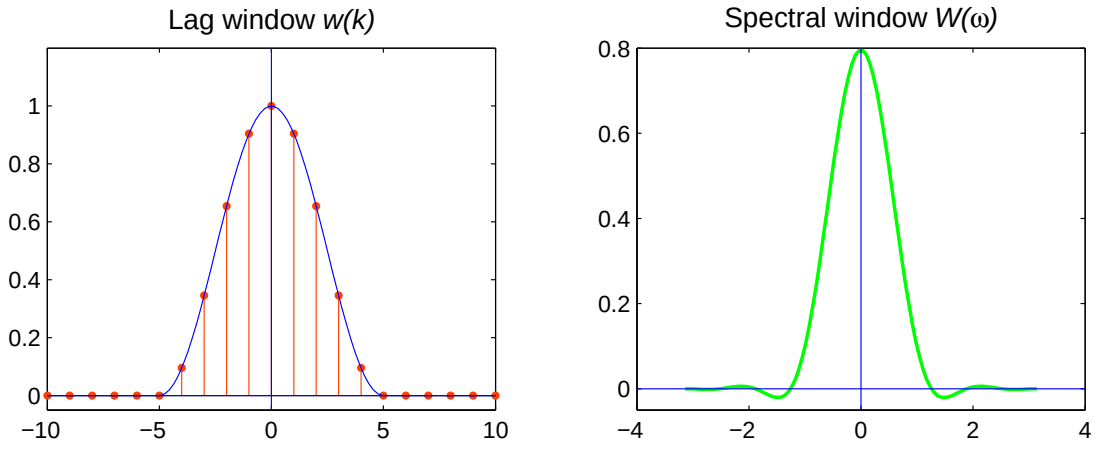
Obecné Tukeovo okénko:

$$w(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\frac{\pi k}{m} & |k| \le m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = aD_m\left(\omega - \tfrac{\pi}{m}\right) + (1-2a)D_m(\omega) + aD_m\left(\omega + \tfrac{\pi}{m}\right)$$

kde $a \in (0, \frac{1}{4}\rangle$.

Pokud $a = \frac{1}{4}$, pak se nazývá **Tukey-Hanningovo okénko**.

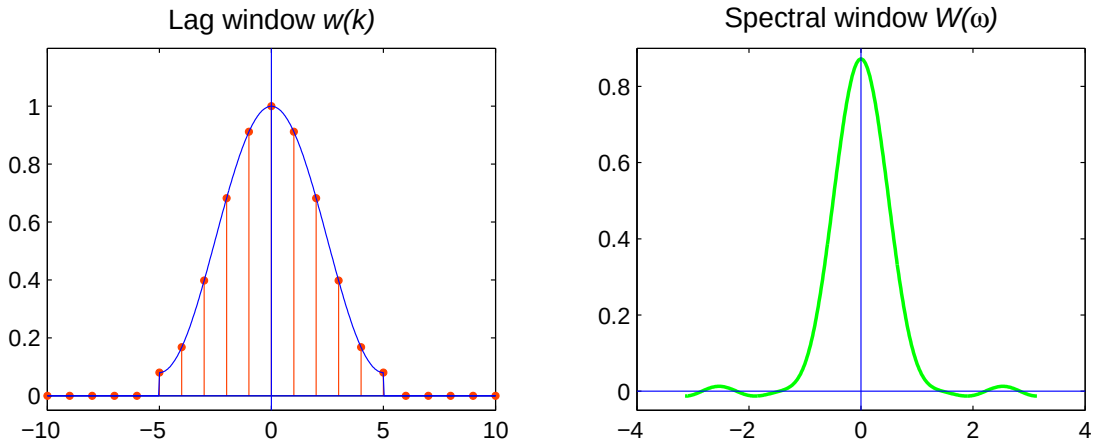


Obrázek 25. Tukey-Hanningovo korelační a spektrální okénko.

Tukey-Hammingovo okénko:

$$w(k) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\frac{\pi k}{m} & |k| \le m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = 0.23 D_m\left(\omega - \tfrac{\pi}{m}\right) + 0.54 D_m(\omega) + 0.23 D_m\left(\omega + \tfrac{\pi}{m}\right)$$



Obrázek 26. Tukey-Hammingovo korelační a spektrální okénko.

Daniellovo okénko: Na závěr ještě uvedeme jedno **neuseknuté korelační okénko**. Mějme pro $\delta \in (0, \pi)$ následující **spektrální okénko**

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & |\omega| < \delta \\ 0 & |\omega| > \delta \end{cases},$$

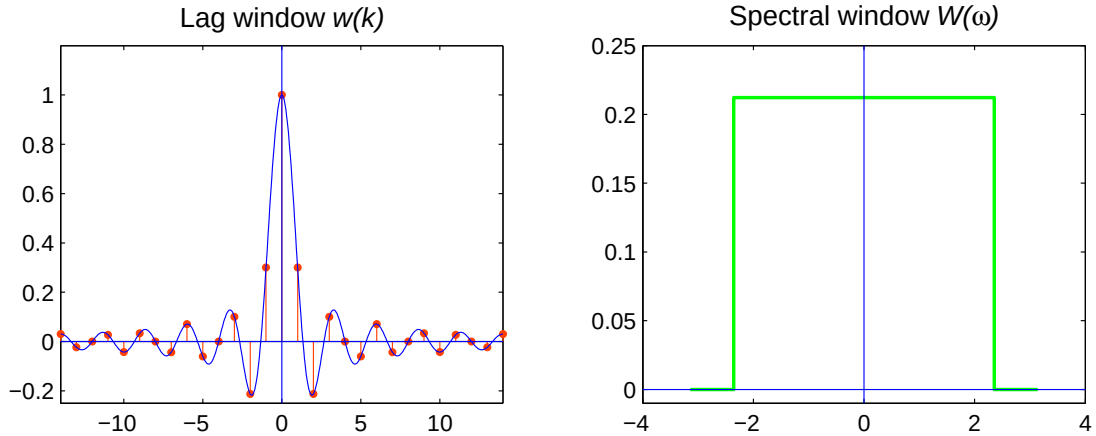
které je vlastně hustotou náhodné veličiny s rovnoměrně spojitým rozdělením na intervalu $(-\delta, \delta)$. Pro $k = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (n-1)$ počítejme nejprve odpovídající korelační okénko:

$$w(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\delta} e^{ik\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left[\frac{e^{ik\omega}}{ik}\right]_{-\delta}^{\delta} = \frac{1}{k\delta} \underbrace{\tfrac{1}{2i}\left(e^{ik\delta} - e^{-ik\delta}\right)}_{\sin k\delta} = \frac{\sin k\delta}{k\delta}.$$

Pro $k = 0$ je zřejmě rovno jedné, celkově tedy

$$w_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{\sin k\delta}{k\delta} & k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}.$$



Obrázek 27. Daniellovo korelační a spektrální okénko.

KAPITOLA 2

Predikce v časových řadách

Budoucí vývoj sledované veličiny je možné odhadovat různými predikčními metodami. Většinou vycházejí ze skutečnosti, že pokud známe časový průběh hodnot veličiny v minulosti (hodnotu v minulém kroku, ale častěji posloupnost historických vzorků z řady minulých kroků), můžeme s větší či menší přesností předvídat její vývoj v budoucnosti.

Abychom mohli matematicky predikci zavést, budeme potřebovat definovat Hilbertův prostor. Je to úplný normovaný lineární prostor, v němž je norma definována pomocí tzv. skalárního součinu. Proto v něm můžeme využívat všech poznatků z metrických prostorů nebo normovaných lineárních prostorů.

Skalární součin umožnuje zavést v prostoru se skalárním součinem navíc kolmost (ortogonalitu) prvků.

D. Hilbert (1862–1943) položil základy studia této struktury. Vznik teorie abstraktního Hilbertova prostoru se však klade až do roku 1927 a je spojen se jménem J. von Neumann (1903–1957). Látka o Hilberově prostoru patří do tzv. *funkcionální analýzy.*

1. Základní metrické a topologické pojmy

Připomeňme následující pojmy a vlastnosti:

UNITÁRNÍ PROSTORY Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá **unitární**, jestliže pro každé dva prvky x a y z $\mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y\rangle$, nazývané **skalární** či **vnitřní součin**, tak že pro každé $x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí: (a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; (b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$; (c) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$; (d) $\langle x, x\rangle \geq 0$; (e) $\langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

NORMA V unitárním prostoru $\mathcal{H}$ definujeme **normu** vztahem
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

CAUCHY-SCHWARZOVA NEROVNOST v unitárním prostoru platí:
$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad$ a $\quad |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y.$

ORTOGONALITA řekneme, že x a y z unitárního prostoru $\mathcal{H}$ jsou **ortogonální**, pokud platí $\langle x, y\rangle = 0$ a značíme $x \perp y$.

ORTOGONÁLNÍ A ORTONORMÁLNÍ MNOŽINY řekneme, že množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je **ortogonální**, jestliže pro každé různé prvky $x, y \in \mathcal{M}$ platí $x \perp y$. Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, pak množina $\mathcal{M}$ se nazývá **ortonormální**.

Poznámka: Je-li $\mathcal{M}$ ortogonální množina, pak množina $\left\{\frac{x}{\|x\|} : x \in \mathcal{M}\right\}$ je ortonormální.

VLASTNOSTI NORMY mějme unitární prostor $\mathcal{H}$ s normou definovanou vztahem $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Pak pro každé $x, y \in \mathcal{H}$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

(a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$
(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (tzv. *trojúhelníková nerovnost*)
(c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
(d) $\|x\| \geq 0$
(e) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(f) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (tzv. *rovnoběžníková rovnost*)

KONVERGENCE PODLE NORMY řekneme že posloupnost prvků $\{x_n\}$ z unitárního prostoru $\mathcal{H}$ **konverguje podle normy** k $x \in \mathcal{H}$, jestliže $\quad \|x_n - x\| \to 0 \quad$ pro $\quad n \to \infty.$

SPOJITOST SKALÁRNÍHO SOUČINU jestliže $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou prvky z unitárního prostoru $\mathcal{H}$ takové, že $\|x_n - x\| \to 0$ a $\|y_n - y\| \to 0$ pro $n \to \infty$, pak platí
(a) $\|x_n\| \to \|x\|$
(b) $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ pro $n \to \infty$.

CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST řekneme, že posloupnost prvků $\{x_n\}$ z unitárního prostoru $\mathcal{H}$ je **cauchyovská**, pokud $\quad \|x_n - x_m\| \to 0 \quad$ pro $\quad n, m \to \infty.$

HILBERTOVY PROSTORY Hilbertův prostor je **úplný unitární prostor**, tj. takový, ve kterém každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ konverguje podle normy k nějakému prvku $x \in \mathcal{H}$, tj. $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

UZAVŘENÝ PODPROSTOR řekneme, že lineární podprostor $\mathcal{M}$ Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ je **uzavřeným podprostorem** $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj. jestliže platí, že $\|x_n - x\| \to 0$, pak $x \in \mathcal{M}$.

ORTOGONÁLNÍ KOMPLEMENT ortogonální komplement množiny $\mathcal{M}$ je množina $\mathcal{M}^\perp$ všech prvků $\mathcal{H}$, které jsou ortogonální ke každému prvku z $\mathcal{M}$. Tedy ortogonální komplement je tvaru $\mathcal{M}^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, \text{ tj. } x \perp y,\ x \in \mathcal{M}\}$.

PROJEKČNÍ VĚTA jestliže $\mathcal{M}$ je **uzavřený podprostor Hilbertova prostoru** a $x \in \mathcal{H}$, pak

(a) existuje jediný prvek $\hat{x} \in \mathcal{M}$ takový, že $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x - y\|$

(b) $\hat{x} \in \mathcal{M}$ a $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x - y\| \Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{M}$ a $(x - \hat{x}) \in \mathcal{M}^\perp$.

Prvek $\hat{x}$ se nazývá **ortogonální projekcí** prvku x z $\mathcal{H}$ do $\mathcal{M}$ a značíme $\hat{x} = P_{\mathcal{M}}(x)$ a zobrazení $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ se nazývá **projekcí $\mathcal{H}$ do $\mathcal{M}$**.

VLASTNOSTI PROJEKCE nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor a $P_{\mathcal{M}}$ je projekcí $\mathcal{H}$ do $\mathcal{M}$. Pak pro každé $x, y, x_n \in \mathcal{H}$ a pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí

(a) Každý prvek $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci jako součet prvku z $\mathcal{M}$ a prvku z $\mathcal{M}^\perp$, tj. $x = P_{\mathcal{M}}(x) + (I - P_{\mathcal{M}})(x)$, kde I značí identické zobrazení

(b) $P_{\mathcal{M}}(\alpha x + \beta y) = \alpha P_{\mathcal{M}}(x) + \beta P_{\mathcal{M}}(y)$

(c) $\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|(I - P_{\mathcal{M}})(x)\|^2$

(d) $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\mathcal{M}}(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{\mathcal{M}}(x)$

(e) $x \in \mathcal{M} \Leftrightarrow P_{\mathcal{M}}(x) = x$

(f) $x \in \mathcal{M}^\perp \Leftrightarrow P_{\mathcal{M}}(x) = 0$

(g) jestliže $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ jsou dva podprostory $\mathcal{H}$ takové, že $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, pak $P_{\mathcal{M}_1}(P_{\mathcal{M}_2}(x)) = P_{\mathcal{M}_1}(x)$.

UZÁVĚR nechť $\mathcal{M}$ je podprostor Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. **Uzávěrem** $\overline{\mathcal{M}}$ (také budeme značit $\overline{sp}(\mathcal{M})$, anglicky „*closed span*“) množiny $\mathcal{M}$ nazveme nejmenší uzavřenou množinu obsahující $\mathcal{M}$.

Poznámka: Platí $\overline{\mathcal{M}} = \overline{sp}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, x_n \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$, kde $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ je množina všech lineárních kombinací prvků množiny $\mathcal{M}$, tzv. **lineární obal množiny** $\mathcal{M}$.

PROJEKCE NA KONEČNÉ ORTONORMÁLNÍ MNOŽINĚ jestliže $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je **ortonormální** podmnožina Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$, pak pro každé $x \in \mathcal{H}$ platí

(a) $P_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$

(b) $\|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2$

(c) $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 \le \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{C}$

(d) $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \langle x, e_i\rangle$ pro $i = 1, \ldots, n$

(e) $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|$ (tzv. Besselova nerovnost)

Poznámka: koeficienty $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle$ se nazývají **Fourierovy koeficienty vzhledem k množině** $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

SEPARABILITA Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nazveme **separabilním**, právě když $\mathcal{H} = \overline{sp}\{e_t, t \in T\}$, kde T je spočetná indexová množina.

ORTONORMÁLNÍ REPREZENTACE V SEPARABILNÍM HILBERTOVĚ PROSTORU. Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}\{e_1, e_2, \ldots\}$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ je **ortonormální** množina. Pak pro každé $x, y \in \mathcal{H}$ platí

(a) Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je **hustá**, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{C}$ taková, že platí $\|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\| < \varepsilon$.

(b) $x = \sum_{i=1}^\infty \langle x, e_i\rangle e_i$ pro $\forall x \in \mathcal{H}$, tj. $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i\rangle|^2$ (tzv. Parsevalova identita)

(d) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^\infty \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$

(e) $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, e_i\rangle = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$

2. Hilbertův prostor náhodných veličin druhého řádu

Zaveďme následující **prostory náhodných veličin**:

- Označme $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ množinu všech **reálných**, resp. **komplexních** náhodných veličin definovaných nad týmž pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, které mají konečné druhé momenty, tj. platí $EX^2 < \infty$, resp. $E|X|^2 < \infty$.

  Do tohoto prostoru zahrnujeme také všechny konstanty z $\mathbb{R}$, resp. z $\mathbb{C}$, které považujeme za náhodné veličiny s nulovým rozptylem.

  V tomto prostoru vytvoříme **třídy ekvivalentních náhodných veličin** takto: řekneme, že dvě náhodné veličiny jsou ekvivalentní, pokud se liší jen na množině míry nula. Zřejmě X a Y jsou ekvivalentní právě tehdy, platí-li

$$E|X - Y|^2 = 0.$$

  V takto definovaném prostoru tříd ekvivalentních náhodných veličin definujeme pro každé $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $X, Y \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **skalární součin** předpisem

$$\langle X, Y\rangle = E(XY) \quad \text{resp.} \quad \langle X, Y\rangle = E(X\bar{Y})$$

  a odpovídající normu

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{EX^2}, \text{ resp. } \|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{E(X\bar{X})} = \sqrt{E|X|^2}.$$

  Přechod ke třídám je nutný proto, abychom zaručili platnost požadavku

$$\langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Věta 2.1. *Prostory* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *jsou Hilbertovy prostory.*

Důkaz. Lze najít například v publikaci autorů Brockwell a Davis, 1991, [**5**]. □

Již dříve jsme definovali pojem **spojitosti podle středu v bodě** $t_0 \in T$ takto

$$E|X_t - X_{t_0}|^2 \to 0 \qquad \text{pro} \qquad t \to t_0.$$

což jsme značili

$$X_{t_0} = \operatorname*{l.i.m.}_{t \to t_0} X_t$$

(zkratka z anglického *limit in the mean*) a je-li proces $\{X_t, t \in T\}$ spojitý **v každém bodě množiny** T, říkali jsme stručně, že je **spojitý**.

Tutéž spojitost můžeme definovat i pomocí výše uvedené normy takto

$$\|X_t - X_{t_0}\|^2 = E|X_t - X_{t_0}|^2 \to 0 \qquad \text{pro} \qquad t \to t_0$$

a pro každý uzavřený podprostor $\mathcal{M} \subseteq L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ díky projekční větě můžeme definovat nejlepší střední kvadratickou predikci prvku $Y \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pomocí $\mathcal{M}$.

Definice 2.2. Jestliže $\mathcal{M}$ je **uzavřený** podprostor $\mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pak **nejlepší střední kvadratická predikce** $Y \in \mathcal{H}$ v $\mathcal{M}$ je prvek $\hat{Y} \in \mathcal{M}$ takový, že

$$\|Y - \hat{Y}\|^2 = \inf_{Z \in \mathcal{M}} \|Y - Z\|^2 = \inf_{Z \in \mathcal{M}} E|Y - Z|^2 \qquad \text{tj.} \qquad \hat{Y} = P_{\mathcal{M}}(Y).$$

Nyní se vrátíme k **teoretických základům regresní analýzy**. Hlavní úlohou regresní analýzy je provést predikci nějaké závisle proměnné náhodné veličiny Y na základě informace, kterou poskytují měření nějakých jiných náhodných veličin, řekněme $X_1, \ldots, X_n$.

Predikce spočívá v nalezení nějaké funkce $g(X_1, \ldots, X_n)$, která vhodně aproximuje (predikuje) náhodnou veličinu Y.

Kvalitu predikce posoudíme pomocí **střední kvadratické chyby predikce** $E[Y - g(X_1, \ldots, X_n)]^2$. Za optimální budeme považovat takovou volbu predikční funkce g, která uvedenou střední kvadratickou chybu **minimalizuje**.

Připomeňme nejprve tvrzení:

VĚTA 2.3. *Nechť $Y, X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny. Označme $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ a nechť platí $EY^2 < \infty$. Pak pro každou měřitelnou funkci*

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

platí

$$E(Y - g(\mathbf{X}))^2 \geq E[Y - E(Y|\mathbf{X})]^2$$

a rovnost v uvedené nerovnosti nastává právě když

$$P(g(\mathbf{X}) = E(Y|\mathbf{X})) = 1.$$

DŮKAZ. Musíme uvážit dva případy.

(a) Předpokládejme nejprve, že $E(g(\mathbf{X})) = \infty$. Pak totiž, pokud dokážeme že $E(Y - g(\mathbf{X}))^2 = \infty$, potom tvrzení věty je zřejmé.

Potřebné tvrzení dokážeme sporem. Jestliže platí, že $E(Y - g(\mathbf{X}))^2 < \infty$, pak vzhledem k požadavku $EY^2 < \infty$ by musela být střední hodnota kvadrátu lineární kombinace $[Y - g(\mathbf{X})] - Y = g(\mathbf{X})$ dvou náhodných veličin $Y - g(\mathbf{X})$ a Y (s konečnými druhými momenty) také konečná, což je ve sporu s předpokladem, $E(g(\mathbf{X})) = \infty$ (neboť jestliže $E(g(\mathbf{X})) = \infty$, tím spíše $E(g(\mathbf{X}))^2 = \infty$).

(b) Nyní budeme předpokládat, že $E(g(X)) < \infty$. Potom po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} E(Y - g(\mathbf{X}))^2 &= E\left\{[Y - E(Y|\mathbf{X})] - [g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]\right\}^2 \\ &= E[Y - E(Y|\mathbf{X})]^2 - 2E[Y - E(Y|\mathbf{X})][g(X) - E(Y|\mathbf{X})] + E[g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]^2 \end{aligned}$$

V dalších využijeme vlastností podmíněných středních hodnot, a to

$$E\left[E(Z|X)\right] = EZ \qquad \text{a} \qquad E\left[H(X)G(X,Y)|\,X\right] = H(X)E(G(X,Y)|X)).$$

$$\begin{aligned} E\underbrace{[Y - E(Y|\mathbf{X})][g(X) - E(Y|\mathbf{X})]}_{=Z} &= E\left\{E\left[\underbrace{(Y - E(Y|X))(g(X) - E(Y|X))}_{=Z}|X\right]\right\} \\ &= E\left\{\underbrace{[g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]}_{=H(\mathbf{X})} E\left[Y - E(Y|\mathbf{X})|\mathbf{X}\right]\right\} \\ &= E\left\{[g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]\,\underbrace{[E(Y|\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]}_{=0}\right\} = 0 \end{aligned}$$

Protože prostřední člen je nulový a $E[g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]^2 \geq 0$, důkaz nerovnosti je jasný.

Rovnost ve zkoumané nerovnosti nastane právě tehdy, když

$$E[g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X})]^2 = 0,$$

což je právě když

$$P(g(\mathbf{X}) - E(Y|\mathbf{X}) = 0) = 1.$$

□

Z tvrzení věty plyne, že **nejlepší predikci** náhodné veličiny Y pomocí náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$, která minimalizuje střední kvadratickou chybu $E(Y - g(\mathbf{X}))^2$, dostaneme, když položíme

$$g(\mathbf{X}) = E(Y|\mathbf{X}).$$

V této souvislosti potom nejlepší prediktor $g(\mathbf{X}) = E(Y|\mathbf{X})$ nazýváme **regresní funkcí náhodné veličiny** Y na náhodných veličinách $X_1, \ldots, X_n$.

Z předchozích úvah a z faktu, že v Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (tvořeném náhodnými veličinami s konečnými druhými momenty) je kvadrát normy $||X - Y||^2 = E|X - Y|^2$ **střední kvadratickou chybou**, vyplývá, že **projekcemi** jsou **podmíněné střední hodnoty**. Proto vyslovíme následující dvě definice.

DEFINICE 2.4. Jestliže $\mathcal{M}$ je **uzavřený** podprostor $\mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a $X \in \mathcal{H}$, pak definujme **podmíněnou střední hodnotu při dané** $\mathcal{M}$ předpisem

$$E_{\mathcal{M}}X = E(X|Y \in \mathcal{M}) = P_{\mathcal{M}}(X).$$

Dále definujme

DEFINICE 2.5. Nechť $X, Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak **podmíněná střední hodnota X při daném náhodném vektoru $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$** je dána vztahem

$$E(X|\mathbf{Z}) = E_{\mathcal{M}(\mathbf{Z})}X = E(X|Y \in \mathcal{M}(\mathbf{Z})),$$

kde $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ je uzavřený podprostor všech náhodných veličin $\phi(\mathbf{Z})$ z $\mathcal{H}$, které jsou borelovskou funkcí náhodného vektoru $\mathbf{Z}$, tj. $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, resp. $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$.

Na základě předchozích výsledků můžeme tedy říci, že úloha predikce je teoreticky vyřešena tak, že za nejlepší prediktor stačí zvolit podmíněnou střední hodnotu $E(X|\mathbf{Z})$.

Ovšem **výpočet** podmíněné střední hodnoty $E(X|\mathbf{Z})$ vyžaduje **znalost sdruženého rozdělení** náhodného vektoru $\mathbf{W} = (X, Z_1, \ldots, Z_n)'$, což činí **hlavní potíž** při praktickém využití předchozích výsledků.

V aplikacích nebývá sdružené rozdělení vektoru $\mathbf{W} = (X, Z_1, \ldots, Z_k)'$ známé, proto se, pokud to praktická situace dovolí, uvažují pouze **lineární modely** typu

$$g(\mathbf{Z}) = \alpha_0 + \alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_n Z_n,$$

tj. omezíme se na podprostor

$$\mathcal{M} = \overline{sp}\{1, Z_1, \ldots, Z_n\} = \overline{\{1, Z_1, \ldots, Z_n\}}.$$

Připomeňme nejprve důležitou vlastnost predikce $\hat{x} \in \mathcal{M}$ prvku $x \in \mathcal{H}$. Platí tožiž

$$\hat{x} = P_{\mathcal{M}}(x) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{M} \ \wedge \ (x - \hat{x}) \in \mathcal{M}^{\perp}$$

tj. pro každé $y \in \mathcal{M}$ platí

$$\langle x - \hat{x}, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle \hat{x}, y\rangle = 0$$

a odtud dostaneme tzv. **projekční rovnice**

$$\langle \hat{x}, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Dále již uvažujme Hilbertův prostor

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

a jeho podprostor

$$\mathcal{M} = \overline{sp}\{1, Z_1, \ldots, Z_n\} = \overline{\{1, Z_1, \ldots, Z_n\}},$$

kde $Z_1, \ldots, Z_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak projekce je dána vztahem

$$\widehat{X} = P_{\mathcal{M}}(X) = E_{\mathcal{M}}X = \arg\inf_{Y \in \mathcal{M}} \|X - Y\|^2 = \arg\inf_{Y \in \mathcal{M}} E(X - Y)^2$$

a projekční rovnice jsou tvaru

$$E\left(Y \cdot E_{\mathcal{M}}X\right) = E(Y \cdot X).$$

Pro každý prvek z $\mathcal{M}$ (tedy i pro $1, Z_1, \ldots, Z_n$) platí tyto rovnice, tj. pro $Y = 1$ máme

$$E(1 \cdot E_{\mathcal{M}}X) = E(1 \cdot X)$$

$$E(1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Z_i) = EX$$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i EZ_i = EX$$

a pro $Y = Z_j, j = 1, \ldots, n$ dostaneme

$$E(Z_j \cdot E_{\mathcal{M}}X) = E(Z_j \cdot X)$$

$$E(Z_j \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Z_i) = E(Z_j X)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i E(Z_i Z_j) = E(Z_j X)$$

Celkem dostáváme systém $n + 1$ rovnic.

Definujme proto nyní nejlepší lineární predikci pomocí obecnějších systémů náhodných veličin druhého řádu $\{Z_t, t \in T\}$.

DEFINICE 2.6. Nechť $X \in \mathcal{H}$ a pro každé $t \in T$ také $Z_t \in \mathcal{H}$, kde T je indexová množina, $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pak **nejlepší lineární predikcí** náhodné veličiny X pomocí $\{Z_t, t \in T\}$ rozumíme

$$P_{\overline{sp}\{Z_t, t\in T\}}(X).$$

Uvědomíme–li si, že $C(Z_i, Z_j) = E(Z_i Z_j) - EZ_i EZ_j$, vidíme, že při hledání nejlepší lineární predikce vystačíme se znalostí kovarianční funkce a není třeba znát ani momenty vyšších řádů.

3. Predikce v případě normálně rozdělených náhodných veličin.

Je-li sdružené rozdělení náhodných veličin $X, Z_1, \ldots, Z_n$ **normální**, tj.

$$(X, Z_1, \ldots, Z_n)' \sim N_{n+1}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_{Z_1} \\ \mu_{Z_2} \\ \vdots \\ \mu_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{c|cccc} \sigma_X^2 & \sigma_{XZ_1} & \sigma_{XZ_2} & \cdots & \sigma_{XZ_n} \\ \hline \sigma_{XZ_1} & \sigma_{Z_1}^2 & \sigma_{Z_1Z_2} & \cdots & \sigma_{Z_1Z_n} \\ \sigma_{XZ_2} & \sigma_{Z_1Z_2} & \sigma_{Z_2}^2 & \cdots & \sigma_{Z_2Z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{XZ_n} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{Z_n}^2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \Sigma'_{X\mathbf{Z}} \\ \Sigma_{X\mathbf{Z}} & \Sigma_{\mathbf{ZZ}} \end{pmatrix}.$$

Pak rozdělení náhodné veličiny X při daném $\mathbf{Z}$ má opět normální rozdělení

$$X|\mathbf{Z} \sim N\left(\mu_{X|\mathbf{Z}}, \sigma^2_{X|\mathbf{Z}}\right),$$

kde

$$\mu_{X|\mathbf{Z}} = \mu_X + \Sigma'_{X\mathbf{Z}} \Sigma^{-1}_{\mathbf{ZZ}} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}})$$

a

$$\sigma^2_{X|\mathbf{Z}} = \sigma^2_X + \Sigma'_{X\mathbf{Z}} \Sigma^{-1}_{\mathbf{ZZ}} \Sigma_{\mathbf{Z}X}$$

Odtud vidíme, že podmíněná střední hodnota je lineární funkcí náhodného vektoru

$$\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'.$$

To znamená, že v případě **vícerozměrného normálního rozdělení je nejlepší lineární predikce totožná s optimální predikcí** (ve smyslu minimální střední kvadratické chyby) založené na podmíněných středních hodnotách.

KAPITOLA 3

Jednorozměrné stacionární procesy

1. Základní pojmy

V dalším budeme uvažovat centrované stacionární náhodné posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kde $Y_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, což je Hilbertův prostor reálných náhodných veličin s konečnými druhými momenty, ve kterém dvě náhodné veličiny X a Y považujeme za ekvivalentní, pokud

$$P(X = Y) = 1.$$

1.1. Operátor zpětného posunutí.

Definice 1.1. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost náhodných veličin. **Operátor zpětného posunutí** je definován pomocí výrazu

$$BY_t = Y_{t-1}\ ,$$

přičemž jej lze aplikovat několikanásobně jako

$$B^j Y_t = Y_{t-j}.$$

1.2. Lineární proces. Než zavedeme pojem lineárního procesu, vyslovme větu, která zabezpečuje jeho korektnost.

Věta 1.2. *Nechť $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ je bílým šumem, dále mějme posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ takovou, že $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Pak řada $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_j$ konverguje podle kvadratického středu, tj. existuje náhodná veličina $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a platí*

$$Y = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \psi_j \varepsilon_j.$$

Důkaz. Víme, že bílý šum $\varepsilon_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pro libovolná přirozená čísla $k, N \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j - \sum_{t=0}^{N} \psi_t \varepsilon_t \right\|^2 &= E \left| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j - \sum_{t=0}^{N} \psi_t \varepsilon_t \right|^2 = E \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j \right|^2 \\
&= E \left(\sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j \right) \left(\sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_h \varepsilon_h \right) \\
&= \sum_{j=N+1}^{N+k} \sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_j \psi_h \underbrace{E\, \varepsilon_j \varepsilon_h}_{\text{nekorel.}} = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů je tedy cauchyovská, tj. existuje k ní limita

$$Y = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \psi_j \varepsilon_j.$$

□

Definice 1.3. Mějme $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ takovou, že $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, pak **lineární proces** je definován vztahem

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}\ .$$

Počítejme postupně střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci lineárního procesu a přesvědčeme se, že lineární proces je stacionární.

$$
\begin{aligned}
EY_t &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\underbrace{E\varepsilon_{t-j}}_{=0} = 0\\
DY_t &= D\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}\right) \overset{\text{nekorel.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2\underbrace{D\varepsilon_{t-j}}_{=\sigma_\varepsilon^2} = \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 = \sigma_Y^2\\
\gamma(t) &= C(Y_s, Y_{s+t}) = EY_sY_{s+t} = E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{s-j}\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty}\psi_h\varepsilon_{s+t-h}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\psi_j\psi_h E\underbrace{\varepsilon_{s-j}\varepsilon_{s+t-h}}_{\text{nekorel.}} = \left|\begin{array}{ccc} s-j & = & s+t-h\\ h & = & j+t\end{array}\right|\\
&= \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+t}.
\end{aligned}
$$

Ze Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$
|\gamma(t)| = |C(Y_s, Y_{s+t})| = \left|\sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+t}\right| \le \sqrt{DY_sDY_{s+t}} = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty.
$$

Podmínka stacionarity je tedy podmínka

$$
\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty.
$$

Pokud zavedeme funkci

$$
\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j\ ,
$$

pak podmínka

$$
\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty
$$

implikuje, že funkce

$$
\Psi(z) \text{ je holomorfní uvnitř kružnice } |z| < 1.
$$

Takže podmínku stacionarity lze vyslovit i pomocí podmínky

$$
\Psi(z) \text{ je holomorfní pro } |z| < 1, \text{ přičemž } \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty.
$$

Oba požadavky budou splněny, pokud bude platit

$$
\Psi(z) \text{ je holomorfní uvnitř a na jednotkové kružnici.}
$$

Lineární proces lze ještě zobecnit takto:

DEFINICE 1.4. Mějme $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ takovou, že $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, pak **zobecněný lineární proces** je definován vztahem

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \, .$$

Pro takto definovaný zobecněný lineární proces dokážeme obdobným způsobem jak pro obyčejný lineární proces spočítat

$$EY_t = 0, \qquad DY_t = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 \qquad \text{a} \qquad \gamma(t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+t}.$$

Na závěr tohoto odstavce počítejme ještě **spektrální hustotu zobecněného lineárního procesu**. Nejprve odvodíme spektrální hustotu bílého šumu, a to pomocí jeho autokovarianční funkce $\gamma_\varepsilon(t)$

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \sigma_\varepsilon^2 \delta(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} & \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

kde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Pak pomocí autokovarianční funkce zobecněného lineárního procesu počítáme spektrální hustotu pro $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \left(\sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+t} \right) \\ &= \underbrace{\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}}_{f_\varepsilon(\omega)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_{j+t} e^{-it\omega} = f_\varepsilon(\omega) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\omega} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_{j+t} e^{-i(j+t)\omega} \\ &= f_\varepsilon(\omega) \left| \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-it\omega} \right|^2 = f_\varepsilon(\omega) \left| \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{it\omega} \right|^2 \qquad \text{neboť } |z|^2 = z \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

Pokud položíme $\Psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$, pak můžeme psát

$$f_Y(\omega) = f_\varepsilon(\omega) \left| \Psi\left(e^{-i\omega}\right) \right|^2 = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| \Psi\left(e^{-i\omega}\right) \right|^2 \left(= \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| \Psi\left(e^{i\omega}\right) \right|^2 \right).$$

1.3. Lineární filtry.

VĚTA 1.5. *Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je (centrovaná) stacionární náhodná posloupnost a $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ je absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel (tj. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$). Pak platí*

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j} \quad \in \quad L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

tj. $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodná posloupnost.

DŮKAZ. Je zřejmé, že stačí dokázat existenci náhodných veličin

$$Y_t^{(1)} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \psi_j X_{t-j} \qquad \text{a} \qquad Y_t^{(2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j X_{t-j},$$

protože pak bude platit $Y_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$. Označme

$$\gamma_X(h) = EX_t EX_{t+|h|} \qquad \text{a} \qquad \gamma_X(0) = \sigma_X^2 > 0.$$

Pak pro libovolná přirozená čísla $k, N \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j X_{t-j} - \sum_{h=0}^{N} \psi_h X_{t-h} \right\|^2 &= E \left| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j X_{t-j} - \sum_{h=0}^{N} \psi_h X_{t-h} \right|^2 \\
&= E \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j X_{t-j} \right|^2 = E \left(\sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j X_{t-j} \right) \left(\sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_h X_{t-h} \right) \\
&= \sum_{j=N+1}^{N+k} \sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_j \psi_h \underbrace{E X_{t-j} X_{t-h}}_{|\gamma(j-h)| \le \gamma_X(0) = \sigma_X^2} \\
&\le \sigma_X^2 \sum_{j=N+1}^{N+k} \sum_{h=N+1}^{N+k} |\psi_j||\psi_h| = \underbrace{\sigma_X^2}_{<\infty} \left(\underbrace{\sum_{j=N+1}^{N+k} |\psi_j|}_{\to 0} \right)^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů je tedy cauchyovská (podle kvadratického středu), tj. existuje k ní limita

$$Y_t^{(1)} = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \psi_j X_{t-j}, \qquad Y_t^{(1)} \quad \in \quad L^2(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

tj. $Y_t^{(1)}$ má nulovou střední hodnotu a konečný rozptyl a je tedy stacionární. Podobně se dokáže i existence stacionární náhodné posloupnosti $Y_t^{(2)}$. □

Definice 1.6. Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodná posloupnost a $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ je absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel (tj. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$). Pak

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

nazveme **lineárním filtrem** procesu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Věta 1.7. *Mějme centrovanou stacionární náhodnou posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se spektrální hustotou $f_X(\omega)$. Nechť $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ je absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel (tj. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$). Pak náhodná posloupnost $Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ je stacionární se spektrální hustotou*

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) \left| \Psi\left(e^{-i\omega}\right) \right|^2, \quad kde \quad \Psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \qquad |z| \le 1$$

*se nazývá **generující funkce filtru** a*

$$\psi(\omega) = \Psi\left(e^{-i\omega}\right) \quad \textbf{\textit{přenosová funkce filtru}}.$$

Důkaz. Stacionaritu jsme dokázali v předchozí větě. Nyní počítejme autokovarianční funkci.

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(t) &= C(Y_s, Y_{s+t}) = C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{s-j}, \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h X_{s+t-h} \right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h C(X_{s-j}, X_{s+t-h}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h \gamma_X(t+j-h) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+j-h)\omega} f_X(\omega) d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\omega} \right) \left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h e^{-ih\omega} \right) f_X(\omega) d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\omega} \right|^2 f_X(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \left| \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ih\omega} \right|^2 f_X(\omega) d\omega.
\end{aligned}$$

Označme

$$\Psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \qquad \text{pro} \qquad |z| \leq 1.$$

Pak, protože platí

$$\gamma_Y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} f_Y(\omega) d\omega,$$

dostaneme

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) \left|\Psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 = f_X(\omega) \left|\Psi\left(e^{i\omega}\right)\right|^2.$$

□

1.4. Definice ARMA procesu.

DEFINICE 1.8. **ARMA proces řádu** p, q je definován vztahem

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \text{ , kde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

přičemž pomocí operátoru zpětného chodu lze psát

$$Y_t \quad \sim \quad ARMA(p,q): \quad \Phi(B) Y_t = \Theta(B) \varepsilon_t,$$

kde

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p \qquad (\varphi_0 \equiv 1)$$

a

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q \qquad (\theta_0 \equiv 1).$$

Řekneme, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je $ARMA(p,q)$ se **střední hodnotou** μ, jestliže $\{Y_t - \mu\}$ je $ARMA(p,q)$ proces.

Speciální případy ARMA procesů nazýváme:

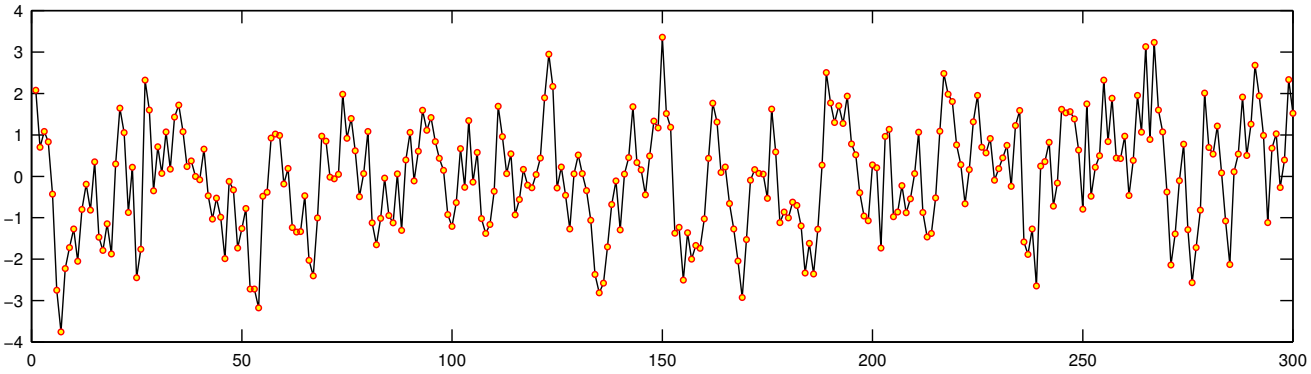
Autoregresní proces (AR proces): $Y_t \sim AR(p) \sim ARMA(p,0)$, tj. $q = 0$

Proces klouzavých součtů (MA proces): $Y_t \sim MA(q) \sim ARMA(0,q)$, tj. $p = 0$

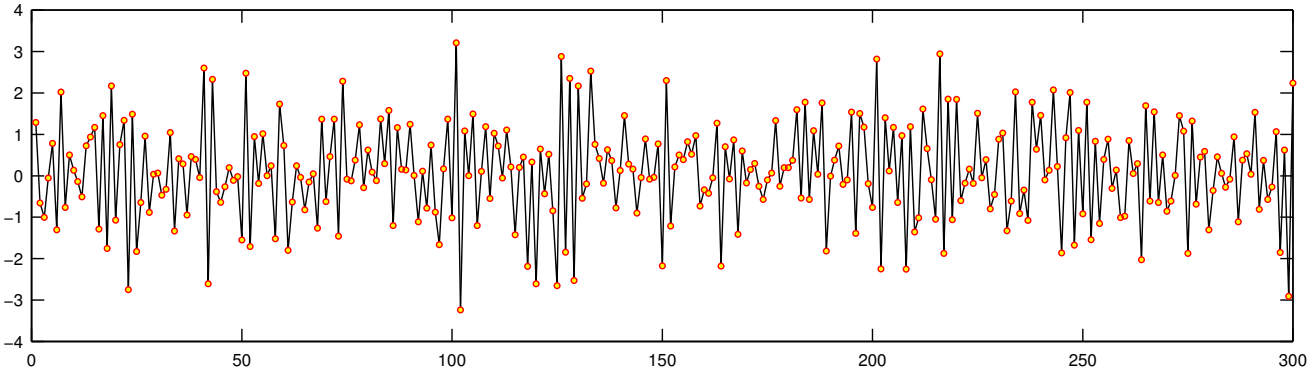
1.5. Kauzalita.

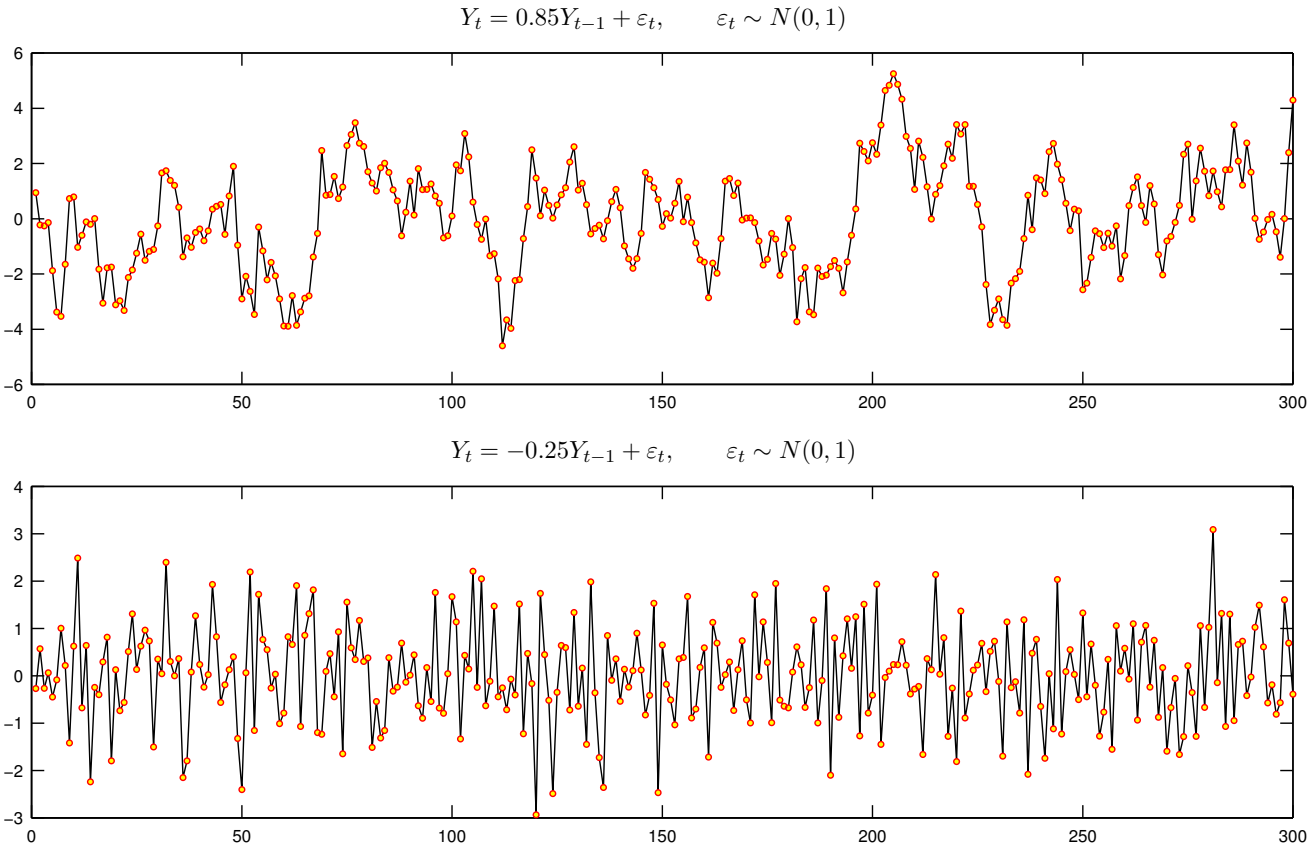
Dříve než zavedeme pojem kauzality, všimněme si blíže $AR(1)$ procesu.

$Y_t = 0.5 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$



$Y_t = -0.5 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$





OBRÁZEK 1. **Ukázky autoregresních procesů 1. řádu**

Pro autoregresní proces prvního řádu $Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t$ postupně v k krocích upravujme

$$\begin{aligned} Y_t &= \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t = \varphi_1 \left(\varphi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}\right) + \varepsilon_t = \varphi_1^2 Y_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \varphi_1^2 \left(\varphi_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}\right) + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \varphi_1^3 Y_{t-3} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= \varphi_1^k \left(\varphi_1 Y_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} = \varphi_1^{k+1} Y_{t-k-1} + \sum_{j=0}^{k} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

(1) Uvažujme nejprve případ, kdy $|\varphi_1| < 1$ a $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární, tj. $Y_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $EY_t^2 < \infty$, pak

$$\left\| Y_t - \sum_{j=0}^{k} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} \right\|^2 = \left\| \varphi_1^{k+1} Y_{t-k-1} \right\|^2 = E \left| \varphi_1^{k+1} Y_{t-k-1} \right|^2 = \underbrace{\varphi_1^{2k+2}}_{\to 0} \underbrace{E \left| Y_{t-k-1} \right|^2}_{=\sigma_Y^2 < \infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

tj. $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j}$ konverguje podle kvadratického středu k Y_t a můžeme psát

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j}.$$

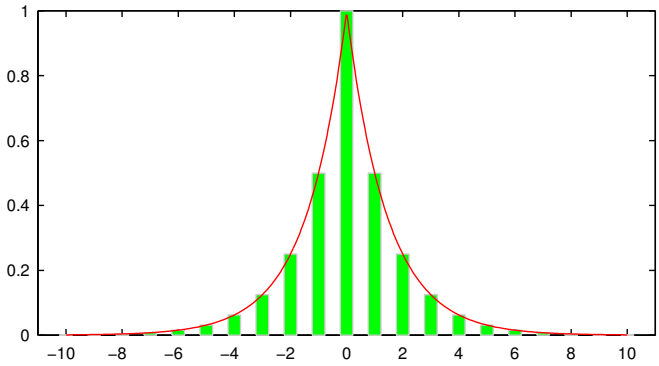
Pak dokážeme spočítat

$$\begin{aligned}
EY_t &= E\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j E\varepsilon_{t-j} = 0\\
DY_t &= D\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{t-j} \overset{\text{nekorel.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^{2j}D\varepsilon_{t-j} = \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^{2j} = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}\\
\gamma(t) &= C(Y_s, Y_{s+|t|}) = E(Y_s\cdot Y_{s+|t|}) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{s-j}\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_1^h\varepsilon_{s+|t|-h}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_1^j\varphi_1^h E\underbrace{\varepsilon_{s-j}\varepsilon_{s+|t|-h}}_{\text{nekorel.}} = \left|\begin{array}{ccc} s-j & = & s+|t|-h\\ h & = & j+|t|\end{array}\right|\\
&= \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varphi_1^{j+|t|} = \tfrac{\varphi_1^{|t|}}{1-\varphi_1^2}\sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

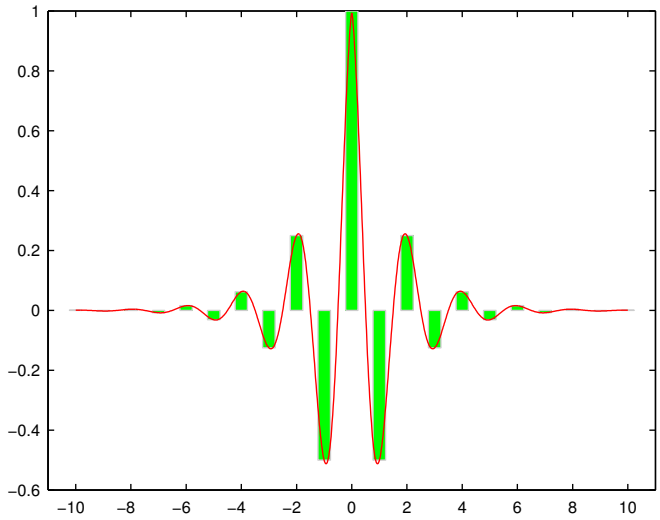
Autokorelační funkce (ACF) je pak tvaru

$$\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)} = \varphi_1^{|t|}.$$

ACF pro $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$



ACF pro $Y_t = -0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$



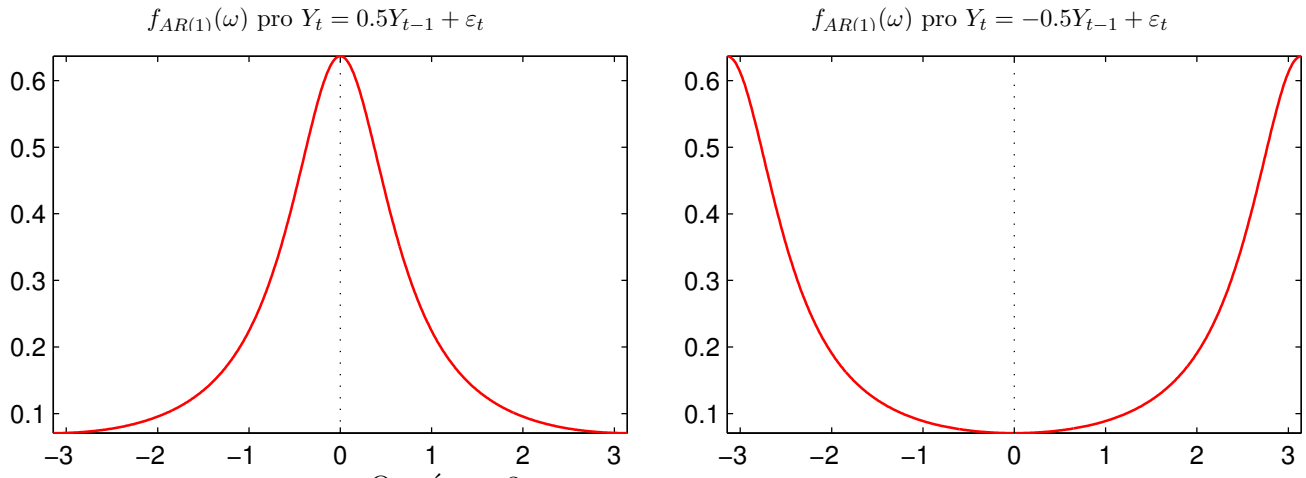
OBRÁZEK 2. **Ukázky autokorelačních funkcí**

Pomocí **generující funkce filtru**

$$\Psi_{AR(1)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j z^j = \frac{1}{1-\varphi_1 z}$$

pro $|z| < 1$ a $|\varphi_1| < 1$ dokážeme snadno spočítat i spektrální hustotu

$$f_{AR(1)}(\omega) = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left|\Psi_{AR(1)}\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\varphi_1 e^{-i\omega}|^2} = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{|e^{-i\omega}(e^{i\omega}-\varphi_1)|^2} = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{|e^{i\omega}-\varphi_1|^2}.$$



OBRÁZEK 3. **Ukázky spektrálních hustot**

(2) Dále řešme případ, kdy $|\varphi_1| > 1$. Použijeme-li vztah

$$Y_{t-1} = \tfrac{1}{\varphi_1} Y_t - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_t$$

a postupně v k krocích budeme upravovat

$$\begin{aligned} Y_t &= \tfrac{1}{\varphi_1} Y_{t+1} - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+1} = \tfrac{1}{\varphi_1}\left(\tfrac{1}{\varphi_1} Y_{t+2} - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+2}\right) - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+1} \\ &= \tfrac{1}{\varphi_1^2} Y_{t+2} - \tfrac{1}{\varphi_1^2}\varepsilon_{t+2} - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+1} = \tfrac{1}{\varphi_1^2}\left(\tfrac{1}{\varphi_1} Y_{t+3} - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+3}\right) - \tfrac{1}{\varphi_1^2}\varepsilon_{t+2} - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+1} \\ &= \tfrac{1}{\varphi_1^3} Y_{t+3} - \tfrac{1}{\varphi_1^3}\varepsilon_{t+3} - \tfrac{1}{\varphi_1^2}\varepsilon_{t+2} - \tfrac{1}{\varphi_1}\varepsilon_{t+1} \\ &\vdots \\ &= \tfrac{1}{\varphi_1^{k+1}} Y_{t+k+1} - \sum_{j=0}^{k} \tfrac{1}{\varphi_1^{k+1-j}}\varepsilon_{t-j}, \end{aligned}$$

stejně jako v předchozím případu $-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1^j}\varepsilon_{t-j}$ konverguje podle kvadratického středu k Y_t. Avšak vidíme, že Y_t zde vyjadřujeme pomocí budoucích hodnot $\{\varepsilon_s, s > t\}$. Tím porušujeme přirozenou podmínku, že Y_t je na budoucnosti nezávislá a říkáme, že není kauzální.

(3) V případě, že platí

$$|\varphi_1| = 1,$$

pak $AR(1)$ není stacionární, jde o tzv. **náhodnou procházku**.

Nyní již můžeme zavést pojem kauzality.

DEFINICE 1.9. ARMA proces $Y_t \sim ARMA(p,q)$ se nazývá **kauzální**, jestliže existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\Psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, (tj. $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$) tak, že

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \text{tj. zkráceně} \qquad Y_t \sim MA(\infty) : \; Y_t = \Psi(B)\varepsilon_t.$$

POZNÁMKA 1.10. Protože platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \le \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|\right)^2 < \infty,$$

pak kauzální proces $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ je **lineárním procesem**. Protože lineární proces je stacionárním procesem, je **kauzální ARMA proces** $Y_t \sim ARMA(p,q)$, kde $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, také **stacionárním procesem**.

AUTOREGRESNÍ PROCES p –TÉHO ŘÁDU: $AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$

Mějme polynom

$$\Phi(z) = \varphi_0 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$$

a nechť $\frac{1}{\lambda_j}$ jsou jeho kořeny, tj.

$$\Phi\left(\tfrac{1}{\lambda_j}\right) = 0.$$

Pak platí

$$\varphi_0 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p = \varphi_p \prod_j \left(z - \tfrac{1}{\lambda_j}\right) = \varphi_0 \prod_j (1 - \lambda_j z),$$

v našem případě

$$\varphi_0 = 1 \quad \text{a} \quad \varphi_p \neq 0.$$

Proveďme tedy rozklad polynomu $\Phi(z)$ na součin kořenových činitelů

$$\Phi(z) = (1 - \lambda_1 z)^{p_1} \dots (1 - \lambda_k z)^{p_k},$$

kde

$$z_{01} = \frac{1}{\lambda_1}, \dots, z_{0k} = \frac{1}{\lambda_k}$$

jsou **rozdílné** (reálné či komplexní) **kořeny polynomu** $\Phi(z)$, $p_1, \dots, p_k$ je jejich násobnost (přičemž platí $p_1 + \cdots + p_k = p$).

Budeme hledat takovou absolutně konvergentní posloupnost čísel

$$\Psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$$

tak, aby $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(B)\varepsilon_t$ byl **kauzální proces**. Takže postupně odvozujme

$$\varepsilon_t = \Phi(B) \underbrace{Y_t}_{=\Psi(B)\varepsilon_t} = \Phi(B)\Psi(B)\varepsilon_t,$$

tj.

$$\Phi(B)\Psi(B) = 1 \qquad \text{nebo} \qquad \Phi(z)\Psi(z) = 1 \qquad \text{čili} \qquad \Psi(z) = \frac{1}{\Phi(z)}.$$

Z věty o rozkladu na částečné zlomky dostáváme (pokud pro názornost předpokládáme, že všechny kořeny jsou jednoduché)

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{(1 - \lambda_1 z)\dots(1 - \lambda_p z)} = \frac{c_1}{1 - \lambda_1 z} + \cdots + \frac{c_p}{1 - \lambda_p z} \text{ pro vhodná } c_1, \dots, c_p.$$

Pokud pro $k = 1, \dots, p$ platí $|\lambda_k z| < 1$, můžeme psát

$$\frac{c_k}{1 - \lambda_k z} = c_k \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_k z)^j$$

a dokázali jsme najít konvergentní řadu

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_k^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(c_1 \lambda_1^j + \cdots + c_p \lambda_p^j\right) z^j,$$

přičemž

$$\psi_j = c_1 \lambda_1^j + \cdots + c_p \lambda_p^j,$$

neboť $\Psi(z) = \frac{1}{\Phi(z)}$ je holomorfní pro $|z| \leq 1$ pouze když

$$|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_p| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\left|\tfrac{1}{\lambda_1}\right| > 1}_{|z_{01}|>1}, \dots, \underbrace{\left|\tfrac{1}{\lambda_p}\right| > 1}_{|z_{0p}|>1},$$

tedy **všechny kořeny polynomu** $\Phi(z)$ **musí ležet vně jednotkové kružnice**.

Tím jsme ukázali, že existuje řešení

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

tzv. *stochastické diferenční rovnice*

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \ldots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{12}$$

a tímto řešením je **kauzální autoregresní posloupnost řádu** p. Protože Y_t je lineární proces, je toto řešení **stacionární**.

Podmínka týkající se kořenů polynomu $\Phi(z)$ je podstatná. Lze ukázat, že v případě, kdy alespoň jeden kořen polynomu $\Phi(z)$ leží uvnitř nebo na hranici jednotkové kružnice, neexistuje kauzální posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ splňující stochastickou diferenční rovnici (12). Snadno se dá ukázat, že toto řešení je jediné.

Střední hodnota, rozptyl, autokovariance a autokorelace $AR(p)$

Pro kauzální $AR(p)$ procesy počítejme nejprve

$$EY_t = E\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j E\varepsilon_{t-j} = 0.$$

Abychom mohli spočítat rozptyl kauzálního $AR(p)$ procesu, nejprve rovnici

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

vynásobíme výrazem Y_t a spočítáme střední hodnoty obou stran, tj.

$$EY_t^2 = \varphi_1 EY_{t-1}Y_t + \cdots + \varphi_p EY_{t-p}Y_t + E\varepsilon_t Y_t. \tag{A$_1$}$$

Protože $EY_t = 0$, pak autokovarianční funkce je rovna

$$\gamma(j) = C(Y_t, Y_{t-j}) = E(Y_t - EY_t)(Y_{t-j} - EY_{t-j}) = EY_tY_{t-j}$$

a rozptyl

$$\gamma(0) = EY_t^2 = DY_t.$$

Dále spočtěme

$$EY_t\varepsilon_t = E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}\right)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j E\varepsilon_{t-j}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\sigma_\varepsilon^2\delta(j) = \sigma_\varepsilon^2,$$

kde $\delta(j) = \begin{cases}1 & j=0,\\ 0 & jinak.\end{cases}$

Vraťme se k rovnici (A$_1$), pak po dosazení $EY_t\varepsilon_t = \sigma_\varepsilon^2$ a $\gamma(0) = EY_t^2$ dostaneme

$$\gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \cdots + \varphi_p\gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2. \tag{A$_2$}$$

Podělme obě strany rovnice (A$_2$) výrazem $\gamma(0) > 0$ a protože pro autokorelaci platí $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, dostaneme

$$\underbrace{\rho(0)}_{=1} = \varphi_1\rho(1) + \cdots + \varphi_p\rho(p) + \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma(0)}$$

a odtud již plyne, že

$$DY_t = \gamma(0) = \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1\rho(1)-\cdots-\varphi_p\rho(p)}.$$

Při výpočtu autokovariance (nebo autokorelace ACF) budeme předpokládat, že $k > 0$, neboť $\gamma(0) = DY_t$ již jsme spočítali. Rovnici

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

vynásobíme výrazem Y_{t-k} a spočítáme střední hodnoty obou stran, tj.

$$EY_tY_{t-k} = \varphi_1 EY_{t-1}Y_{t-k} + \cdots + \varphi_p EY_{t-p}Y_{t-k} + E\varepsilon_t Y_{t-k}. \tag{A$_3$}$$

Připomeňme, že s využitím vztahu $EY_t = 0$, je

$$\gamma(k) = C(Y_t, Y_{t-k}) = E(Y_t - EY_t)(Y_{t-k} - EY_{t-k}) = EY_tY_{t-k}.$$

Spočtěme

$$EY_{t-k}\varepsilon_t = E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j-k}\right)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j E\varepsilon_{t-j-k}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\sigma^2\underbrace{\delta_{j+k}}_{=0} = 0.$$

Vraťme se k rovnici (A$_3$), pak po dosazení $EY_t\varepsilon_t = 0$ a $\gamma(k) = EY_tY_{t-k}$ dostaneme

$$\gamma(k) = \varphi_1\gamma(k-1) + \cdots + \varphi_p\gamma(k-p) \tag{A$_4$}$$

Podělme obě strany rovnice (A_4) výrazem $\gamma(0)$ a protože $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, dostaneme tzv. **Yuleovy-Walkerovy rovnice**.

$$\rho(k) = \varphi_1\rho(k-1) + \cdots + \varphi_p\rho(k-p) \quad k \geq 1 \tag{A_5}$$

Explicitní vyjádření autokorelační funkce procesu $AR(p)$

Při explicitním vyjádření autokorelační funkce procesu vyjdeme z Yuleo-Walkerových rovnic

$$\rho(k) = \varphi_1\rho(k-1) + \cdots + \varphi_p\rho(k-p) \quad k \geq 1.$$

Označme

$$B\rho(k) = \rho(k-1), \qquad \text{přičemž} \qquad \rho(0) = 1 \quad \text{a} \quad \rho(-j) = \rho(j)$$

a hledejme řešení tzv. **homogenní diferenční rovnice**

$$\rho(k) - \varphi_1\rho(k-1) - \cdots - \varphi_p\rho(k-p) = 0 \quad k \geq 1 \quad \text{tj.} \quad \Phi(B)\rho(k) = 0\,.$$

Poznámka: Řešení homogenní diferenční rovnice

Mějme polynom $\Phi(z) = \varphi_0 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$ a nechť $\frac{1}{\lambda_j}$ jsou jeho kořeny, tj. $\Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) = 0$. Pak platí

$$\varphi_0 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p = \varphi_p \prod_j \left(z - \tfrac{1}{\lambda_j}\right) = \varphi_0 \prod_j (1 - \lambda_j z),$$

v našem případě $\varphi_0 = 1$ a $\varphi_p \neq 0$.

(1) Nechť $\frac{1}{\lambda_j}$ je kořen polynomu $\Phi(z)$, pak λ_j^k je řešením $\Phi(B)\rho(k) = 0$.
Důkaz:

$$\begin{aligned}\Phi(B)\lambda_j^k &= (1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p)\lambda_j^k = \lambda_j^k - \varphi_1\lambda_j^{k-1} - \cdots - \varphi_p\lambda_j^{k-p} \\ &= \lambda_j^k\left(1 - \varphi_1\tfrac{1}{\lambda_j} - \cdots - \varphi_p\tfrac{1}{\lambda_j^p}\right) = \Phi\left(\tfrac{1}{\lambda_j}\right)\lambda_j^k = 0.\end{aligned}$$

nebo ekvivalentně: jestliže uvažujeme faktorizaci $\Phi(B) = \varphi_0\prod_i(1 - \lambda_i B)$, tak mezi faktory je i člen $(1 - \lambda_j B)$ a platí

$$(1 - \lambda_j B)\lambda_j^k = \lambda_j^k - \lambda_j B(\lambda_j^k) = \lambda_j^k - \lambda_j \cdot \lambda_j^{k-1} = 0.$$

(2) Nechť $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_p}$ jsou různé jednoduché kořeny, pak

$$c_1\lambda_1^k + \cdots + c_p\lambda_p^k$$

jsou řešením homogenní diferenční rovnice a $c_1, \ldots, c_p$ jsou konstanty, které jsou určeny **počátečními podmínkami**.

(3) Je-li kořen $\frac{1}{\lambda_j}$ **dvojnásobný kořen**, pak

$$\lambda_j^k \qquad \text{a} \qquad k\lambda_j^k$$

jsou řešeními $\Phi(B)\rho(k) = 0$.

Důkaz: Díky faktorizaci můžeme psát $\Phi(B) = (1 - \lambda_j B)^2\prod_{k\neq j}(1 - \lambda_k B)$. Pak

$$(1 - \lambda_j B)^2\lambda_j^k = (1 - 2\lambda_j B + \lambda_j^2 B^2)\lambda_j^k = \lambda_j^k - 2\lambda_j\lambda_j^{k-1} + \lambda_j^2\lambda_j^{k-2} = 0$$

$$\begin{aligned}(1 - \lambda_j B)^2 k\lambda_j^k &= (1 - 2\lambda_j B + \lambda_j^2 B^2)k\lambda_j^k \\ &= k\lambda_j^k - 2\lambda_j(k-1)\lambda_j^{k-1} + \lambda_j^2(k-2)\lambda_j^{k-2} \\ &= k\lambda_j^k - 2t\lambda_j^k + k\lambda_j^k + 2\lambda_j^k - 2\lambda_j^k t = 0.\end{aligned}$$

(4) Analogicky dostaneme: je-li kořen $\frac{1}{\lambda_j}$ r-tého řádu, pak

$$\lambda_j^k,\ k\lambda_j^k, \ldots, k^{r-1}\lambda_j^k$$

jsou řešeními $\Phi(B)\rho(k) = 0$.

Shrneme-li tedy předchozí, za předpokladu, že $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_m}$ jsou různé kořeny s násobnostmi $p_1, \ldots, p_m$, přičemž $p = p_1 + \cdots + p_m$, pak řešení homogenní diferenční rovnice $\Phi(B)\rho(k) = 0$ je tvaru

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{p_j - 1} c_{js} k^s \right) \lambda_j^k \ ,$$

kde c_{js} jsou konstanty, které jsou určeny počátečními podmínkami. Dále položme $\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}$. Pak máme

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{p_j - 1} c_{js} k^s \right) r_j^k e^{ik\theta_j} \ ,$$

Vzhledem k tomu, že platí

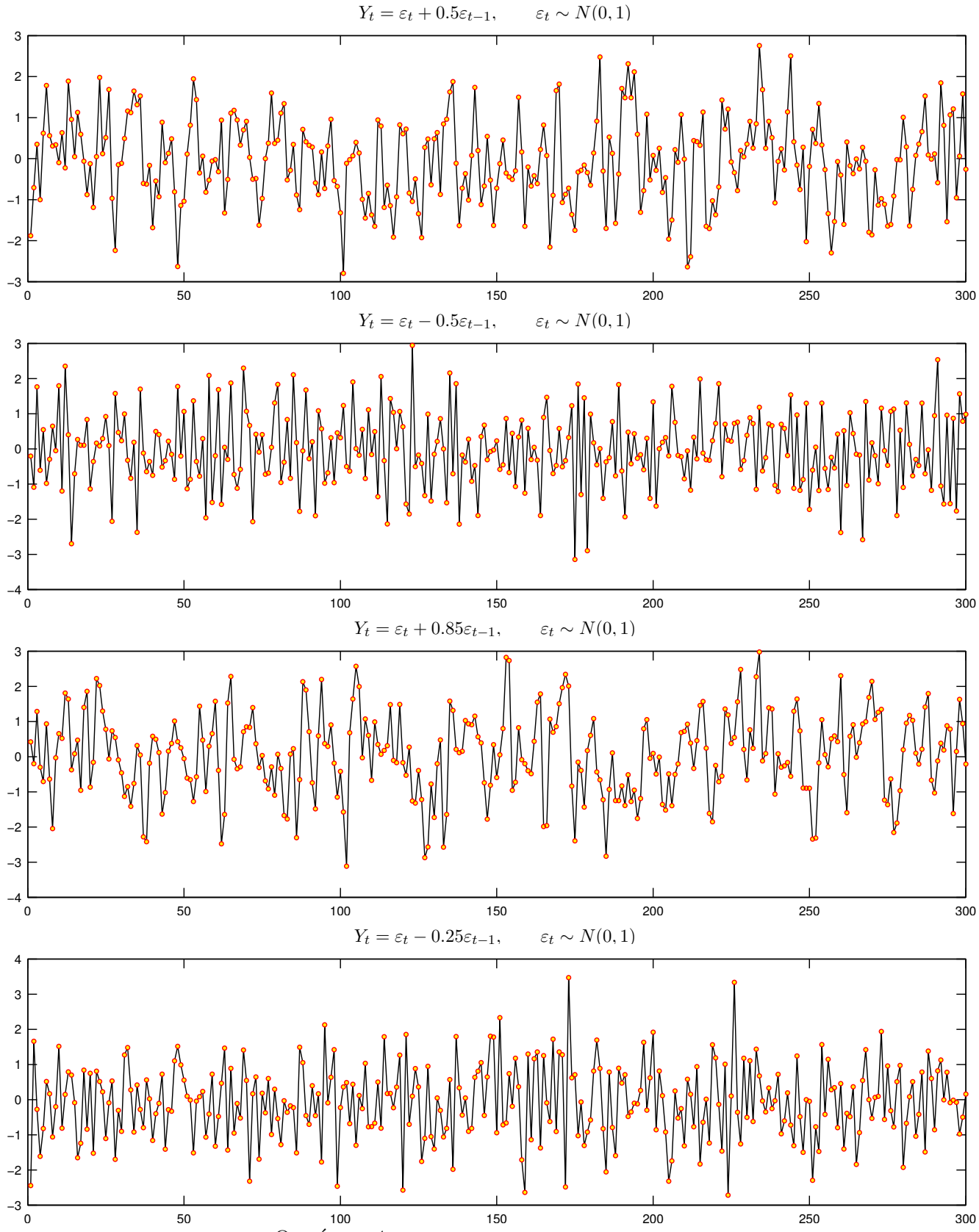
$$|\lambda_j| = r_j < 1,$$

dostáváme odtud, že $\rho(k)$ klesá pro $k \to \infty$ exponenciálně k nule, tj.

$$\rho(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

což je velmi důležitá identifikační vlastnost autoregresních $AR(p)$ procesů.

1.6. Invertibilita. Víme, že *kauzální* autoregresní proces konečného řádu p lze vyjádřit pomocí MA procesu nekonečného řádu, tj. $AR(p) \equiv MA(\infty)$. Zajímá nás, za jakých podmínek můžeme MA proces konečného řádu vyjádřit pomocí autoregresního procesu nekonečného řádu, tj. $MA(q) \equiv AR(\infty)$. Nejprve si všimneme jednoduchého případu, a to $MA(1)$ procesu.



Obrázek 4. **Ukázky MA procesů prvního řádu**

MA proces prvního řádu:

$$Y_t \sim MA(1):\ Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)\ .$$

(a) Nejprve předpokládejme, že

$$|\theta_1| \overset{\text{ozn.}}{=} |\theta| < 1\ .$$

Využijeme-li vztahu

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t = Y_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

můžeme postupně upravovat

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= Y_t + \theta \varepsilon_{t-1} = Y_t + \theta \left(Y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}\right) \\
&= Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-2} \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{j=0}^{k} \theta^j Y_{t-j} + \theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\left\| \varepsilon_t - \sum_{j=0}^{k} \theta^j Y_{t-j} \right\|^2 &= E \left| \varepsilon_t - \sum_{j=0}^{k} \theta^j Y_{t-j} \right|^2 \\
&= E \left| \theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} \right|^2 \\
&= \theta^{2(k+1)} \sigma_\varepsilon^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,
\end{aligned}$$

tedy

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} \qquad \text{pro} \qquad |\theta| < 1.$$

(b) Za předpokladu, že platí

$$|\theta_1| \overset{\text{ozn.}}{=} |\theta| > 1$$

a s využitím vztahu

$$\varepsilon_{t-1} = \tfrac{1}{\theta} Y_t - \tfrac{1}{\theta} \varepsilon_t$$

můžeme opět postupně upravovat

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \tfrac{1}{\theta} Y_{t+1} + \tfrac{1}{\theta} \varepsilon_{t+1} \\
&= \tfrac{1}{\theta} Y_{t+1} + \tfrac{1}{\theta} \left(\tfrac{1}{\theta} Y_{t+2} + \tfrac{1}{\theta} \varepsilon_{t+2} \right) \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \tfrac{1}{\theta^j} Y_{t+j} + \tfrac{1}{\theta^{k+1}} \varepsilon_{t+k+1}.
\end{aligned}$$

I když posloupnost

$$\sum_{j=1}^{N} \tfrac{1}{\theta^j} Y_{t+j}$$

konverguje pro $N \to \infty$ také k ε_t, tento rozvoj nemá praktický smysl, neboť ε_t je vyjadřena pomocí budoucích hodnot $\{Y_s, s > t\}$.

(c) Nakonec si všimněme dalšího důležitého faktu, a to že pokud platí

$$|\theta| > 1\ ,$$

a uvažujeme-li dva procesy

$$\begin{aligned} (1)\quad Y_t &= \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2),\\ (2)\quad X_t &= \eta_t + \tfrac{1}{\theta}\eta_{t-1} \quad \eta_t \sim WN(0,\theta^2\sigma^2), \end{aligned}$$

pak oba dva procesy mají stejné první a druhé momenty, neboť

$$EY_t = E\left(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right) = E\varepsilon_t + \theta E\varepsilon_{t-1} = 0,$$

$$EX_t = E\left(\eta_t + \tfrac{1}{\theta}\eta_{t-1}\right) = E\eta_t + \tfrac{1}{\theta}E\eta_{t-1} = 0,$$

a také autokovarianční funkce obou procesů se rovnají

$$\begin{aligned} \gamma_Y(k) &= EY_tY_{t+k} = E\left(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right)\left(\varepsilon_{t+k} + \theta\varepsilon_{t+k-1}\right)\\ &= E\varepsilon_t\varepsilon_{t+k} + \theta E\varepsilon_t\varepsilon_{t+k-1} + \theta E\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+k} + \theta^2 E\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+k-1}\\ &= \left|\begin{array}{llllll} \text{pokud:} & t = t+k & t = t+k-1 & t-1 = t+k & t-1 = t+k-1\\ \text{pak:} & k = 0 & k = 1 & k = -1 & k = 0 \end{array}\right|\\ &= \begin{cases} \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 = \sigma^2(1+\theta^2) & k = 0\\ \theta\sigma^2 & k = \pm 1\\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_X(k) &= EX_tX_{t+k} = E\left(\eta_t + \tfrac{1}{\theta}\eta_{t-1}\right)\left(\eta_{t+k} + \tfrac{1}{\theta}\eta_{t+k-1}\right)\\ &= E\eta_t\eta_{t+k} + \tfrac{1}{\theta}E\eta_t\eta_{t+k-1} + \tfrac{1}{\theta}E\eta_{t-1}\eta_{t+k} + \tfrac{1}{\theta^2}E\eta_{t-1}\eta_{t+k-1}\\ &= \begin{cases} \theta^2\sigma^2 + \frac{1}{\theta^2}\theta^2\sigma^2 = \sigma^2(1+\theta^2) & k = 0\\ \frac{1}{\theta}\theta^2\sigma^2 = \theta\sigma^2 & k = \pm 1\\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

I když obě invertibilní i neinvertibilní MA reprezentace generují procesy se stejnými momenty prvního a druhého řádu, z praktických důvodů dáváme přednost procesu **invertibilnímu**, neboť nepozorovatelné veličiny ε_t můžeme odhadnout pomocí přítomných a minulých hodnot pozorovatelných veličin

$$\{X_s, s < t\},$$

kdežto u neinvertibilních MA reprezentací nepozorovatelné veličiny ε_t neodhadneme, neboť nemáme ještě k dispozici budoucí hodnoty

$$\{Y_s, s > t\}.$$

Nyní již můžeme podat definici invertibility.

Definice 1.11. ARMA proces $Y_t \sim ARMA(p,q)$ se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$ (tj. $\sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j| < \infty$,) tak, že

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j Y_{t-j}, \qquad \text{tj. zkráceně} \qquad Y_t \sim AR(\infty):\ \varepsilon_t = \pi(B)Y_t.$$

Dále vyšetřeme, za jakých podmínek je invertibilní MA proces řádu q.

MA proces řádu q:

$$Y_t \sim MA(q):\ Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)\ .$$

Naprosto analogickým postupem jako v případě kauzálního $AR(p)$ procesu, lze ukázat, že všechny kořeny $\Theta(z)$ musí ležet vně jednotkového kruhu. Proveďme tedy nejprve rozklad polynomu $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ na součin kořenových činitelů

$$\Theta(z) = (1-\lambda_1 z)^{r_1} \dots (1-\lambda_k z)^{r_k},$$

kde $z_{01} = \frac{1}{\lambda_1}, \dots, z_{0k} = \frac{1}{\lambda_k}$ jsou rozdílné (reálné či komplexní) kořeny polynomu $\Theta(z)$, $r_1, \dots, r_k$ je jejich násobnost (přičemž platí $r_1 + \cdots + r_k = q$). Nyní budeme hledat taková absolutně konvergentní $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$(tj. $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$), aby

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}$$

byl **invertibilní proces**. Pokud použijeme operátor zpětného chodu, můžeme psát:

$$\Theta(B) Y_t = \varepsilon_t,$$

přitom hledáme $\pi(B)$ takové, aby platilo

$$\pi(B)\Theta(B) = 1 \qquad \text{nebo} \qquad \pi(z)\Theta(z) = 1 \qquad \text{čili} \qquad \pi(z) = \frac{1}{\Theta(z)}.$$

Z věty o rozkladu na částečné zlomky dostáváme (pokud pro názornost předpokládáme, že všechny kořeny jsou jednoduché)

$$\frac{1}{\Theta(z)} = \frac{1}{(1-\lambda_1 z)\dots(1-\lambda_p z)} = \frac{c_1}{1-\lambda_1 z} + \cdots + \frac{c_p}{1-\lambda_p z}$$

pro vhodná $c_1, \dots, c_p$. Pokud pro $k = 1, \dots, p$ platí $|\lambda_k z| < 1$, můžeme psát

$$\frac{c_k}{1-\lambda_k z} = c_k \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_k z)^j$$

a dokázali jsme najít konvergentní řadu

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_k^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(c_1\lambda_1^j + \cdots + c_p\lambda_p^j \right) z^j,$$

přičemž

$$\pi_j = c_1\lambda_1^j + \cdots + c_p\lambda_p^j,$$

neboť $\pi(z) = \frac{1}{\Theta(z)}$ je holomorfní pro $|z| \le 1$ právě když

$$|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_p| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\left|\tfrac{1}{\lambda_1}\right| > 1}_{|z_{01}|>1}, \dots, \underbrace{\left|\tfrac{1}{\lambda_p}\right| > 1}_{|z_{0p}|>1},$$

tedy **všechny kořeny polynomu $\Theta(z)$ musí ležet vně jednotkového kruhu**.

Na závěr tohoto odstavce ještě spočítejme střední hodnotu, rozptyl, autokovarianční funkci a také spektrální hustotu $MA(q)$ procesu. Protože $MA(q)$ proces je lineárním procesem, je vždy slabě stacionární, proto můžeme počítat

$$\begin{aligned}
EY_t &= E(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}) = 0 \\
DY_t &= D(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \\
\gamma(t) = C(Y_s, Y_{s+t}) &= EY_sY_{s+t} = \sum_{j=0}^{q}\sum_{h=0}^{q} \theta_j\theta_s E\varepsilon_{s-j}\varepsilon_{s+t-h} = \left| \begin{array}{ccc} s-j & = & s+t-h \\ h & = & j+t \end{array} \right| = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j\theta_{j+t}
\end{aligned}$$

Protože $\theta_0 = 1$ a $\theta_j = 0$ pro $j > q$, dostáváme

$$\gamma(t) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_{q-2}^2 + \theta_{q-1}^2 + \theta_q^2) & \text{pro } t=0 \\ \sigma_\varepsilon^2(\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_{q-1} + \theta_{q-1}\theta_q) & t=1 \\ \sigma_\varepsilon^2(\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_q) & t=2 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_\varepsilon^2(\theta_{q-1} + \theta_1\theta_q) & t=q-1 \\ \sigma_\varepsilon^2\theta_q & t=q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

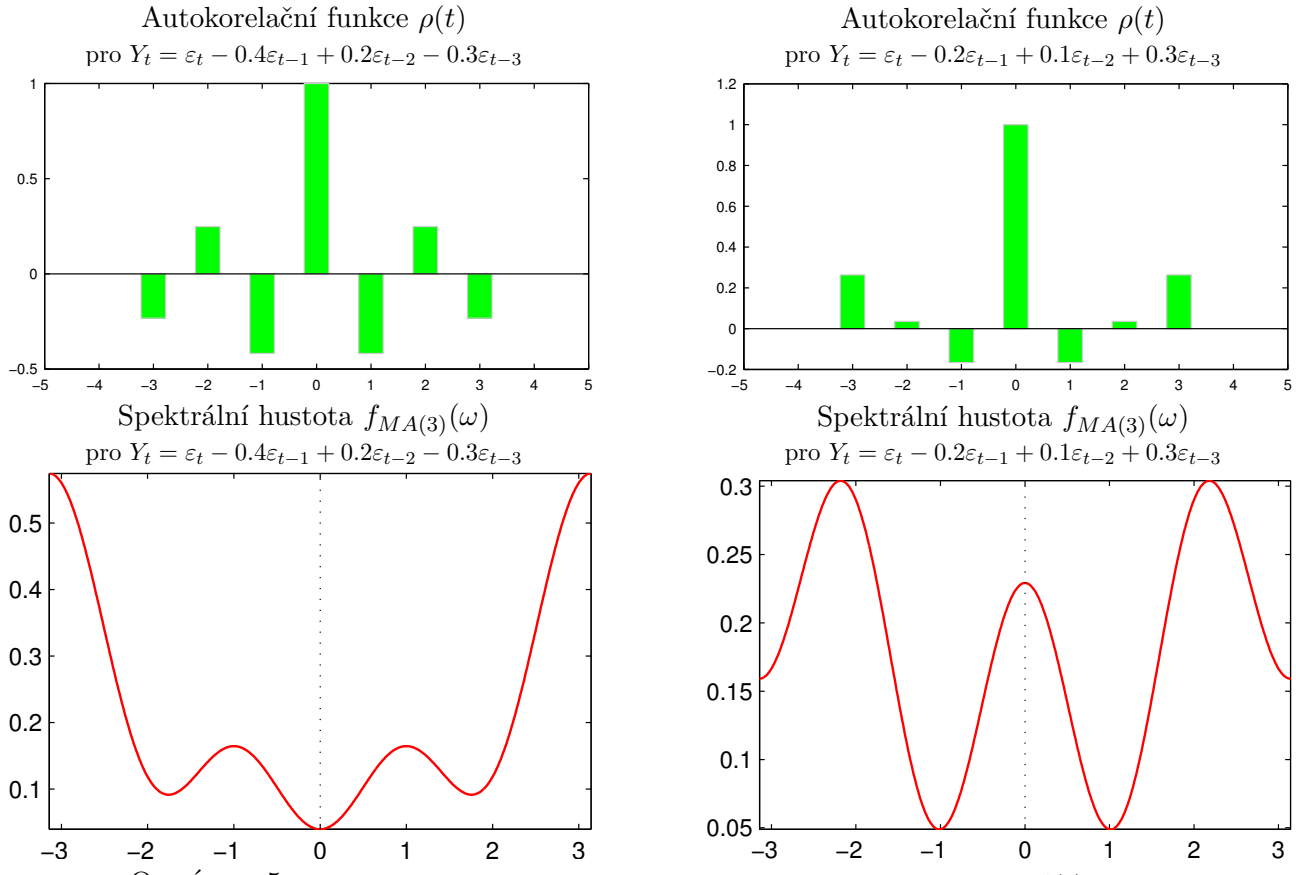
Autokorelační funkce je pak rovna

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{1}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} \sum_{j=0}^{q-t} \theta_j\theta_{j+t} & 1 \le t \le q,\ \theta_0 \equiv 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

tedy, pro $t > q$ je autokorelační funkce nulová, což je velmi důležitá identifikační vlastnost $MA(q)$ procesů.

Díky tomu, že $MA(q)$ proces je lineárním procesem, spektrální hustota je rovna

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left|\Theta\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2.$$



OBRÁZEK 5. **Ukázky autokorelačních funkcí a spektrálních hustot** pro $MA(3)$ procesy.

1.7. Vícenásobná reprezentace $MA(q)$ procesů. Mějme MA proces řádu q:

$$Y_t \sim MA(q):\ Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Proveďme tedy rozklad polynomu $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ na součin kořenových činitelů

$$\Phi(z) = \prod_j (1 - \lambda_j z),$$

Pak (protože $MA(q)$ proces je lineárním procesem) **autokovarianční generující funkce** je rovna

$$G_Y(z) = \Theta(z)\Theta\left(z^{-1}\right)\sigma_\varepsilon^2.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}(1-\lambda_j z)(1-\lambda_j z^{-1}) &= 1-\lambda_j z-\lambda_j z^{-1}+\lambda_j^2 = \lambda_j^2(\lambda_j^{-2}-\lambda_j^{-1}z-\lambda_j^{-1}z^{-1}+1)\\ &= \lambda_j^2\left(1-\frac{1}{\lambda_j}z\right)\left(1-\frac{1}{\lambda_j}z^{-1}\right)\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}G_Y(z) &= \sigma_\varepsilon^2\Theta(z)\Theta\left(z^{-1}\right) = \sigma_\varepsilon^2\prod_j(1-\lambda_j z)\prod_j(1-\lambda_j z^{-1})\\ &= \underbrace{\sigma_\varepsilon^2\prod_j\lambda_j^2}_{\sigma_*^2}\underbrace{\prod_j\left(1-\frac{1}{\lambda_j}z\right)}_{\Theta_*(z)}\underbrace{\prod_j\left(1-\frac{1}{\lambda_j}z^{-1}\right)}_{\Theta_*(z^{-1})} = \sigma_*^2\Theta_*(z)\Theta_*(z^{-1})\end{aligned}$$

Takže proces

$$Y_t^* \sim MA(q):\ Y_t = \varepsilon_t^* + \theta_1^*\varepsilon_{t-1}^* + \cdots + \theta_q^*\varepsilon_{t-q}^* \qquad \varepsilon_t^* \sim WN(0,\sigma_*^2)$$

má stejnou autokovarianční generující funkcí

$$G_Y(z) = \sigma_*^2\Theta_*(z)\Theta_*(z^{-1})$$

a jsou proto z hlediska prvních dvou momentů nerozlišitelné.

Obecně můžeme dostat 2^q různých procesů s funkcí

$$\Phi_{*s}(z) = \prod_{j=1}^{q}(1-\lambda_j^{\pm 1}z) \qquad s = 1,\ldots,2^q$$

Mezi všemi těmito procesy **pouze jediný je invertibilní**, a to ten, pro kterého platí

$$\lambda_j^{invert} = \begin{cases}\lambda_j & |\lambda_j|<1,\\ \lambda_j^{-1} & |\lambda_j|\geq 1.\end{cases}$$

Takže podmínka invertibility zajišťuje identifikovatelnost $MA(q)$ procesu z hlediska prvních dvou momentů. Dříve než uvedeme nutnou a postačující podmínku pro kauzalitu a invertibilitu $ARMA(p,q)$ procesů, vyšetřeme problematiku společných kořenů $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$.

1.8. Společné kořeny polynomů $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$. Mějme

$$Y_t \sim ARMA(p,q):\ Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \cdots\theta_q\varepsilon_{t-q},$$

kde $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$ a předpokládejme že $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ **mají společný kořen** $\frac{1}{\lambda}$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= (1-\lambda z)(1-\varphi_1^* z - \cdots - \varphi_{p-1}^* z^{p-1}) = (1-\lambda z)\Phi^*(z)\\ \Theta(z) &= (1-\lambda z)(1+\theta_1^* z + \cdots + \theta_{q-1}^* z^{q-1}) = (1-\lambda z)\Theta^*(z)\end{aligned}$$

tj.

$$(1-\lambda B)\Phi^*(B)Y_t = (1-\lambda B)\Theta^*(B)\varepsilon_t.$$

Pokud obě strany rovnice vydělíme výrazem $(1-\lambda B)$, dostaneme

$$Y_t \sim ARMA(p-1,q-1):\ \Phi^*(B)Y_t = \Theta^*(B)\varepsilon_t.$$

Takže podmínka, že

$$\Phi(z) \text{ a } \Theta(z) \text{ nemají společné kořeny}$$

zajišťuje, že řády $ARMA$ procesů nelze již snižovat.

1.9. Nutná a postačující podmínka kauzality a invertibility ARMA procesu. V předchozích odstavcích jsme ukázali, že platí

$$Y_t \sim AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t,\ \Phi(z) \neq 0 \text{ pro } \forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1 \Leftrightarrow AR(p) \text{ je } \textbf{kauzální}$$
$$Y_t \sim MA(q) : Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t,\ \Theta(z) \neq 0 \text{ pro } \forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1 \Leftrightarrow MA(q) \text{ je } \textbf{invertibilní}.$$

Naprosto analogickým způsobem lze dokázat obecnější tvrzení:

Věta 1.12. *Nechť $\Phi(B)$ a $\Theta(B)$ nemají společné kořeny. Pak*

(i) $Y_t \sim ARMA(p,q) :\ \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ *je* ***kauzální*** $\Leftrightarrow \Phi(z) \neq 0$ *pro* $\forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1$.

(ii) $Y_t \sim ARMA(p,q) :\ \Phi(z)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ *je* ***invertibilní*** $\Leftrightarrow \Theta(z) \neq 0$ *pro* $\forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1$.

Znamená to tedy, že $Y_t \sim ARMA(p,q)$ je kauzálním a invertibilním $ARMA$ procesem, jestliže všechny kořeny polynomů $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ leží vně jednotkového kruhu a koeficienty ψ_j a π_j jsou určeny ze vztahů

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)} \qquad \text{pro } |z| \leq 1$$

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \qquad \text{pro } |z| \leq 1.$$

V dalším budeme uvažovat pouze takové

$$Y_t \sim ARMA(p,q) :\ \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

procesy, které splňují následující podmínky

(P1) $\Phi(B)$ a $\Theta(B)$ nemají společné kořeny.
(P2) $Y_t \sim ARMA(p,q)$ je kauzální.
(P3) $Y_t \sim ARMA(p,q)$ je invertibilní.

1.10. Střední hodnota, rozptyl, autokovarianční a autokorelační funkce procesů $ARMA(p,q)$.

Střední hodnota

Vzhledem ke kauzalitě $ARMA(p,q)$ procesu můžeme počítat

$$EY_t = E\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-j} = 0$$

Rozptyl

Při odvození rozptylu nejprve rovnici

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

vynásobme výrazem Y_t a spočtěme střední hodnoty obou stran, tj.

$$EY_t^2 = \varphi_1 EY_{t-1}Y_t + \cdots + \varphi_p EY_{t-p}Y_t + E\varepsilon_t Y_t + \theta_1 E\varepsilon_{t-1}Y_t + \cdots + \theta_q E\varepsilon_{t-q}Y_t. \qquad (A_6)$$

Spočtěme pro $i = 0, 1, \ldots, q$

$$E\varepsilon_{t-i}Y_t = E\varepsilon_{t-i}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j} = \psi_i \sigma_\varepsilon^2 \qquad (\text{přičemž } \psi_0 = 1).$$

Po dosazení do rovnice (A_6) dostaneme

$$\gamma(0) - \varphi_1\gamma(1) - \cdots - \varphi_p\gamma(p) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1\psi_1 + \ldots + \theta_q\psi_q) \qquad (A_7).$$

Podělme obě strany rovnice (A_7) výrazem $\gamma(0)$. Vzhledem k tomu, že $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, dostaneme

$$1 - \varphi_1\rho(1) - \cdots - \varphi_p\rho(p) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1\psi_1 + \ldots + \theta_q\psi_q)}{\gamma(0)}$$

takže

$$DY_t = \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1\psi_1 + \ldots + \theta_q\psi_q)}{1 - \varphi_1\rho(1) - \cdots - \varphi_p\rho(p)}.$$

Autokovarianční a autokorelační funkce (ACF)

Při výpočtu autokovariance rovnici

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

vynásobíme výrazem Y_{t-k} a spočítáme střední hodnoty obou stran, takže dostaneme

$$\gamma(k) - \varphi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \varphi_p \gamma(k-p) = EY_{t-k}\varepsilon_t + \theta_1 EY_{t-k}\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q EY_{t-k}\varepsilon_{t-q} \qquad (A_8).$$

Nejprve je třeba si uvědomit, že pro $s \geq 0$ platí

$$E\varepsilon_t Y_{t-s} = E\left(\varepsilon_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-s-j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_t \varepsilon_{t-s-j} = 0.$$

Spočtěme pro $i = 0, 1, \ldots, q$

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{t-i}Y_{t-k} &= E\varepsilon_{t-i}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j-k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j-k} \\ &= \left| \begin{array}{rcl} t-i & = & t-j-k \\ j & = & i-k \end{array} \right| \\ &= \left\{ \begin{array}{llll} \sigma_\varepsilon^2 \psi_{i-k} & k \leq i & \text{přičemž} & \psi_0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k \leq q \\ 0 & k > i & \text{neboť} & \psi_j = 0 \text{ pro } j < 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že $\psi_j = 0$ pro $j < 0$, potom pro $0 \leq k \leq \max(p, q+1)$ platí

$$\gamma(k) - \varphi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \varphi_p \gamma(k-p) = \sigma_\varepsilon^2(\theta_k + \theta_{k+1}\psi_1 + \cdots + \theta_q \psi_{q-k}) \qquad (A_9)$$

a pro $k > \max(p, q+1)$ platí

$$\gamma(k) - \varphi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \varphi_p \gamma(k-p) = 0\ .$$

Podělme obě strany rovnice (A_9) výrazem $\gamma(0)$. Dostaneme

$$\rho(k) - \varphi_1 \rho(k-1) - \cdots - \varphi_p \rho(k-p) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(\theta_k + \theta_{k+1}\psi_1 + \cdots + \theta_q \psi_{q-k})}{\gamma(0)}$$

resp.

$$\rho(k) - \varphi_1 \rho(k-1) - \cdots - \varphi_p \rho(k-p) = 0.$$

Nechť např.

$$q + 1 > p.$$

Pak máme více rovnic pro určení počátečních p podmínek. V tomto případě prvních $q-p+1$ autokovariančních koeficientů jsou určeny z prvních $q - p + 1$ podmínek.

Obecné řešení homogenní diferenční rovnice

$$\rho(k) - \varphi_1 \rho(k-1) - \cdots - \varphi_p \rho(k-p) = 0 \qquad \text{tj.} \qquad \Phi(B)\rho(k) = 0$$

je tvaru

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{p_j - 1} c_{js} k^s\right) \lambda_j^k\ ,$$

kde

$$\tfrac{1}{\lambda_1}, \ldots, \tfrac{1}{\lambda_m}$$

jsou různé kořeny s násobnostmi

$$p_1, \ldots, p_m,$$

přičemž

$$p = p_1 + \cdots + p_m$$

a c_{js} je právě p konstant, které jsou určeny počátečními podmínkami.

1.11. Spektrální hustota $ARMA(p,q)$ procesů.

VĚTA 1.13 (Spektrální hustota $ARMA(p,q)$ procesů). *Nechť $\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ je kauzální a invertibilní $ARMA(p,q)$ proces, přičemž $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ nemají společné kořeny. Pak spektrální hustota $ARMA(p,q)$ procesu je rovna*

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{\left|\Theta\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2}{\left|\Phi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2} \qquad pro \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

DŮKAZ. Kauzalita značí, že existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ (tj. $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$) taková, že platí

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \qquad \text{kde} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Víme, že spektrální hustota bílého šumu je rovna

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \qquad \text{kde} \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Protože Y_t je lineárním procesem, víme, že má spektrální hustotu

$$f_Y(\omega) = \left|\Psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_\varepsilon(\omega) = \left|\Psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \qquad \text{kde} \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Také

$$\Theta(B)\varepsilon_t$$

jakožto lineární proces má spektrální hustotu tvaru

$$\left|\Theta\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \qquad \text{pro} \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Rovněž

$$\Phi(B)Y_t$$

jakožto lineární filtr má také spektrální hustotu, a ta je rovna

$$\left|\Phi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_Y(\omega) \qquad \text{pro} \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Protože platí

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t,$$

musí také platit

$$\left|\Phi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_Y(\omega) = \left|\Theta\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \qquad \text{pro} \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

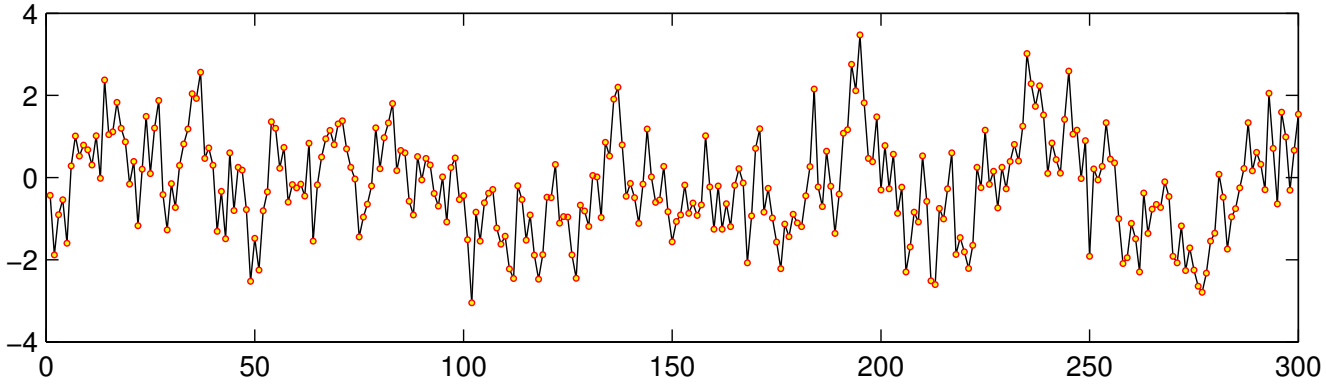
Odtud již dostáváme tvrzení věty

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{\left|\Theta\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2}{\left|\Phi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2} \qquad \text{pro} \qquad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

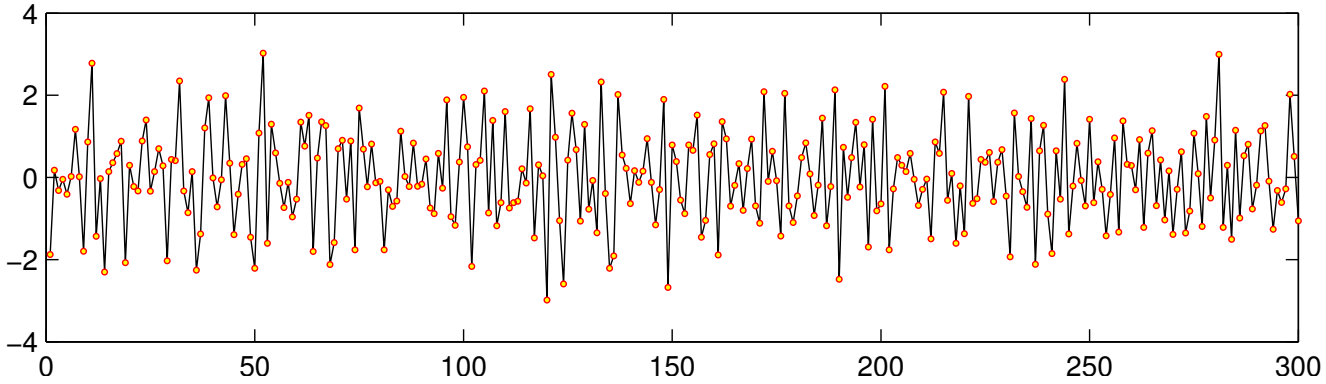
□

Na závěr tohoto odstavce jsou vykresleny příklady tří realizací AR, MA a ARMA procesů spolu s jejich teoretickými spektrálními hustotami.

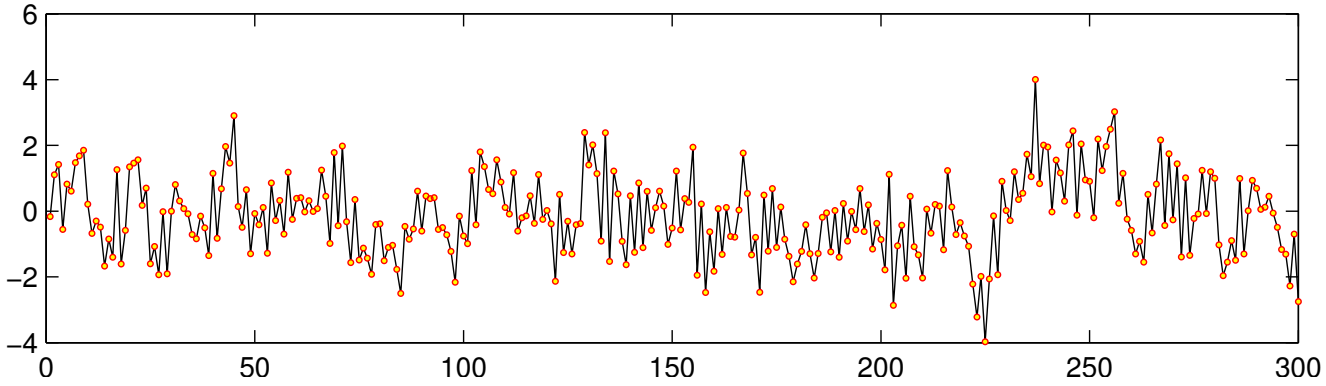
$$AR(2):\ Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



$$MA(2):\ Y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-1}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

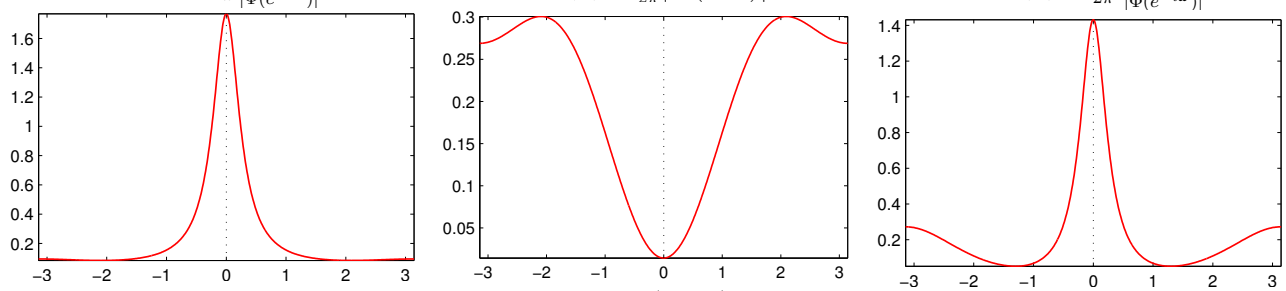


$$ARMA(2,2):\ Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 6. **Ukázky realizací AR, MA a ARMA procesů**

$f_{AR}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$ $\qquad f_{MA}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}|\Theta\left(e^{-i\omega}\right)|^2$ $\qquad f_{ARMA}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$



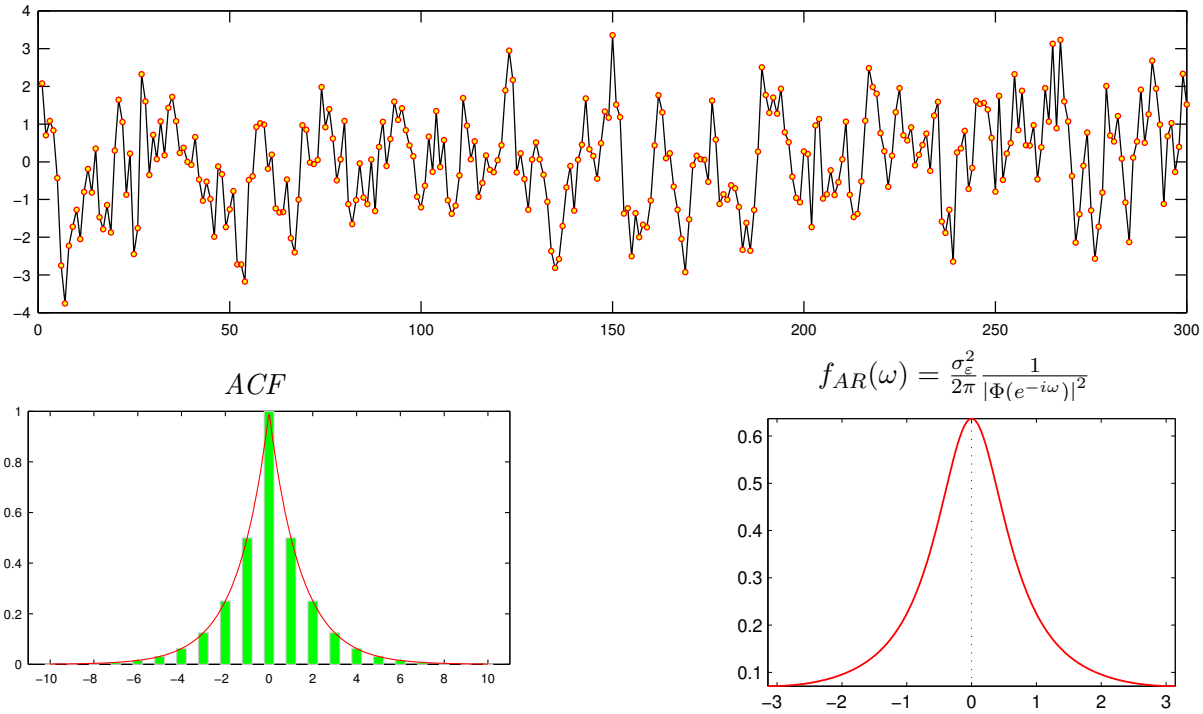
pro $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Obrázek 7. **Ukázky spektrálních hustot** AR, MA a ARMA procesů.

1.12. Grafické ukázky AR, MA, ARMA procesů spolu s ACF funkcí a spektrální hustotou. Pomocí následujících příkladů ukážeme na simulovaných datech typické vlastnosti ACF a spektrálních hustot vybraných ARMA procesů.

Příklad 1.1. ***ACF a spektrální hustota pro AR(1) proces s kladnou hodnotou*** $\varphi_1 = 0.5$. Všimněme si, že ACF hodnoty jsou všechny kladné a velmi rychle klesají k nule.

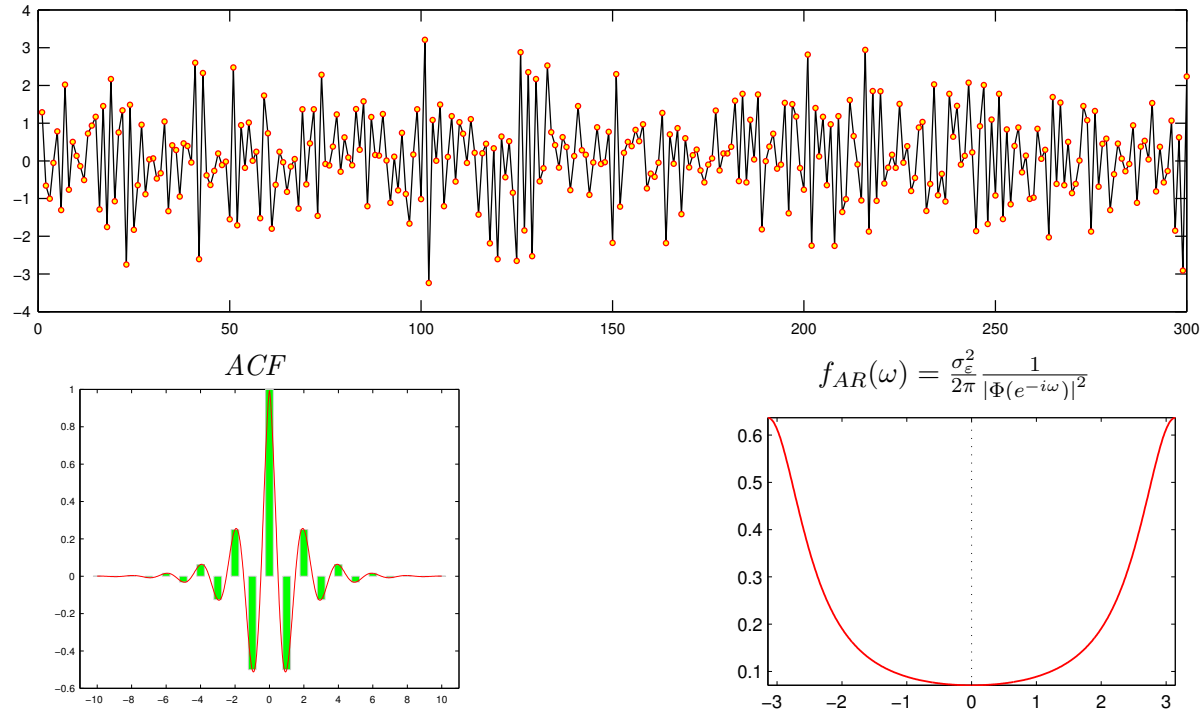
$$AR(1): \quad Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 8. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $AR(1): Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.2. ***ACF a spektrální hustota pro AR(1) proces se zápornounou hodnotou*** $\varphi_1 = -0.5$. V tomto případě ACF hodnoty střídají znaménka a velmi rychle klesají k nule.

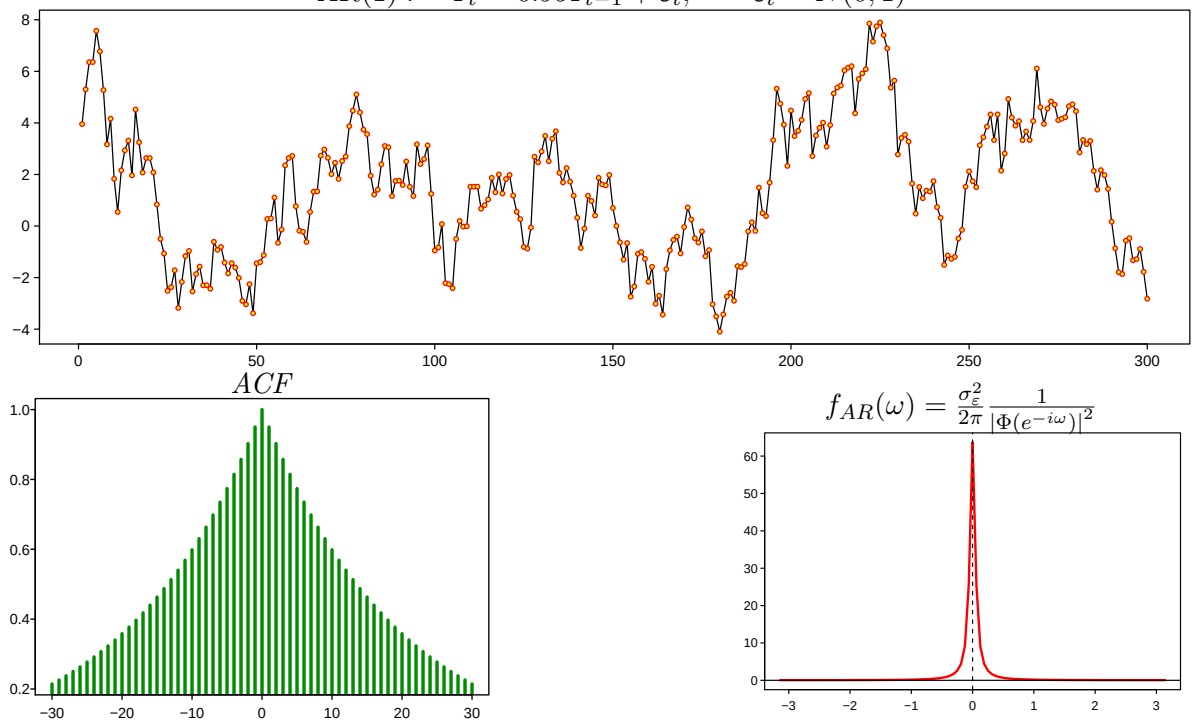
$$AR(1): \quad Y_t = -0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 9. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $AR(1): Y_t = -0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.3. ***ACF a spektrální hustota pro AR(1) proces s kladnou hodnotou*** $\varphi_1 = 0.95$ ***blízkou k 1***. Všimněme si, že ACF hodnoty jsou opět všechny kladné, ale mnohem pomaleji klesají k nule.

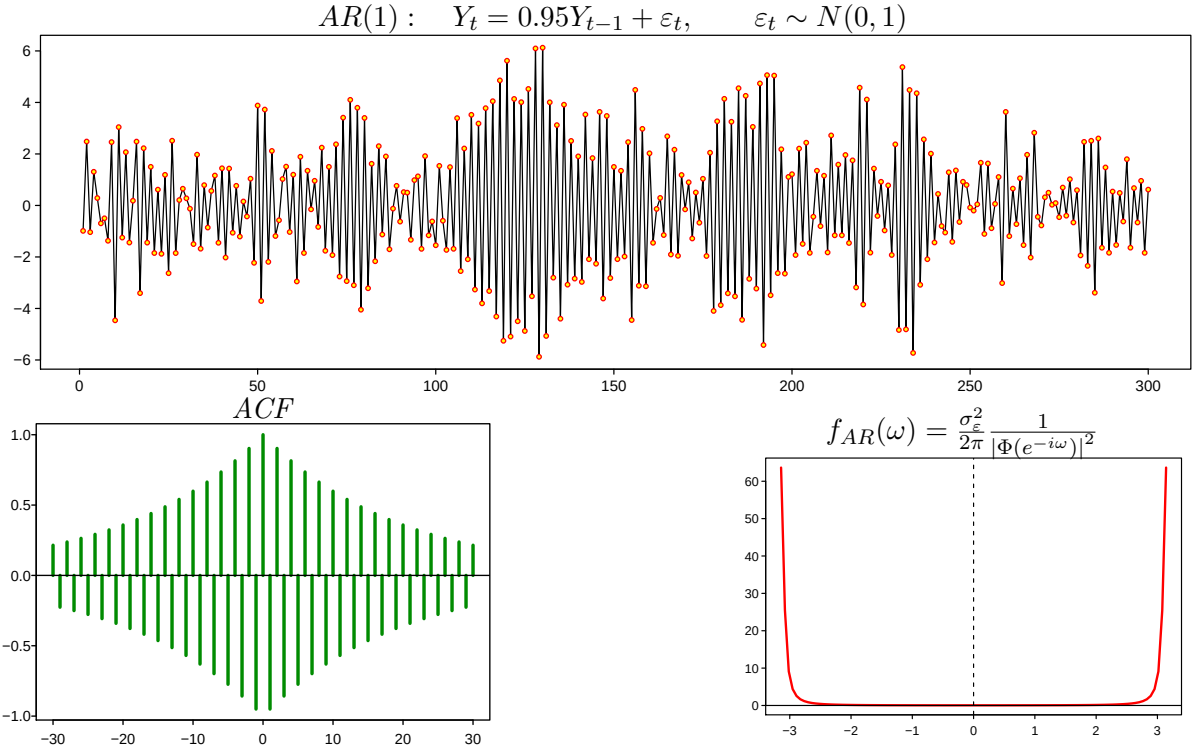
$$AR(1): \quad Y_t = 0.95 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 10. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $AR(1): Y_t = 0.95 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.4. ***ACF a spektrální hustota pro AR(1) proces se zápornou hodnotou*** $\varphi_1 = -0.95$ ***blízkou k*** -1. ACF hodnoty střídají znaménka a mnohem pomaleji klesají k nule.

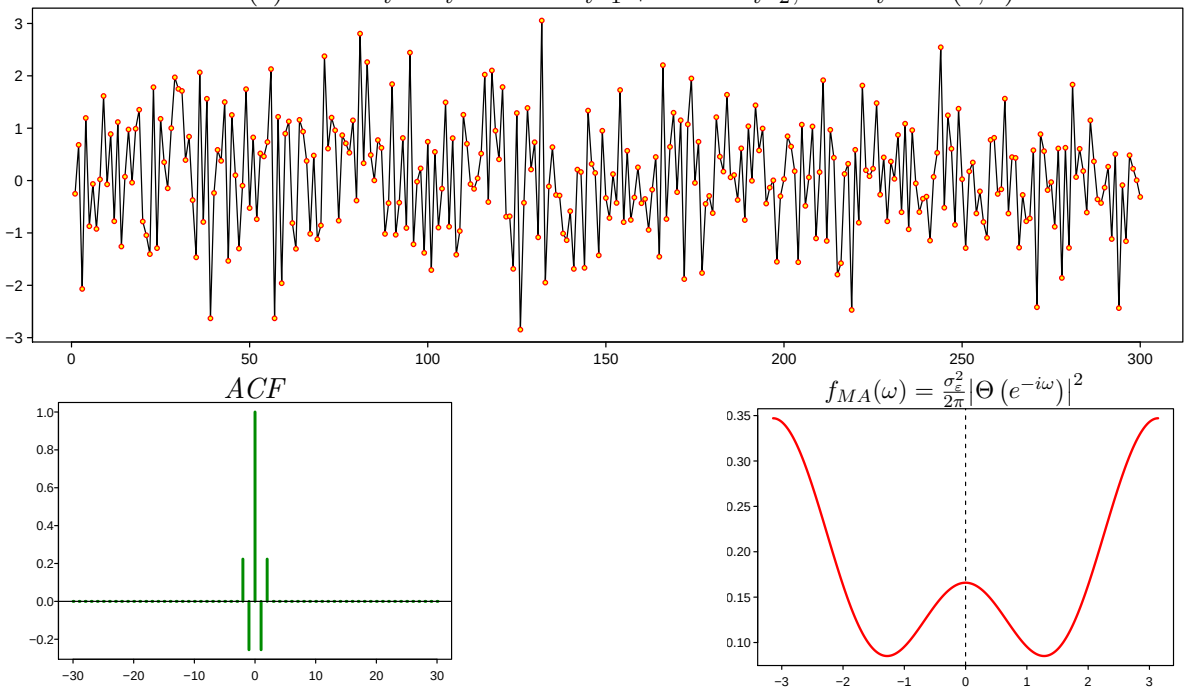
$$AR(1): \quad Y_t = 0.95 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 11. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $AR(1): Y_t = 0.95 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.5. ***ACF a spektrální hustota pro MA(2) proces se záporným a kladným koeficientem.*** Počet nenulových ACF hodnot souvisí s řádem modelu.

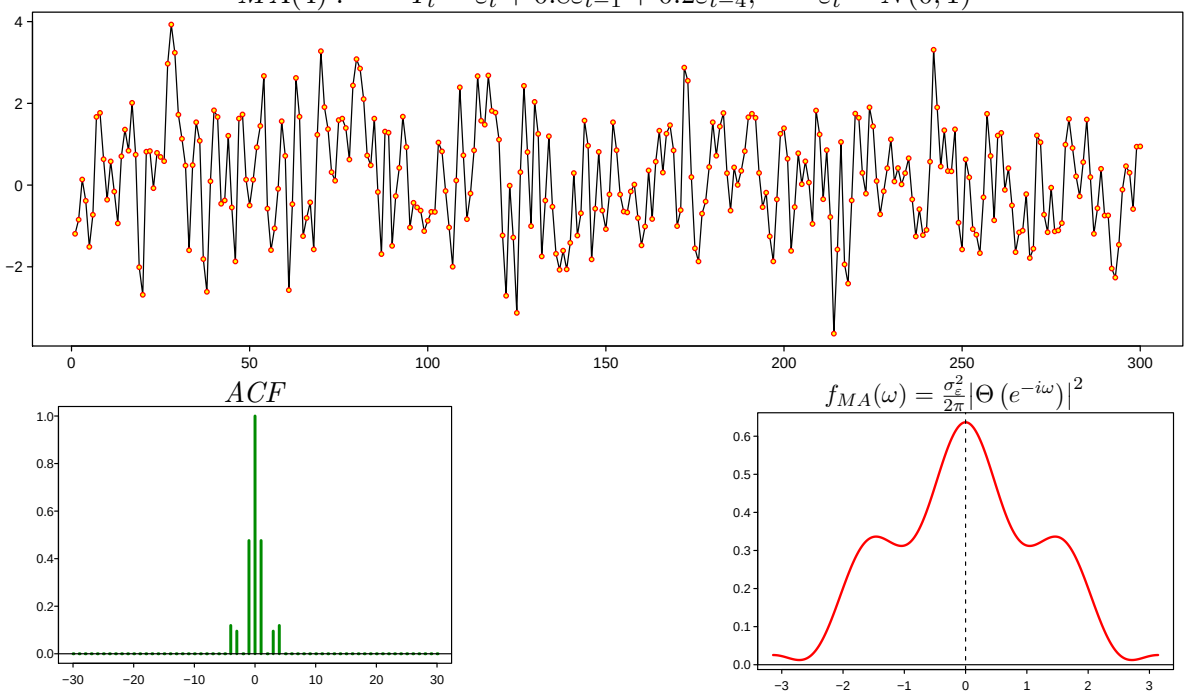
$$MA(2): \qquad Y_t = \varepsilon_t - 0.2279\varepsilon_{t-1} + 0.2488\varepsilon_{t-2}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 12. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $MA(2): Y_t = \varepsilon_t - 0.2279\varepsilon_{t-1} + 0.2488\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.6. ***ACF a spektrální hustota pro MA(4) proces s kladnými koeficienty.*** Počet nenulových ACF hodnot souvisí pro MA proces s řádem modelu.

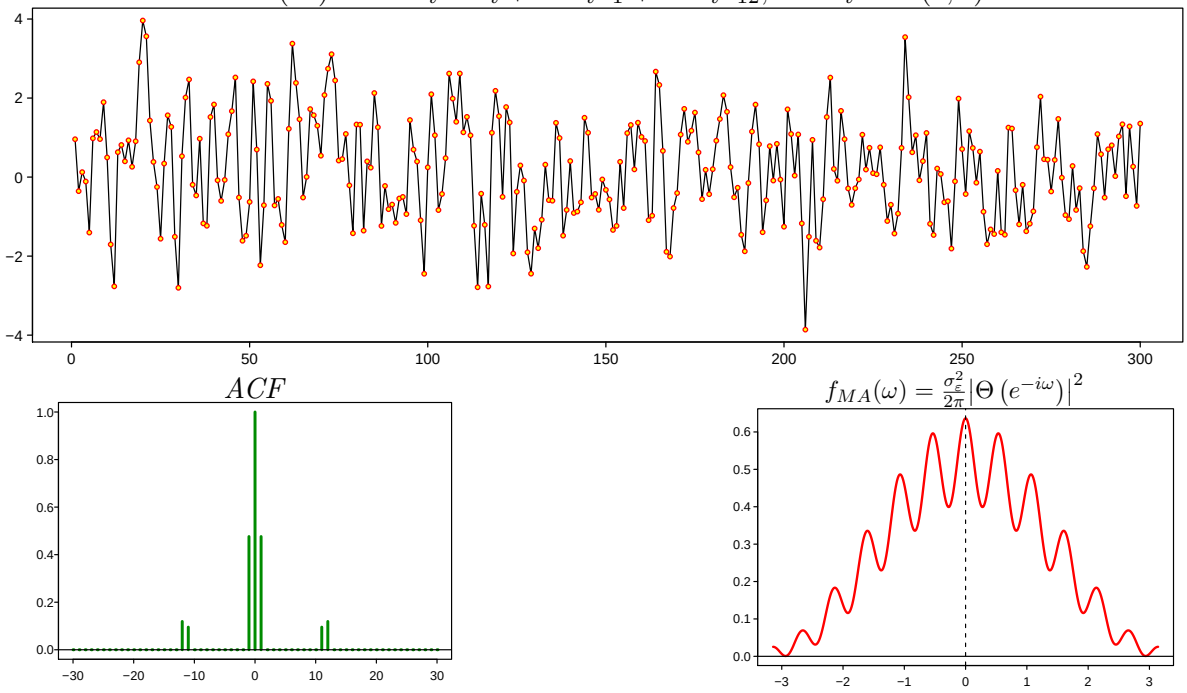
$$MA(4): \qquad Y_t = \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-4}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 13. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $MA(4): Y_t = \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-4}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.7. ***ACF a spektrální hustota pro MA(12) proces s kladnými koeficienty***. Počet nenulových ACF hodnot souvisí pro MA proces s řádem modelu.

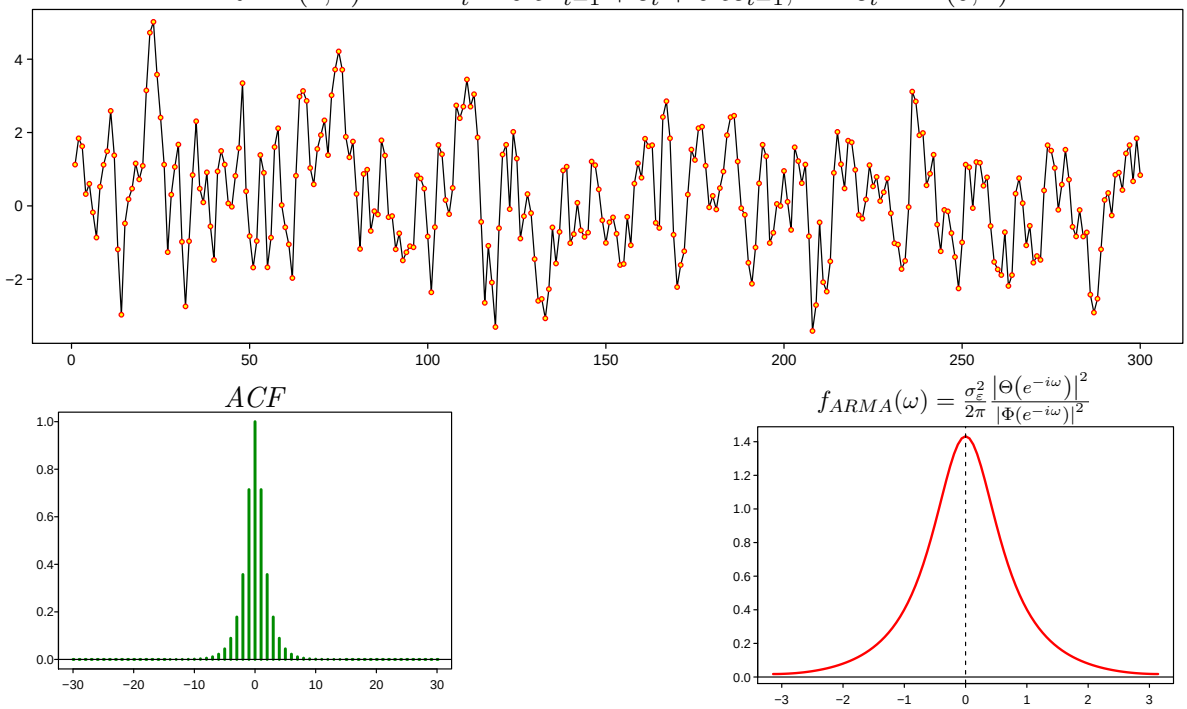
$$MA(12): \qquad Y_t = \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-12}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 14. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $MA(12): Y_t = \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-12}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.8. ***ACF a spektrální hustota pro ARMA(1,1) proces s kladnými koeficienty, kde*** $\varphi_1 = 0.5$. Průběh ACF je charakterizován především AR částí procesu, proto hodnoty ACF rychle klesají k nule.

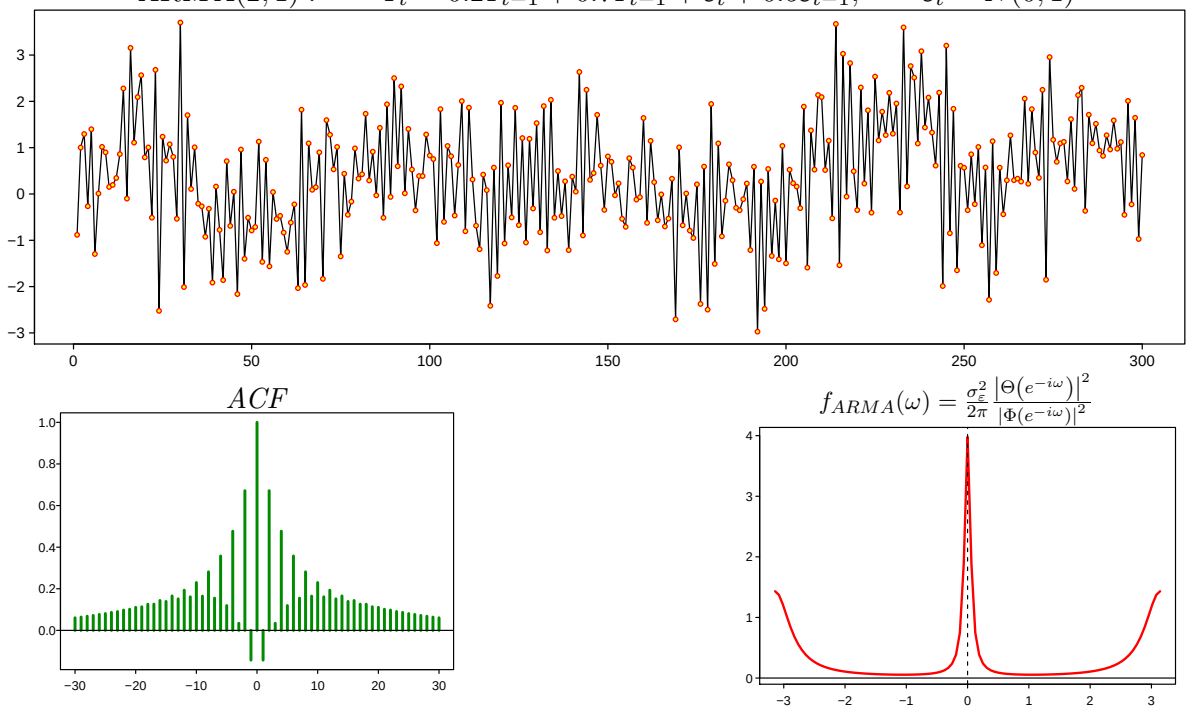
$$ARMA(1,1): \qquad Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 15. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $ARMA(1,1): Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.9. ***ACF a spektrální hustota pro ARMA(2,1) proces s kladnými koeficienty***. Průběh ACF je charakterizován především AR částí procesu, proto hodnoty ACF rychle klesají k nule.

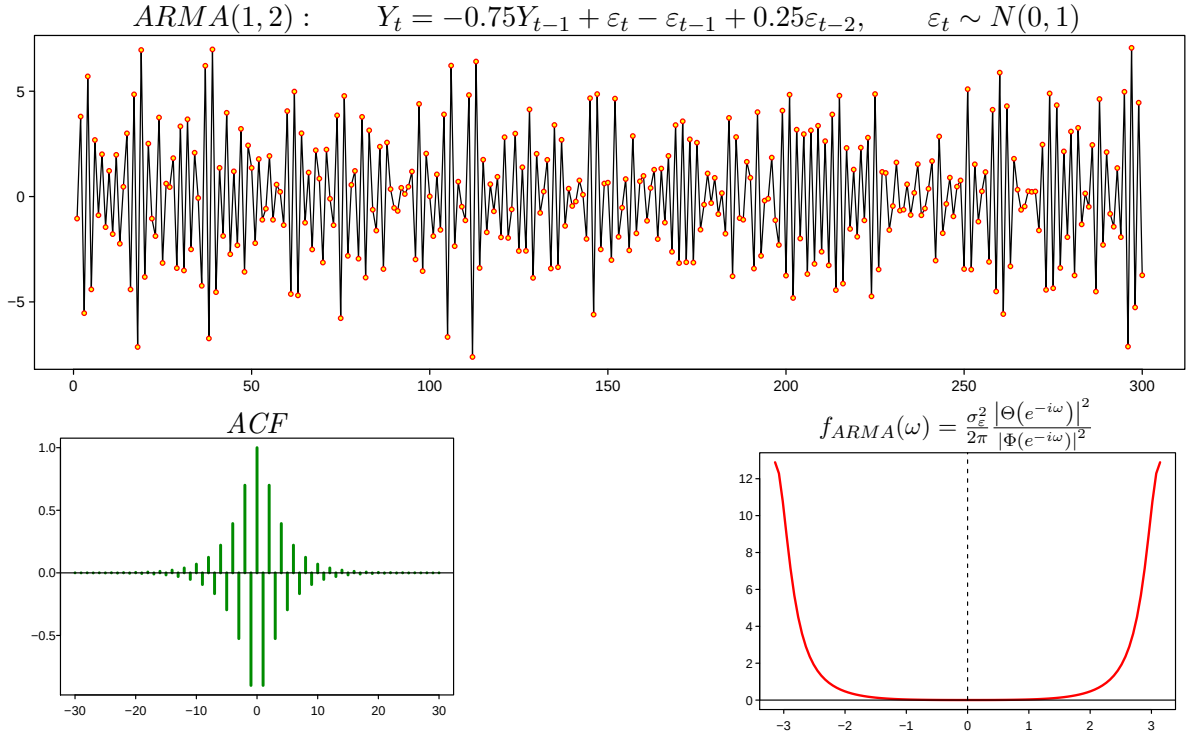
$$ARMA(2,1): \qquad Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.7Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 16. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $ARMA(2,1): Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.7Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.10. ***ACF a spektrální hustota pro ARMA(1,2) proces se zápornou hodnotou*** $\varphi_1 = -0.75$ ***a dalšími kladnými i zápornými koeficienty***. Průběh ACF je charakterizován především AR částí procesu, proto hodnoty ACF mění znaménko a rychle klesají k nule.

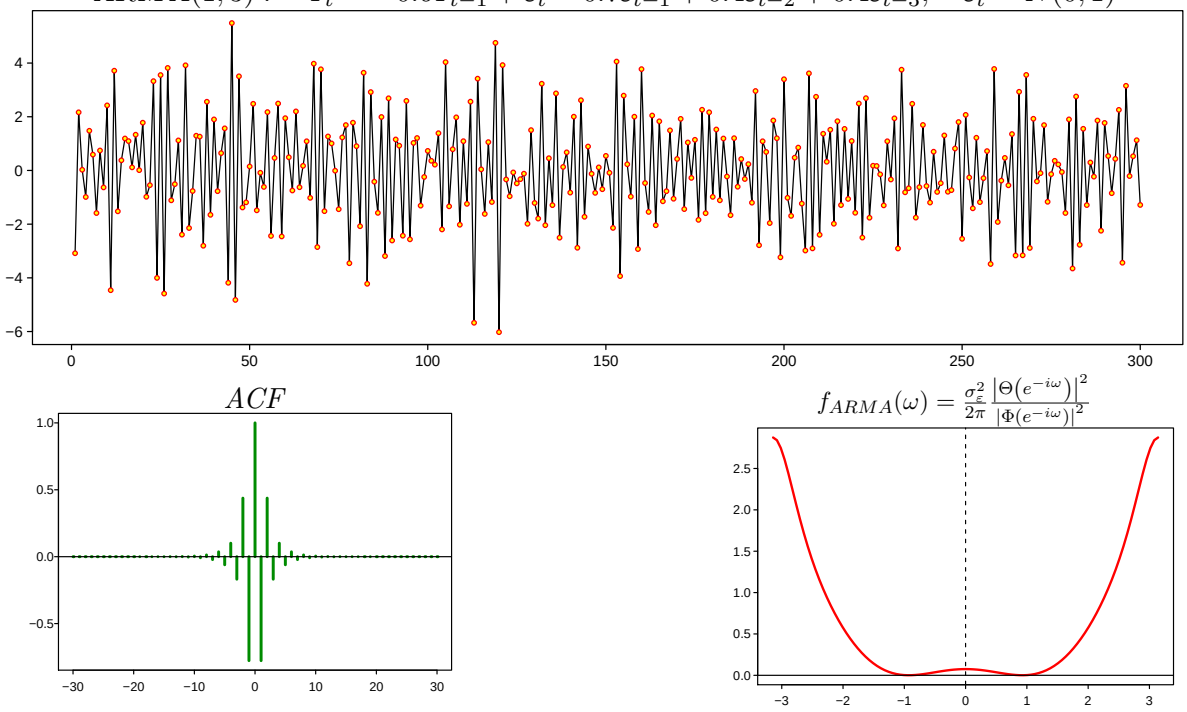
$$ARMA(1,2): \qquad Y_t = -0.75Y_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 17. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $ARMA(1,2): Y_t = -0.75Y_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.11. ***ACF a spektrální hustota pro ARMA(1,3) se zápornou hodnotou*** $\varphi_1 = -0.6$ ***a dalšími kladnými i zápornými koeficienty***. Průběh ACF je charakterizován především AR částí procesu, proto hodnoty ACF mění znaménko a rychle klesají k nule.

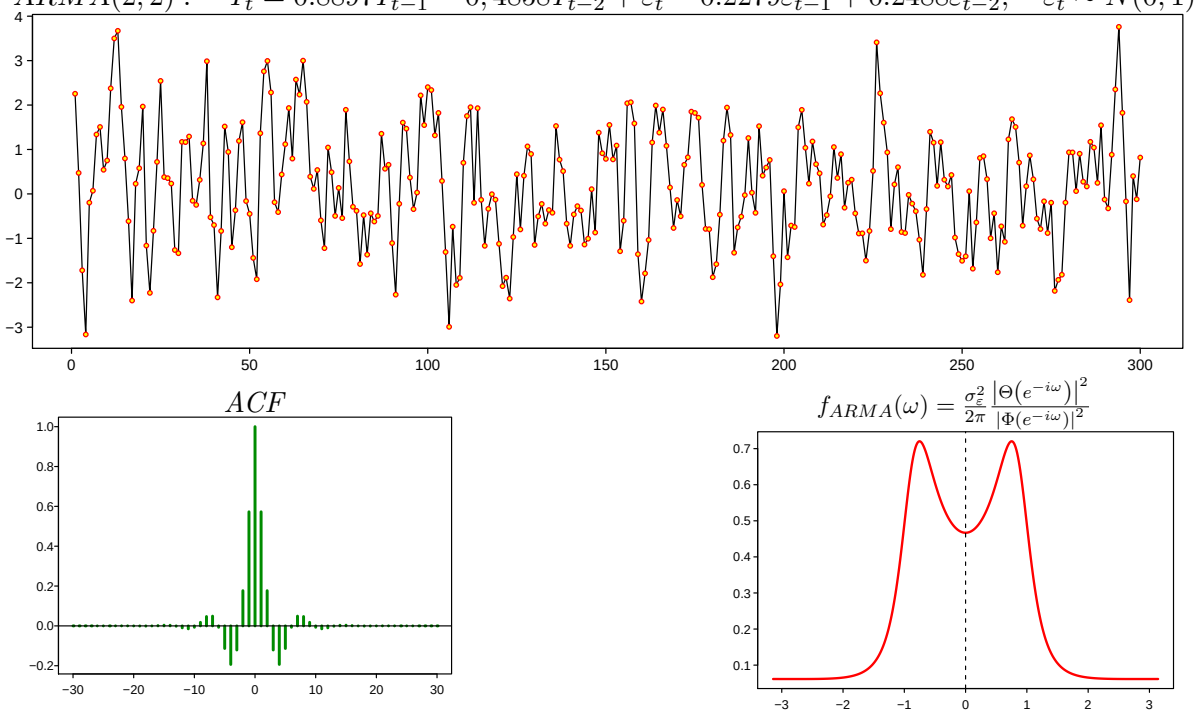
$$ARMA(1,3): \quad Y_t = -0.6Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.4\varepsilon_{t-3}, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 18. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $ARMA(1,3): \quad Y_t = -0.6Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.4\varepsilon_{t-3}, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.12. ***ACF a spektrální hustota pro ARMA(2,2) proces s kladnými i zápornými koeficienty***. Průběh ACF je charakterizován především AR částí procesu, hodnoty ACF mění znaménko a rychle klesají k nule.

$$ARMA(2,2): \quad Y_t = 0.8897Y_{t-1} - 0,4858Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.2279\varepsilon_{t-1} + 0.2488\varepsilon_{t-2}, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 19. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $ARMA(2,2): Y_t = 0.8897Y_{t-1} - 0,4858Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.2279\varepsilon_{t-1} + 0.2488\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

1.13. Stacionární sezónní modely. Dosud jsme se zabývaly vztahy mezi náhodnými veličinami náhodného procesu, které se v čase vyskytovaly v nejbližším okolí.

$$\ldots, Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots.$$

Pokud náhodný proces je charakterizován sezónními fluktuacemi, je třeba věnovat pozornost závislostem mezi časovými veličinami, které jsou od sebe vzáleny v krocích, které souvisejí s délkou sezónny L.

$$\ldots, Y_t, Y_{t+L}, Y_{t+2L}, \ldots.$$

Nejprve zavedeme ***sezónní diferenční operátor*** délky $L > 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta_L Y_t &= Y_t - Y_{t-L} = (1 - B^L)Y_t \\
\Delta_L^2 Y_t &= \Delta_L(\Delta_L Y_t) = \Delta_L(Y_t - Y_{t-L}) \\
&= (Y_t - Y_{t-L}) - (Y_{t-L} - Y_{t-2L}) \\
&= Y_t - 2Y_{t-L} + Y_{t-2L} = (1 - B^L)^2 Y_t \\
&\vdots \\
\Delta_L^D Y_t &= (1 - B^L)^D Y_t
\end{aligned}$$

Abychom co nejlépe porozumněli konstrukci sezónních modelů v Boxově Coxově metodologii, tak například uspořádejme měsíční data ($L = 12$) pro $\boxed{r}$ roků náhodné veličiny náhodného procesu do následující tabulky.

Rok	Leden	Únor	$\cdots$	Prosinec
1	Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_{12}
2	Y_{13}	Y_{14}	$\cdots$	Y_{24}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$Y_{1+12(r-1)}$	$Y_{2+12(r-1)}$	$\cdots$	$Y_{12+12(r-1)}$

Pro každý sloupec samostatně uvažujme $ARMA(P, Q)$ model stejného typu:

$$\begin{aligned}
Y_{j+12t} \;=\; & \pi_1 Y_{j+12(t-1)} + \cdots + \pi_P Y_{j+12(t-1)} + \\
& \eta_{j+12t} + \psi_1 \eta_{j+12(t-1)} + \cdots + \psi_Q \eta_{j+12(t-1)}
\end{aligned}$$

Protože všech 12 náhodných procesů je stejného typu, můžeme psát

$$\pi(B^{12})Y_t = \Psi(B^{12})\eta_t.$$

Jestliže 12 bílých šumů stejného typu

$$\begin{aligned}
\{\eta_{1+12t}\} &\sim WN(0, \sigma_\eta^2) \\
\{\eta_{2+12t}\} &\sim WN(0, \sigma_\eta^2) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \quad \vdots \\
\{\eta_{12+12t}\} &\sim WN(0, \sigma_\eta^2)
\end{aligned}$$

sekvenčně zatřídíme podle času do sebe a vytvoříme tak jediný náhodný proces

$$\{\eta_t^*, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

nedostaneme většinou bílý šum, což je způsobeno tím, že

$$\begin{aligned}
E\eta_t^* \eta_{t+h}^* &= 0 \quad \text{pouze pokud } h \text{ jsou násobky } L = 12 \\
E\eta_t^* \eta_{t+h} &\neq 0 \quad \text{pro ostatní } h.
\end{aligned}$$

Proto proces $\boxed{\eta_t}$ uvažujme obecně jako $ARMA(p, q)$ proces

$$\Phi(B)\eta_t^* = \Theta(B)\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Celkově dostaneme tzv. stacionární sezónní smíšený ***SARMA*** model:

$$\Phi(B)\pi(B^L)Y_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \;\sim\; SARMA(p, q) \times (P, Q)_L$$

kde

- $\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B \; - \cdots - \varphi_p B^p$
- $\pi(B^L) = 1 - \pi_1 B^L - \cdots - \pi_P B^{PL}$
- $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B \; + \cdots + \theta_q B^p$
- $\Psi(B^L) = 1 + \psi_1 B^L + \cdots + \psi_Q B^{QL}$

Důležitými speciálními případy jsou tzv. homogenní sezónní modely

- *MA* homogenní sezónní model

$$Y_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \ \sim \ SARMA(0,q)\times(0,Q)_L.$$

- *AR* homogenní sezónní model

$$\Phi(B)\pi(B^L)Y_t = \varepsilon_t \ \sim \ SARMA(p,0)\times(P,0)_L$$

Na závěr tohoto odstavce si ještě všimněme, že $SARMA$ model je speciálním případem $ARMA$ modelu. Uvažujme například $SARMA(1,0)\times(1,0)_{12}$ model

$$\begin{aligned}\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t &= \varepsilon_t\\ (1-\varphi_1 B)(1-\pi_1 B^{12})Y_t &= \varepsilon_t\\ (1-\varphi_1 B-\pi_1 B^{12}+\varphi_1\pi_1 B^{13})Y_t &= \varepsilon_t\\ Y_t-\varphi_1 Y_{t-1}-\pi_1 Y_{t-12}+\varphi_1\pi_1 Y_{t-13} &= \varepsilon_t\end{aligned}$$

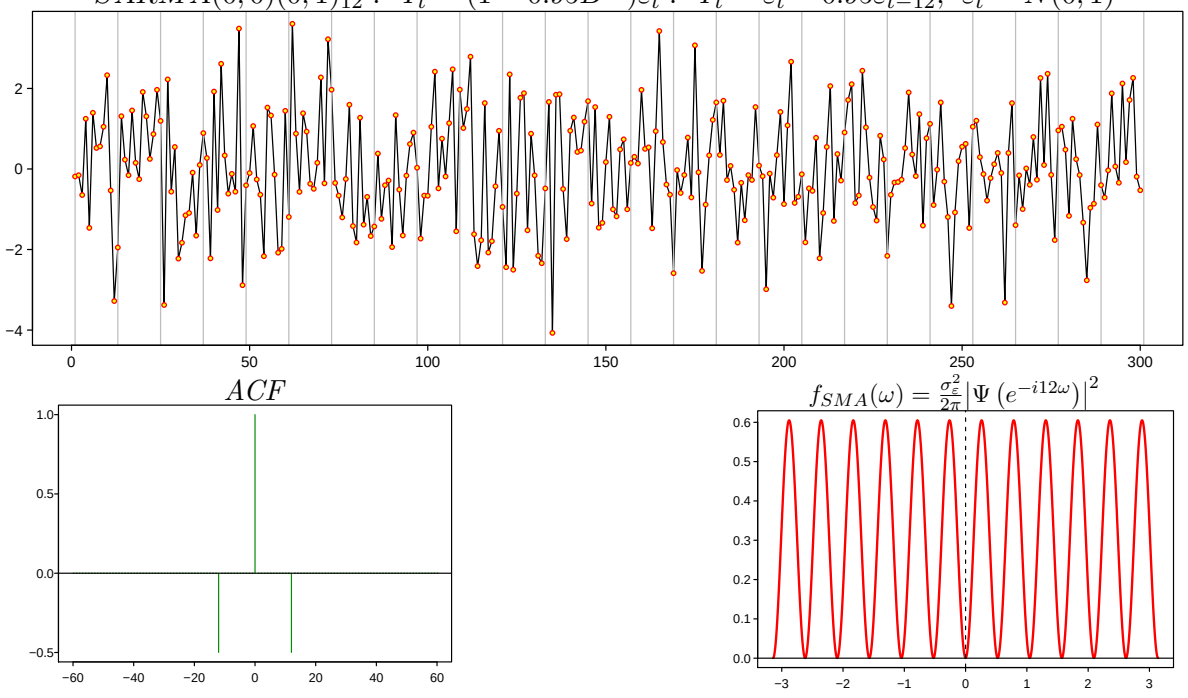
Vidíme, že jde vlastně o $AR(13)$, ve kterém

- 10 koeficientů je nulových,
- tři zbývající nenulové koeficienty tvoří koeficienty $AR(13)$ procesu.

Zobecníme–li předchozí příklad, dostáváme, že model $SARMA(p,q)\times(P,Q)_L$ je také $ARMA(p+PL, QL+q)$ modelem s dodatečnými podmínkami na AR a MA koeficienty.

1.14. Ukázky SARMA modelů spolu s ACF a spektrálními hustotami.

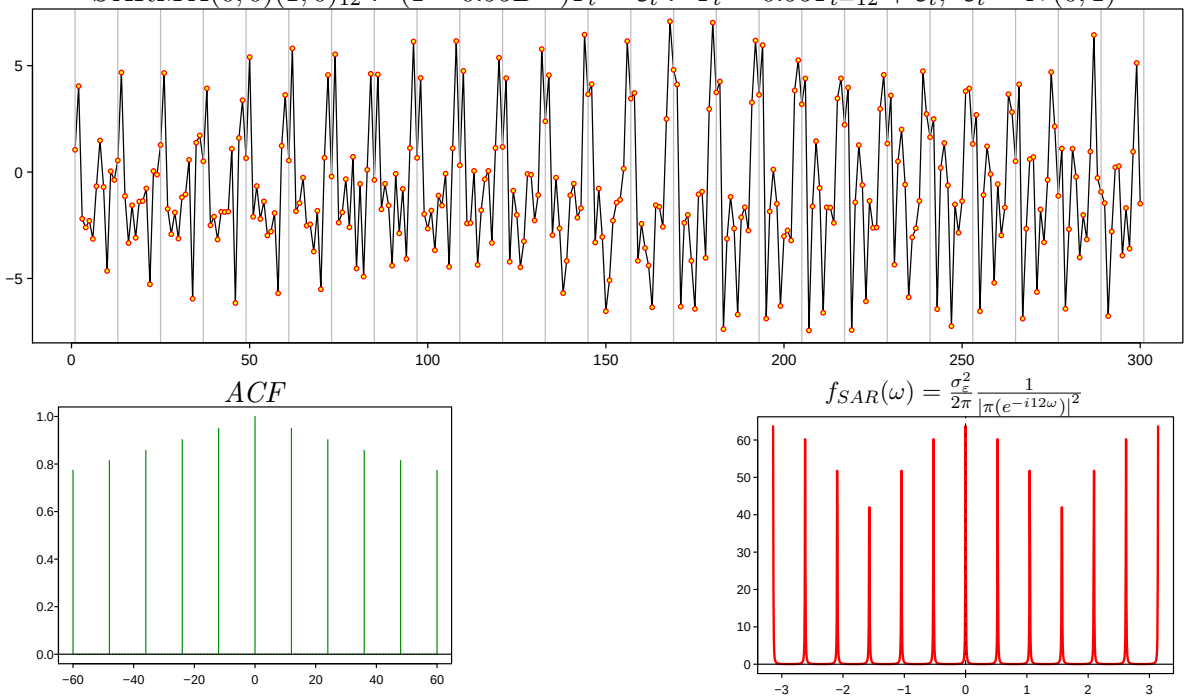
Příklad 1.13. ***„Čistě“ sezónní homogenní model s*** MA ***částí***: $Y_t = \Psi(B^{12})\varepsilon_t$. První příklad je spíše hypotetický, neboť uvažujeme v něm proces η_t^* jako bílý šum.



Obrázek 20. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(0,0)(0,1)_{12}: \ Y_t = (1-0.95B^{12})\varepsilon_t: \ Y_t = \varepsilon_t - 0.95\varepsilon_{t-12}, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.14. ***„Čistě“ sezónní homogenní model s*** AR ***částí***: $\pi(B^{12})Y_t = \varepsilon_t$. Také tento příklad s AR částí je opět spíše hypotetický, neboť uvažujeme v něm proces η_t^* jako bílý šum.

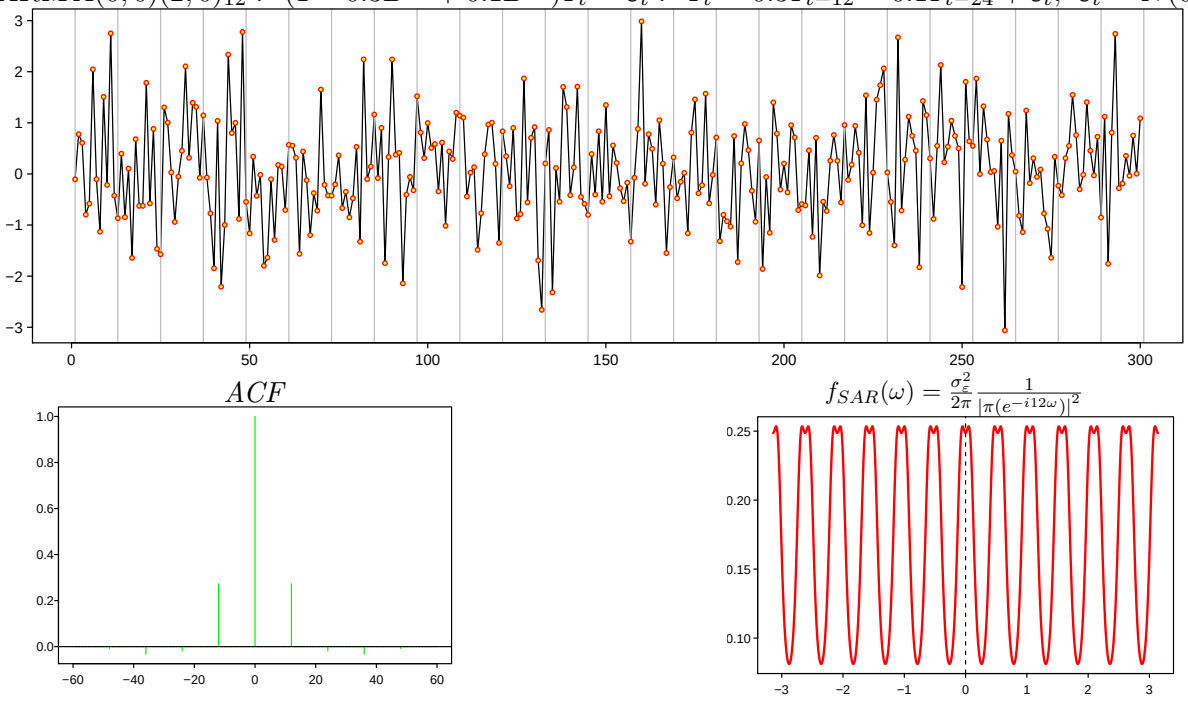
$$SARMA(0,0)(1,0)_{12}: \ (1-0.95B^{12})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.95Y_{t-12} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



Obrázek 21. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(0,0)(1,0)_{12}$: $(1 - 0.95B^{12})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.95Y_{t-12} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

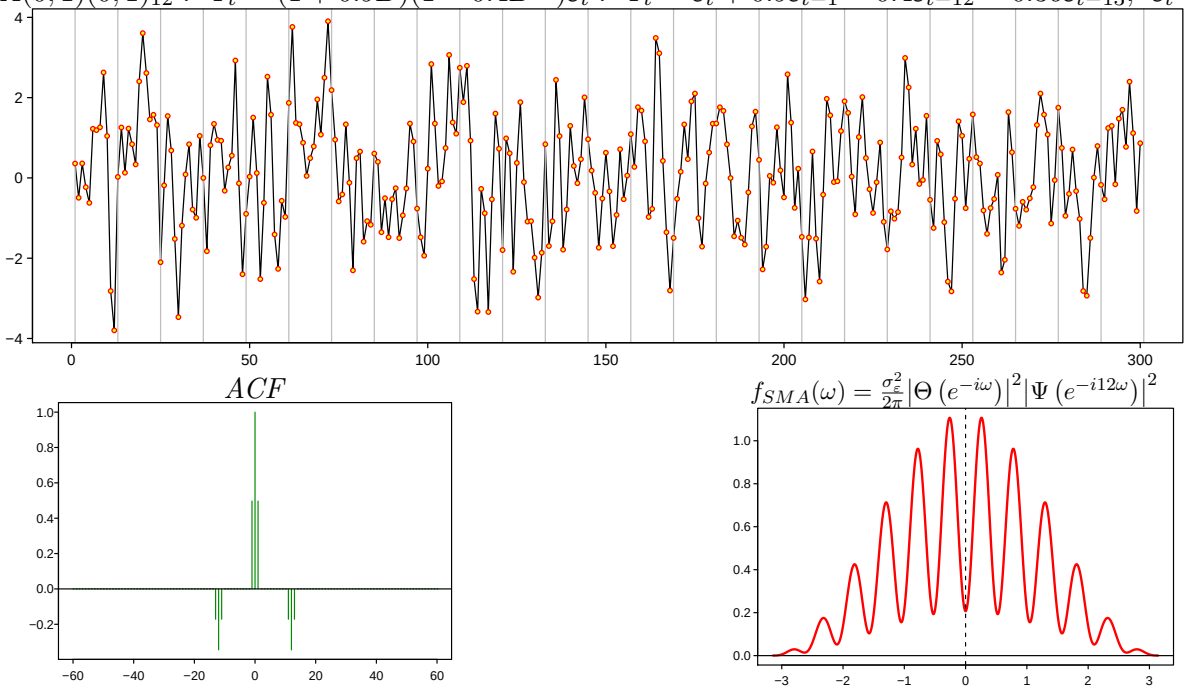
Příklad 1.15. ***„Čistě“ sezónní homogenní model s*** AR ***částí***: $\pi(B^{12})Y_t = \varepsilon_t$. Také tento příklad s AR částí vyššího řádu je opět spíše hypotetický, neboť v něm proces η_t^* jako bílý šum.

$$SARMA(0,0)(2,0)_{12}: \ (1-0.3B^{12}+0.1B^{24})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.3Y_{t-12} - 0.1Y_{t-24} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$$



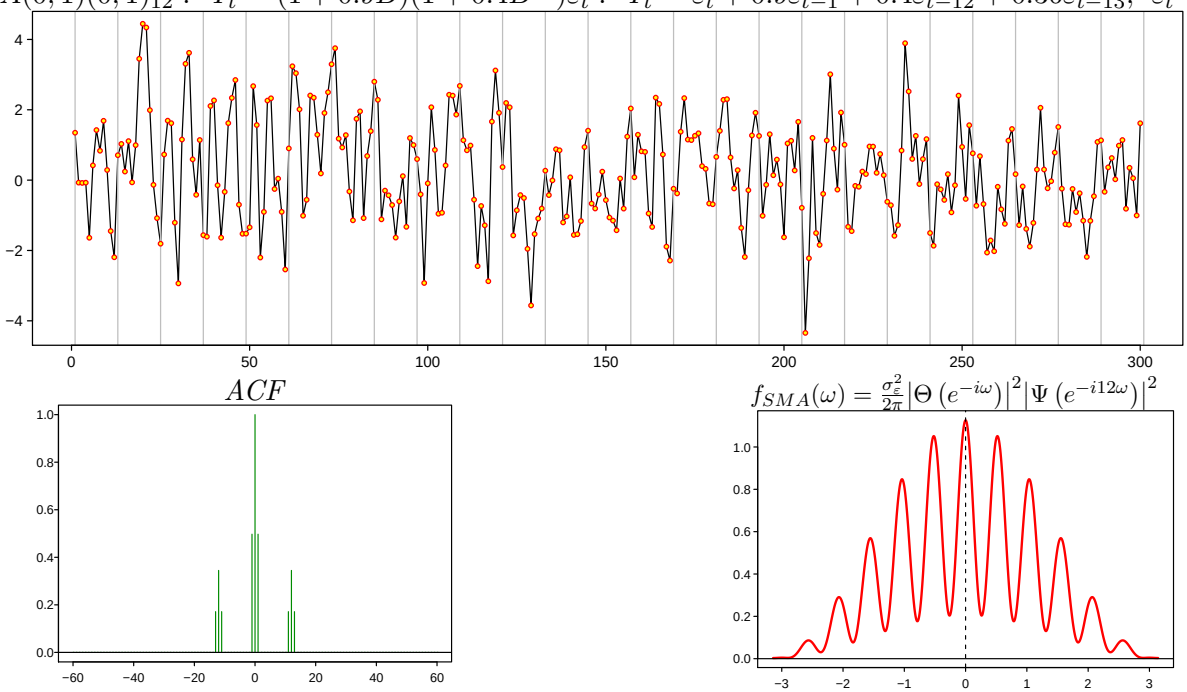
Obrázek 22. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(0,0)(2,0)_{12}$: $(1 - 0.3B^{12} + 0.1B^{24})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.3Y_{t-12} - 0.1Y_{t-24} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.16. ***Sezónní homogenní model s*** MA ***částí***: $Y_t = \Theta(B)\Psi(B^{12})\varepsilon_t$. V tomto případě je ACF charakterizovaná konečným počtem nenulových hodnot, vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.
$SARMA(0,1)(0,1)_{12}: \ Y_t = (1+0.9B)(1-0.4B^{12})\varepsilon_t: \ Y_t = \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-12} - 0.36\varepsilon_{t-13}, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$



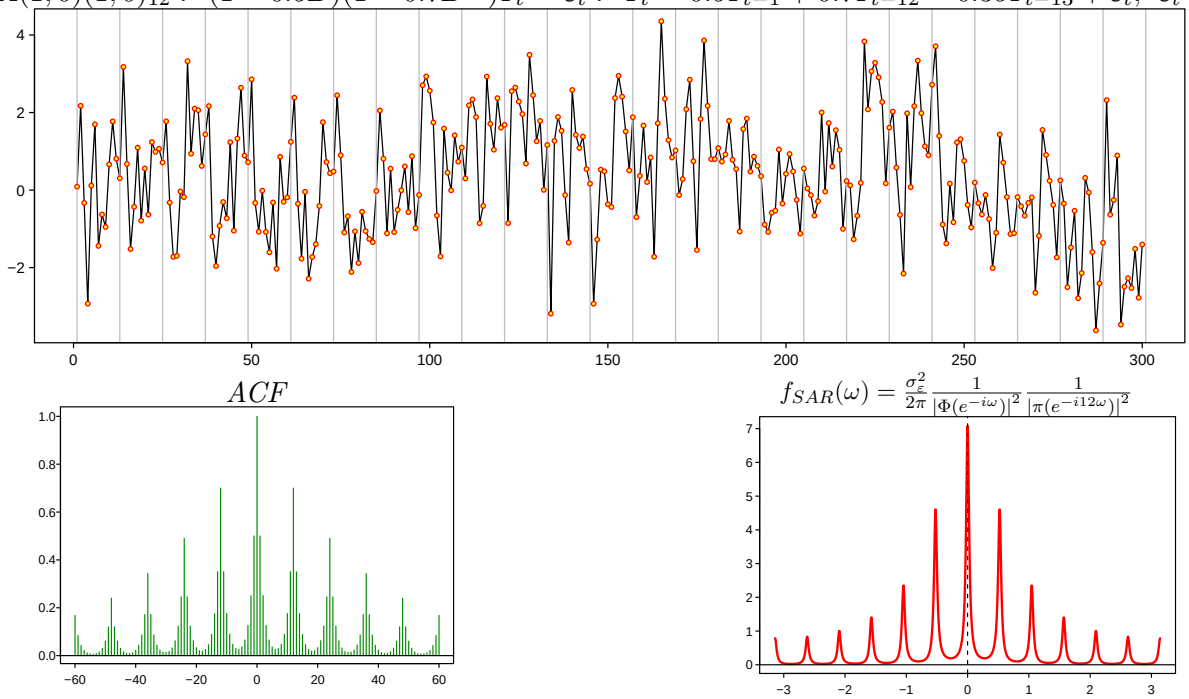
Obrázek 23. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(0,1)(0,1)_{12}: Y_t = (1+0.9B)(1-0.4B^{12})\varepsilon_t : Y_t = \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-12} - 0.36\varepsilon_{t-13}, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.17. ***Sezónní homogenní model s*** MA ***částí***: $Y_t = \Theta(B)\Psi(B^{12})\varepsilon_t$. V tomto případě je ACF charakterizovaná konečným počtem nenulových hodnot, vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.
$SARMA(0,1)(0,1)_{12}: \ Y_t = (1+0.9B)(1+0.4B^{12})\varepsilon_t: \ Y_t = \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-12} + 0.36\varepsilon_{t-13}, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$



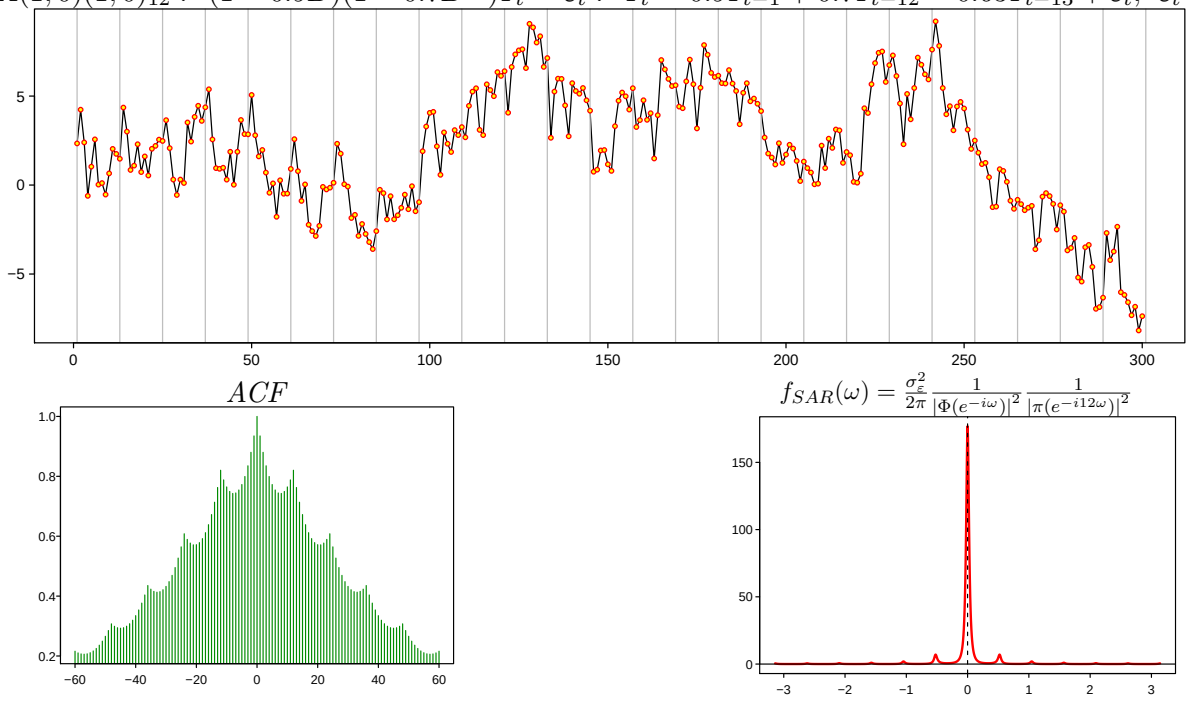
Obrázek 24. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(0,1)(0,1)_{12}: Y_t = (1+0.9B)(1+0.4B^{12})\varepsilon_t : Y_t = \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-12} + 0.36\varepsilon_{t-13}, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.18. ***Sezónní homogenní model s AR částí***: $\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t = \varepsilon_t$, kde $\varphi_1 = 0.5$ a $\pi_1 = 0.7$. V tomto případě nabývají ACF kladných hodnot a rychle klesají k nule. Vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.
$SARMA(1,0)(1,0)_{12}: \ (1-0.5B)(1-0.7B^{12})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.7Y_{t-12} - 0.35Y_{t-13} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$



Obrázek 25. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(1,0)(1,0)_{12}$: $(1 - 0.5B)(1 - 0.7B^{12})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.7Y_{t-12} - 0.35Y_{t-13} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

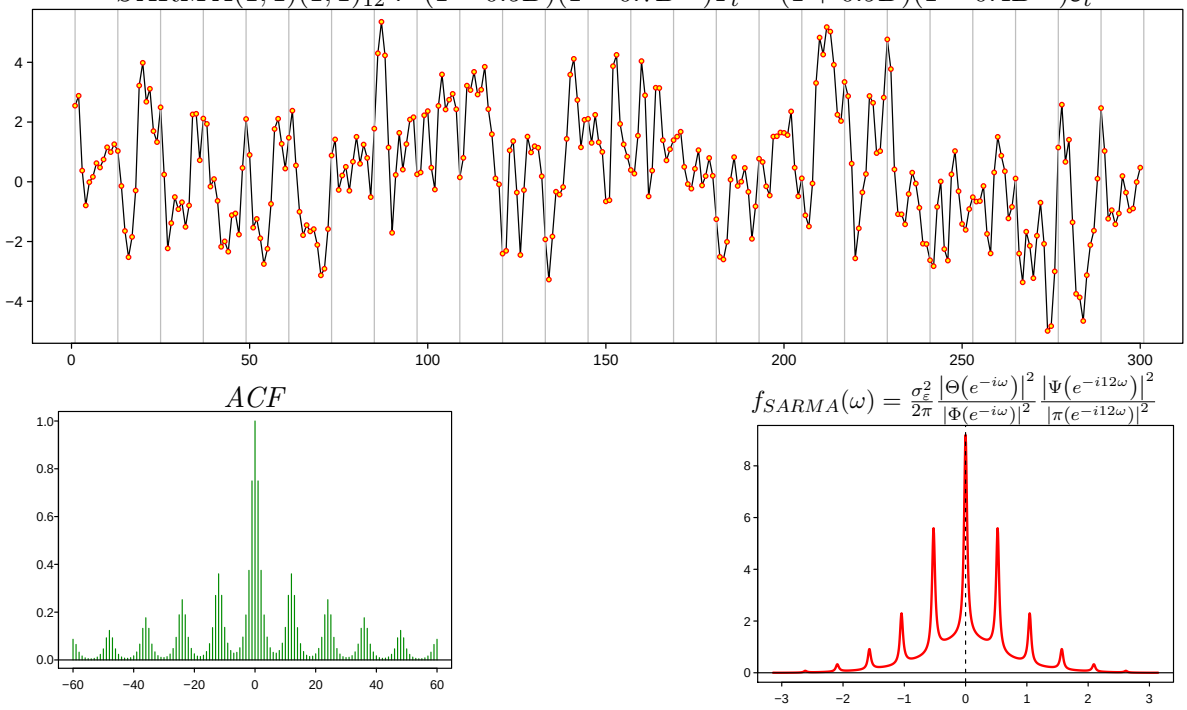
Příklad 1.19. ***Sezónní homogenní model s AR částí***: $\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t = \varepsilon_t$, kde $\varphi_1 = 0.9$ a $\pi_1 = 0.7$. V tomto případě nabývají ACF kladných hodnot a již pomaleji klesají k nule. Vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.
$SARMA(1,0)(1,0)_{12}: \ (1-0.9B)(1-0.7B^{12})Y_t = \varepsilon_t: \ Y_t = 0.9Y_{t-1} + 0.7Y_{t-12} - 0.63Y_{t-13} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$



Obrázek 26. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(1,0)(1,0)_{12}$: $(1 - 0.9B)(1 - 0.7B^{12})Y_t = \varepsilon_t : Y_t = 0.9Y_{t-1} + 0.7Y_{t-12} - 0.63Y_{t-13} + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Příklad 1.20. ***Sezónní smíšený model***: $\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t = \Theta(B)\Psi(B^{12})\varepsilon_t$, kde $\varphi_1 = 0.5$ a $\pi_1 = 0.7$, θ_1 a ψ_1 mají opačná znaménka. V tomto případě nabývají ACF kladných hodnot a rychle klesají k nule. Vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.

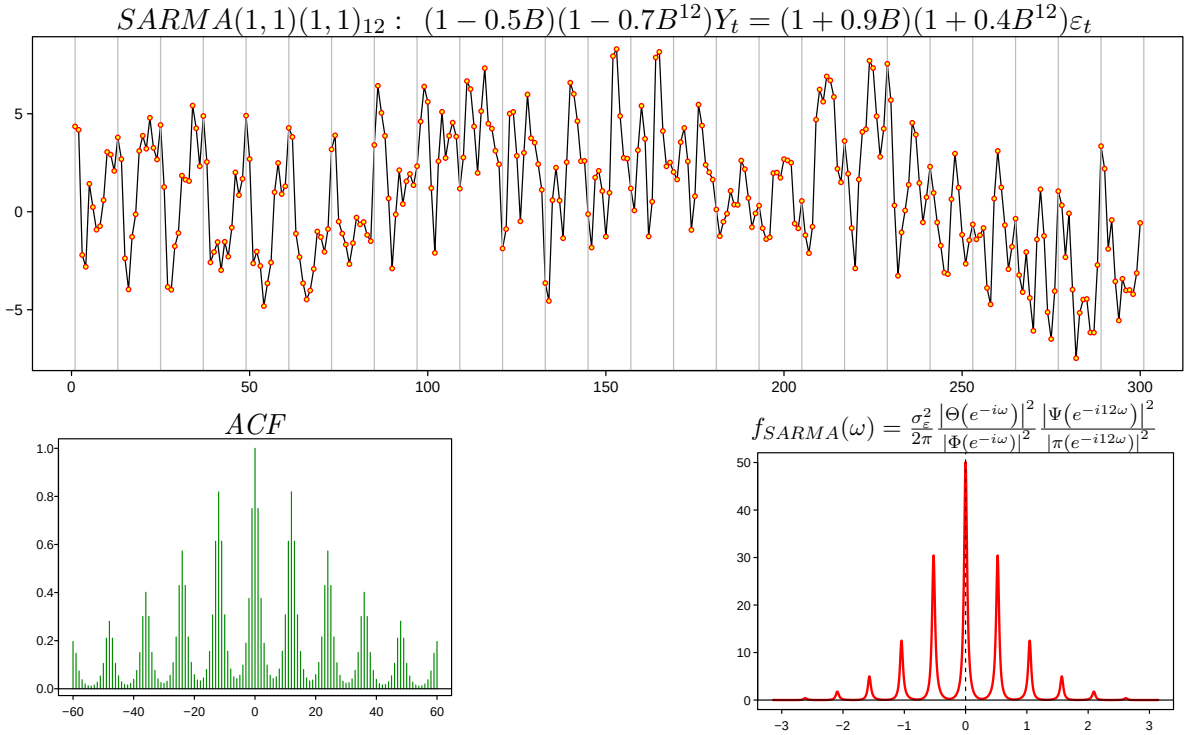
$$SARMA(1,1)(1,1)_{12}: \quad (1-0.5B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1-0.4B^{12})\varepsilon_t$$



Obrázek 27. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(1,1)(1,1)_{12}: \quad (1-0.5B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1-0.4B^{12})\varepsilon_t$.

Příklad 1.21. ***Sezónní smíšený model***: $\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t = \Theta(B)\Psi(B^{12})\varepsilon_t$, kde $\varphi_1 = 0.5$ a $\pi_1 = 0.7$, θ_1 a ψ_1 mají stejná znaménka. V tomto případě nabývají ACF kladných hodnot a rychle klesají k nule. Vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.

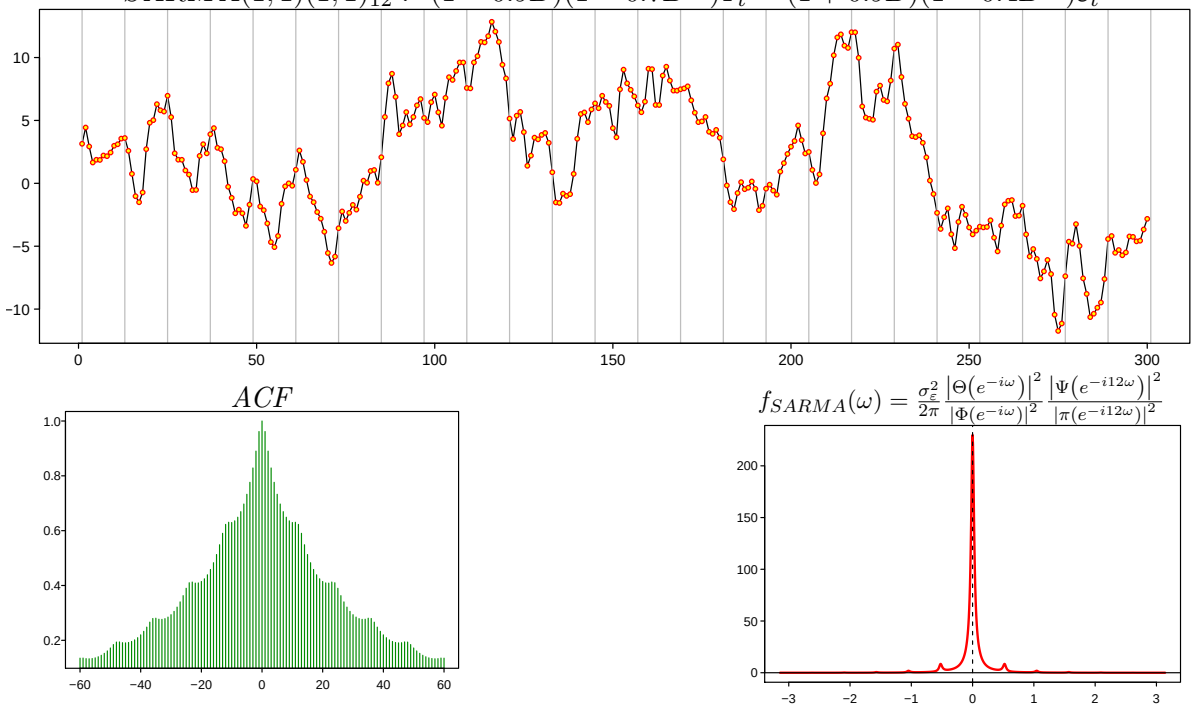
$$SARMA(1,1)(1,1)_{12}: \quad (1-0.5B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1+0.4B^{12})\varepsilon_t$$



Obrázek 28. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(1,1)(1,1)_{12}: \quad (1-0.5B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1+0.4B^{12})\varepsilon_t$.

Příklad 1.22. ***Sezónní smíšený model***: $\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t = \Theta(B)\Psi(B^{12})\varepsilon_t$, kde $\varphi_1 = 0.9$ a $\pi_1 = 0.7$, θ_1 a ψ_1 mají opačná znaménka. V tomto případě nabývají ACF kladných hodnot a již pomaleji klesají k nule. Vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.

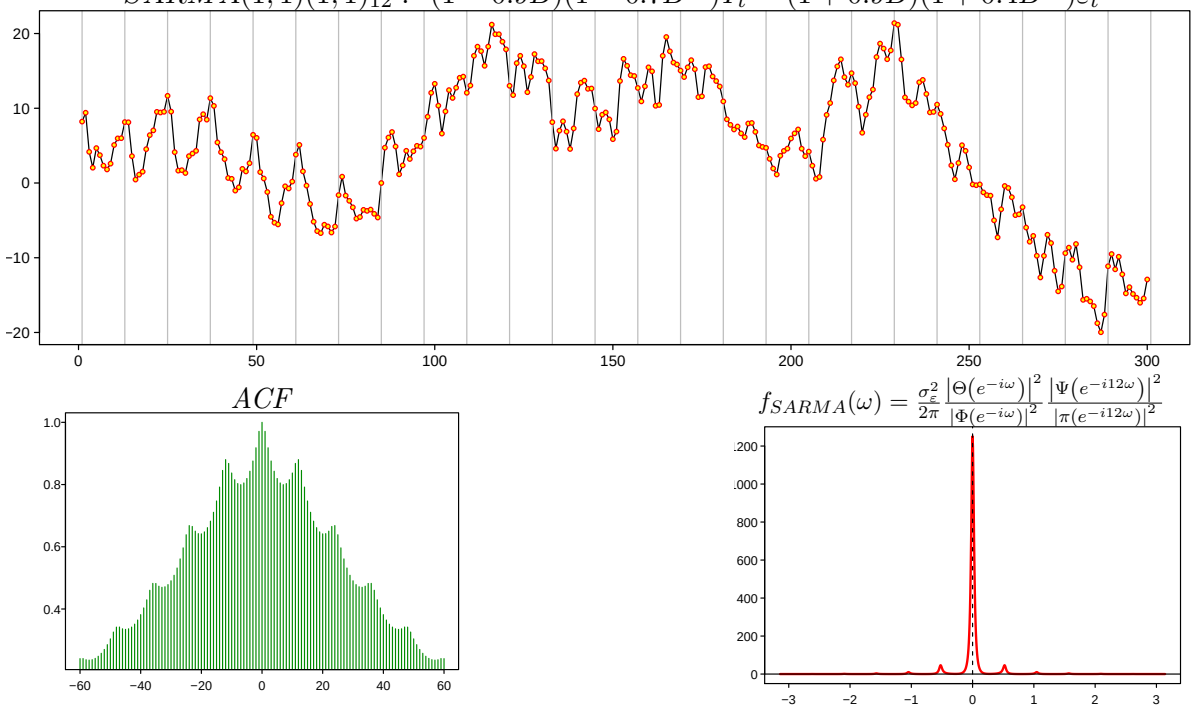
$$SARMA(1,1)(1,1)_{12}: \quad (1-0.9B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1-0.4B^{12})\varepsilon_t$$



Obrázek 29. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(1,1)(1,1)_{12}$: $(1-0.9B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1-0.4B^{12})\varepsilon_t$.

Příklad 1.23. ***Sezónní smíšený model***: $\Phi(B)\pi(B^{12})Y_t = \Theta(B)\Psi(B^{12})\varepsilon_t$, kde $\varphi_1 = 0.9$ a $\pi_1 = 0.7$, θ_1 a ψ_1 mají stejná znaménka. V tomto případě nabývají ACF kladných hodnot a již pomaleji klesají k nule. Vidíme zde i roli délky sezóny $L = 12$.

$$SARMA(1,1)(1,1)_{12}: \quad (1-0.9B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1+0.4B^{12})\varepsilon_t$$



Obrázek 30. Simulovaná data, ACF a spektrální hustota pro $SARMA(1,1)(1,1)_{12}$: $(1-0.9B)(1-0.7B^{12})Y_t = (1+0.9B)(1+0.4B^{12})\varepsilon_t$.

2. Nejlepší lineární predikce ve stacionárních $ARMA$ procesech

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je stacionární proces se střední hodnotou μ_Y a autokovarianční funkcí $\gamma_Y(t)$. Pak náhodný proces $\{Y_t - \mu_Y, t \in \mathbb{Z}\}$ má nulovou střední hodnotu (tj. je centrován) a má stejnou autokovarianční funkci $\gamma_Y(t)$.

Uvažujme **nejlepší lineární predikci** $\widehat{Y}_t$ pomocí $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-n}$, $n \geq 1$ (viz definice 2.6 v odstavci 2), která je ortogonální projekcí

$$\widehat{Y}_t = P_{\overline{sp}\{1, Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-n}\}}(Y_t).$$

Lze snadno ukázat,že platí

$$\widehat{Y}_t = P_{\overline{sp}\{1, Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-n}\}}(Y_t) = \mu_Y + P_{\overline{sp}\{Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-n}\}}(Y_t).$$

Takže bez újmy na obecnosti můžeme dále uvažovat pouze centrované stacionární procesy $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, pro které platí

$$\widehat{Y}_t = P_{\overline{sp}\{1, Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-n}\}}(Y_t) = P_{\overline{sp}\{Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-n}\}}(Y_t).$$

Nejprve definujme jednokrokovou predikci.

Definice 2.1. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný stacionární proces. Označme pro $n \geq 1$

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Pak **jednokroková (lineární) predikce** je definována vztahem

$$\widehat{Y}_{n+1} = \widehat{Y}_{n+1|n} = \begin{cases} 0 \ (= \mu_Y) & n = 0, \\ P_{\overline{sp}\{Y_1, \ldots, Y_n\}}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) & n \geq 1. \end{cases}$$

Protože pro $n \geq 1$ $\widehat{Y}_{n+1} \in \mathcal{M}_n$, pak platí

$$\widehat{Y}_{n+1} = \phi_{n,1} Y_n + \cdots + \phi_{n,n} Y_1$$

a $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n}$ minimalizují

$$\|Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1}\|^2 = E|Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1}|^2.$$

Podle projekční věty pro každé $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a pro každé $Y \in \mathcal{M}_n$ platí

$$\langle X - \widehat{X}, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle \widehat{X}, Y \rangle = 0 \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \langle \widehat{X}, Y \rangle \text{ což je } \ EXY = E\widehat{X}Y \ ,$$

takže jestliže pro $j = 1, \ldots, n$ položíme $X = Y_{n+1}$ a $Y = Y_{n+1-j}$, pak musí platit

$$\begin{aligned} EY_{n+1}Y_{n+1-j} &= E\widehat{Y}_{n+1}Y_{n+1-j} \\ \gamma(j) &= E\left(Y_{n+1-j} \sum_{i=1}^{n} \phi_{n,i} Y_{n+1-i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{n,i} EY_{n+1-i}Y_{n+1-j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \phi_{n,i} \gamma(i-j) \end{aligned}$$

což lze maticově zapsat takto

$$\begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n,1} \\ \phi_{n,2} \\ \vdots \\ \phi_{n,n} \end{pmatrix}$$

tj.

$$\boldsymbol{\gamma}_n \quad = \quad \boldsymbol{\Gamma}_n \qquad\qquad \boldsymbol{\phi}_n.$$

Projekční věta zaručuje existenci právě jednoho řešení $\widehat{Y}_{n+1} \in \mathcal{M}_n$ pro nějaké $\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^n$ (kterých obecně může být více, jejich výsledkem je však pouze jediné $\widehat{Y}_{n+1}$). Jestliže $\boldsymbol{\Gamma}_n$ je regulární, máme právě jediné $\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^n$ a platí

$$\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n \ .$$

Následující věta dává postačující podmínku k tomu, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ byla $\boldsymbol{\Gamma}_n$ regulární maticí.

VĚTA 2.2. *Jestliže platí*

$$\gamma(0) > 0 \qquad a \qquad \gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0,$$

pak kovarianční matice

$$\mathbf{\Gamma}_n = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^n$$

je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. Tento důkaz se provádí sporem, viz Brockwel, Davis (1987), str. 160-161. □

DŮSLEDEK 2.3. *Označme*

$$\mathbf{Y}_n = (Y_n, \ldots, Y_1)'.$$

Jestliže platí $\gamma(0) > 0$ *a* $\gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$, *pak nejlepší lineární predikce* $\widehat{Y}_{n+1}$ *náhodné veličiny* Y_{n+1} *je tvaru*

$$\widehat{Y}_{n+1} = \phi_{n,1}Y_n + \cdots + \phi_{n,n}Y_1 \quad tj. \quad \widehat{Y}_{n+1} = \boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{Y}_n \quad přičemž \quad \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{\Gamma}_n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_n\,.$$

Střední kvadratická chyba je rovna

$$v_n = MSE(\widehat{Y}_{n+1}) = E(Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1})^2 = \gamma(0) - \gamma_n'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_n. \tag{13}$$

DŮKAZ. Tvrzení týkající se tvaru nejlepší lineární predikce a vektoru $\boldsymbol{\phi}_n$ plynou z předchozích poznámek a předešlé věty. Zbývá vypočítat střední kvadratickou chybu.

$$E(Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1})^2 = E(Y_{n+1} - \boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{Y}_n)^2 = EY_{n+1}^2 - 2E\left(\boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{Y}_nY_{n+1}\right) + E\left(\boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{Y}_n\right)^2.$$

Nejprve počítejme

$$E\mathbf{Y}_nY_{n+1} = (EY_nY_{n+1}, EY_{n-1}Y_{n+1}, \ldots, EY_1Y_{n+1})' = (\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(n))' = \boldsymbol{\gamma}_n.$$

Dále si všimněme, že lze psát

$$\left(\boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{Y}_n\right)^2 = \boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n'\boldsymbol{\phi}_n$$

a počítejme

$$E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n' = E\left[\begin{pmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_1 \end{pmatrix}(Y_n, \ldots, Y_1)\right] = \begin{pmatrix} EY_n^2 & EY_nY_{n-1} & \cdots & EY_nY_1 \\ EY_{n-1}Y_n & EY_{n-1}^2 & \cdots & EY_{n-1}Y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ EY_1Y_n & EY_1Y_{n-1} & \cdots & EY_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_n$$

Takže můžeme pokračovat ve výpočtu střední kvadratické chyby

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1})^2 &= EY_{n+1}^2 - 2\boldsymbol{\phi}_n'E\mathbf{Y}_nY_{n+1} + \boldsymbol{\phi}_n'E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n'\boldsymbol{\phi}_n \\ &= \gamma(0) - 2\boldsymbol{\phi}_n'\boldsymbol{\gamma}_n + \boldsymbol{\phi}_n'\mathbf{\Gamma}_n\boldsymbol{\phi}_n \\ &= \gamma(0) - 2\boldsymbol{\gamma}_n'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_n + \boldsymbol{\gamma}_n'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\mathbf{\Gamma}_n\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_n = \gamma(0) - \gamma_n'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_n. \end{aligned}$$

□

Nyní definujme h-krokovou (lineární) predikci.

DEFINICE 2.4. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný stacionární proces. Označme pro $n \geq 1$

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Pak h-**kroková predikce** je definována vztahem

$$\widehat{Y}_{n+h} = \widehat{Y}_{n+h|n} = \begin{cases} 0\ (= \mu_Y) & n, h = 0, \\ P_{\overline{sp}\{Y_1,\ldots,Y_n\}}(Y_{n+h}) = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+h}) & n, h \geq 1. \end{cases}$$

Obdobným způsobem jako u jednokrokové predikce můžeme odvodit, že jestliže platí

$$\gamma(0) > 0 \quad \text{a} \quad \gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0,$$

pak nejlepší lineární h-kroková predikce $\widehat{Y}_{n+h}$ náhodné veličiny Y_{n+h} je tvaru

$$\widehat{Y}_{n+h} = \phi_{n,1}^{(h)} Y_n + \cdots + \phi_{n,n}^{(h)} Y_1 \quad \text{tj.} \quad \widehat{Y}_{n+h} = \left(\boldsymbol{\phi}_n^{(h)}\right)' \mathbf{Y}_n$$

přičemž

$$\boldsymbol{\phi}_n^{(h)} = \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n^{(h)} \qquad \text{a} \qquad \gamma_n^{(h)} = (\gamma(h), \gamma(h+1), \ldots, \gamma(h+n-1))'.$$

Střední kvadratická chyba je rovna

$$v_n^{(h)} = MSE(\widehat{Y}_{n+h}) = E(Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1})^2 = \gamma(0) - \left(\boldsymbol{\phi}_n^{(h)}\right)' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\phi}_n^{(h)}.$$

V následujících odstavcích se především zaměříme na dvě rekurentní metody výpočtu nejlepší lineární predikce.

2.1. Durbin-Levinsův algoritmus.

VĚTA 2.5 (Durbin-Levinsův algoritmus). *Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný stacionární proces s autokovariančí funkcí $\gamma(h)$ takovou, že $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$. Jestliže $\widehat{Y}_{n+1} = P_{\overline{sp}\{Y_1,\ldots,Y_n\}}(Y_{n+1}) = \phi_{n,1} Y_n + \cdots + \phi_{n,n} Y_1$ je nejlepší lineární predikce, pak pro koeficienty $\phi_{n,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ a střední kvadratické chyby $v_n = E\left(Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1}\right)^2$ platí následující vztahy*

$$\phi_{1,1} = \tfrac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \rho(1) \qquad v_0 = \gamma(0) \tag{14}$$

$$\phi_{n,n} = \left[\gamma(n) - \boldsymbol{\phi}'_{n-1} \boldsymbol{\gamma}_{n-1}\right] / v_{n-1} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\phi}_n^{(1)} = \boldsymbol{\phi}_{n-1} - \phi_{n,n} \boldsymbol{\phi}_{n-1}^* \qquad v_n = v_{n-1}\left(1 - \phi_{n,n}^2\right) \tag{16}$$

kde

$$\boldsymbol{\phi}_{n-1} = (\phi_{n-1,1}, \ldots, \phi_{n-1,n-1})' \qquad \boldsymbol{\phi}_{n-1}^* = (\phi_{n-1,n-1}, \ldots, \phi_{n-1,1})'$$

$$\boldsymbol{\phi}_n = (\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n-1}, \phi_{n,n})' \qquad \boldsymbol{\phi}_n^{(1)} = (\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n-1})'$$

DŮKAZ. Pro získání výše popsaného rekurentního výpočtu pro všechny složky predikce autor algoritmu vyšel z myšlenky rozložit projekci na součet dvou ortogonálních projekcí

$$\widehat{Y}_{n+1} = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + P_{\mathcal{M}_{n-1}^{\perp}}(Y_{n+1}),$$

kde

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$$
$$\mathcal{M}_{n-1} = \overline{sp}\{Y_2, \ldots, Y_n\}$$

a

$$\mathcal{M}_{n-1}^{\perp} = \overline{sp}\{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\}.$$

Vidíme, že $\mathcal{M}_{n-1}^{\perp}$ je ortogonální komplement $\mathcal{M}_{n-1}$ v $\mathcal{M}_n$.

Podrobný důkaz lze najít například v publikaci Forbelská(2009). □

2.2. Důsledek Durbin-Levinsonova algoritmu.

DŮSLEDEK 2.6.
Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný stacionární proces s autokovariančí funkcí $\gamma(h)$, pro kterou platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$. Označme

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$$
$$\mathcal{M}_{n-1} = \overline{sp}\{Y_2, \ldots, Y_n\}$$

a nejlepší lineární predikci

$$\widehat{Y}_{n+1} = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) = \phi_{n,n} Y_1 + \phi_{n,n-1} Y_2 + \cdots + \phi_{n,1} Y_n,$$

pak platí

$$\phi_{n,n} = R\left(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\right). \tag{17}$$

Důkaz. Podrobný důkaz lze najít v publikaci Forbelská(2009). □

2.3. Parciální autokorelační funkce (PACF).

Definice 2.7. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je stacionární proces. Pak **parciální autokorelační funkce** je definována vztahem

$$\alpha(1) = R(Y_t, Y_{t+1})$$
$$\alpha(k) = R(Y_t - \widehat{Y}_t, Y_{t-k} - \widehat{Y}_{t-k}) \qquad \text{pro } |k| > 1$$

kde $\widehat{Y}_t$, resp. $\widehat{Y}_{t-k}$ jsou nejlepší lineární predikce Y_t (resp. Y_{t-k}) pomocí $Y_{t-k+1}, \ldots, Y_{t-1}$.

Nejlepší lineární predikce $\widehat{Y}_t$ a $\widehat{Y}_{t-k}$ jsou projekce $\widehat{Y}_t = P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t)$ a $\widehat{Y}_{t-k} = P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k})$, kde $\mathcal{M}_{k-1} = \overline{sp}\{Y_{t-k+1}, \ldots, Y_{t-1}\}$. Přitom existují taková

$$\boldsymbol{\phi}_{k-1} = (\phi_{k-1,1}, \ldots, \phi_{k-1,k-1})',$$

že platí

$$\widehat{Y}_t = \phi_{k-1,1} Y_{t-1} + \cdots + \phi_{k-1,k-1} Y_{t-k+1}$$

a také taková $\boldsymbol{\psi}_{k-1} = (\psi_{k-1,1}, \ldots, \psi_{k-1,k-1})'$, že platí

$$\widehat{Y}_{t-k} = \psi_{k-1,1} Y_{t-k+1} + \cdots + \psi_{k-1,k-1} Y_{t-1},$$

která minimalizují

$$E(Y_t - \widehat{Y}_t)^2 \qquad \text{resp.} \qquad E(Y_{t-k} - \widehat{Y}_{t-k})^2,$$

přičemž (jak již víme z důkazu Durbin-Levinsonova algoritmu) platí

$$\phi_{k-1,1} = \psi_{k-1,1}, \ldots, \phi_{k-1,k-1} = \psi_{k-1,k-1} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{\phi}_{k-1} = \boldsymbol{\psi}_{k-1}.$$

Celkově tedy, označíme-li

$$\mathbf{Y}^*_{k-1} = (Y_{t-k+1}, \ldots, Y_{t-1})'$$
$$\mathbf{Y}_{k-1} = (Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-k+1})'$$

tak dostaneme

$$P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{t-k}) = \boldsymbol{\phi}'_{k-1} \mathbf{Y}^*_{k-1}$$
$$P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_t) = \boldsymbol{\phi}'_{k-1} \mathbf{Y}_{k-1}$$

Víme, že pokud pro autokovarianční funkci $\gamma(h)$ platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$, pak matice $\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$ je regulární a neznámé složky vektoru $\boldsymbol{\phi}_{k-1}$ jsou rovny

$$\boldsymbol{\phi}_{k-1} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}_{k-1} \boldsymbol{\gamma}_{k-1}.$$

Avšak podle důsledku 2.6 Durbin-Levinsonova algoritmu není třeba počítat inverzní matici $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}_{k-1}$, odtud $\boldsymbol{\phi}_{k-1}$, následně $\widehat{Y}_{t-k} = P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{t-k})$ a $\widehat{Y}_t = P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_t)$ a nakonec korelační koeficient $\alpha(k) = R(Y_t - \widehat{Y}_t, Y_{t-k} - \widehat{Y}_{t-k})$, neboť platí

$$\alpha(k) = \phi_{k,k} = R\left(Y_t - P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t), Y_{t-k} - P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k})\right).$$

2.4. Inovační algoritmus. Základní myšlenkou Durbin-Levinsonova algoritmu je rozdělení

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_n, \ldots, Y_1\}$$

na dva ortogonální podprostory

$$\mathcal{M}_{n-1} = \overline{sp}\{Y_n, \ldots, Y_2\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{M}^{\perp}_{n-1} = \overline{sp}\{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\}.$$

Následující rekurentní algoritmus spočívá v dekompozici $\mathcal{M}_n$ na n ortogonálních Hilbertových podprostorů pomocí Gram-Schmidtova algoritmu.

Rekurentní algoritmus lze aplikovat nejen na stacionární procesy, ale obecně na procesy s **konečnými druhými momenty**. Pro jednoduchost předpokládejme, že jsou centrované. Nejprve zaveďme následující značení:

$$\gamma(i, j) = EX_i X_j.$$

Stejně označme

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_n, \ldots, Y_1\}$$
$$v_n = \left\| Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1} \right\|^2.$$

Pokud označíme

$$\widehat{Y}_n = \begin{cases} 0\ (= \mu_Y) & \text{pro } n = 1 \\ P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_n) & \text{pro } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

pak zřejmě

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_n - \widehat{Y}_n, \ldots, Y_1 - \widehat{Y}_1\} \qquad n \geq 1.$$

Definujme tzv. **inovaci** vztahem

$$U_{n+1} = Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1} = Y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \phi_{n,j} Y_{n+1-j}.$$

Označme

$$\mathbf{U}_n = (U_1, \ldots, U_n)'$$
$$\mathbf{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)'$$
$$\widehat{\mathbf{Y}}_n = (\widehat{Y}_1, \ldots, \widehat{Y}_n)'.$$

Pak lze psát

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{Y}_n,$$

kde matice $\mathbf{A}_n$ je dolní trojúhelníkovou maticí

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\phi_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\phi_{2,2} & -\phi_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{n-2,n-2} & -\phi_{n-2,n-3} & \cdots & -\phi_{n-2,1} & 1 & 0 \\ -\phi_{n-1,n-1} & -\phi_{n-1,n-2} & \cdots & \cdots & -\phi_{n-1,1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že determinant matice je roven 1, takže existuje inverzní matice

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{A}_n^{-1},$$

která je také dolní trojúhelníkovou maticí. Upravujme postupně

$$\widehat{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{U}_n = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_n = \left(\mathbf{A}_n^{-1} - \mathbf{I}_n\right)\mathbf{U}_n = \boldsymbol{\theta}_n \mathbf{U}_n,$$

kde

$$\boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n-2,n-2} & \theta_{n-2,n-3} & \cdots & -\theta_{n-2,1} & 0 & 0 \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \cdots & \cdots & \theta_{n-1,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\widehat{\mathbf{Y}}_n = \boldsymbol{\theta}_n \mathbf{U}_n = \boldsymbol{\theta}_n(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)$$

a protože $\boldsymbol{\theta}_n$ je dolní trojúhelníkovou maticí, můžeme psát

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j}) & n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

VĚTA 2.8. *Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaný náhodný proces s konečnými druhými momenty, přičemž kovarianční matice $(EY_iY_j)_{i,j=1}^n = (\gamma(i,j))_{i,j=1}^n$ je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak pro jednokrokovou predikci platí následující rekurentní vztahy*

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j} \right) & n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{18}$$

$$v_0 = \gamma(1,1) \tag{19}$$

$$\theta_{n,n-k} = v_k^{-1} \left[\gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right], \quad k = 0, \dots, n-1 \tag{20}$$

$$v_n = \gamma(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \tag{21}$$

DŮKAZ. Podrobný důkaz lze najít například v publikaci Forbelská (2009). □

POZNÁMKA 2.9. Zatímco **Durbin-Levinsův algoritmus** dává koeficienty $\phi_{n,j}$ v reprezentaci

$$\widehat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \phi_{n,j} Y_{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n,n-j} Y_{j+1},$$

inovační algoritmus dává koeficienty $\theta_{n,j}$ v ortogonálním rozvoji

$$\widehat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} \left(Y_{j+1} - \widehat{Y}_{j+1} \right).$$

POZNÁMKA 2.10. **Inovační algoritmus** dává „inovační reprezentaci“ samotných Y_{n+1}, neboť platí

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n + \widehat{\mathbf{Y}}_n = (\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) + (\mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n)(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) = \mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n).$$

a položíme-li $\theta_{n,0} = 1$, můžeme psát

$$Y_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \theta_{n,j} \left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \theta_{n,n-j} \left(Y_{j+1} - \widehat{Y}_{j+1} \right).$$

Tyto vztahy využijeme později při odvozování maximálně věrohodných odhadů neznámých parametrů $\theta_{n,j}$.

2.5. Jednokroková nejlepší lineární predikce v $AR(p)$. Nejprve si všimněme, jaké vlastnosti má predikce v případě autoregresních procesů řádu p.

VĚTA 2.11. *Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný nedegenerovaný kauzální $AR(p)$ proces $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$. Pak pro nejlepší lineární predikci platí*

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^{\min(n,p)} \varphi_j Y_{n+1-j} & n = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

DŮKAZ. Vzhledem k tomu, že autokovarianční funkce $\gamma(h)$ exponenciálně klesá k nule, stačí předpokládat, že proces není degenerovaný, tj. rozptyl $\gamma(0) > 0$. Nejlepší lineární predikce podle definice je rovna

$$\widehat{Y}_{n+1} = \widehat{Y}_{n+1|n} = \begin{cases} 0 \ (= \mu_Y) & n = 0, \\ P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) & n \geq 1. \end{cases}$$

Předpokládejme tedy, že $n \geq p$ a postupně upravujme

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{n+1} &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+1}) = P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varphi_1 Y_n + \cdots + \varphi_p Y_{n+1-p} + \varepsilon_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+1-j}) + P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varepsilon_{n+1}). \end{aligned}$$

Připomeňme, že pro projekci v případě $j = 1, \dots, n$ platí

$$P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_j) = Y_j, \qquad \text{neboť} \qquad Y_j \in \overline{sp}\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

Dále počítejme pro $j = 1, \dots, n$ skalární součin

$$\langle \varepsilon_{n+1}, Y_j \rangle \overset{kauzal.}{=} \langle \varepsilon_{n+1}, \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{j-k} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j \underbrace{E(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{j-k})}_{=0} = 0,$$

tj. $\varepsilon_{n+1} \perp Y_1, \dots, Y_n$, a $P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varepsilon_{n+1}) = 0$, takže

$$\widehat{Y}_{n+1} = \varphi_1 Y_n + \cdots + \varphi_p Y_{n+1-p} \qquad \text{jestliže} \qquad n \geq p,$$

čímž dostáváme tvrzení věty. □

Tedy v případě $AR(p)$ procesu

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

jsou koeficienty $\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,1}$ nejlepší lineární predikce pro $n \geq p$ rovny

$$\begin{aligned} \phi_{n,1} &= \varphi_1 \\ &\vdots \\ \phi_{n,p} &= \varphi_p \\ \phi_{n,p+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \phi_{n,n} &= 0 \end{aligned}$$

2.6. Vícekroková nejlepší lineární predikce v $AR(p)$. Podle definice h-**kroková predikce** je definována vztahem

$$\widehat{Y}_{n+h} = \widehat{Y}_{n+h|n} = \begin{cases} 0\ (= \mu_Y) & n, h = 0, \\ P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+h}) = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+h}) & n, h \geq 1. \end{cases}$$

Počítejme postupně

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{n+2|n} &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+2}) \\ &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varphi_1 Y_{n+1} + \cdots + \varphi_p Y_{n+2-p} + \varepsilon_{n+2}) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+2-j}) + \underbrace{P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varepsilon_{n+2})}_{=0 \text{(viz předchozí důkaz)}} \\ &= \varphi_1 P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+1}) + \sum_{j=2}^{p} \varphi_j \underbrace{P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+2-j})}_{=Y_{n+2-j}} \\ &= \varphi_1 \widehat{Y}_{n+1|n} + \varphi_2 Y_n + \cdots + \varphi_p Y_{n+2-p} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{n+p|n} &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+p}) \\ &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varphi_1 Y_{n+p-1} + \cdots + \varphi_p Y_n + \varepsilon_{n+p}) \\ &= \varphi_1 \widehat{Y}_{n+p-1|n} + \cdots + \varphi_{p-1} \widehat{Y}_{n+1|n} + \varphi_p Y_n \end{aligned}$$

pro $s > p$

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{n+s|n} &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(Y_{n+s}) \\ &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\varphi_1 Y_{n+s-1} + \cdots + \varphi_p Y_{n+s-p} + \varepsilon_{n+s}) \\ &= \varphi_1 \widehat{Y}_{n+s-1|n} + \cdots + \varphi_p \widehat{Y}_{n+s-p|n} \end{aligned}$$

2.7. PACF pro $AR(p)$, $MA(q)$ a $ARMA(p,q)$.

VĚTA 2.12. *Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný nedegenerovaný kauzální $AR(p)$ proces $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$. Pak platí*

(1) $\alpha(p) = \varphi_p$

(2) $\alpha(k) = 0$ pro $k > p$.

Důkaz. Již dříve jsme ukázali, že v případě $AR(p)$ procesu

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

jsou koeficienty $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,1}$ nejlepší lineární predikce pro $n \geq p$ rovny

$$\begin{array}{rcl} \phi_{n,1} & = & \varphi_1 \\ & \vdots & \\ \phi_{n,p} & = & \varphi_p \\ \phi_{n,p+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ \phi_{n,n} & = & 0 \end{array}$$

Tedy pokud přímo $n = p$, tak podle důsledku Durbin–Lewinsonova algoritmu platí

$$\alpha(p) = \phi_{p,p} = \varphi_p.$$

Jestliže $k > p$, pak je parciální autokorelační funkce nulová $\alpha(k) = 0$, což je velmi důležitá identifikační vlastnost $AR(p)$ procesů. □

Poznámka 2.13. Parciální autokorelační koeficienty $\alpha(1), \ldots, \alpha(p-1)$ lze určit jako $\phi_{1,1}, \ldots, \phi_{p-1,p-1}$ z Durbin–Levinsonova algoritmu.

Důsledek 2.14. *Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný nedegenerovaný invertibilní $MA(q)$ (resp. $ARMA(p,q)$) proces. Pak* ***neexistuje*** *takové $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro $k > k_0$ platí $\alpha(k) = 0$.*

Důkaz. Využijeme toho, že proces $MA(q)$ (resp. $ARMA(p,q)$) je invertibilní. Pak existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$ (tj. $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$) taková, že

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j}, \qquad \text{tj. zkráceně} \qquad Y_t \sim AR(\infty) : \ \varepsilon_t = \pi(B) Y_t,$$

tj. $p = \infty$, takže podle předchozí věty nenajdeme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k > k_0$ platí $\alpha(k) = 0$. □

2.8. Jednokroková nejlepší lineární predikce v $MA(q)$. Pro jednokrokovou predikci v případě $MA(q)$ procesů je velmi užitečný inovační algoritmus. Nejprve uvedeme podrobně rekurentní vzorce pro stacionární procesy, pro které platí

$$\gamma(i,j) = \gamma(i-j).$$

Predikci pomocí inovací lze vypočítat pomocí následujícího vzorce

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \theta_{n,1}\left(Y_n - \widehat{Y}_n\right) \cdots + \cdots \theta_{n,n}\left(Y_1 - \widehat{Y}_1\right) & n = 1, 2, \ldots \end{cases},$$

přičemž pro

$$n = 0 \qquad v_0 = \gamma(0),$$

dále

$$\begin{aligned} \theta_{n,n} &= \tfrac{\gamma(n)}{v_0} \\ \theta_{n,n-1} &= \tfrac{\gamma(n-1)}{v_1} - \theta_{1,1}\theta_{n,n}\tfrac{v_0}{v_1} \\ \theta_{n,n-2} &= \tfrac{\gamma(n-2)}{v_2} - \theta_{2,2}\theta_{n,n}\tfrac{v_0}{v_2} - \theta_{2,1}\theta_{n,n-1}\tfrac{v_1}{v_2} \\ &\vdots \\ \theta_{n,2} &= \tfrac{\gamma(2)}{v_{n-2}} - \underbrace{\theta_{n-2,n-2}\theta_{n,n}\tfrac{v_0}{v_{n-2}} - \cdots - \theta_{n-2,1}\theta_{n,3}\tfrac{v_{n-3}}{v_{n-2}}}_{(n-2)\text{ členů}} \\ \theta_{n,1} &= \tfrac{\gamma(1)}{v_{n-1}} - \underbrace{\theta_{n-1,n-1}\theta_{n,n}\tfrac{v_0}{v_{n-1}} - \theta_{n-1,n-2}\theta_{n,n-1}\tfrac{v_1}{v_{n-1}} - \cdots - \theta_{n-1,1}\theta_{n,2}\tfrac{v_{n-2}}{v_{n-1}}}_{(n-1)\text{ členů}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$v_n = \gamma(0) - \theta_{n,n}^2 v_0 - \cdots - -\theta_{n,1}^2 v_{n-1}.$$

Vzhledem k tomu, že $MA(q)$ proces má autokovarianční funkci $\gamma(k) = 0$ pro $k > q$, pak v případě, že $n > q$ jsou koeficienty $\theta_{n,n} = 0, \ldots, \theta_{n,q+1} = 0$ a teprve $\theta_{n,q} \neq 0, \ldots, \theta_{n,1} \neq 0$, takže nejlepší lineární predikce je tvaru

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^{\min(n,q)} \theta_{n,j} \left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j} \right) & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

2.9. Nejlepší lineární predikce v $ARMA(p,q)$. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní $ARMA$ proces

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim ARMA(p,q) : \Phi(B) Y_t = \Theta(B) \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Z kauzality vyplývá, že existuje posloupnost $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ taková, že $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ a platí

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{tj.} \quad Y_t \sim MA(\infty),$$

takže pro $|z| \leq 1$ dostáváme

$$\Psi(z) = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \quad \Rightarrow \quad \Phi(z)\Psi(z) = \Theta(z).$$

Koeficienty $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ se určí ze vztahu

$$(1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \cdots - \varphi_p z^p)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q)$$

porovnáním koeficientů u mocnin proměnné z , tj.

$$\begin{array}{lll} z^0: & \psi_0 = 1 & \Rightarrow \quad \psi_0 = 1 \\ z^1: & \psi_1 - \varphi_1 = \theta_1 & \Rightarrow \quad \psi_1 = \theta_1 + \varphi_1 \\ z^2: & \psi_2 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2 = \theta_2 & \Rightarrow \quad \psi_2 = \theta_2 + \varphi_1\psi_1 + \varphi_2 \\ z^3: & \psi_3 - \varphi_2\psi_1 - \varphi_1\psi_2 - \varphi_3 = \theta_3 & \Rightarrow \quad \psi_3 = \theta_3 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_1\psi_2 + \varphi_3 \\ & & \vdots \end{array}$$

Obecně, položíme-li $\begin{matrix} \theta_j = 0 \\ \varphi_j = 0 \end{matrix}$ pro $\begin{matrix} j > q \\ j > p \end{matrix}$ a označíme-li $m = max(p,q)$, dostaneme

$$\begin{array}{lcll} \psi_0 & = & 1 & \\ \psi_j & = & \theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \varphi_i \psi_{j-i} & \text{pro} \quad 1 \leq j \leq m \\ \psi_j & = & \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \psi_{j-i} & \text{pro} \qquad j > m \end{array}$$

a vidíme, že pro $j > m$ se koeficienty θ_k neprosadí. Pokud bychom použili predikci pomocí inovací, bude vždy pro $n > m$ platit

$$\widehat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j} \right)$$

takže použijeme vždy n předchozích inovací a ztrácíme tak výhodu, která byla u MA procesu konečného řádu.

Nechceme-li o tuto výhodu přijít, ukázalo se, že díky jednoduché transformaci využijeme jednak možnosti použít maximálně q předchozích inovací a také toho, že díky AR části je proces lineární kombinací předchozích p hodnot.

Položme nejprve

$$m = \max(p,q)$$

a definujme

$$W_t = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^{-1} Y_t & 1 \leq t \leq m \\ \sigma_\varepsilon^{-1} \Phi(B) Y_t = \sigma_\varepsilon^{-1} \left(Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} \right) & t > m \end{cases}$$

tedy pro $1 \le t \le m$ jde o $ARMA(p,q)$ proces s jednotkovým rozptylem a pro $t > m$ jde o $MA(q)$ proces (opět s jednotkovým rozptylem).

Zkoumejme jednokrokovou predikci tohoto transformovaného procesu. Zřejmě

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_1, \dots, Y_n\} = \overline{sp}\{W_1, \dots, W_n\},$$

takže položíme-li

$$\widehat{W}_1 = 0 = \mu_Y = \mu_W \qquad \text{pro} \qquad n = 1,$$

pak pro $1 \le t \le m$

$$\widehat{W}_t = P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_{t-1}\}}(\sigma_\varepsilon^{-1} Y_t) = \sigma_\varepsilon^{-1}\widehat{Y}_t$$

a pro $t > m$

$$\begin{aligned}\widehat{W}_t &= P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_{t-1}\}}(\sigma_\varepsilon^{-1}\Phi(B)Y_t)\\ &= \sigma_\varepsilon^{-1} P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_{t-1}\}}\left(Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p}\right)\\ &= \sigma_\varepsilon^{-1}\left(\widehat{Y}_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p}\right).\end{aligned}$$

Z předchozího také plyne, že

$$W_t - \widehat{W}_t = \sigma_\varepsilon^{-1}(Y_t - \widehat{Y}_t).$$

Použijeme-li inovační algoritmus na proces W_t, dostaneme

$$\widehat{W}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}\left(W_{n+1-j} - \widehat{W}_{n+1-j}\right) & 1 \le n \le m-1,\\ \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}\left(W_{n+1-j} - \widehat{W}_{n+1-j}\right) & n \ge m. \end{cases}$$

Koeficienty $\theta_{n,j}$ se určí pomocí autokovarianční funkce procesu W_t (viz inovační algoritmus). Zpětnou transformací k původnímu procesu bude **nejlepší lineární predikce o jeden krok dopředu** rovna

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 1\\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}\left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j}\right) & 1 \le n \le m-1,\\ \sum_{j=1}^{p} \varphi_j Y_{n+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}\left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j}\right) & n \ge m. \end{cases}$$

Při odvození predikce o $h > 1$ kroků dopředu opět vyjdeme z transformovaného procesu W_t

$$\widehat{W}_{n+h|n} = \begin{cases} P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}(\sigma_\varepsilon^{-1} Y_{n+h}) & n+h \le m,\\ P_{\overline{sp}\{Y_1,\dots,Y_n\}}\left(\sigma_\varepsilon^{-1}(Y_{n+h} - \sum_{j=1}^{p}\varphi_j Y_{n+h-j})\right) & n+h > m. \end{cases}$$

2.10. Yuleovy-Walkerovy rovnice a odhad parametrů v $AR(p)$. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaný kauzální autoregresní proces

$$AR(p): \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Vraťme se k Yuleovým-Walkerovým rovnicím

$$\begin{aligned}&\underbrace{\rho(0)}_{=1} = \varphi_1\rho(1) + \cdots + \varphi_p\rho(p) + \tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma(0)} \quad \Rightarrow \quad \sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0)\left[1 - \varphi_1\rho(1) - \cdots - \varphi_p\rho(p)\right]\\ &\rho(k) = \varphi_1\rho(k-1) + \cdots + \varphi_p\rho(k-p) \quad k \ge 1\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{R}}_p &= (\widehat{\rho}(i-j))_{i,j=1}^{p} & \widehat{\boldsymbol{\rho}}_p &= (\widehat{\rho}(1), \dots, \widehat{\rho}(p))'\\ \boldsymbol{\phi}_p &= (\varphi_1, \dots, \varphi_p)' & \widehat{\boldsymbol{\phi}}_p &= (\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_p)'\end{aligned}$$

a v Yuleových-Walkerových rovnicích nahradíme $\rho(k)$ odpovídajícími odhady $\widehat{\rho}(k)$, pak (pokud $\widehat{\gamma}(0) > 0$) dostaneme tzv. **Yuleovy-Walkerovy odhady**:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\phi}}_p &= \widehat{\mathbf{R}}_p^{-1}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_p\\ \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \widehat{\gamma}(0)\left(1 - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_p'\widehat{\mathbf{R}}_p^{-1}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_p\right)\end{aligned} \quad .$$

VĚTA 2.15. *Nechť* $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *je centrovaný kauzální autoregresní proces* $AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$, *kde* $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ *a* $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_p$ *je Yuleovův-Walkerův odhad* $\boldsymbol{\phi}_p = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)'$, *pak platí*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p\right) \overset{A}{\sim} N_p\left(\mathbf{O}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}\right),$$

kde $\boldsymbol{\Gamma}_p = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^p$. *Kromě toho platí*

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \xrightarrow{P} \sigma_\varepsilon^2.$$

DŮKAZ. viz Brockwell, Davis (1991, [**5**], str. 255–257). □

Z předchozích tvrzení plyne, že odhady získané řešením Yuleových-Walkerových rovnic jsou asymptoticky nestranné a lze pro ně konstruovat asymptotické intervaly spolehlivosti.

V praktických situacích však skutečný řád p autoregresního procesu neznáme. V tom případě se využijí tvrzení následující věty.

VĚTA 2.16. *Nechť* $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *je centrovaný kauzální autoregresní proces* $AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$, *kde* $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ *a*

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_m = \left(\widehat{\phi}_{m,1}, \ldots, \widehat{\phi}_{m,m}\right)' = \widehat{\mathbf{R}}_m^{-1}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_m, \quad m > p,$$

pak platí

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_m - \boldsymbol{\phi}_m\right) \overset{A}{\sim} N_m\left(\mathbf{O}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{\Gamma}_m^{-1}\right),$$

kde $\boldsymbol{\Gamma}_m = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^m$, $\boldsymbol{\phi}_m$ *jsou koeficienty nejlepší lineární predikce* $\boldsymbol{\phi}_m \mathbf{Y}_m = \mathcal{P}_{\overline{sp}\{Y_m,\ldots,Y_1\}} Y_{m+1}$, *přičemž* $\mathbf{Y}_m = (Y_m, \ldots, Y_1)'$, *tj.* $\boldsymbol{\phi}_m = \mathbf{R}_m^{-1}\boldsymbol{\rho}_m$, *přičemž* $\mathbf{R}_m = (\rho(i-j))_{ij=1}^m$. *Speciálně pro* $m > p$ *platí*

$$\sqrt{n}\,\phi_{m,m} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

DŮKAZ. viz Brockwell, Davis (1991, [**5**], str. 255–257). □

2.11. Předběžné odhady v $AR(p)$ a Durbin-Levinsův algoritmus. Předpokládejme, že máme k dispozici pozorování

$$y_1, \ldots, y_n$$

centrované stacionární posloupnosti

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim AR(m) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Za předpokladu, že $\widehat{\gamma}(0) > 0$, pak můžeme odhadnout neznámé parametry autoregresního modelu řádu $m < n$ pomocí Yuleových-Walkerových rovnic. Odhadnutý $AR(m)$ proces je tvaru

$$Y_t - \widehat{\phi}_{m,1}Y_{t-1} - \cdots - \widehat{\phi}_{m,m}Y_{t-m} = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \widehat{v}_m),$$

kde

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_m = \left(\widehat{\phi}_{m,1}, \ldots, \widehat{\phi}_{m,m}\right)' = \widehat{\mathbf{R}}_m^{-1}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_m$$
$$\widehat{v}_m = \widehat{\gamma}(0)\left(1 - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_m'\widehat{\mathbf{R}}_m^{-1}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_m\right).$$

Jestliže $\widehat{\gamma}(0) > 0$, pak $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots$ nejsou singulární a můžeme využít Durbin-Levinsův algoritmus pro postupné odhady autoregresních koeficientů $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\phi}}_2$ a odhady variability bílého šumu $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \ldots$.

VĚTA 2.17 (Durbin-Levinsův algoritmus). *Jestliže* $\widehat{\gamma}(0) > 0$, *pak parametry* $\widehat{\phi}_{m,1}, \ldots, \widehat{\phi}_{m,m}$ *a* $\widehat{v}_m$ *autoregresního modelu*

$$Y_t - \widehat{\phi}_{m,1}Y_{t-1} - \cdots - \widehat{\phi}_{m,m}Y_{t-m} = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \widehat{v}_m),$$

pro $m = 1, \dots, n-1$ *lze získat rekurzivně ze vztahů*

$$\widehat{\phi}_{1,1} = \frac{\widehat{\gamma}(1)}{\widehat{\gamma}(0)} = \widehat{\rho}(1) \qquad \widehat{v}_0 = \widehat{\gamma}(0) \tag{22}$$

$$\widehat{\phi}_{m,m} = \left[\widehat{\gamma}(m) - \widehat{\boldsymbol{\phi}}'_{m-1}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{m-1}\right] / \widehat{v}_{m-1} \tag{23}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}_m = \widehat{\boldsymbol{\phi}}_{m-1} - \widehat{\phi}_{m,m}\widehat{\boldsymbol{\phi}}^{*}_{m-1} \qquad \widehat{v}_m = \widehat{v}_{m-1}\left(1 - \widehat{\phi}^2_{m,m}\right) \tag{24}$$

kde

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{m-1} = (\widehat{\phi}_{m-1,1}, \dots, \widehat{\phi}_{m-1,m-1})' \qquad \widehat{\boldsymbol{\phi}}^{*}_{m-1} = (\widehat{\phi}_{m-1,m-1}, \dots, \widehat{\phi}_{m-1,1})'$$

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{m} = (\widehat{\phi}_{m,1}, \dots, \widehat{\phi}_{m,m-1}, \widehat{\phi}_{m,m})' \qquad \widehat{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}_{m} = (\widehat{\phi}_{m,1}, \dots, \widehat{\phi}_{m,m-1})'$$

2.12. Předběžné odhady v $MA(q)$ a inovační algoritmus. Jestliže chceme na základě pozorování $y_1, \dots, y_n$ centrované stacionární posloupnosti provést odhad $MA(m)$ $(m = 1, 2, \dots, n-1)$ ve tvaru

$$Y_t = \varepsilon_t + \widehat{\theta}_{m,1}\varepsilon_{t-1} + \cdots + \widehat{\theta}_{m,m}\varepsilon_{t-m} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \widehat{v}_m),$$

můžeme využít inovační algoritmus.

VĚTA 2.18. *Jestliže* $\widehat{\gamma}(0) > 0$*, pak odhady parametrů* MA *procesů lze provést pomocí následujících rekurentních vztahů*

$$\widehat{v}_0 = \widehat{\gamma}(0)$$

$$\widehat{\theta}_{m,m-k} = \widehat{v}_k^{-1}\left[\widehat{\gamma}(m-k) - \sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\theta}_{m,k-j}\widehat{\theta}_{m,m-j}\widehat{v}_j\right] \qquad k = 0, \dots, m-1$$

$$\widehat{v}_m = \widehat{\gamma}(0) - \sum_{j=0}^{m-1}\theta^2_{m,m-j}\widehat{v}_j$$

Označme

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_m = \left(\widehat{\theta}_{m,1}, \dots, \widehat{\theta}_{m,m}\right)'.$$

Pak platí věta

VĚTA 2.19. *Nechť* $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *je kauzální a invertibilní* $ARMA$ *proces* $\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$*,* $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2_\varepsilon)$*,* $E\varepsilon^4_t < \infty$ *a* $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$*,* $|z| \le 1$*. Pak pro libovolnou posloupnost kladných celých čísel* $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *takovou, že* $m < n$*,* $m \to \infty$ *a* $m = o\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$*, když* $n \to \infty$*, pro každé* k *platí*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{m,1} - \psi_1, \widehat{\theta}_{m,2} - \psi_2, \dots, \widehat{\theta}_{m,k} - \psi_k, \right)' \overset{A}{\sim} N_k(\mathbf{0}, \mathbf{A}),$$

kde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{k}$ *a*

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)}\psi_{i-r}\psi_{j-r}.$$

Kromě toho platí

$$\widehat{v}_m \xrightarrow{P} \sigma^2_\varepsilon.$$

DŮKAZ. viz Brockwell, Davis (1991, [**5**], str. 239). □

I když rekurentní odhady koeficientů MA procesů pomocí inovačního algoritmu jsou analogické jako rekurentní odhady koeficientů AR procesů pomocí Durbin-Levinsonova algoritmu, je mezi nimi přece jen jistý rozdíl. Pro odhady $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_p = (\widehat{\phi}_{p,1}, \dots, \widehat{\phi}_{p,p})'$ pomocí Durbin-Levinsonova algoritmu platí

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_p \xrightarrow{P} \boldsymbol{\phi}_p,$$

avšak odhady $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q = (\widehat{\theta}_{q,1}, \dots, \widehat{\theta}_{q,q})'$ nekonvergují podle pravděpodobnosti k $\boldsymbol{\theta}_q$. Ke konvergenci podle pravděpodobnosti je třeba odhad $(\widehat{\theta}_{m,1}, \dots, \widehat{\theta}_{m,q})'$, kde posloupnost $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínky předchozí věty. Výběr m (maximálně až do $\frac{n}{4}$) pro výběr pevné délky se volí tak, aby odhady $(\widehat{\theta}_{m,1}, \dots, \widehat{\theta}_{m,q})'$ se stabilizovaly.

2.13. Předběžné odhady v $ARMA(p,q)$ procesu. Nechť $\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní $ARMA$ proces

$$\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}\sim ARMA(p,q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t\sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2).$$

Z kauzality vyplývá, že existuje posloupnost $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ taková, že $\sum_{j=0}^\infty |\psi_j|<\infty$ a platí $Y_t=\sum_{j=0}^\infty \psi_j\varepsilon_{t-j}$, tj. pro $|z|\le 1$ dostáváme

$$\Psi(z)=\tfrac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \quad\Rightarrow\quad \Phi(z)\Psi(z)=\Theta(z).$$

Koeficienty $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ se určí ze vztahu

$$(1-\varphi_1 z-\varphi_1 z^2-\cdots-\varphi_p z^p)(\psi_0+\psi_1 z+\psi_2 z^2+\cdots)=(1+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\cdots+\theta_q z^q)$$

porovnáním koeficientů u mocnin proměnné z , tj.

$$\begin{array}{lll}
z^0: & \psi_0=1 & \Rightarrow \quad \psi_0=1\\
z^1: & \psi_1-\varphi_1=\theta_1 & \Rightarrow \quad \psi_1=\theta_1+\varphi_1\\
z^2: & \psi_2-\varphi_1\psi_1-\varphi_2=\theta_2 & \Rightarrow \quad \psi_2=\theta_2+\varphi_1\psi_1+\varphi_2\\
z^3: & \psi_3-\varphi_2\psi_1-\varphi_1\psi_2-\varphi_3=\theta_3 & \Rightarrow \quad \psi_3=\theta_3+\varphi_2\psi_1+\varphi_1\psi_2+\varphi_3\\
 & \vdots &
\end{array}$$

Obecně, položíme-li $\begin{array}{ll}\theta_j=0 & \text{pro} \quad j>q\\ \varphi_j=0 & \qquad\quad j>p\end{array}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1\\
\psi_j &= \theta_j+\sum_{i=1}^{\min(j,p)}\varphi_i\psi_{j-i} \qquad j=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Za předběžné odhady $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{p+q}$ použijeme inovační odhady $\widehat\theta_{m,1},\ldots,\widehat\theta_{m,p+q}$, jejichž asymptotické vlastnosti dává předchozí věta. Takže dostáváme

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2}=\widehat v_m$$

a

$$\widehat\theta_{m,j}=\theta_j+\sum_{i=1}^{\min(j,p)}\varphi_i\widehat\theta_{m,j-i} \qquad j=1,2,\ldots,p+q.$$

Nejprve uvažujeme rovnice pro $j=q+1,\ldots,p+q$

$$\begin{pmatrix}\widehat\theta_{m,q+1}\\ \widehat\theta_{m,q+2}\\ \vdots\\ \widehat\theta_{m,q+p-1}\\ \widehat\theta_{m,q+p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widehat\theta_{m,q} & \widehat\theta_{m,q-1} & \cdots & \cdots & \widehat\theta_{m,q+1-p}\\ \widehat\theta_{m,q+1} & \widehat\theta_{m,q} & \widehat\theta_{m,q-1} & \cdots & \widehat\theta_{m,q+2-p}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \widehat\theta_{m,q+p-2} & \cdots & \widehat\theta_{m,q+1} & \widehat\theta_{m,q} & \widehat\theta_{m,q-1}\\ \widehat\theta_{m,q+p-1} & \cdots & \cdots & \widehat\theta_{m,q+1} & \widehat\theta_{m,q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_{p-1}\\ \varphi_p\end{pmatrix}.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme odhady $\widehat\varphi_1,\ldots,\widehat\varphi_p$. Nakonec získáme odhady $\widehat\theta_1,\ldots,\widehat\theta_q$ ze vztahů

$$\widehat\theta_j=\widehat\theta_{m,j}-\sum_{i=1}^{\min(j,p)}\widehat\varphi_i\widehat\theta_{m,j-i} \qquad j=1,\ldots,q.$$

Poznámka 2.20. Pro $MA(q)$ platí $\widehat\theta_j=\widehat\theta_{m,j}$, neboť $p=0$.

2.14. Maximálně věrohodné odhady. Předpokládejme, že $\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}$ je **Gaussovský proces** s nulovou střední hodnotou a kovarianční funkcí

$$\gamma(i,j)=EX_iX_j.$$

Označme

$$\mathbf{Y}_n=(Y_1,\ldots,Y_n)' \qquad \text{a} \qquad \mathbf{\Gamma}_n=(\gamma(i,j))_{i,j=1}^n.$$

Věrohodnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{Y}_n$ je tvaru

$$L(\mathbf{\Gamma}_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{\Gamma}_n|^{-\frac12}\exp\{-\tfrac12\mathbf{Y}_n'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\mathbf{Y}_n\}.$$

Dále označme

$$\mathcal{M}_n=\overline{sp}\{Y_n,\ldots,Y_1\}$$

a

$$\widehat{Y}_n = \begin{cases} 0\ (=\mu_Y) & \text{pro } n=1 \\ P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_n) & \text{pro } n=2,3,\dots \end{cases}$$

pak zřejmě

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_n - \widehat{Y}_n, \dots, Y_1 - \widehat{Y}_1\} \qquad n \geq 1.$$

Pro nejlepší lineární predikce použijme inovační algoritmus, podle kterého

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(Y_{n+1-j} - \widehat{Y}_{n+1-j}\right) & n=1,2,\dots \end{cases}$$

přičemž střední kvadratickou chybu označme

$$v_n = \left\| Y_{n+1} - \widehat{Y}_{n+1} \right\|^2.$$

Označíme-li

$$\widehat{\mathbf{Y}}_n = (\widehat{Y}_1, \dots, \widehat{Y}_n)'$$

a

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n-2,n-2} & \theta_{n-2,n-3} & \cdots & -\theta_{n-2,1} & 1 & 0 \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \cdots & \cdots & \theta_{n-1,1} & 1 \end{pmatrix},$$

pak můžeme psát

$$\widehat{\mathbf{Y}}_n = (\mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n)(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n).$$

Postupně upravujme

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n + \widehat{\mathbf{Y}}_n = (\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) + (\mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n)(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) = \mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n).$$

Tento výsledek použijme při vyjádření varianční matice

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_n = E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n' &= E\left[\mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)'\mathbf{C}_n'\right] \\ &= \mathbf{C}_n E\left[(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)'\right]\mathbf{C}_n' \end{aligned}$$

Nyní počítejme

$$\begin{aligned} &E\left[(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)'\right] \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{E(Y_1 - \widehat{Y}_1)^2}_{=v_0} & \underbrace{E(Y_1 - \widehat{Y}_1)(Y_2 - \widehat{Y}_2)}_{=0} & \cdots & \underbrace{E(Y_1 - \widehat{Y}_1)(Y_n - \widehat{Y}_n)}_{=0} \\ \underbrace{E(Y_2 - \widehat{Y}_2)(Y_1 - \widehat{Y}_1)}_{=0} & \underbrace{E(Y_2 - \widehat{Y}_2)^2}_{=v_1} & \cdots & \underbrace{E(Y_2 - \widehat{Y}_2)(Y_n - \widehat{Y}_n)}_{=0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{E(Y_n - \widehat{Y}_n)(Y_1 - \widehat{Y}_1)}_{=0} & \cdots & \underbrace{E(Y_n - \widehat{Y}_n)(Y_{n-1} - \widehat{Y}_{n-1})}_{=0} & \underbrace{E(Y_n - \widehat{Y}_n)^2}_{=v_{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{diag}\{v_0, \dots, v_{n-1}\} = \mathbf{D}_n. \end{aligned}$$

Takže

$$\mathbf{\Gamma}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{D}_n\mathbf{C}_n'\,.$$

Počítejme dále

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n'\mathbf{\Gamma}_n^{-1}\mathbf{Y}_n &= (\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)'\mathbf{C}_n'\left[\mathbf{C}_n\mathbf{D}_n\mathbf{C}_n'\right]^{-1}\mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) \\ &= (\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)'\mathbf{C}_n'\left(\mathbf{C}_n'\right)^{-1}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) \\ &= (\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n)'\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{Y}_n - \widehat{\mathbf{Y}}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(Y_j - \widehat{Y}_j)^2}{v_{j-1}}\,. \end{aligned}$$

Dále zřejmě platí

$$|\mathbf{\Gamma}_n| \ = |\mathbf{C}_n\mathbf{D}_n\mathbf{C}_n'| = \underbrace{|\mathbf{C}_n|}_{=1}|\mathbf{D}_n|\underbrace{|\mathbf{C}_n'|}_{=1} = \ v_0v_1\cdots v_{n-1}\ .$$

Takže věrohodnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{Y}_n$ je tvaru

$$L(\mathbf{\Gamma}_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,(v_0v_1\cdots v_{n-1})^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-\widehat{Y}_j)^2}{v_{j-1}}\right\}.$$

Nechť $\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní $ARMA$ proces

$$\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}\sim ARMA(p,q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t\sim N(0,\sigma_\varepsilon^2).$$

Ukazuje se (viz Brockwell, Davis, 1991, [**5**], str. 168–170), že k velkému zjednodušení jednokrokové predikce dojde, pokud inovační algoritmus aplikujeme ne na Y_t, ale na následující transformovaný proces

$$W_t = \begin{cases}\sigma_\varepsilon^{-1}Y_t & t=1,\ldots,m;\ \ m=\max(p,q)\\ \Phi(B)Y_t & t>m.\end{cases}$$

Poznamenejme nejprve, že zřejmě

$$\overline{sp}\{Y_1,\ldots,Y_n\} = \overline{sp}\{W_1,\ldots,W_n\} \qquad n\geq 1.$$

Označme

$$\widehat{W}_{j+1} = \begin{cases}0=\widehat{Y}_1 & j=0,\\ P_{\overline{sp}\{W_1,\ldots,W_j\}}(W_{j+1}) & j\geq 1.\end{cases}$$

Pak platí

$$\widehat{W}_t = \begin{cases}\sigma_\varepsilon^{-1}\widehat{Y}_t & t=1,\ldots,m;\ \ m=\max(p,q),\\ \sigma_\varepsilon^{-1}\left[\widehat{Y}_t-\varphi_1Y_{t-1}-\cdots-\varphi_pY_{t-p}\right] & t>m,\end{cases}$$

takže

$$Y_t-\widehat{Y}_t = \sigma_\varepsilon(W_t-\widehat{W}_t).$$

Při aplikaci inovačního algoritmu na W_t dostaneme $\theta_{n,j}$ a střední kvadratické chyby, které označme r_j.

Pak z předchozích vztahů vyplývá, že platí

$$\widehat{Y}_{n+1} = \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\theta_{n,j}(Y_{n+1-j}-\widehat{Y}_{n+1-j}) & 1\leq n<m,\\ \varphi_1Y_n+\cdots+\varphi_pY_{n+1-p}+\sum_{j=1}^{q}\theta_{n,j}(Y_{n+1-j}-\widehat{Y}_{n+1-j}) & n\geq m.\end{cases}$$

a

$$v_n \ = E(Y_{n+1}-\widehat{Y}_{n+1})^2 = \sigma_\varepsilon^2E(W_{n+1}-\widehat{W}_{n+1})^2 = \ \sigma_\varepsilon^2r_n\ .$$

Takže věrohodnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{Y}_n$ je tvaru

$$L(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}}\,(r_0r_1\cdots r_{n-1})^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-\widehat{Y}_j)^2}{r_{j-1}}\right\}.$$

Pokud položíme

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^2}=0,$$

a budeme předpokládat, že $\widehat{Y}_j$ a r_j jsou nezávislé na σ_ε^2, dostaneme

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2} = \tfrac{1}{n}S(\widehat{\boldsymbol{\phi}},\widehat{\boldsymbol{\theta}})\ ,$$

kde

$$S(\widehat{\boldsymbol{\phi}},\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-\widehat{Y}_j)^2}{r_{j-1}}$$

a $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ jsou hodnoty, které minimalizují tzv. **redukovaný logaritmus věrohodnostní funkce**

$$l(\widehat{\boldsymbol{\phi}},\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \ln\left(\tfrac{1}{n}S(\widehat{\boldsymbol{\phi}},\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right)+\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln r_{j-1}\ .$$

Poznámka 2.21. Alternativou k maximalizaci $L(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2)$ je **minimalizace váženého součtu čtverců**

$$S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(Y_j - \widehat{Y}_j)^2}{r_{j-1}},$$

přičemž

$$\tilde{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{n-p-q} S(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$$

a platí

$$\frac{S(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\tilde{\sigma_\varepsilon^2}} \overset{A}{\sim} \chi^2(n-p-q).$$

(viz Brockwell, Davis, 1991, [**5**], §8.9).

Takto získané odhady se nazývají **odhady metodou nejmenších čtverců**. což vede k systému nelineárních rovnic.

Pokud chceme zkoumat **asymptotické vlastnosti maximálně věrohodných odhadů**, musíme zesílit předpoklady: nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní $ARMA$ proces

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim ARMA(p,q) : \Phi(B) Y_t = \Theta(B) \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

a nechť $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ nemají společné kořeny.

Pak, označíme-li maximálně věrohodný odhad neznámých parametrů

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}', \sigma_\varepsilon^2)'$$

symbolem

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} = (\widehat{\boldsymbol{\phi}}', \widehat{\boldsymbol{\theta}}', \widehat{\sigma_\varepsilon^2})',$$

platí

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta} \right) \overset{A}{\sim} N_{n+p+1}(\mathbf{0}, V(\boldsymbol{\beta})),$$

kde

$$V(\boldsymbol{\beta}) = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} E\mathbf{U}_t\mathbf{U}_t' & E\mathbf{U}_t\mathbf{V}_t' \\ E\mathbf{V}_t\mathbf{U}_t' & E\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t \end{pmatrix}^{-1},$$

přičemž

$$\mathbf{U}_t = (U_t, \ldots, U_{t+1-p})'$$
$$\mathbf{V}_t = (V_t, \ldots, V_{t+1-q})'$$

a $\{U_t, t \in \mathbb{Z}\}$ i $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou autoregresní procesy

$$\Phi(B) U_t = \varepsilon_t$$
$$\Theta(B) V_t = \varepsilon_t$$

(viz Brockwell, Davis, 1991, [**5**], §8.9).

KAPITOLA 4

Nestacionární jednorozměrné náhodné procesy

Až dosud jsme uvažovali pouze o procesech (*slabě*) *stacionárních*. V reálných situacích se však se stacionárními procesy setkáváme pouze zřídka.

Obecně rozlišujeme dva druhy **nestacionarity**
- ve střední hodnotě,
- v rozptylu.

1. Procesy nestacionární ve střední hodnotě

1.1. Úvod.

Nejprve je třeba vysvětlit a odlišit pojmy, a to **deterministický** a **stochastický** trend.

Deterministický trend:

pokud **nestacionaritu ve střední hodnotě chápeme jako funkci času**, pak k jeho modelování můžeme použít například

polynomický trend: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_d t^d$,

periodický trend: $f(t) = \mu + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j cos\lambda_j t + \beta_j sin\lambda_j t)$.

Stochastický trend:

U $ARMA$ procesů jsem požadovali, aby všechny kořeny polynomu

$$\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$$

ležely **vně** jednotkové kružnice, tj. aby proces byl **kauzální**.

Pokud však nějaký kořen leží

- **na jednotkové kružnici**,
  mluvíme o procesu **nestacionárním se stochastickým trendem**,
- **uvnitř jednotkové kružnice**,
  mluvíme o procesu **nestacionárním explozivního typu**.

1.2. Stacionární procesy kolem deterministického trendu.

Jestliže pro náhodný proces platí vztah

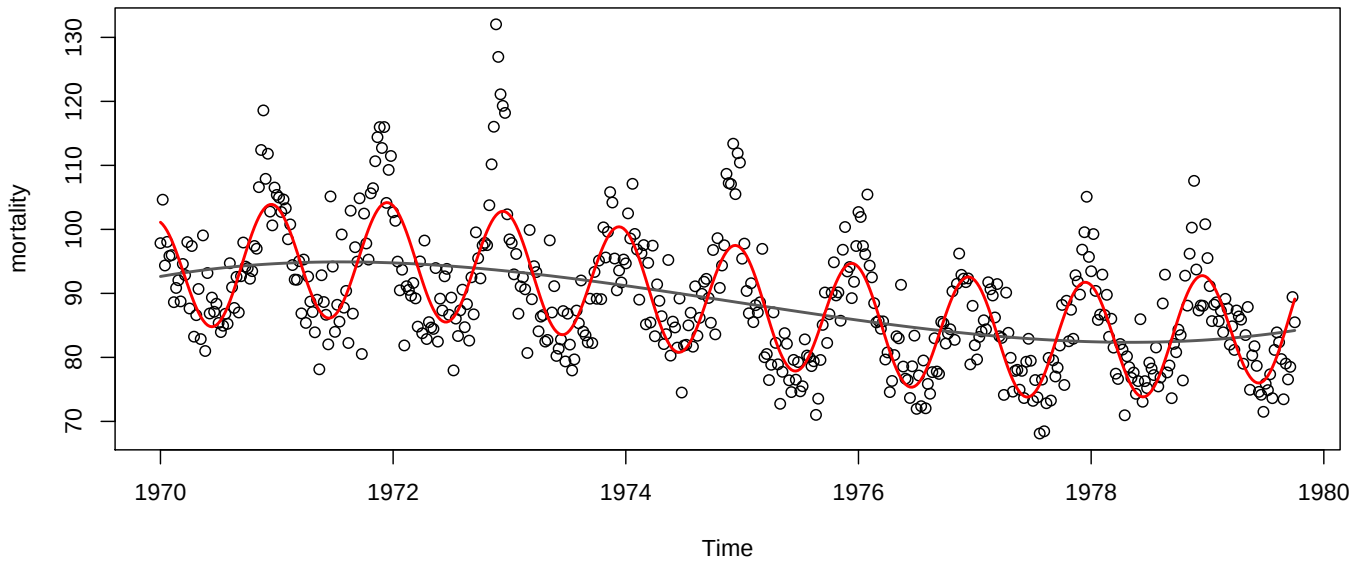
$$Y_t = f(t) + \eta_t, \quad \text{kde} \quad \eta_t \sim ARMA(p,q),$$

pak odečtením deterministického trendu dostaneme stacionární proces

$$Y_t - f(t) = \eta_t, \quad \text{kde} \quad \eta_t \sim ARMA(p,q).$$

Jako příklad můžeme uvést týdenní časovou řadu s počty úmrtí na kardiovaskulární choroby s deterministickou funkcí ve tvaru

$$f(t) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3}_{\text{trend}} + \underbrace{\alpha_1 \cos(2\pi t/52) + \alpha_2 \sin(2\pi t/52)}_{\text{sezónnost}}$$



Obrázek 1. Ukázka stacionárního náhodného procesu kolem deterministického trendu.

Této třídě náhodných procesů se také někdy říká **integrované procesy řádu nula**, popř. se nazývají **trendově stacionární** a píše se

$$Y_t \sim I(0).$$

Ihned vidíme, že $ARMA(p,q)$ procesy jsou integrovanými procesy řádu nula, neboť v tom případě

$$f(t) \equiv 0,$$

pro centrované stacionární náhodné procesy, popřípadě

$$f(t) \equiv \mu < \infty$$

pro necentrované stacionární náhodné procesy.

K modelování nestaconarity ve střední hodnotě chápané jako funkci času se využívají **regresní modely**, které vycházejí z rozkladu (dekompozice) časové řady na několik složek.

Dekompozicí časové řady rozumíme rozklad časové řady na **deterministickou** a **náhodnou složku**, která má v případě

aditivního modelu tvar $Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t,$

multiplikativního modelu $Y_t = Tr_t \cdot Sz_t \cdot \varepsilon_t.$

Jednotlivé složky

Tr_t, Sz_t	trend a sezónní složka	mají *deterministický charakter*
ε_t	náhodné fluktuace	mají *stochastický charakter*,

přičemž $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **bílý šum** s nulovou střední hodnotou $E\varepsilon_t = 0$, který je nekorelovaný, tj.

$$C(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E\varepsilon_t\varepsilon_s = \begin{cases} 0 & s \neq t, \\ D\varepsilon_t = \sigma^2 & s = t. \end{cases} \qquad \text{Značíme} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{L}_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n),$$

kde pro $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}$ je n-rozměrný vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ tvaru $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \ldots, \varepsilon_{t+n-1})'$, přičemž vždy $E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)'$ a varianční matice $D\boldsymbol{\varepsilon} = (C(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{i,j=1}^n = \sigma^2\mathbf{I}_n$, kde $\mathbf{I}_n$ je jednotková matice. Pokud navíc budeme předpokládat **normalitu**, budeme značit $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, popř. $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$.

1.2.1. *Obecné lineární regresní modely a metoda nejmenších čtverců.* Mějme **regresní model** plné hodnosti:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \ \wedge \ h(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = p+1 = k \ \wedge \ n > p+1 \ \wedge \ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{L}_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$$

s vektorem závisle proměnných $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$
maticí plánu $\mathbf{X} = (x_{ij}) \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 0, \ldots, p$
vektorem chyb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$, kde $\quad E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}; \quad D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2\mathbf{I}_n.$

Tento model se také nazývá **regresní model plné hodnosti s pevným plánem**, neboť regresory x_{ij} $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$ jsou nenáhodné, tj. pevně dané.

Podmínka $D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2\mathbf{I}_n$ znamená, že náhodné veličiny $Y_1, \ldots, Y_n$ mají **různé střední hodnoty** (které jsou známou funkcí regresorů) a **stejné rozptyly** - mluvíme o **homogenitě rozptylu**.

Odhad neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta}$ provedený **metodou nejmenších čtverců** je řešením normálních rovnic

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

a platí:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Označme

- ✏ $\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}_{\mathbf{H}}\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{Y}$
- ✏ $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}} = (\underbrace{\mathbf{I} - \mathbf{H}}_{\mathbf{M}})\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})) = \underbrace{\mathbf{M}\mathbf{X}}_{=\mathbf{0}}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\boldsymbol{\varepsilon}$
- ✏ $s^2 = \frac{SSE}{n-p-1} = \frac{1}{n-p-1}(\mathbf{Y}-\widehat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y}-\widehat{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{n-p-1}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n-p-1}\widehat{\mathbf{Y}}'(\mathbf{I}-\mathbf{H})\widehat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{n-p-1}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}-\mathbf{H})\boldsymbol{\varepsilon}$

Pak platí (viz např. Zvára, K.: Regresní analýza. Praha. Academia. 1989):

- $E\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$,
- $Es^2 = \frac{E(SSE)}{n-p-1} = \sigma^2$, tj. s^2 je nestranným odhadem rozptylu, $D\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Platí-li navíc

- ☞ $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)}$,

pak

- $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I_n)$
- $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim N_n(\mathbf{O}, \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H}))$
- $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{p+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$
- $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p-1)$
- $\boldsymbol{\beta}$ a s^2 jsou stochasticky nezávislé
- $T_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{s^2 v_{jj}}} \sim t(n-p-1)$, kde $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (v_{ij})_{i,j=0,\ldots,p}$
- $F = \frac{1}{qs^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'W^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) \sim F(q, n-p-1)$,
  kde $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \mathbf{W} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix}$ a $h(\mathbf{W}) = q$
- $T = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{s^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t(n-p-1)$, kde $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_p)'$ a $E(\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$
- Označme i-tý řádek matice plánu $\mathbf{X}$ jako $\mathbf{x}_i' = (x_{i0}, \ldots, x_{ip})$, pak

$$\begin{aligned} Y_i &= \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i && \sim \quad N(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}, \sigma^2), \\ \widehat{Y}_i &= \mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}} && \sim \quad N(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i) \\ Y_i - \widehat{Y}_i &= \mathbf{x}_i'(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) + \varepsilon_i && \sim \quad N(0, \sigma^2(1 + \mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i)). \end{aligned}$$

V následující tabulce uvádíme horní a dolní meze příslušných intervalů spolehlivosti:

Intervaly spolehlivosti		
pro parametry β_j $(j=0,\dots,p)$	dolní mez	$\beta_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{v_{jj}}$
	horní mez	$\beta_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{v_{jj}}$
pro střední hodnotu predikce $E\widehat{Y}_i = E\mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ $(i=1,\dots,n)$	dolní mez	$\mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{\mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i}$
	horní mez	$\mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{\mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i}$
pro predikci $\widehat{Y}_i = \mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ $(i=1,\dots,n)$	dolní mez	$\mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{1+\mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i}$
	horní mez	$\mathbf{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{1+\mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i}$

kde $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)$ je $1-\frac{\alpha}{2}$ kvantil Studentova rozdělení o $n-p-1$ stupních volnosti

Až doposud jsme uvažovali lineární regresní model plné hodnosti. V některých situacích je však vhodné použít model s **neúplnou hodností**,

$$\text{tj. } h(\mathbf{X}) = r < k \le n.$$

V tom případě systém normálních rovnic má nekonečně mnoho řešení, takže žádný vektor středních hodnot

$$E\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

neurčuje jednoznačně vektor $\boldsymbol{\beta}$.

Není však vyloučeno, že existují nějaké **lineární kombinace vektoru** $\boldsymbol{\beta}$, jejichž hodnoty jsou vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbf{X})$ určeny **jednoznačně**. Ukazuje se (viz Anděl, 1978), že těmito hledanými vektory jsou **(nestranně lineárně) odhadnutelné** parametrické funkce $\theta = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$. Jejich důležitou vlastností je, že jsou to právě lineární kombinace řádků matice $\mathbf{X}$, tj. $\mathbf{c} \in \mathcal{M}(\mathbf{X}')$. Pokud máme vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_m)'$, $m \in \mathbb{N}$, jehož složky jsou odhadnutelné, jde o odhadnutelný vektor parametrů.

Dá se ukázat (viz Anděl, 1978), že nejlepším nestranným lineárním odhadem odhadnutelné parametrické funkce $\theta = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ je $\hat{\theta} = \mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, kde $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ je libovolné řešení normálních rovnic. Odtud je ihned vidět, že vektor středních hodnot $\boldsymbol{\mu} = E\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ je vždy odhadnutelný a jeho nejlepší nestranný lineární odhad je tvaru

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{Y}.$$

Platí-li navíc

☞ $\boxed{\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)}$,

pak (viz Anděl, 1978)

- Statistika $S_e/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{Y}'[\mathbf{I}_n-\mathbf{H}]\mathbf{Y} \sim \chi^2(n-r)$.
- Statistika $s^2 = \frac{S_e}{n-r}$ je nestranným odhadem parametru σ^2.
- Vektor $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ a s^2 jsou **nezávislé**.
- Statistika $T = \frac{\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{c}}} \sim t(n-r)$.

Někdy musíme vzít současně se základním lineárním modelem v úvahu i několik speciálních případů tohoto modelu, kterým se říká **podmodely** nebo **submodely**.

Mějme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)'$ a předpokládejme, že platí model M a jsou dány další dva submodely M_1 a M_2, přičemž pro $n \ge k \ge r \ge r_1 \ge r_2$ máme

✏ $\boxed{M}$: $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$, $\mathbf{X}$ je typu $n \times k$, $h(\mathbf{X}) = r$, $\boldsymbol{\beta}$ je typu $k \times 1$

✏ $\boxed{M_1}$: $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{U}\boldsymbol{\beta}_1, \sigma^2\mathbf{I}_n)$, $\mathbf{U}$ je typu $n \times k_1$, $h(\mathbf{U}) = r_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ je typu $k_1 \times 1$

✏ $\boxed{M_2}$: $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{I}_n)$, $\mathbf{T}$ je typu $n \times k_2$, $h(\mathbf{T}) = r_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ je typu $k_2 \times 1$

Položme $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \mathbf{U}(\mathbf{U}'\mathbf{U})^{-}\mathbf{U}'\mathbf{Y}$ a $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_2 = \mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-}\mathbf{T}'\mathbf{Y}$, pak (viz Anděl, 1978)

- platí-li model $\boxed{M_1} \Rightarrow F_1 = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}-\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1)'(\widehat{\boldsymbol{\mu}}-\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1)}{r-r_1}\frac{1}{s^2} \sim F(r-r_1, n-r)$,
- platí-li model $\boxed{M_2} \Rightarrow F_2 = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1-\widehat{\boldsymbol{\mu}}_2)'(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1-\widehat{\boldsymbol{\mu}}_2)}{r_1-r_2}\frac{1}{s^2} \sim F(r_1-r_2, n-r)$.

Koeficient determinace

Předpokládejme, že v regresním modelu

$$\boxed{M}: \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$$

matice plánu $\mathbf{X}$ (typu $n \times (p+1)$) má v prvním sloupci vektor jedniček. Pak velmi důležitou roli v regresní analýza hraje tzv. **nulový (minimální) model**, což je model ve tvaru

$$\boxed{M_0}: \quad Y_i = \beta_0 + \epsilon_i = \mu + \epsilon_i, \quad \text{kde} \quad \epsilon_i \sim iid\ N(0, \sigma_\epsilon^2), \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\epsilon^2\mathbf{I}_n).$$

Označíme–li matici plánu nulového modelu symbolem $\mathbf{X}_0 = \mathbf{1}_n$, kde $\mathbf{1}_n$ je jednotkový vektor, pak řešením normálních rovnic dostaneme

$$\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\beta_0 = \mathbf{X}_0\mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n\beta_0 = \mathbf{1}_n\mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad n\beta_0 = n\overline{Y} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\beta}_0 = \widehat{\mu} = \overline{Y}.$$

Bývá zvykem v regresní analýze označovat

$$SSE = (\mathbf{Y}-\widehat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y}-\widehat{\mathbf{Y}}) = (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n (Y_i-\hat{Y}_i)^2 \qquad \text{Sum of Squares, Error}$$

$$SST = (\mathbf{Y}-\widehat{\mathbf{Y}}_0)'(\mathbf{Y}-\widehat{\mathbf{Y}}_0) = (\mathbf{Y}-\overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\mathbf{Y}-\overline{Y}\mathbf{1}_n) = \sum_{i=1}^n (Y_i-\overline{Y})^2 \qquad \text{Sum of Squares, Total}$$

$$SSR = (\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n) = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i-\overline{Y})^2 \qquad \text{Sum of Squares, Regression}$$

Pak nestrannými odhady rozptylu σ_ϵ^2 v minimálním modelu M_0 a σ^2 ve výchozím modelu M jsou v tomto značení

$$\widehat{\sigma}_\epsilon^2 = \tfrac{SST}{n-1} \quad \text{a} \quad \widehat{\sigma}^2 = \tfrac{SSE}{n-p-1}.$$

Protože minimální model $\boxed{M_0}$ je podmodelem výchozího modelu $\boxed{M}$, tak lze dokázat, že platí

$$SSR = SST - SSE \quad \Rightarrow \quad \boxed{SST = SSR + SSE}.$$

Koeficient determinace R^2 je vlastně výběrový korelační koeficient mezi $\mathbf{Y}$ a $\widehat{\mathbf{Y}}$ a ukazuje, jak velký díl výchozí variability hodnot závisle proměnné (charakterizované výrazem SST) se podařilo vysvětlit uvažovanou regresní závislostí. Nevysvětlená variabilita je dána reziduálním součtem čtverců SSE.

S využitím vztahu $\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \widehat{Y}_i$ se dá ukázat, že

$$R^2(\mathbf{Y}, \widehat{\mathbf{Y}}) = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})(\widehat{Y}_i - \overline{Y})\right]^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}$$

$$= \frac{\left[(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)\right]^2}{(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)}$$

$$= \frac{\{[(\mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}}) + (\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)]'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)\}^2}{(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)}$$

$$= \frac{[(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)]^2}{(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)}$$

$$= \frac{(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)}{(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)'(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{1}_n)} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = R^2$$

Označíme–li vychýlené varianty odhadů příslušných rozptylů symboly

$$\widetilde{\sigma}_\epsilon^2 = \tfrac{SST}{n} \quad \text{a} \quad \widetilde{\sigma}^2 = \tfrac{SSE}{n},$$

pak můžeme psát

$$R^2 = 1 - \frac{SSE/n}{SST/n} = 1 - \frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}_\epsilon^2}.$$

Nahradíme–li v tomto vzorci vychýlené odhady rozptylů nevychýlenými, dostaneme tzv. **upravený (adjustovaný) koeficient determinace**

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}^2_\epsilon} = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2).$$

S ohledem na rozklad celkové sumy SST na součet dvou složek SSR a SSE bývá zvykem jako výstup regresní analýzy nabízet tzv. ANOVA tabulku ve formě

Source	*df*	SS	MS	F	*p-valule*
Total	$n-1$	SST			
Regression	p	SSR	$MSR = \frac{SSR}{p}$	$\frac{MSR}{MSE}$	$P\left(F > \frac{MSR}{MSE}\right)$
Residual	$n-p-1$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{n-p-1}$		

Statistika F má za platnosti nulové hypotézy $(\beta_1, \ldots, \beta_p)' = (0, \ldots, 0)'$ F– rozdělení o p a $n-p-1$ stupních volnosti.

Příklad 1.1.

Regresní přímka v klasickém lineárním regresním modelu

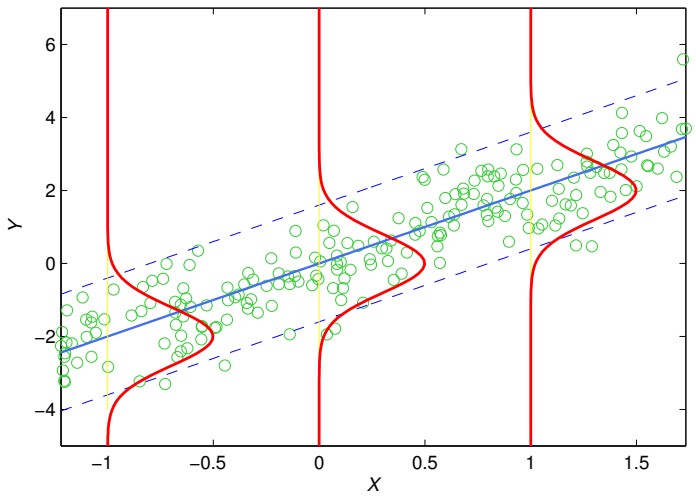
Klasickým speciálním případem lineárního modelu je **jednoduchá lineární regrese**, kdy předpokládáme, že nezávislé náhodné veličiny Y_i $(i = 1, \ldots, n)$ mají normální rozdělení

$$Y_i \sim N(\mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2),$$

kde x_i jsou dané konstanty, které nejsou všechny stejné. Rozptyly Y_i jsou stejné, kdežto střední hodnoty lze vyjádřit jako lineární funkci známých konstant x_i pomocí neznámých parametrů β_0, β_1.

V tomto případě

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \text{matice plánu: } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$



Obrázek 2. **Ukázka klasického regresního modelu s homogenním rozptylem.**

1.2.2. *Rozšířený lineární regresní model a vážená metoda nejmenších čtverců.* Následující věta ukazuje, jakým způsobem lze lineární regresní model rozšířit i na případ, kdy rozptyl není homogenní.

Věta 1.1. *Mějme regresní model, ve kterém* $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{L}_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{V})$, $\mathbf{V} > 0$, *a hodnost matice* $h(\mathbf{X}) = k$ *(tj.* $\mathbf{V}$ *je pozitivně definitní), pak odhad pomocí metody nejmenších čtverců je roven*

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Důkaz. Jelikož jsme předpokládali, že $\mathbf{V} > 0$, tj. $\mathbf{V}$ je pozitivně definitní, takže existuje $\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}$, která je symetrická a regulární. Proto

$$h(\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}) = k = h(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})$$

takže $\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ je regulární. Položme

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}, \qquad \eta = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Pak z

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

plyne, že

$$\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon},$$

tj.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}.$$

Pak

$$E\boldsymbol{\eta} = E\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\underbrace{E\boldsymbol{\varepsilon}}_{=0} = 0$$

a

$$D\boldsymbol{\eta} = D(\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2\mathbf{I}_n$$

a tento model již splňuje předpoklady klasického regresního modelu, ve kterém odhad vektoru neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců je roven

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{Z} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

□

Poznámka 1.2. Nejčastěji se matice $\mathbf{V}$ uvažuje ve tvaru

$$\mathbf{V} = \mathrm{diag}\{v_1, \ldots, v_n\},$$

tj. jde o diagonální matici. Položíme-li

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1} = diag\{\tfrac{1}{v_1}, \ldots, \tfrac{1}{v_n}\} = diag\{w_1, \ldots, w_n\},$$

přičemž prvky $w_1, \ldots, w_n$ se nazývají **váhami** (tedy čím je rozptyl větší, tím je váha pozorování menší). Pak odhad neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y}$$

se nazývá VÁŽENÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ.

Polynomický a trigonometrický trend

Z velkého okruhu **trendových funkcí**, které vedou k lineárnímu regresnímu modelu, se zaměříme na

- ❑ **polynomický trend**: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_p t^p$
- ❑ **trigonometrický trend**: $f(t) = \mu + \sum_{j=1}^{p}(\alpha_j cos\lambda_j t + \beta_j sin\lambda_j t)$

V případě **polynomického trendu**, matice plánu je tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^p \end{pmatrix}.$$

Kromě neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_p)'$ zbývá určit vhodný stupeň polynomu p. Pro odhad stupně polynomu se nabízí 2 intuitivní metody

(1) „**od nejnižšího stupně k nejvyššímu**“: začneme se stupněm $p = 0$, postupně stupeň zvyšujeme a testujeme hypotézu

$$H_0 : \beta_p = 0 \quad \text{proti alternativě} \quad H_1 : \beta_p \neq 0$$

pomocí statistiky (viz Anděl)

$$T_p = \frac{\hat{\beta}_p - \beta_p}{\sqrt{s_k^2 v_{pp}}} \quad \sim \quad t(n-p-1), \quad \text{kde} \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (v_{ij})_{i,j=0}^{p}.$$

Jestliže H_0 **zamítneme** ⇒ **zvyšujeme** stupeň polynomu.

(2) „**od maximálního stupně dolů**“: zvolme $p = p_{max}$. Testujeme opět

$$H_0 : \beta_p = 0 \quad \text{proti alternativě} \quad H_1 : \beta_p \neq 0$$

pomocí T_p. Jestliže H_0 **nezamítneme** ⇒ **snižujeme** stupeň polynomu.

Obě metody nedávají uspokojivé výsledky (viz Anderson(1971)).

Penalizační metoda odhadu počtu regresních koeficientů

Předpokládejme, že k_0 je **skutečný počet regresních parametrů**. Lze ukázat, že platí

$$\begin{array}{lll} E(s_k^2) > \sigma^2 & \text{pro} & k < k_0 \\ E(s_k^2) = \sigma^2 & & k \geq k_0 \end{array}$$

Zůstává problém, jak z grafu hodnot s_k^2 určit právě tu hodnotu k_0, od níž počínaje již graf dostává vodorovný charakter. Tento problém se řeší zavedením tzv. *penalizační funkce* a např. Anděl navrhuje místo hodnot s_k^2 použít její modifikaci

$$A_k = s_k^2(1 + kw_n).$$

Penalizační funkce w_n

- ➢ nesmí být příliš velká - aby nezkreslila klesající charakter s_k^2 pro $k < k_0$;
- ➢ nesmí být příliš malá - aby z hodnot s_k^2 oscilujících kolem σ^2 vytvořila pro $k \geq 0$ rostoucí posloupnost;

Za odhad $\hat{k}$ se bere hodnota $k \in \{0, 1, \ldots, k_{max}\}$, pro kterou A_k nabývá svého **minima**. Konstanta k_{max} je maximální počet parametrů, které jsme ochotni uvažovat a o němž jsme si jisti, že splňuje podmínku $k_0 \leq k_{max}$.

Za dosti obecných podmínek týkajících se rozumné volby hodnot t_i lze ukázat (Geweke a Meese(1981), Anděl a kol.(1981)), že

$$\text{pokud} \quad w_n > 0 \ \wedge \ w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \wedge \ nw_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{k} \to k_0 \ \text{ podle pravděpodobnosti.}$$

V praxi se osvědčilo volit

$$w_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}},$$

tj.

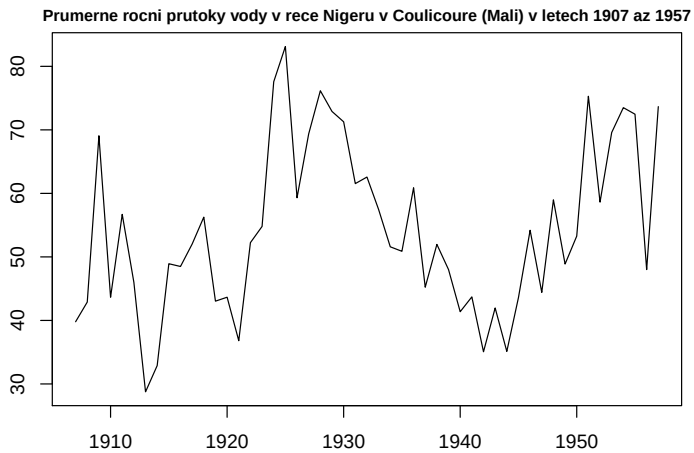
$$A_k = s_k^2 \left(1 + \frac{k}{\sqrt[4]{n}}\right).$$

Další kriteria pro určení počtu regresních koeficientů

Akaikeovo infor. kritérium (1972)	$AIC_k = \ln s_k^2 + \frac{2k}{n}$	nadhodnocuje k_0
Swarz (1978) a Rissanen (1978)	$SR_k = \ln s_k^2 + \frac{k \ln n}{n}$	
Hannan a Quinn (1979)	$HQ_k = \ln s_k^2 + \frac{2kc \ln \ln n}{n}$	$c > 1$; obvykle $c = 2$ nebo 3.

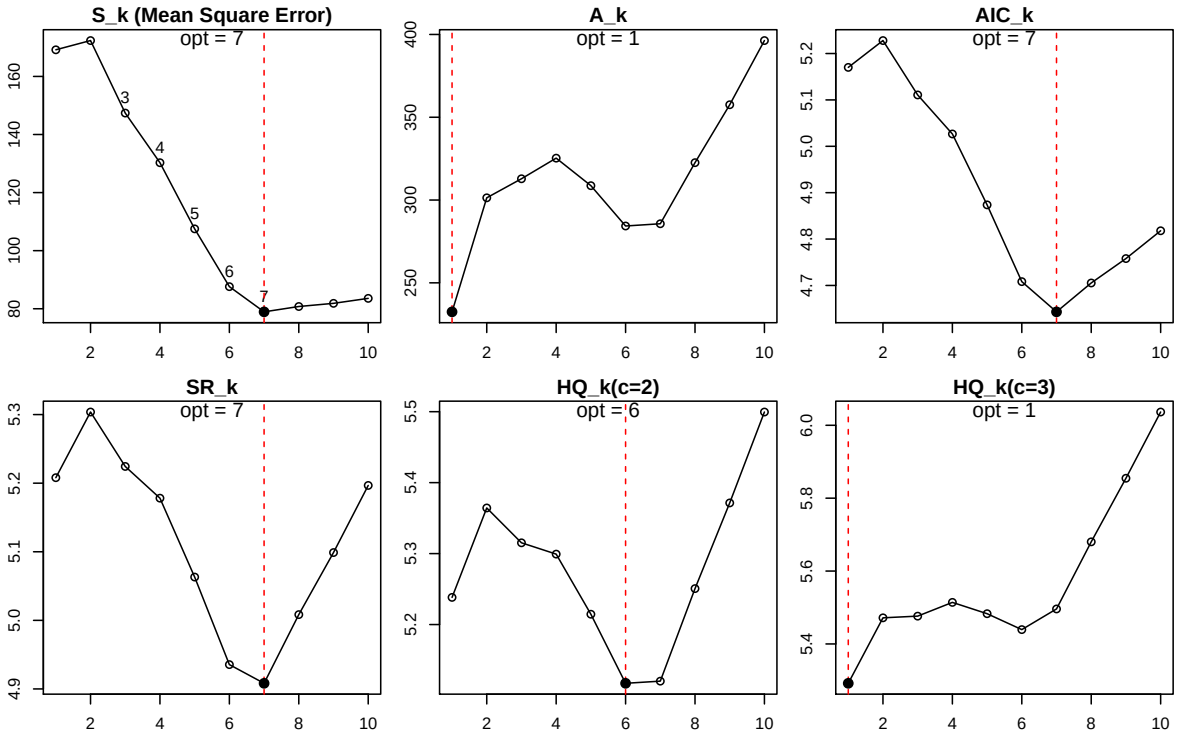
Příklad 1.2. Průměrné roční průtoky vody v řece Nigeru v Coulicouro (Mali) v letech 1907 až 1957 (převzato z knihy Anděl, J.: Statistická analýza časových řad, Praha SNTL 1976)

Na následujícím obrázku jsou znázorněna vstupní data, která vykazují výrazný trend.



Obrázek 3. Vstupní data: *Průměrné roční průtoky vody v řece Nigeru v Coulicouro (Mali) v letech 1907 až 1957*. Data jsou uvedena v kubických stopách za sekundu (krát 10^{-3}).

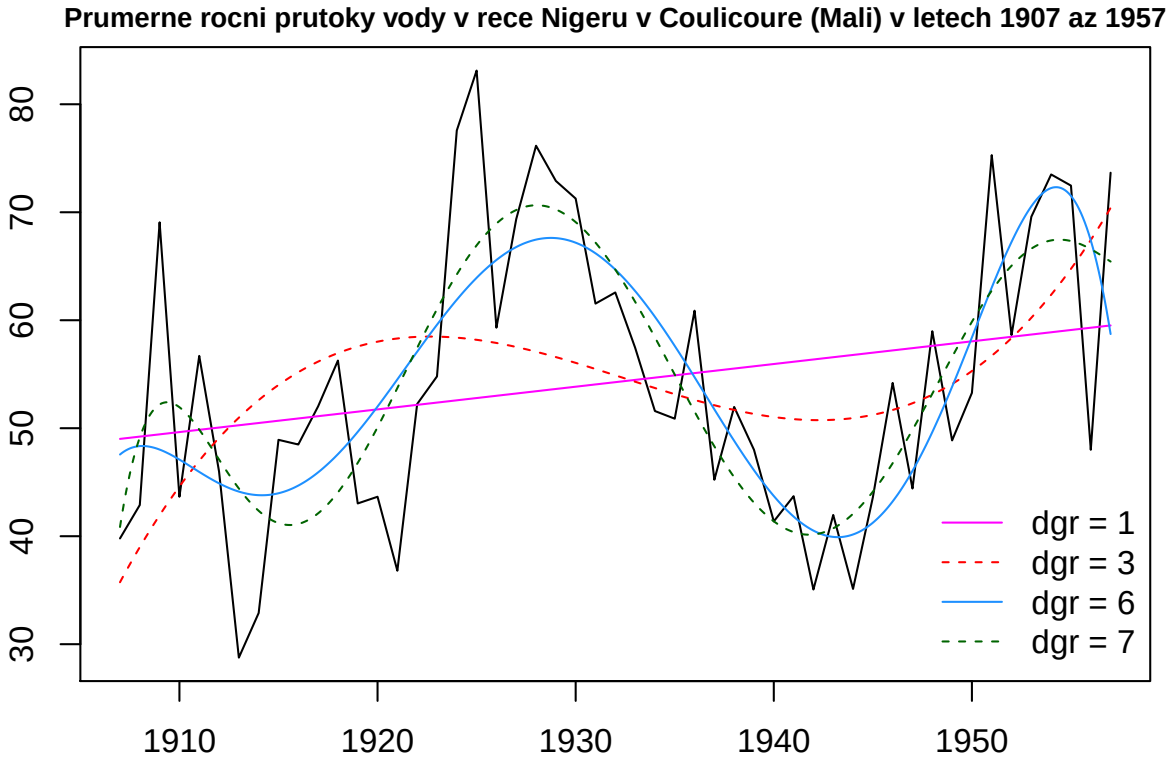
Časovou řadu budeme chtít modelovat pomocí **polynomického** trendu, proto nejprve pomocí různých penalizačních kritérií odhadneme vhodný stupeň polynomu.



Obrázek 4. Penalizační kritéria pro výběr vhodného stupně polynomu pro průměrné roční průtoky vody v řece Nigeru v Coulicouro (Mali).

Optimálním stupněm se jeví polynom šestého či sedmého řadu.

Na dalším obrázku vykresleme trendové funkce reprezentované různými stupni polynomu.



Obrázek 5. Polynomické trendy řádu jedna, tři, šest a sedm pro průměrné roční průtoky vody v řece Nigeru v Coulicouro (Mali).

Je-li $f(t)$ periodická funkce s periodou T, pak **frekvencí** rozumíme veličinu $\lambda = \frac{2\pi}{T}$. Uvažujme model:

$$Y_i = f(t_i) + \varepsilon_i \qquad E\varepsilon_i = 0; \quad D\varepsilon_i = \sigma^2; \quad C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0;\ i \neq j; i, j = 1, \ldots, n$$

kde (a) $f(t_i) = \mu + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j cos\lambda_j t_i + \beta_j sin\lambda_j t_i)$

nebo (b) $f(t_i) = \mu + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j cos(\lambda_j t_i + \omega_j) \qquad \gamma_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2},\ \omega_j = \arctan \frac{\beta_j}{\alpha_j}.$

Jde o **nelineární regresní model** vzhledem k $(3p + 1)$ neznámých parametrů:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \qquad \beta_1, \ldots, \beta_p \qquad \mu \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_p$

(b) $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \qquad\qquad\qquad \mu \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_p \qquad \omega_1, \ldots, \omega_p$

Odhad vektoru **neznámých parametrů** pomocí *metody nejmenších čtverců* minimalizuje výraz

(a) $S(\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(t_i))^2$

(b) $S(\mu, \gamma_1, \ldots, \gamma_p, \omega_1, \ldots, \omega_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(t_i))^2$

Numericky lze systém nelineárních rovnic řešit např. pomocí Gauss-Newtonovy metody.

Lineární model pro známé frekvence

Situace se zjednoduší, pokud frekvence $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ jsou známé.

Pak model (a) je lineární a matice plánu je tvaru:

$$\mathbf{X}_{n\times(2p+1)} = \begin{pmatrix} 1 & c_{11} & s_{12} & \cdots & c_{p1} & s_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{1n} & s_{1n} & \cdots & c_{pn} & s_{pn} \end{pmatrix}, \text{ kde } \begin{matrix} c_{ji} = \cos\lambda_j t_i \\ s_{ji} = \sin\lambda_j t_i \end{matrix} \text{ pro } \begin{matrix} j = 1, \ldots, p \\ i = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

Pokud $n = 2m + 1$ počítejme postupně

$t_i = i$

$\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}$ pro některá $j \in \{1, \ldots, m\}$

(1) Pro $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ platí

$$\sum_{t=1}^{n} e^{ik\lambda_j t} = \sum_{t=1}^{n} (\cos k\lambda_j t + i \sin k\lambda_j t) = \frac{e^{ik\lambda_j}(1 - e^{ik\lambda_j n})}{1 - e^{ik\lambda_j}}$$

$$= \frac{e^{ik\frac{2\pi j}{n}}}{1 - e^{ik\frac{2\pi j}{n}}}(1 - \underbrace{e^{i2\pi kj}}_{=1}) = 0$$

Protože tedy

$$\sum_{t=1}^{n} \cos k\lambda_j t + i \sum_{t=1}^{n} \sin k\lambda_j t = 0,$$

pak platí

$$\sum_{t=1}^{n} \cos k\lambda_j t = \sum_{t=1}^{n} \cos k\tfrac{2\pi j}{n} t = \sum_{t=1}^{n} \sin k\lambda_j t = \sum_{t=1}^{n} \sin k\tfrac{2\pi j}{n} t = 0 \ \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{25}$$

(2) S využitím vztahu $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ a (25) dostaneme

$$\sum_{t=1}^{n} c_{jt} s_{jt} = \sum_{t=1}^{n} \cos\lambda_j t \sin\lambda_j t = \tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \sin 2\alpha_j t = 0.$$

(3) Protože $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, pak

$$\sum_{t=1}^{n} c_{jt}^2 = \sum_{t=1}^{n} \cos^2\lambda_j t = \tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} (1 + \cos 2\alpha) = \frac{n}{2}.$$

(4) Obdobně, protože $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\alpha)$, pak

$$\sum_{t=1}^{n} s_{jt}^2 = \sum_{t=1}^{n} \sin^2\lambda_j t = \tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} (1 - \sin 2\alpha) = \frac{n}{2}.$$

(5) Použijeme-li vztah $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$, pak pro

$$\sum_{t=1}^{n} c_{jt}c_{ht} = \sum_{t=1}^{n} \cos\tfrac{2\pi j}{n}t \cos\tfrac{2\pi h}{n}t$$

nejprve vypočteme α a β ze vztahů

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta = \frac{2\pi j}{n}t & \\ \alpha-\beta = \frac{2\pi h}{n}t & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} 2\alpha = \frac{2\pi(j+h)}{n}t & \text{(sečtením rovnic)} \\ 2\beta = \frac{2\pi(j-h)}{n}t & \text{(odečtením rovnic)} \end{array}$$

takže pro $j \neq h$ platí

$$\sum_{t=1}^{n} c_{jt}c_{ht} = \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \cos\tfrac{2\pi(j+h)}{n}t}_{=0} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \cos\tfrac{2\pi(j-h)}{n}t}_{=0} = 0.$$

(6) Protože $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$, pak pro

$$\sum_{t=1}^{n} s_{jt}s_{ht} = \sum_{t=1}^{n} \sin\tfrac{2\pi j}{n}t \sin\tfrac{2\pi h}{n}t$$

nejprve vypočteme α a β ze vztahů

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta = \frac{2\pi j}{n}t & \\ \beta-\alpha = \frac{2\pi h}{n}t & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} 2\beta = \frac{2\pi(j+h)}{n}t & \text{(sečtením rovnic)} \\ 2\alpha = \frac{2\pi(j-h)}{n}t & \text{(odečtením rovnic)} \end{array}$$

takže pro $j \neq h$ platí

$$\sum_{t=1}^{n} s_{jt}s_{ht} = \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \cos\tfrac{2\pi(j-h)}{n}t}_{=0} - \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \cos\tfrac{2\pi(j+h)}{n}t}_{=0} = 0.$$

(7) Analogicky, protože $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$, pak pro $j \neq h$ platí

$$\sum_{t=1}^{n} s_{jt}c_{ht} = \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \sin\tfrac{2\pi(j+h)}{n}t}_{=0} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \sin\tfrac{2\pi(j-h)}{n}t}_{=0} = 0.$$

Nyní, jestliže využijeme předchozích vztahů, můžeme spočítat matici

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}_{(2p+1)\times(2p+1)} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

a odtud velmi snadno z normálních rovnic dostaneme odhady neznámých parametrů ve tvaru

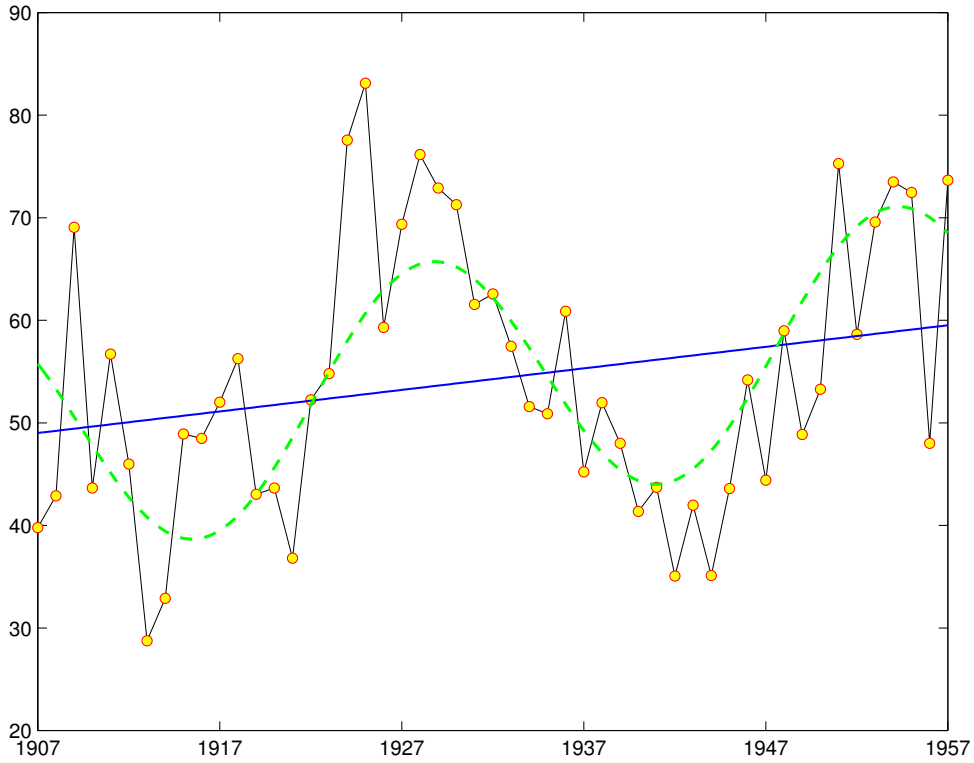
$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \\ \hat{\alpha_j} &= \tfrac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos\lambda_j t \qquad\qquad j = 1,\ldots,p. \\ \hat{\beta_j} &= \tfrac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin\lambda_j t \end{aligned}$$

Neznámé parametry modelu (b) získáme ze vztahů

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_j &= \sqrt{\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2} \\ & \qquad\qquad j = 1,\ldots,p. \\ \hat{\omega}_j &= \arctan\tfrac{\hat{\beta}_j}{\hat{\alpha}_j} \end{aligned}$$

Pokud časová řada vykazuje (po odečtení např. lineárního trendu) přibližně periodické chování, je třeba **rozhodnout**, které frekvence se na tvorbě periodického trendu výrazně uplatňují. Pro nalezení významných period je výhodné užít metod *spektrální analýzy časových řad*.

Příklad 1.3. Průměrné roční průtoky vody v řece Nigeru v Coulicouro (Mali) v letech 1907 až 1957 (převzato z knihy Anděl, J.: Statistická analýza časových řad, Praha SNTL 1976)



Obrázek 6. Vstupní data spolu s lineárním a trigonomickým trendem (s periodou délky 25.5 roků). Data jsou uvedena v kubických stopách za sekundu (krát 10^{-3}).

Pro známou frekvenci (získanou pomocí metody skrytých period, viz skripta Forbelská, 2009)

$$\lambda = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{25.5} = 0.2464$$

budeme uvažovat regresní model tvaru

$$Y_t = a + bt + \alpha\cos(\lambda t) + \beta\sin(\lambda t) + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

nebo ekvivalentní model

$$Y_t = a + bt + \gamma\cos(\lambda t + \omega) + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

s maticí plánu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cos(\lambda t_1) & \sin(\lambda t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & \cos(\lambda t_n) & \sin(\lambda t_n) \end{pmatrix} \text{ a vektorem neznámých parametrů } \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Pomocí metody nejmenších čtverců obdržíme odhady

$$\begin{array}{lll} \widehat{a} = 54.2645 & \widehat{\alpha} = 9.0107 & \widehat{\gamma} = 2.4084 \\ \widehat{b} = 0.2101 & \widehat{\beta} = -8.1678 & \widehat{\omega} = -1.277 \end{array},$$

přitom první pozorování konané v roce 1907 odpovídá $t = 1$.

1.3. Diferenčně stacionární náhodné procesy.

Nestacionární proces obsahující stochastický trend lze převést na stacionární **diferencováním**.
Zaveďme proto tzv. **diferenční operátor**:

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t \\ \Delta^2 Y_t &= \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) \\ &= (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ &= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = (1-B)^2 Y_t \\ &\vdots \\ \Delta^d Y_t &= (1-B)^d Y_t.\end{aligned}$$

Nestacionární proces se stochastickým trendem nazýváme **integrovaným smíšeným modelem** a značíme

$$ARIMA(p,d,q)\ .$$

Formálně jej zapíšeme pomocí operátoru zpětného chodu takto:

$$ARIMA(p,d,q):\ \Phi(B)(1-B)^d Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

a položíme-li

$$W_t = (1-B)^d Y_t,$$

pak W_t je **stacionární** $ARMA(p,q)$.

Zvláštní případy $ARIMA(p,d,q)$

p	d	q	Zkratka	Název
0			$IMA(d,q)$	Integrovaný proces klouzavých součtů
0	0		$MA(q)$	Proces klouzavých součtů
		0	$ARI(p,d)$	Integrovaný autoregresní proces
	0	0	$AR(p)$	Autoregresní proces
0		0	$I(d)$	Integrovaný proces
0	1	0	$I(1)$	Náhodná procházka (*random walk*)

1.3.1. *Integrované procesy řádu jedna.*

Nejprve popišme různé varianty náhodné procházky.

„Čistá“ náhodná procházka (*pure random walk, random walk without drift*):

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{kde} \quad \varepsilon_t \sim VW(0,\sigma_\varepsilon^2) \tag{26}$$

Jestliže použijeme rekurentní vzorec (26) opakovaně, dostaneme

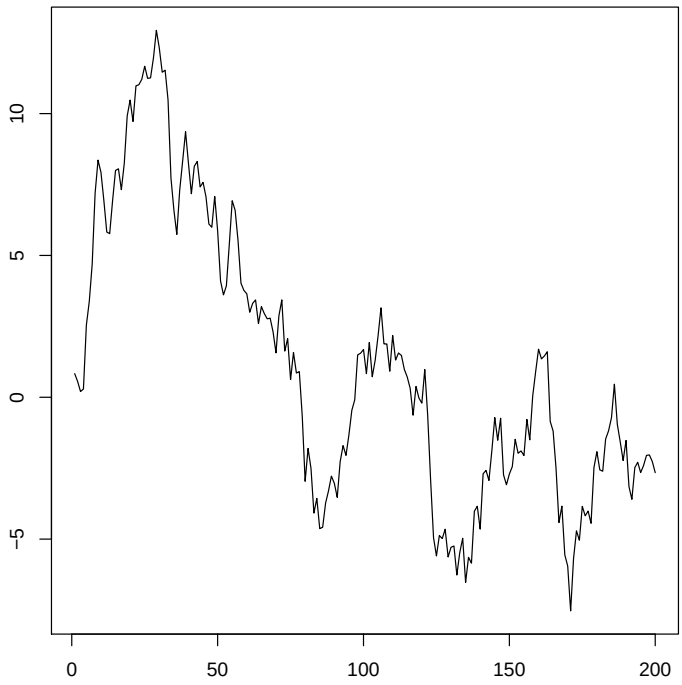
$$Y_t = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_{t-s} \tag{27}$$

Proces „čisté“ náhodné procházky je limitním případem procesu $AR(1)$, kde $\varphi_1 = 1$, takže

(a) hodnoty $ACF = \rho(k)$ budou klesat velmi pomalu (lineárně),

(b) hodnoty $PACF = \alpha(k)$ jsou logicky velmi podobné procesu AR(1).

Protože jeden kořen polynomu leží na jednotkové kružnici, tak se také diferenčně stacionárním procesům říká *procesy s jednotkovým kořenem.*



Obrázek 7. Čistá náhodná procházka $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Nyní předpokládejme, že proces má počátek v čase $t = 0$ a $Y_0 = y_0$ je počáteční deterministická podmínka. Pak

$$Y_t = y_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{t-s} \tag{28}$$

(*a*) $EY_t = y_0$

(*b*) $DY_t = D\left(y_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{t-s}\right) = D\left(\sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{t-s}\right) \overset{\text{nekorel.}}{=} \sum_{s=0}^{t-1} D\varepsilon_{t-s} = t\sigma_\varepsilon^2$ tj. rozptyl je funkcí času.

Náhodná procházka s *deterministickým trendem*, (také se říká s *posunutím*, *vychýlená*) (*Random Walk with Drift*):

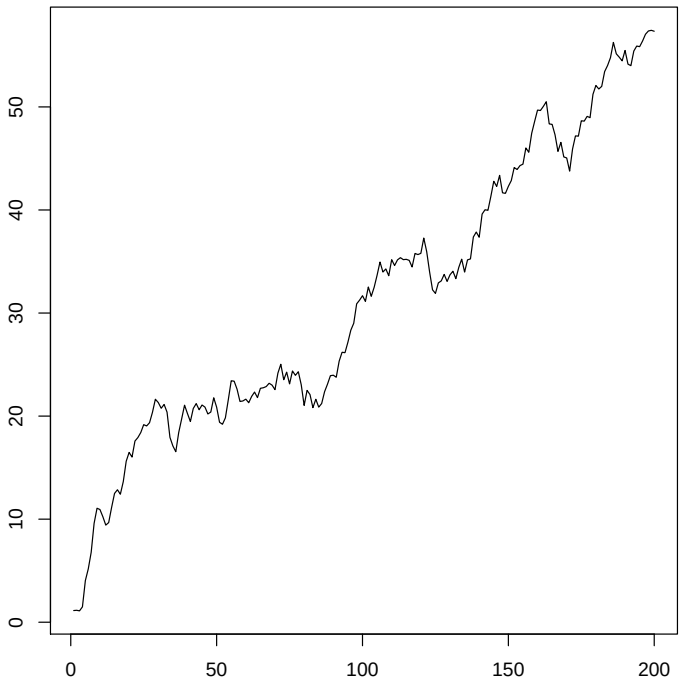
V praxi se používá následující **modifikace**:

$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Potom, pokud budeme postupně upravovat, dostaneme

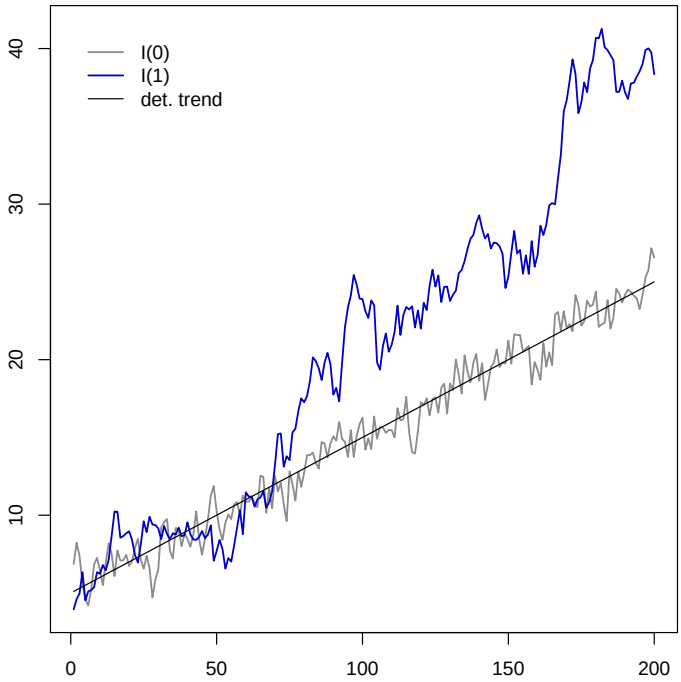
$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t = Y_{t-2} + 2\beta + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = \cdots = \underbrace{z_0 + \beta \cdot t}_{\substack{\text{deterministický} \\ \text{lineární trend}}} + \underbrace{\sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{t-s}}_{\text{stochastický trend}}.$$

Takto vytvořený náhodný proces obsahuje jak deterministický, tak stochastický trend.



Obrázek 8. Vychýlená náhodná procházka $Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, $\beta = 0.3$

Čistá náhodná procházka a vychýlená náhodná procházka se od sebe výrazně liší. Čistá náhodná procházka mívá cyklický průběh, kdežto v náhodné procházce s posunutím převládá deterministický trend nad stochastickým trendem a není již přítomen specifický cyklický průběh.



Obrázek 9. Srovnání stochastického procesu kolem deterministického trendu (tj. proces $I(0)$) s procesem se stochastickým trendem (tj. proces $I(1)$). Deterministický trend: $y_t = \alpha + \beta t$ ($\alpha = 5$, $\beta = 0.1$), $I(0) : Y_t = y_t + \eta_t$, kde $\eta_t = \varphi\eta_{t-1} + \varepsilon_t \sim AR(1)$ ($\varphi = 0.3$), $I(1) : Y_t = y_t + \xi_t$, kde $\xi_t = \xi_{t-1} + \varepsilon_t$ a $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

1.3.2. *Integrované procesy řádu d.*

Operátor

$$\nu(B) = \Phi(B)(1-B)^d$$

se někdy nazývá **zobecněný autoregresní operátor**.

Pokud $\nu(B)$ chápeme jako polynom v proměnné B, pak vzhledem ke kauzalitě modelu $(1-B)^d W_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ má $\nu(B)$ **právě p kořenů ležících vně jednotkového kruhu a d kořenů rovných 1**.

V praxi se nejprve diferencováním časové řady získá stacionární řada W_t a pro ni se vybuduje proces $ARMA(p,q)$. Pokud jsme původně měli $Y_1,\dots,Y_n$, po diferencování zůstanou $W_{d+1},\dots,W_n$.

Poznámka 1.3. Tvary $ACF = \rho(k)$ a $PACF = \alpha(k)$ procesů $ARIMA(p,d,q)$ a náhodné procházky $I(1)$ jsou **prakticky totožné**. Přítomnost jednotkových kořenů způsobuje „zakrytí“ téměř všech identifikačních detailů těchto funkcí.

Poznámka 1.4. $ARIMA(p,d,q)$ **nemá smysl centrovat**, neboť platí:

$$\Delta^d(Y_t - \bar{Y}) = \Delta^d Y_t.$$

Poznámka 1.5. Kromě trendů vyžadujících stochastické modelování mohou ARIMA modely zachytit i čistě deterministické trendy, pokud provedeme takovéto **zobecnění** $ARIMA(p,d,q)$ **modelů**:

$$ARIMA(p,d,q):\ \Phi(B)(1-B)^d Y_t = \beta + \Theta(B)\varepsilon_t \quad \beta \in \mathbb{R};,$$

Pak této definici vyhovují procesy tvaru:

$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_d t^d}_{\text{polynomický trend řádu d}} \quad + \quad Y_t.$$

s využitím poznatků o diferencování polynomů lze totiž psát:

$$\Phi(B)(1-B)^d(\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_d t^d + Y_t) = \underbrace{\Phi(B)(d!\beta_d)}_{\beta=(1-\varphi_1-\cdots-\varphi_p)d!\beta_d} \quad + \quad \Phi(B)(1-B)^d Y_t = \beta + \Theta(B)\varepsilon_t.$$

1.4. Modelování sezónnosti.

Sezónnost je v Box-Jenkinsonově metodologii stejně jako trend modelována **stochasticky**. Nejprve zaveďme **sezónní diferenční operátor o délce** $L > 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta_L Y_t &= Y_t - Y_{t-L} = (1-B^L)Y_t \\
\Delta_L^2 Y_t &= \Delta_L(\Delta_L Y_t) = \Delta_L(Y_t - Y_{t-L}) \\
&= (Y_t - Y_{t-L}) - (Y_{t-L} - Y_{t-2L}) \\
&= Y_t - 2Y_{t-L} + Y_{t-2L} = (1-B^L)^2 Y_t \\
&\vdots \\
\Delta_L^D Y_t &= (1-B^L)^D Y_t
\end{aligned}$$

Při konstrukci se uvažuje způsobem, který budeme demonstrovat pomocí následujícího příkladu:
Nechť časová řada $\{Y_t\}$ vykazuje sezónnost o délce $L = 12$.

(1) Zkonstruujeme nejprve $ARIMA(P_1,D_1,Q_1)$ model pro řadu **lednových měření**, tj. pro $\{S_t^1 = B^{12}Y_t\}$

$$\pi_1(B^{12})\Delta_{12}^{D_1} Y_t = \Psi_1(B^{12})\eta_t^{(1)} \ \sim\ ARIMA(P_1,D_1,Q_1)$$

kde časový index t odpovídá **lednovým** obdobím a o η_t se budeme zajímat později.

Přitom

$\pi_1(B^{12}) = 1 - \pi_{1,1}B^{12} - \cdots - \pi_{1,P_1}B^{12\cdot P_1}$
je tzv. **sezónní autoregresní operátor** $SAR(P_1)$

$\Psi_1(B^{12}) = 1 + \psi_{1,1}B^{12} + \cdots + \psi_{1,Q_1}B^{12\cdot Q_1}$
je tzv. **sezónní operátor klouzavých součtů** $SMA(Q_1)$

$\Delta_{12}^{D_1} = (1-B^L)^{D_1}$ je tzv. **sezónní diferenční operátor** $SI(D_1)$

(2) Podobné modely zkonstruujeme pro ostatní měsíce:

$$\begin{aligned}
\pi_2(B^{12})\Delta_{12}^{D_2} Y_t &= \Psi_2(B^{12})\eta_t^{(2)} \ \sim\ ARIMA(P_2,D_2,Q_2) \\
&\vdots \\
\pi_{12}(B^{12})\Delta_{12}^{D_{12}} Y_t &= \Psi_{12}(B^{12})\eta_t^{(12)} \ \sim\ ARIMA(P_{12},D_{12},Q_{12})
\end{aligned}$$

(3) Předpokládejme přitom, že tyto **modely jsou pro jednotlivé měsíce přibližně stejné**, tj.

$$P_1 \approx \cdots \approx P_{12} \approx P$$
$$Q_1 \approx \cdots \approx Q_{12} \approx Q$$
$$D_1 \approx \cdots \approx D_{12} \approx D$$
$$\pi_1(B^{12}) \approx \cdots \approx \pi_{12}(B^{12}) \approx \pi(B^{12})$$
$$\Psi_1(B^{12}) \approx \cdots \approx \Psi_{12}(B^{12}) \approx \Psi(B^{12})$$

(4) **Náhodné veličiny** $\eta_t^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 12)$ by však v těchto modelech měly být pro různé měsíce mezi sebou **korelované**, neboť by měl existovat např. vztah mezi lednovými a únorovými hodnotami. Předpokládejme proto, že také řada η_t je popsána modelem $ARIMA(p, d, q)$ tvaru

$$\Phi(B)\Delta^d \eta_t = \Theta(B)\varepsilon_t \ \sim \ ARIMA(p, d, q)$$

kde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ je bílý šum.

(5) **Spojme** předchozí dva modely do jediného tzv. **multiplikativního sezónního modelu řádu**$(p, d, q) \times (P, D, Q)_L$

$$\Phi(B)\pi(B^L)\Delta^d\Delta_L^D Y_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \ \sim \ SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_L \qquad L = 12.$$

Příklad 1.4. Model $SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ má tvar:

$$\Delta\Delta_{12} Y_t = (1 - B)(1 - B^{12})Y_t = (1 + \theta_1 B)(1 + \psi_1 B^{12})\varepsilon_t,$$

nebo ekvivalentně

$$Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \psi_1\varepsilon_{t-12} + \theta_1\psi_1\varepsilon_{t-13}.$$

Poznámka 1.6. Existují také **aditivní sezónní modely**, které se však používají jen zřídka. Jako příklad lze uvést model

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_{12}\varepsilon_{t-12} + \theta_{13}\varepsilon_{t-13}.$$

1.4.1. *Výstavba sezónních modelů.* Označme řád běžného diferencování na odstranění trendu jako d a D jako řád diferencování na odstranění sezónnosti. V praktických situacích většinou $d = 0, 1, 2$ a $D = 0, 1$. Dále nechť L je délka sezóny.

Výstavba sezónních modelů probíhá ve třech stejných fázích jako pro modely $ARIMA$. Všimněme si pouze FÁZE IDENTIFI neboť ostatní dvě fáze jsou totožné.

(1) **Odhad parametrů** d, D :

(a) Provede se studium odhadnuté **autokorelační funkce** $ACF = \hat{\gamma}(k)$, neboť identifikuje přítomnost trendu. Doporučuje se prozkoumat $4L$ hodnot $\hat{\gamma}(k)$.

➽ **Určení** D : Má-li funkce $\hat{\rho}(k)$ **v bodech** $L, 2L, 3L \ldots$ **lokální maxima**, pak (bez ohledu na její průběh mezi těmito časovými body) je nutné položit $D = 1$.

To plyne z toho, že hodnoty $\hat{\rho}(L), \hat{\rho}(2L), \hat{\rho}(3L), \ldots$ představují odhadnuté hodnoty autokorelační funkce pro řady $\{S_t^j = B^L Y_t\},\ j = 1, \ldots, L$ modelu

$$\pi(B^L)\Delta_L^D Y_t = \Psi(B^L)\eta_t \ \sim \ ARIMA(P, D, Q),$$

přičemž **nestacionaritě** tohoto ARIMA modelu **odpovídá pomalý pokles autokorelační funkce** $\hat{\rho}(L), \hat{\rho}(2L), \hat{\rho}(3L), \ldots$, tj. tuto řadu je nutno diferencovat (s krokem L) a pokládáme $D = 1$.

➽ **Určení** d : Jestliže funkce r_k klesá **mezi body** jL **a** $(j+1)L$ **pouze přibližně lineárně,** je třeba provést také běžné diferencování.

(b) Čísla d, D se také někdy určují tak, že se hledá nejmenší číslo mezi odhadnutými hodnotami

$$\hat{\sigma}_Y^2, \hat{\sigma}_{\Delta Y_t}^2, \hat{\sigma}_{\Delta_L Y_t}, \hat{\sigma}_{\Delta_L^2 Y_t}, \ldots$$

rozptylů dané řady a jejich diferencí.

(2) **Odhad parametrů** p, P, q, Q :

Po určení řádu d a D zkonstruujeme řadu $\quad W_t = \Delta^d\Delta_L^D Y_t,$

pro kterou je nutné identifikovat model tvaru

$$\Phi(B)\pi(B^L)W_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \ \sim \ SARIMA(p, 0, q) \times (P, 0, Q)_L.$$

Pro tento účel se použije odhadnutá $ACF = \hat{\rho}(k)$ a $PACF = \hat{\alpha}(k)$ řady W_t.

(a) MA–Homogenní modely

- Jestliže ACF funkce $\hat{\rho}(k)$ je zhruba **významně nenulová** v bodech

$$\begin{gathered} 1,\dots,q \\ L-q,\dots,L+q \\ 2L-q,\dots,2L+q \\ \vdots \\ QL-q,\dots,QL+q \end{gathered}$$

  přičemž **mezi těmito body se neodlišují významně od nuly**

- a funkce $\hat{\alpha}(k)$ v jednotlivých úsecích mezi body jL a $(j+1)L$ vždy **v absolutní hodnotě klesá** (geometricky nebo po sinusoidě s geometricky klesající amplitudou) a **zároveň klesá**, když ji sledujeme **v bodech** $L, 2L, 3L, \dots,$

pak položíme

$$p = 0 \text{ a } P = 0,$$

tj. budeme identifikovat odpovídající model pro řadu W_t jako

$$W_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \ \sim \ SARIMA(0,0,q) \times (0,0,Q)_L$$

a tedy model pro řadu Y_t jako

$$\Delta^d \Delta_L^D Y_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \ \sim \ SARIMA(0,d,q) \times (0,D,Q)_L.$$

(b) AR–Homogenní modely

- Jestliže naopak funkce $\hat{\rho}(k)$ **klesá** v absolutní hodnotě (geometricky nebo po sinusoidě s geometricky klesající amplitudou) **v úsecích mezi body** jL a $(j+1)L$ a **zároveň klesá**, když ji sledujeme v bodech $L, 2L, 3L, \dots$

- a funkce $\hat{\alpha}(k)$ je zhruba **významně nenulová** v bodech

$$\begin{gathered} 1,\dots,p \\ L,\dots,L+p \\ 2L,\dots,2L+p \\ \vdots \\ PL,\dots,PL+p \end{gathered}$$

  přičemž **mezi těmito body se neodlišují významně od nuly**,

pak položíme

$$q = 0 \text{ a } Q = 0,$$

tj. budeme identifikovat odpovídající model pro řadu W_t jako

$$\Phi(B)\pi(B^L)W_t = \varepsilon_t \ \sim \ SARIMA(p,0,0) \times (P,0,0)_L$$

a tedy model pro řadu Y_t jako

$$\Phi(B)\pi(B^L)\Delta^d \Delta_L^D Y_t = \varepsilon_t \ \sim \ SARIMA(p,d,0) \times (P,D,0)_L.$$

(c) Nehomogenní modely typu

$$SARIMA(p,d,0) \times (0,D,Q)_L \text{ nebo } SARIMA(0,d,q) \times (P,D,0)_L$$

se většinou **nepoužívají**, neboť obvykle vedou při srovnání s předchozími tzv. **homogenní modely**

$$SARIMA(0,d,q) \times (0,D,Q)_L \text{ nebo } SARIMA(p,d,0) \times (P,D,0)_L$$

k odhadu neúnosně velkého počtu parametrů.

(d) Identifikace obecných modelů

$$SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_L,$$

v nichž čísla p, q, P a Q mohou být vesměs nenulová, je již dosti komplikovanou záležitostí a obvykle zde hodně záleží na zkušenostech statistika, který analýzu provádí.

1.5. Exponenciální vyrovnávání. Exponenciální vyrovnávání, které zavedl Brown, vychází z polynomiální lokální **vážené** metody nejmenších čtverců, kde váhy jednotlivých čtverců uvnitř asymetrického okénka (tj. výřezu časové řady) se směrem do minulosti **exponenciálně** snižují – odtud název metody.

Uvažujeme-li asymetrické vyhlazovací okno pouze směrem do minulosti, pak pro každé $t, \tau = 0, 1, \ldots$ dostaneme regresní model tvaru

$$\boxed{Y_{t-\tau} = \sum_{j=0}^{m} (-\tau)^j \beta_j(t) + \varepsilon_{t-\tau}}, \; E\varepsilon_{t-\tau} = 0; \; E\varepsilon_q\varepsilon_s = 0, \; q \neq s; \; D\varepsilon_{t-\tau} = \alpha^{-\tau}\sigma^2; \; \alpha \in (0,1).$$

tj. matice vah je rovna

$$\mathbf{W} = diag\{w_1, \ldots, w_n, \ldots\} = diag\{\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^\tau \ldots\}.$$

Odhad parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou **nejmenších vážených čtverců** (neboť rozptyly nejsou konstantní) je dán vzorcem:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y}$$

kde

$$\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^1\alpha^\tau & \cdots & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^m\alpha^\tau \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^1\alpha^\tau & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^2\alpha^\tau & \cdots & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^{m+1}\alpha^\tau \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^m\alpha^\tau & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^{m+1}\alpha^\tau & \cdots & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^{2m}\alpha^\tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau Y_{t-\tau} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^1\alpha^\tau Y_{t-\tau} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^m\alpha^\tau Y_{t-\tau} \end{pmatrix}.$$

Tento přístup založený na vážené polynomiální metodě nejmenších čtverců se nazývá *Brownův přístup.*

Značení:

Pro dobrou srozumitelnost zavedeme následující značení. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je náhodná posloupnost, její realizace v časových okamžicích $t_1, t_2, \ldots, t_n$ označme $y_1, y_2, ..., y_n$. Symbolem $\boxed{\hat{y}_{t|k}}$ označme odhad hodnoty Y_t v čase t na základě hodnot do časového okamžiku k včetně.

- ✏ Jestliže $k < t$, pak $\boxed{\hat{y}_{t|k}}$ nazýváme **predikcí**,
- ✏ pokud $k = t$, $\boxed{\hat{y}_{t|t}}$ nazýváme **filtrací**
- ✏ a je-li $k = n > t$, pak $\boxed{\hat{y}_{t|n}}$ nazýváme **vyrovnáním** (*smoothing*).

Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Exponenciální vyrovnávání pro $m = 0$ se nazývá jednoduché exponenciální vyrovnávání. Použijeme–li označení $\hat{\beta}_0(t) = b_0(t)$ a uvážíme–li, že pro $\alpha \in (0,1)$ je $\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau = \frac{1}{1-\alpha}$, dostaneme

$$b_o(t) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau Y_{t-\tau} \quad \Rightarrow \quad b_0(t) = \hat{Y}_t = (1-\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau Y_{t-\tau}$$

Abychom získali rekurentní vztah, upravujme

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= (1-\alpha)\textstyle\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau Y_{t-\tau} = (1-\alpha)Y_t + (1-\alpha)\sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha^\tau Y_{t-\tau} = \left| \begin{array}{c} subst. \\ k = \tau - 1 \end{array} \right| \\ &= (1-\alpha)Y_t + (1-\alpha)\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} Y_{t-1-k} \\ &= (1-\alpha)Y_t + \alpha \underbrace{(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k Y_{t-1-k}}_{\hat{Y}_{t-1}} = (1-\alpha)Y_t + \alpha\hat{Y}_{t-1} \end{aligned}$$

Protože predikce o τ ($\tau > 0$) kroků dopředu pro jednoduché exponenciální vyrovnávání je rovna

$$\hat{Y}_{t+\tau|t} = \hat{Y}_t = b_0(t),$$

můžeme předchozí rekurentní vztah přepsat pro realizace a dále upravovat

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1|t} &= (1-\alpha)y_t + \alpha\hat{y}_{t|t-1} \\ &= (1-\alpha)y_t + \alpha\hat{y}_{t|t-1} + \hat{y}_{t|t-1} - \hat{y}_{t|t-1} \\ &= \hat{y}_{t|t-1} + (1-\alpha) \underbrace{(y_t - \hat{y}_{t|t-1})}_{\text{chyba predikce } \hat{\varepsilon}_{t|t-1}}\end{aligned}$$

a o rekurentním vzorci s chybou predikce $\hat{\varepsilon}_{t|t-1}$ se říká, že je ve formě korekce chyby předpovědi (*error correction form*).

Ad hoc přístupy Holta a Winterse

Pokud chceme na základě pozorování $y_1, \ldots, y_t$ sestrojit předpověď budoucí hodnoty y_{t+1} v čase $t+1$, označme ji $\widehat{y}_{t+1|t}$, pak nejjednodušším odhadem může být obyčejmý průměr. Tato předpověď je vhodná, pokud hodnoty časové řady náhodně kolísají kolem střední hodnoty, která se v čase nemění. Jako rozumější se však jeví použít pro predikci budoucí hodnoty ve větší míře pozorování, která jsou časově nejbliže. Pak se nabízejí vážené průměry

$$\widehat{y}_{t+1|t} = \sum_{j=0}^{t-1} w_{j,t} y_{t-j}, \tag{29}$$

kde součet vah je roven jedné, tj. $\sum_{j=0}^{n} w_{j,t} = 1$.

Exponenciální vyrovnávání je založeno na myšlence použití vah, které do minulosti klesají exponenciálně.

S využitím vztahu

$$\sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j = \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}, \quad \text{pro } \alpha \in (0,1)\,, \tag{30}$$

chceme-li, aby součet vah, které exponenciálně klesají, byl roven jedné, položíme

$$w_{j,t} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^t}\alpha^j \ . \tag{31}$$

Protože pro $t \to \infty$ konvergují váhy $w_{j,t} \to w_j = (1-\alpha)\alpha^j$, můžeme uvažovat jednokrokovou předpověď ze všech minulých pozorování ve tvaru

$$\widehat{y}_{t+1|t} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}, \quad \text{pro } \alpha \in (0,1) \ . \tag{32}$$

Analogicky jako u Brownova přístupu odvodíme rekurentní vztahy

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{t+1|t} &= (1-\alpha)y_t + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j y_{t-j} \\ &= (1-\alpha)y_t + \alpha(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k y_{t-1-k} \\ &= (1-\alpha)y_t + \alpha\widehat{y}_{t|t-1}\end{aligned}$$

Obdobně získáme i tvar využívající korekci chyby předpovědi

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{t+1|t} &= (1-\alpha)y_t + \alpha\widehat{y}_{t|t-1} + \widehat{y}_{t|t-1} - \widehat{y}_{t|t-1} \\ &= \widehat{y}_{t|t-1} + (1-\alpha)(y_t - \widehat{y}_{t|t-1}) \\ &= \widehat{y}_{t|t-1} + (1-\alpha)\widehat{\varepsilon}_{t|t-1}\end{aligned}$$

Na tomto ad-hoc přístupu se nám podařilo ukázat, že se v podstatě jedná o **jednoduché exponenciální vyrovnávání**, které přepokládá model

$$Y_t = \beta_0(t) + \varepsilon_t$$

s lokální hladinou $\beta_0(t)$.

Použijeme-li značení obvyklá pro tento přístup, kdy váhy mají tvar

$$w_j = \beta(1-\beta)^j, \tag{33}$$

tj. $\alpha = 1-\beta$, místo $\widehat{\beta_0(t)}$, píšeme L_t (level). Odvozené vztahy v novém značení:

$$\widehat{y}_{t+1|t} = \beta y_t + (1-\beta)\widehat{y}_{t|t-1} = \widehat{y}_{t|t-1} + \beta\widehat{\varepsilon}_{t|t-1} \tag{34}$$

$$L_{t+1} = L_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t} \tag{35}$$

Holtovo exponenciální vyrovnávání

Oproti jednoduchému exponenciálnímu vyrovnávání Holtova metoda předpokládá lokálně lineární trend, jehož koeficienty $\beta_0(t)$ i $\beta_1(t)$ se v čase mění. Hodnota časové řady v okamžiku t je určena jednak její úrovní $\beta_0(t)$, jednak směrnicí $\beta_1(t)$. V Holtově metodě se úroveň v čase t značí symbolem L_t (zkratka pro *level*) a směrnice jako T_t (zkratka pro *trend*).

Úroveň L_t je zároveň vyrovnanou hodnotou realizace y_t v okamžiku t. Směrnice lokálně lineárního trendu T_t (někdy se mluvíme krátce o trendu) vyjadřuje očekávanou změnu úrovně časové řady při jednotkové časové změně. Pokud chceme pomocí Holtovy metody přepovídat hodnotu časové řady o $h > 0$ jednotek dopředu, položíme

$$\widehat{y}_{t+h|t} = L_t + T_t h \ . \tag{36}$$

Takže, je-li $h = 1$, dostaneme jednokrokovou předpověď jako

$$\widehat{y}_{t+1|t} = L_t + T_t \ . \tag{37}$$

Protože by přibližně mělo platit, že realizace $y_{t+1} \approx L_{t+1}$, pak se jeví vhodné získat L_{t+1}, jako konvexní lineární kombinaci hodnot $(L_t + T_t)$ a y_{t+1}. V Holtově metodologii bývá zvykem místo $\alpha \in (0, 1)$ používat $\beta = 1 - \alpha$, takže konvexní lineární kombinace bude mít tvar

$$L_{t+1} = (1 - \beta)(L_t + T_t) + \beta y_{t+1} \ . \tag{38}$$

Hodnota β se nazývá *vyrovnávací konstanta pro úroveň řady*.

Analogickou úvahu použijeme i pro směrnici trendu T_t. Z přepokladu, že řada má lokálně lineární trend vyplývá, že by přibližně mělo platit

$$T_{t+1} \approx T_t,$$

ale zároveň má také smysl očekávat, že směrnice trendu je přibližně rozdílem sousedních úrovní, tj.

$$T_{t+1} \approx L_{t+1} - L_t \ .$$

Novou hodnotu směrnice T_{t+1} budeme uvažovat jako konvexní lineární kombinaci

$$T_{t+1} = (1 - \gamma)T_t + \gamma(L_{t+1} - L_t), \quad \text{kde } \gamma \in (0, 1) \tag{39}$$

γ je tzv. *vyrovnávací konstanta pro lineární růst (pro směrnici)*.

Na závěr odstavce ještě ukážeme přepsání předchozích rekurentních vztahů do chybového tvaru.

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= (1 - \beta)(L_t + T_t) + \beta y_{t+1} = (1 - \beta)(L_t + T_t) + \beta y_{t+1} + \beta\widehat{y}_{t+1|t} - \beta\widehat{y}_{t+1|t} \\ &= \beta \underbrace{(y_{t+1} - \widehat{y}_{t+1|t})}_{\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}} + (1 - \beta)(L_t + T_t) + \beta \underbrace{\widehat{y}_{t+1|t}}_{L_t + T_t} \\ &= \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t} + L_t + T_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{t+1} &= (1 - \gamma)T_t + \gamma(L_{t+1} - L_t) = T_t - \gamma T_t + \gamma \underbrace{L_{t+1}}_{L_t + T_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}} - \gamma L_t \\ &= T_t - \gamma T_t + \gamma(L_t + T_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}) - \gamma L_t \\ &= T_t + \gamma\beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t} \ . \end{aligned}$$

Holtovo-Wintersovo exponenciální vyrovnávání

V případě, kdy časová řada má sezonní charakter, nevystačíme se žádnou z předchozích metod. Rozšíření Holtovy metody na sezónní časové řady je známo jako **Holtova–Wintersova metoda**. Autorem je Holtův student Peter R. Winters.

Holtova-Wintersova metoda je založena na třech vyrovnávacích konstantách. Jedna je pro hladinu, druhá pro trend a třetí pro sezónnost. Dle charakteru dat využívá aditivní nebo multiplikativní notaci.

Uvažujme časovou řadu s lokálně lineárním trendem a sezónností s periodou $p \geq 2$. Stejně jako u Holtovy metody označme symbolem L_t úroveň v čase t, symbolem T_t směrnici lokálně lineárního trendu a symbolem S_t sezónní výkyv čase t. Součet úrovně L_t s hodnotou sezónního výkyvu S_t představuje v okamžiku t vyrovnanou hodnotu realizace y_t. Předpověď hodnoty časové řady o $h > 0$ jednotek dopředu je pak dána vztahem

$$\widehat{y}_{t+h|t} = L_t + S_{t-p+h} + T_t h, \tag{40}$$

takže v případě jednokrokové predikce platí

$$\widehat{y}_{t+1|t} = L_t + S_{t+1-p} + T_t \tag{41}$$

Protože by mělo přibližně platit

$$y_{t+1} \approx L_{t+1} + S_{t+1-p}$$

a

$$L_{t+1} \approx L_t + T_t,$$

má smysl získat úroveň L_{t+1} jako konvexní lineární kombinaci hodnot $(L_t + S_t)$ a $(y_{t+1} - S_{t+1-p})$, tj.

$$L_{t+1} = (1-\beta)(L_t + T_t) + \beta(y_{t+1} - S_{t+1-p}). \tag{42}$$

Protože řada má lokálně lineární trend, mělo by přibližně platit

$$T_{t+1} \approx T_t,$$

ale zároveň lze směrnici lokálně lineárního trendu vyjádřit pomocí rozdílu sousedních hladin

$$T_{t+1} \approx L_{t+1} - L_t.$$

Oba předchozí vztahy využijeme při konstrukci směrnice lokálně linárního trendu díky konvexní linární kombinaci

$$T_{t+1} = (1-\gamma)T_t + \gamma(L_{t+1} - L_t),$$

kde $\gamma \in (0,1)$ se nazývá *vyrovnávací konstanta pro směrnici trendu*. Pro sezónní výkyvy musí platit vztah

$$S_{t+1} \approx S_{t+1-p}\ ,$$

a také

$$S_{t+1} \approx y_{t+1} - L_{t+1}$$

Tedy označíme-li symbolem $\delta \in (0,1)$ *vyrovnávací konstantu pro sezónní výkyvy*, pak

$$S_{t+1} = (1-\delta)S_{t+1-p} + \delta(y_{t+1} - L_{t+1})$$

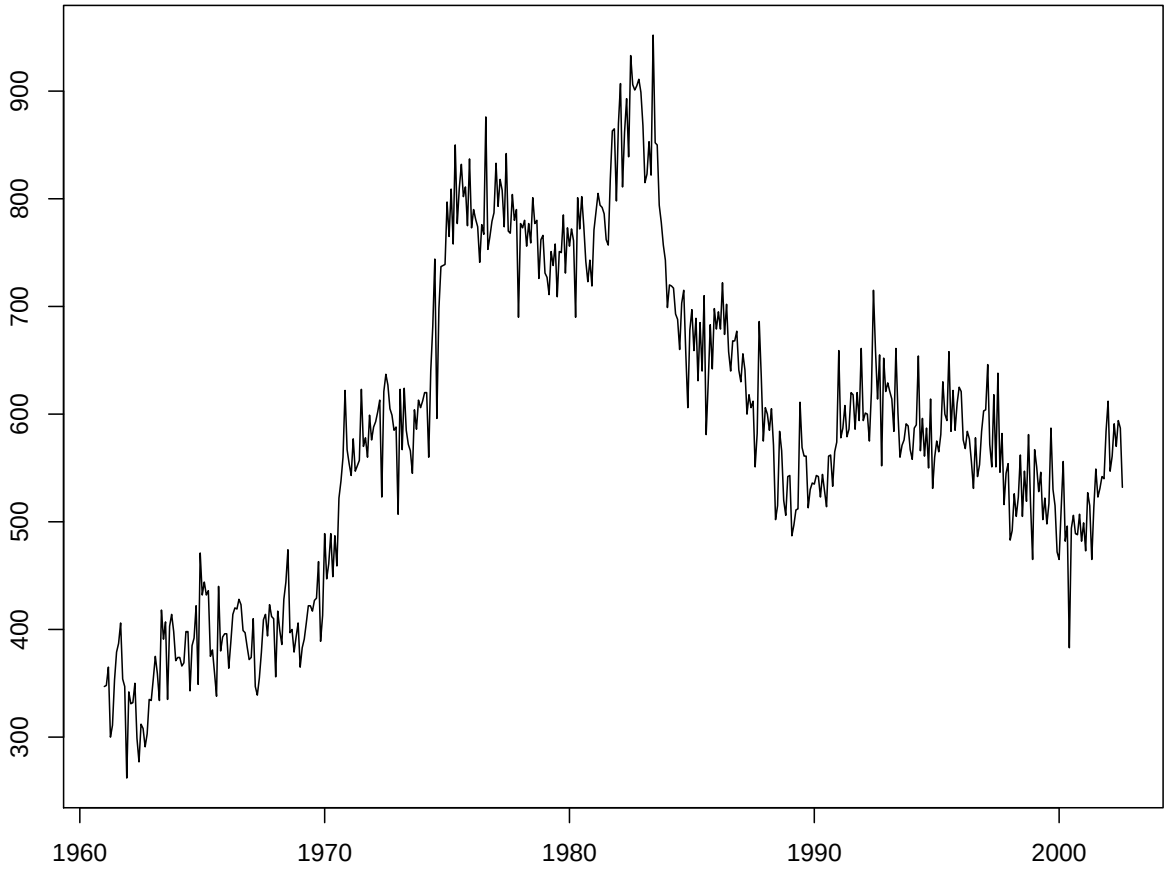
Na závěr odstavce odvodíme rekuretní vztahy v chybové formě. Tedy upravujme

$$\begin{aligned}
L_{t+1} &= (1-\beta)(L_t + T_t)\beta(y_{t+1} - S_{t+1-p}) \\
&= (1-\beta)(L_t + T_t) + \beta(y_{t+1} - S_{t+1-p}) + \beta\widehat{y}_{t+1|t} - \beta\widehat{y}_{t+1|t} \\
&= \beta(y_{t+1} - \widehat{y}_{t+1|t}) + L_t + T_t - \beta L_t + -\beta T_t - \beta S_{t+1-p} + \beta \underbrace{\widehat{y}_{t+1|t}}_{L_t + S_{t+1-p} + T_t} \\
&= L_t + T_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{t+1} &= (1-\gamma)T_t + \gamma(L_{t+1} - L_t) = T_t - \gamma T_t + \gamma \underbrace{L_{t+1}}_{L_t + T_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}} - L_t \\
&= T_t - \gamma T_t + \gamma(L_t + T_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t} - \gamma L_t) \\
&= T_t + \gamma\beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= (1-\delta)S_{t+1-p} + \delta(y_{t+1} - L_{t+1}) \\
&= S_{t+1-p} - \delta(S_{t+1-p} - y_{t+1}) - \delta(L_t + T_t + \beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}) \\
&= S_{t+1-p} + \delta y_{t+1} - \delta(L_t + T_t + S_{t+1-p}) - \delta\beta\widehat{\varepsilon}_{t+1|t} \\
&= S_{t+1-p} + \delta(1-\beta)\widehat{\varepsilon}_{t+1|t}.
\end{aligned}$$

Příklad 1.5. Pro demonstraci exponenciálního vyrovnávání zvolíme měsíční časovou řadu s počty nezaměstnaných mladých žen ve věku od 16 do 19 let v USA od ledna 1961 do srpna 2002.

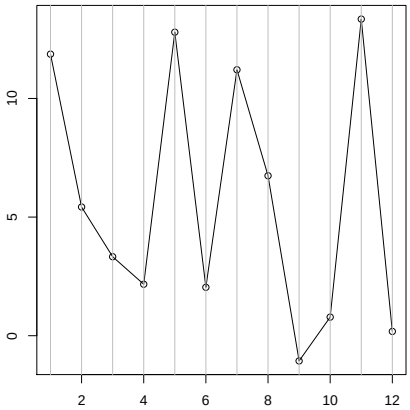


Obrázek 10. Vstupní data pro časovou řadu: *Počet nezaměstnaných mladých žen ve věku od 16 do 19 let v USA od ledna 1961 do srpna 2002*

Na načtená data vyzkoušíme Holtův–Wintersenův model se všemi komponentami, ve kterém odhady parametrů mají hodnoty

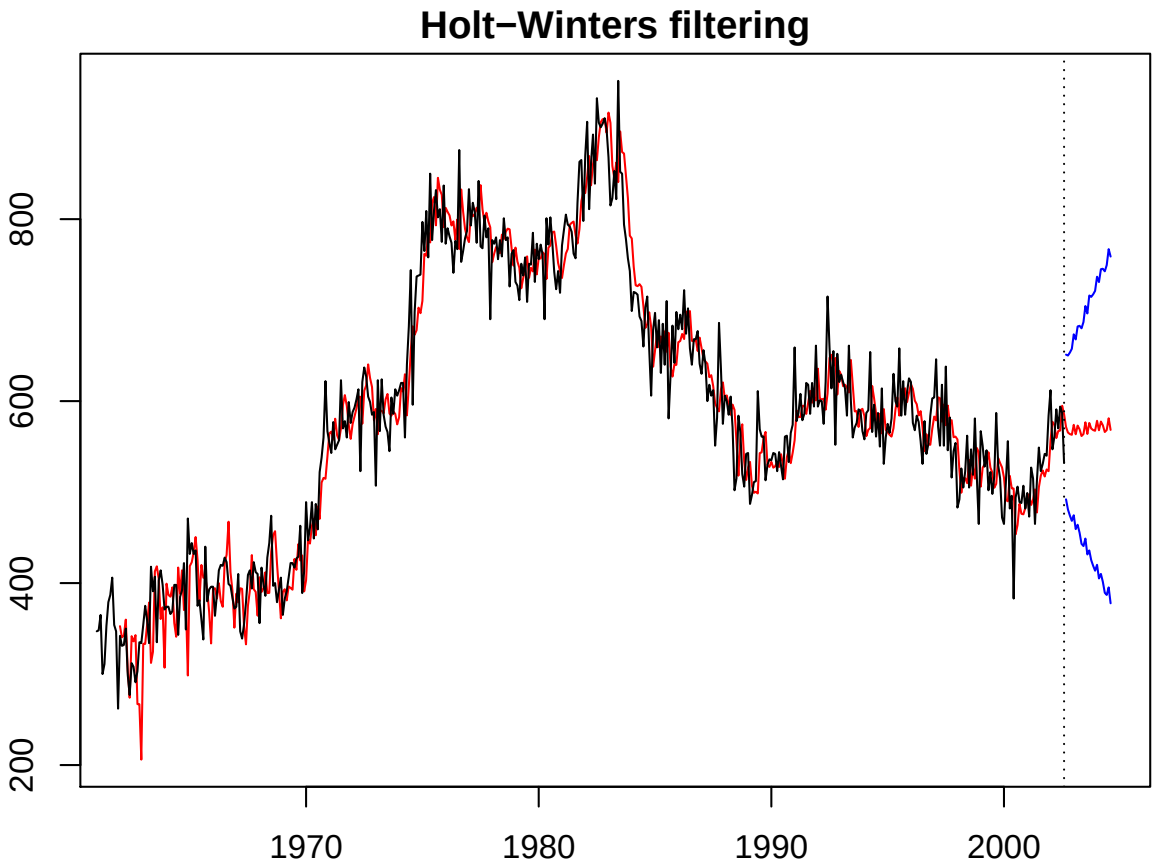
$$\widehat{\beta} = 0.3568 \qquad \widehat{\gamma} = 0.0206 \qquad \widehat{\delta} = 0.2020$$

Hodnoty sezónních složek vykreslíme do grafu.



Obrázek 11. Hodnoty sezónních složek

Výsledné exponenciální vyrovnáníní je znázorněno na následujícím grafu.



Obrázek 12. Holtovo–Wintersonovo exponenciální vyrovnávání pro časovou řadu: *Počet nezaměstnaných mladých žen ve věku od 16 do 19 let v USA od ledna 1961 do srpna 2002*

2. PROCESY NESTACIONÁRNÍ V ROZPTYLU

Není-li splněna podmínka **neměnnosti rozptylu v čase**, je proces **nestacionární v rozptylu**. Takovýto proces je ovšem třeba nejprve vhodně transformovat. Vysvětleme si stručně pojem **transformace stabilizující rozptyl**.

Situace nestabilního rozptylu nastává především v případě, kdy náhodná veličina Y_t má rozdělení, které závisí na jediném parametru ϑ_t, který obecně nemusí mít pro všechna t stejnou hodnotu. Předpokládejme, že tento parametr je zvolen tak, aby platilo

$$E_{\mu_t} Y_t = \mu_t.$$

Ve většině případů (ne však u normálního rozdělení) na μ_t závisí i rozptyl veličiny Y_t, takže můžeme psát

$$D_{\mu_t} Y_t = \sigma^2(\mu_t).$$

Přitom $\sigma(\mu_t)$ bývá obvykle hladká funkce proměnné μ_t.

Protože μ_t může souviset s časem t, není splněna podmínka neměnnosti rozptylu v čase. Vzniká tedy otázka, zda lze najít netriviální funkci g tak, aby náhodná veličina

$$Z_t = g(Y_t)$$

měla rozptyl nezávisející na μ_t. (Požadavkem netriviality se vylučují konstantní funkce g, které by vedly k veličinám s nulovým rozptylem).

Uvedená úloha v obecném případě nemá řešení. Používá se však určitých aproximací, které se ukázaly velmi užitečné.

Pokud se zabýváme jen dostatečně hladkými funkcemi g, z Taylorova rozvoje dostaneme aproximaci

$$g(Y_t) \approx g(\mu_t) + g'(\mu_t)(Y_t - \mu_t).$$

Potom střední hodnotu lze aproximovat takto

$$E_{\mu_t} g(Y_t) \approx E\left[g(\mu_t) + g'(\mu_t)(Y_t - \mu_t)\right] = g(\mu_t)$$

a rozptyl

$$D_{\mu_t}\left[g(Y_t)\right] \approx \left[g'(Y_t)\right]^2 D_{\mu_t} Y_t = \left[g'(\mu_t)\right]^2 \sigma^2(\mu_t).$$

Chceme, aby po transformaci byl rozptyl konstantní a nezávisel na střední hodnotě, tj.

$$c^2 = D_{\mu_t}\left[g(Y_t)\right] = \left[g'(\mu_t)\right]^2 \sigma^2(\mu_t) \qquad \Rightarrow \qquad g'(\mu_t) = \frac{c}{\sigma(\mu_t)},$$

kde c je nějaká konstanta. Odtud snadno dostaneme tvar transformace stabilizující rozptyl

$$g(\mu_t) = c \int \frac{1}{\sigma(\mu_t)} d\mu_t + K.$$

Konstanty c a K se volí tak, aby funkce g vypočtená podle předchozího vzorce měla výhodný tvar.

Ukázalo se, že funkce g vypočtená podle předchozího vzorce nejen výrazně stabilizuje rozptyl, takže rozptyl $D_{\mu_t} g(Y_t)$ závisí na μ_t jen velmi málo, ale zároveň také rozdělení náhodné veličiny $Z_t = g(Y_t)$ bývá již velmi blízké normálnímu, i když třeba samotné rozdělení veličiny Y_t je výrazně nenormální.

2.0.1. *Mocninné transformace.* Pro přehlednost vynechejme index t a uvažujme kladnou náhodnou veličinu X z rozdělení, které závisí na parametru μ se střední hodnotou

$$E_\mu X = \mu$$

(pokud tomu tak není, provede se vhodná reparametrizace) a rozptylem

$$D_\mu X = \sigma^2(\mu) = (\sigma \mu^\vartheta)^2, \qquad \sigma, \vartheta \in \mathbb{R},$$

tj.

$$X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma^2 \mu^{2\vartheta}).$$

Podle **obecného vzorce** se transformace stabilizující rozptyl vypočítá takto:

$$g(\mu) = \int \frac{c d\mu}{\sigma(\mu)} + K = \frac{c}{\sigma} \int \frac{d\mu}{\mu^\vartheta} + K = \begin{cases} \frac{c}{\sigma} \ln|\mu| + K & \vartheta = 1, \\ \frac{c}{1-\vartheta} \mu^{1-\vartheta} + K & \vartheta \neq 1. \end{cases}.$$

Položme v dalším

$$\lambda = 1 - \vartheta$$

a tento parametr nazvěme **transformačním parametrem** pro mocninnou transformaci.

Různou volbou c a K dostaneme následující často užívané transformace

- **Box-Coxova mocninná transformace** pro kladné náhodné veličiny při volbě

$$c = \sigma \quad \text{a} \quad K = \begin{cases} 0 & \lambda = 0 \Rightarrow \vartheta = 1, \\ -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{1-\theta} & \lambda \neq 0 \Rightarrow \vartheta \neq 1, \end{cases}$$

  a odtud

$$g(X) = X^{(\lambda)} = \begin{cases} \ln X & \lambda = 0 \ (\vartheta = 1), \\ \frac{X^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \ (\vartheta \neq 1). \end{cases}.$$

- **Box-Coxova mocninná transformace s posunutím** se použije v případě, že hodnoty náhodné veličiny nejsou kladné. Nalezneme proto takové reálné číslo a tak, aby pro všechny realizace platilo $x + a > 0$ a transformace bude mít tvar:

$$g(X + a) = (X + a)^{(\lambda)} = \begin{cases} \ln(X + a) & \lambda = 0 \ (\vartheta = 1), \\ \frac{(X+a)^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \ (\vartheta \neq 1). \end{cases}.$$

- **Mocninná transformace se znaménkem** lze opět použít v případě, že náhodné veličiny nejsou kladné:

$$g(X) = \operatorname{sign}(X)|X|^{(\lambda)} = \begin{cases} \operatorname{sign}(X) \ln|X| & \lambda = 0 \ (\vartheta = 1), \\ \operatorname{sign}(X) \frac{|X|^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \ (\vartheta \neq 1). \end{cases}$$

2.0.2. *Odhad transformačního parametru mocninné transformace.*

- **Parametrický přístup pomocí metody maximální věrohodnosti.** Mějme nezávislé realizace náhodné veličiny

$$X \sim \mathcal{L}(\mu_X, \sigma_X^2 \mu_X^{2\vartheta}).$$

  Předpokládejme, že existuje takové $\lambda = 1 - \vartheta$, že transformovaný náhodný vektor

$$\mathbf{Y} = (Y_1 = g(X_1), \ldots, Y_n = g(X_n))'$$

  je výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ realizaci náhodného výběru. Hledejme maximum **věrohodnostní funkce** pro $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$, tj. pro funkci

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

což je stejná úloha jako hledat maximum **logaritmu věrohodnostní funkce**

$$l(\mu,\sigma^2)=\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)^2.$$

Maxima nalezneme, položíme-li $\frac{\partial l}{\partial \mu}=0$ a $\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}=0$.

$$0=\frac{\partial l}{\partial \mu}=\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)$$
$$0=\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

a odtud pak dostaneme

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\bar{y},$$
$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=s^2.$$

Upravme nyní logaritmus věrohodnostní funkce takto:

$$\begin{aligned}l(\mu,\sigma^2)&=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i-\bar{y})+(\bar{y}-\mu)\right]^2\\&=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2+n(\bar{y}-\mu)^2\right\}\\&=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left[ns^2+n(\bar{y}-\mu)^2\right]\end{aligned}$$

Nyní dokažme, že funkce $l(\mu,\sigma^2)$ nabývá v bodě $(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=(\bar{y},s^2)$ svého maxima. Platí

$$l(\bar{y},s^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(s^2)-\frac{n}{2},$$

Ověřme, zda platí nerovnost

$$\begin{aligned}l(\mu,\sigma^2)&\overset{?}{\leq}&l(\bar{y},s^2)\\-\tfrac{n}{2}\ln(2\pi)-\tfrac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\tfrac{ns^2+n(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}&\overset{?}{\leq}&-\tfrac{n}{2}\ln(2\pi)-\tfrac{n}{2}\ln(s^2)-\tfrac{n}{2}\\-\tfrac{1}{2}\ln(\sigma^2)-\tfrac{s^2}{2\sigma^2}-\tfrac{(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}&\overset{?}{\leq}&-\tfrac{n}{2}\ln(s^2)-\tfrac{1}{2}\\0&\overset{?}{\leq}&\underbrace{\left[\left(\frac{s^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)-\ln\frac{s}{\sigma}\right]}_{\text{1. člen}}+\underbrace{\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}_{\geq 0}\end{aligned}$$

Protože pro všechna kladná $x=\frac{s}{\sigma}>0$ platí $\ln x<\frac{x^2-1}{2}$, je první i druhý člen nezáporný a nerovnost platí.

Celkově jsme tedy dostali, že

$$\max_{\mu,\sigma^2}l(\mu,\sigma^2)=l(\bar{y},s^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(s^2)-\frac{n}{2}$$

a

$$\max_{\mu,\sigma^2}L(\mu,\sigma^2)=L(\bar{y},s^2)=\left(2\pi s^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}.$$

Nyní toto maximum vyjádřeme v původních proměnných x_i, kdy

$$y_i=g(x_i)=\begin{cases}\ln x_i & \lambda=0,\\ \frac{x_i^{\lambda}-1}{\lambda} & \lambda\neq 0.\end{cases}$$

Nejprve vypočtěme jakobián této transformace:

$$|J|=\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{dy_i}{dx_i}\right|=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda x_i^{\lambda-1}}{\lambda}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda-1}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\max_{\mu,\sigma^2} L(\mu,\sigma^2,\lambda) &= \left(2\pi s^2(\lambda)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} |J| \\ &= \left(2\pi s^2(\lambda)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda-1} \\ &= \left(2\pi s^2(\lambda)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} e^{(\lambda-1)\ln x_i} \\ \max_{\mu,\sigma^2} l(\mu,\sigma^2,\lambda) &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(s^2(\lambda)) - \frac{n}{2} + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.\end{aligned}$$

Nyní hledejme maximum funkce $l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2,\lambda) = l(\bar{y},s^2,\lambda)$ pro parametr λ. Protože maximum vzhledem k λ nezávisí na konstantách, budeme maximalizovat funkci

$$l^*(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln(s^2(\lambda)) + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

Teoretickým odvozením maximálně věrohodného odhadu parametru λ se zde již dále nebudeme zabývat, ale ukážeme si **jednodušší přístup**, který pro ekvidistantní hodnoty $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ (pro dostatečně velké m) ze vhodně zvoleného intervalu $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, (kde $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R},\ \lambda_1^* < \lambda_2^*$) vypočítá hodnoty $l^*(\lambda)$ a hledá argument $\hat{\lambda}$ maxima těchto hodnot.

Ve své práci Box a Cox (1964) odvodili asymptotické rozdělení statistiky

$$K = -2\left[l^*(\lambda) - l^*(\hat{\lambda})\right] \overset{A}{\sim} \chi^2(1),$$

takže můžeme zkonstruovat jednostranný asymptotický **interval spolehlivosti pro parametr** λ

$$\begin{aligned}1-\alpha = P\left(K < \chi^2_{1-\alpha}(1)\right) &= P\left(-2\left[l^*(\lambda) - l^*(\hat{\lambda})\right] < \chi^2_{1-\alpha}(1)\right) \\ &= P\left(\underbrace{l^*(\hat{\lambda}) - \frac{1}{2}\chi^2_{1-\alpha}(1)}_{=D_\alpha} \le l^*(\lambda)\right),\end{aligned}$$

tj. všechna λ splňující nerovnost

$$l^*(\lambda) \ge D_\alpha$$

leží v intervalu spolehlivosti a jsou tedy přijatelná.

Testování hypotéz typu $H_0 : \lambda = \lambda_0$ **proti alternativě** $H_1 : \lambda > \lambda_0$:

(1) Budeme testovat hypotézu

$$H_0^1 : \lambda = 1.$$

Pokud hypotézu **nezamítneme**, tj. $l^*(1) \ge D_\alpha$, **nemusíme data transformovat**.

(2) Pokud předchozí hypotézu **zamítneme**, můžeme testovat další hypotézu

$$H_0^2 : \lambda = 0.$$

Pokud H_0^2 **nezamítneme**, tj. $l^*(0) \ge D_\alpha \wedge l^*(1) < D_\alpha$, transformace bude tvaru

$$y_i = \ln x_i.$$

Pokud však se $l^*(0) < D_\alpha \wedge l^*(1) < D_\alpha$, provedeme transformaci

$$y_i = \frac{x_i^{\hat{\lambda}} - 1}{\hat{\lambda}}.$$

➽ **Jednoduchý algoritmus v praktických úlohách**

(1) Algoritmus nejprve zkontroluje vstupní data tak, aby byla **nezáporná**, tj. případně přičte kladnou konstantu.
(2) Upravený vektor dat rozdělí na krátké úseky o délce 4 až 12 údajů.
(3) V každém úseku dat se provede pokud možno robustní odhad střední hodnoty $\hat{\mu}_i$ (průměr, medián) a robustní odhad variability $\hat{\sigma}_i^2$ (např. max-min, interkvartilové rozpětí).

(4) Protože předpokládáme, že platí

$$\sigma(\mu) = \sigma\mu^{\vartheta}$$

pak logaritmovanáním dostaneme vztah

$$\ln(\sigma(\mu)) = \underbrace{\ln\sigma}_{a} + \vartheta \ln(\mu),$$

takže neznámé ϑ můžeme odhadnout pomocí **metody nejmenších čtverců** díky hodnotám

$$z_i = \ln(\widehat{\sigma}_i) \quad \text{a} \quad u_i = \ln\hat{\mu}_i$$

v regresním modelu

$$z_i = a + \vartheta u_i + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

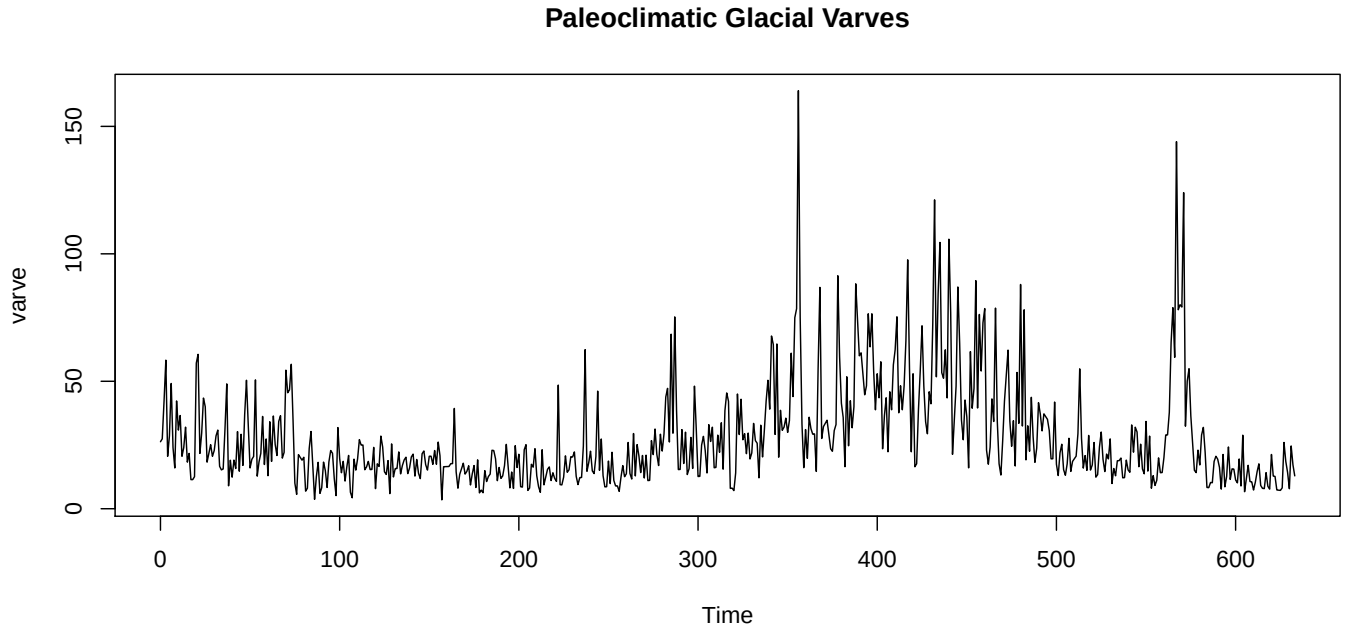
(5) Pro odhad $\widehat{\vartheta} = 1 - \hat{\lambda}$ pomocí t-statistiky zkonstruujeme interval spolehlivosti $I(\widehat{\vartheta})$.
- Pokud tento interval bude obsahovat **nulu**, tj. $0 \in I(\widehat{\vartheta})$ data se **nebudou transformovat**.
- Pokud $0 \notin I(\widehat{\vartheta}) \wedge 1 \in I(\widehat{\vartheta})$, volí se logaritmická transformace

$$y_i = \ln x_i.$$

- Jinak se volí mocninná transformace

$$y_i = \frac{x_i^{\hat{\lambda}} - 1}{\hat{\lambda}}.$$

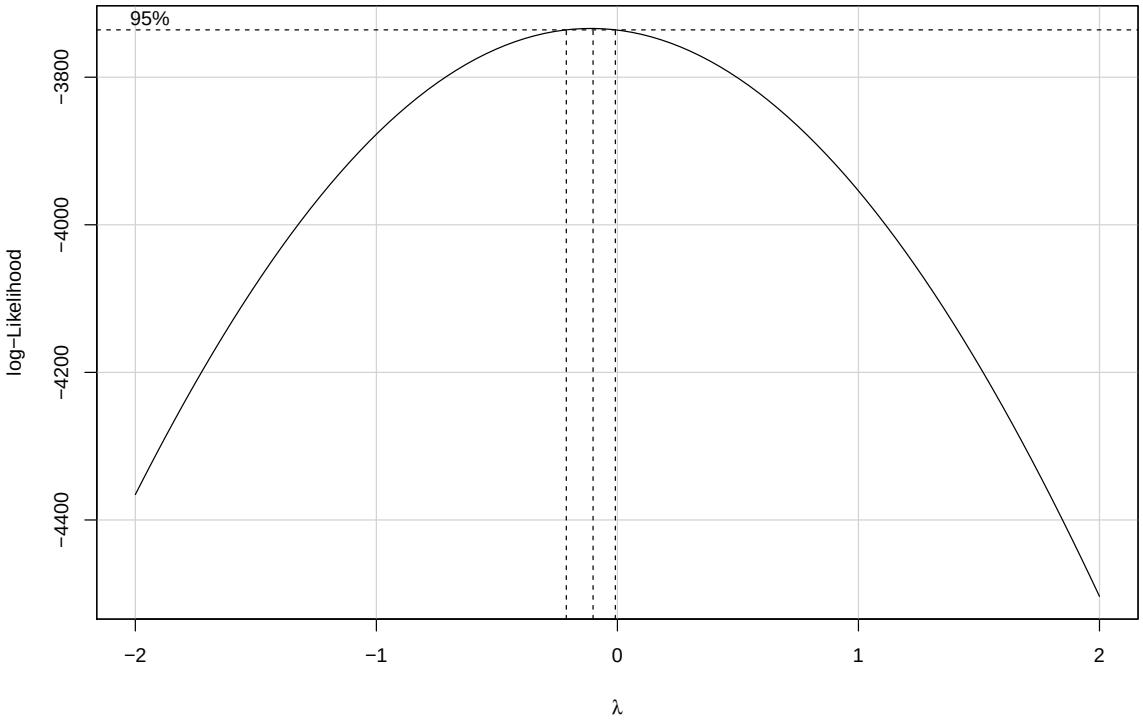
Příklad 2.6.
V Nové Anglii probíhalo na březích a na dnech jezer (zhruba před 12 600 roky po dobu asi 6000 let) během jarního tání ledovců ukládání vrstev písku a bahna do vrstviček zvaných *varvy*. Pomocí tloušťky ročních sedimentů se například odhaduje teplota. Na obrázku jsou znázorněny tloušťky ročních sedimentů v Massachusetts za 634 roků (před 11.834 roky).



Obrázek 13. Časová řada ročních sedimentů v Massachusetts za 634 roků

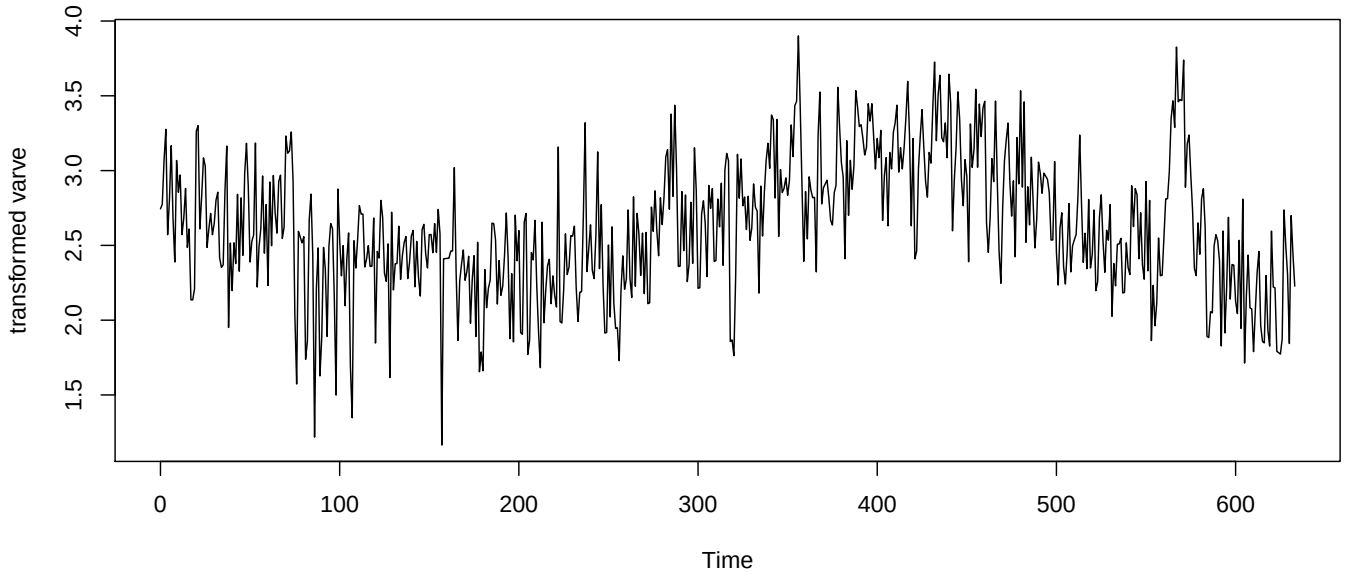
Vidíme, že rozdíly v tloušťkách se zvyšují v závislosti na jejich velikosti, takže vstupní data bude nutné transformovat.

Pomocí metody maximální věrohodnosti provedeme odhad parametru λ.



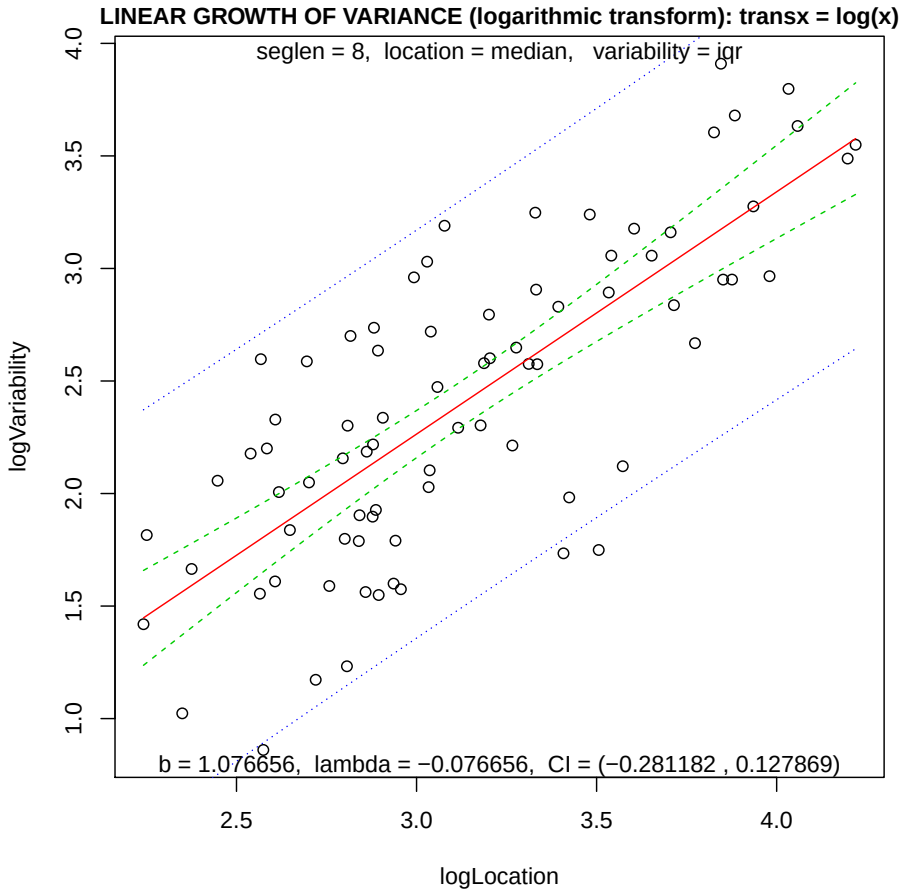
Obrázek 14. Maximálně věrohodný odhad parametru $\widehat{\lambda}_{MLE} = -0.1103$, interval spolehlivosti $(-0.2132, -0.0074)$ neobsahuje nulu.

Na dalším grafu jsou znázorněna již transformovaná data pomocí parametru $\widehat{\lambda}_{MLE} = -0.1103$.



Obrázek 15. Boxova–Coxova transformace dat pro $\widehat{\lambda}_{MLE} = -0.1103$.

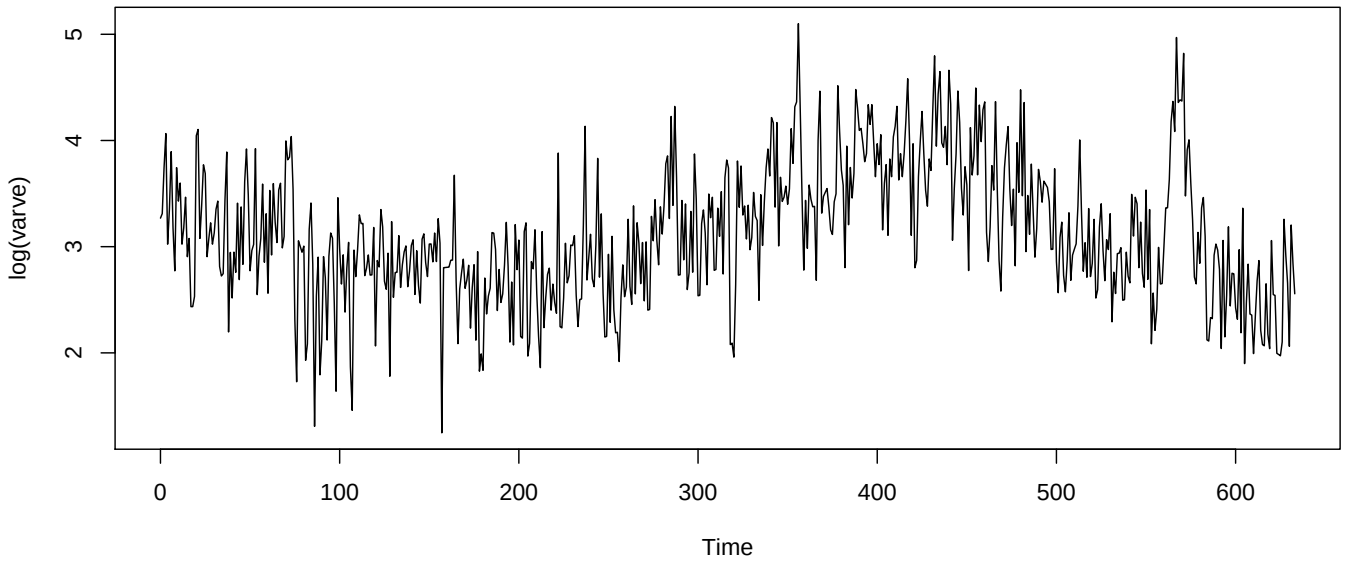
Odhad neznámého parametru λ provedeme ještě pomocí jednoduchého algoritmu, který byl zmíněn na konci odstavce.



Obrázek 16. Graf znázorňující odhad parametru λ pomocí jednoduchého regresního modelu.

Vidíme, že výsledek jednoduchého algoritmu navrhuje logaritmickou transformaci dat. Z interpretačního hlediska je tato transformace vhodnější než transformace pomocí $\widehat{\lambda}_{MLE} = -0.1103$.

Proto se podívejme, jak se data logaritmickou transformací změnila.



Obrázek 17. Boxova–Coxova transformace dat pro $\widehat{\lambda} = 0$.

KAPITOLA 5

Stacionární a nestacionární vícerozměrné náhodné procesy

Analýza jedné časové řady vytržené ze souvislosti s ostatními časovými řadami není postačující. Sledujeme-li například výdaje domácnosti, tak jistě závisí nejen na výdajích za minulý měsíc, ale i na příjmu domácnosti, investicích, úrokové míře, atd.

Proto je velmi důležitá analýza vícerozměrných časových řad.

Rozšíření jednorozměrných náhodných procesů na vícerozměrné není nijak obtížně, pouze jednorozměrné náhodné veličiny Y_t nahradíme vícerozměrnými náhodnými vektory $\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, \ldots, Y_{m,t})'$.

Střední hodnotou náhodného procesu $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$ budeme rozumět vektor

$$\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{1,t}, \ldots, \mu_{m,t})' = E\mathbf{Y}_t = (EY_{1,t}, \ldots, EY_{m,t})',$$

varianční matice bude definována vztahem

$$\mathbf{D}_t = D\mathbf{Y}_t = E(\mathbf{Y}_t - E\mathbf{Y}_t)(\mathbf{Y}_t - E\mathbf{Y}_t)',$$

autokovarianční matice bude matice

$$\boldsymbol{\Gamma}_{s,t} = C(\mathbf{Y}_s, \mathbf{Y}_t) = E(\mathbf{Y}_s - E\mathbf{Y}_s)(\mathbf{Y}_t - E\mathbf{Y}_t)'.$$

Pokud proces bude **slabě stacionární**, pak pro $\forall t, s \in T$ musí platit

$$E\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu}_t \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{\Gamma}_{s,t} = \boldsymbol{\Gamma}_{0,|s-t|}.$$

Obdobně jako v jednorozměrném případě budeme psát

$$\boldsymbol{\Gamma}_{s,t} = \boldsymbol{\Gamma}_{s-t} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{D}_t = D\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_0.$$

Pro vícerozměrný **bílý šum**

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_t, t \in T\} \sim WN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

musí platit

$$\begin{aligned} E\boldsymbol{\varepsilon}_t &= \mathbf{0} \\ D\boldsymbol{\varepsilon}_t &= E\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t' = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ C(\boldsymbol{\varepsilon}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_t) &= E\boldsymbol{\varepsilon}_s\boldsymbol{\varepsilon}_t' = \mathbf{0} \qquad s \neq t \end{aligned}$$

1. Vícerozměrné Box–Jenkinsonovy modely

Forma, kterou popisujeme mnohorozměrné (vektorové) náhodné procesy, je analogická jednorozměrnému případu.

Nejobecnějším modelem je **vektorový sezónní smíšený model** – $VSARIMA(p,d,q,P,D,Q)$, který je tvaru

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{\pi}(B^L)(\mathbf{I}-\mathbf{I}B)^d(\mathbf{I}-\mathbf{I}B^L)^D\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{\Psi}(B^L)\boldsymbol{\varepsilon}_t \;\sim\; VSARIMA(p,d,q)\times(P,D,Q)_L$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}B\mathbf{Y}_t &= \mathbf{Y}_{t-1} \\ \mathbf{I}B^L\mathbf{Y}_t &= \mathbf{Y}_{t-L} \\ (\mathbf{I}-\mathbf{I}B)\mathbf{Y}_t &= \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_{t-1} \\ (\mathbf{I}-\mathbf{I}B^L)\mathbf{Y}_t &= \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_{t-L} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(B) &= \mathbf{I} - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p \\ \boldsymbol{\Theta}(B) &= \mathbf{I} + \Theta_1 B + \Theta_2 B^2 + \cdots + \Theta_q B^q \\ \boldsymbol{\pi}(B) &= \mathbf{I} - \pi_1 B^L - \pi_2 B^{2L} - \cdots - \pi_P B^{PL} \\ \boldsymbol{\Psi}(B) &= \mathbf{I} + \Psi_1 B^L + \Psi_2 B^{2L} + \cdots + \Psi_Q B^{QL} \end{aligned}$$

Tak například rekurentní vztahy

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \phi_{11}Y_{1,t-1} + \phi_{12}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} &= \phi_{21}Y_{1,t-1} + \phi_{22}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned}$$

lze vyjádřit maticově

$$\begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

tj.

$$\mathbf{Y}_t = \Phi_1\mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \;\sim\; VAR(1)$$

Podmínky kauzality a invertibility u $VARMA$ procesů lze vyslovit následujícím způsobem:

Kritérium **kauzality**	$\det\boldsymbol{\Phi}(z) \neq 0$	pro všechna $z \in \mathbb{C}$	tak, že $\lvert z\rvert \leq 1$
Kritérium **invertibility**	$\det\boldsymbol{\Theta}(z) \neq 0$	pro všechna $z \in \mathbb{C}$	tak, že $\lvert z\rvert \leq 1$

Poznámka 1.1. Podmínku kauzality lze formulovat ekvivalentně také tak, že všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{mp \times mp}$$

jsou v absolutní hodnotě menší než 1.

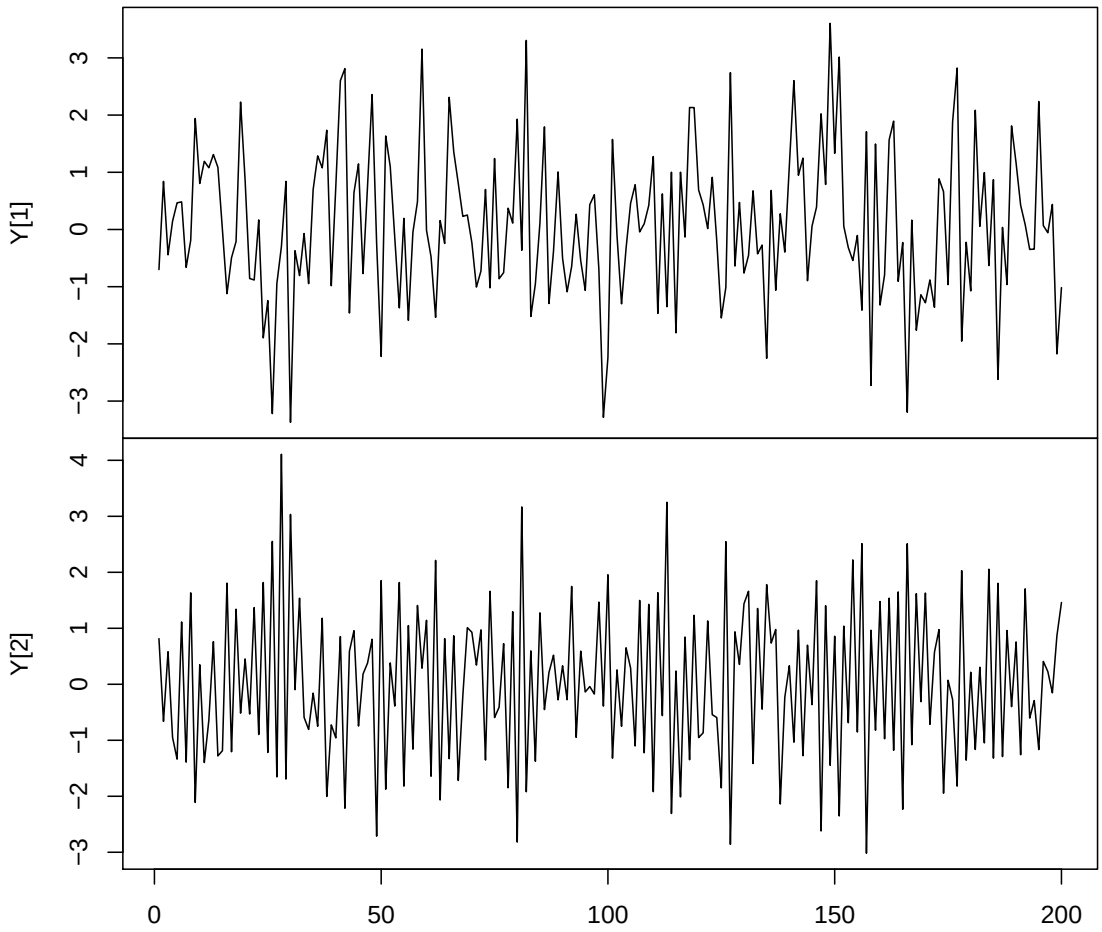
Příklad 1.1. Uvažujme dvourozměrný náhodný proces typu $VAR(2)$

$$\mathbf{Y}_t = \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Pro ilustraci znázorníme simulovaná data, která se řídí tímto modelem



Obrázek 1. Simulovaná data $VAR(2)$ modelu.

Simulovaná data naznačují, že jde o stacionární proces, což lze ověřit tak, že vypočítáme absolutní hodnoty vlastních čísel matice modelu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0.5 & 0.2 & -0.3 & -0.7 \\ -0.2 & -0.5 & -0.1 & 0.3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Získané hodnoty

$$|\lambda_1| = 0.818 \qquad |\lambda_2| = 0.597 \qquad |\lambda_3| = 0.572 \qquad |\lambda_4| = 0.572$$

zajišťují, že jde o stacionární proces.

2. Modelování vícerozměrných časových řad pomocí kointegrace

Při modelování vícerozměrných časových řad je účelné rozlišovat mezi

- **krátkodobými vztahy** mezi časovými řadami, které časem mizí, a
- **dlouhodobými vztahy**, které mají dlouhodobé trvání.

Připomeňme dva typické příklady náhodných procesů nejprve s krátkou a pak s dlouhou pamětí.

Kauzální $AR(1)$ **proces:**

$$(1-\varphi B)Y_t = \varepsilon_t, \qquad \text{kde} \qquad |\varphi| < 1.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme **kauzální** proces, musí existovat taková posloupnost reálných čísel

$$\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty} \overset{AR(1)}{=} \left\{\varphi^j\right\}_{j=0}^{\infty},$$

že

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \varepsilon_{t-j} \ \sim \ MA(\infty),$$

ve které se váhy

$$\psi_j = \varphi^j$$

bílého šumu **exponenciálně snižují**. Bílý šum se interpretuje jako posloupnost nekorelovaných (popř. nezávislých) „šoků“ a v tomto případě vidíme, že vliv „šoků“, které se udály v minulosti, velmi rychle slábne, takže jde o proces s krátkou pamětí.

Poznamenejme, že tuto vlastnost krátké paměti mají všechny kauzální $AR(p)$, invertibilní $MA(q)$ a kauzální a invertibilní $ARMA(p,q)$ procesy. Skutečnost, že jde o stacionární posloupnost, budeme zkráceně značit symbolem $\boxed{I(0)}$ a řekneme, že jde o **integrované procesy řádu nula**.

Náhodná procházka $I(1)$**:**

$$(1-B)Y_t = \varepsilon_t$$

je limitním případem $AR(1)$ procesu, kdy $\varphi = 1$, tj.

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j},$$

takže všechny „šoky“ mají stejnou váhu

$$\psi_j = 1$$

a vliv minulých „šoků“ nemizí – mají dlouhou paměť. Totéž platí pro všechny integrované procesy, tj. pro takové procesy, které po diferencování se stanou stacionárními, což symbolicky označíme jako $I(d)$.

Všimněme si dále vztahů, které se týkají lineárních kombinací $I(d)$ procesů.

Platí (zřejmě)

(1) $\{X_t\} \sim I(0) \quad \Rightarrow \quad \{a + bX_t\} \sim I(0)$

(2) $\{X_t\} \sim I(1) \quad \Rightarrow \quad \{a + bX_t\} \sim I(1)$

(3) $\left.\begin{matrix}\{X_t\} \sim I(0)\\ \{Y_t\} \sim I(0)\end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \{aX_t + bY_t\} \sim I(0)$

(4) $\left.\begin{matrix}\{X_t\} \sim I(1)\\ \{Y_t\} \sim I(0)\end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \{aX_t + bY_t\} \sim I(1)$

(5) $\left.\begin{matrix}\{X_t\} \sim I(1)\\ \{Y_t\} \sim I(1)\end{matrix}\right\} \quad \overset{\text{obecně}}{\Rightarrow} \quad \{aX_t + bY_t\} \sim I(1)$

Poslední vlastnost však pro některá $\{X_t\}$ a $\{Y_t\}$ nemusí platit. Může totiž existovat jejich lineární kombinace, která je již stacionární, tj. $\{aX_t + bY_t\} \sim I(0)$. Proto Engle a Granger (1987) zavedli pojen kointegrace, která se týká dvou (či více) integrovaných procesů.

Problematika **dlouhodobých** vztahů souvisí s pojmem **rovnovážný stav** (*ekvilibrium*), který chápeme jako stav, ke kterému je systém neustále přitahován.

Při konstrukci modelů časových řad je logické vycházet z předpokladu, že vývoj jednotlivých řad spjatých teoreticky zdůvodněným vztahem se v dlouhodobém časovém horizontu nerozchází. Pokud odklon směrů vývoje časových řad je pouze

krátkodobý, časem se vytrácí a existuje mez, za kterou nemůže jít, potom říkáme, že časové řady jsou v **rovnovážném stavu** (ekvilibriu).

Příkladem může být cena podobných potravin v různých zemích, poptávka po penězích a hodnota peněz, krátkodobé a dlouhodobé úrokové míry apod.

Obecně hledáme-li rovnovážný stav mezi proměnnými, které jsou složky m-rozměrného vektoru $\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, \ldots, Y_{m,t})'$, chceme najít vektor $\boldsymbol{\beta}$ takový, aby platilo

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t = 0 \quad \text{v každém čase } t.$$

V praxi tolerujeme krátkodobé odchylky od rovnovážného stavu, které značíme v čase t jako

$$Z_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t.$$

Hledáme tedy vektor $\boldsymbol{\beta}$ takový, že odchylky od rovnováhy $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tvoří **stacionární proces** s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem.

Ukazuje se, že tohoto dlouhodobě rovnovážného stavu lze dosáhnout i v případě, že jednotlivé veličiny jsou integrované. Kointegrace je vhodným nástrojem k analýze těchto vztahů.

Tímto tématem se intenzivně zabýval nositel Nobelovy ceny z ekonomii Clive Granger. Základní myšlenky jsou shrnuty v článku Granger & Engle (1987), kde je i následující obecná definice pojmu kointegrace.

DEFINICE 2.1. Nechť $b, d \in \mathbb{N}$ a $d \geq b$. Řekneme, že složky m–rozměrného náhodného procesu $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou **kointegrované** řadu d, b, jestliže

(i) všechny složky $\mathbf{Y}_t$ jsou $I(d)$ a
(ii) existuje nenulový vektor $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)'$ takový, že složky lineární kombinace $Z_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t$ jsou $I(d-b)$.

Vektor $\boldsymbol{\beta}$ se nazývá **kointegrační vektor**. Kointegraci budeme značit

$$\mathbf{Y}_t \ \sim \ CI(d, b).$$

Je zřejmé, že kointegrační vektor není jednoznačný. Stačí jej vynásobit nenulovou konstantou a opět dostáváme kointegrační vektor. Pro dimenze $m > 2$ může obecně existovat více nezávislých kointegračních vektorů. Existuje-li r ($r \leq m-1$) takových nezávislých vektorů, pak se $\boxed{r}$ se nazývá **řád kointegrace**.

V dalším se seznámíme s různými modely kointegrovaných časových řad, z nichž některé umožňují modelovat pouze jeden kointegrační vektor (tzv. *jednorovnicové modely*).

Příklad 2.2. Uvažujme dvourozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t})', t \in \mathbb{Z}\}$, který je (pro $\lambda \neq 0$) definovaný vztahy

$$\begin{array}{rcl} Y_{1,t} &=& \alpha Y_{2,t} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} &=& Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{array} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{array}{rcl} Y_{1,t} - \alpha Y_{2,t} &=& \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} - Y_{2,t-1} &=& \varepsilon_{2,t} \end{array}$$

což lze vyjádřit maticově takto

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix},$$

Všimněme si, že tento proces není v obvyklé (tzv. *redukované*) formě, kde $\Phi_0 = \mathbf{I}_m$, ale v tzv. *strukturální VAR* formě (*SVAR* model),tj.

$$\Phi_0\mathbf{Y}_t - \Phi_1^*\mathbf{Y}_{t-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim SVAR(1).$$

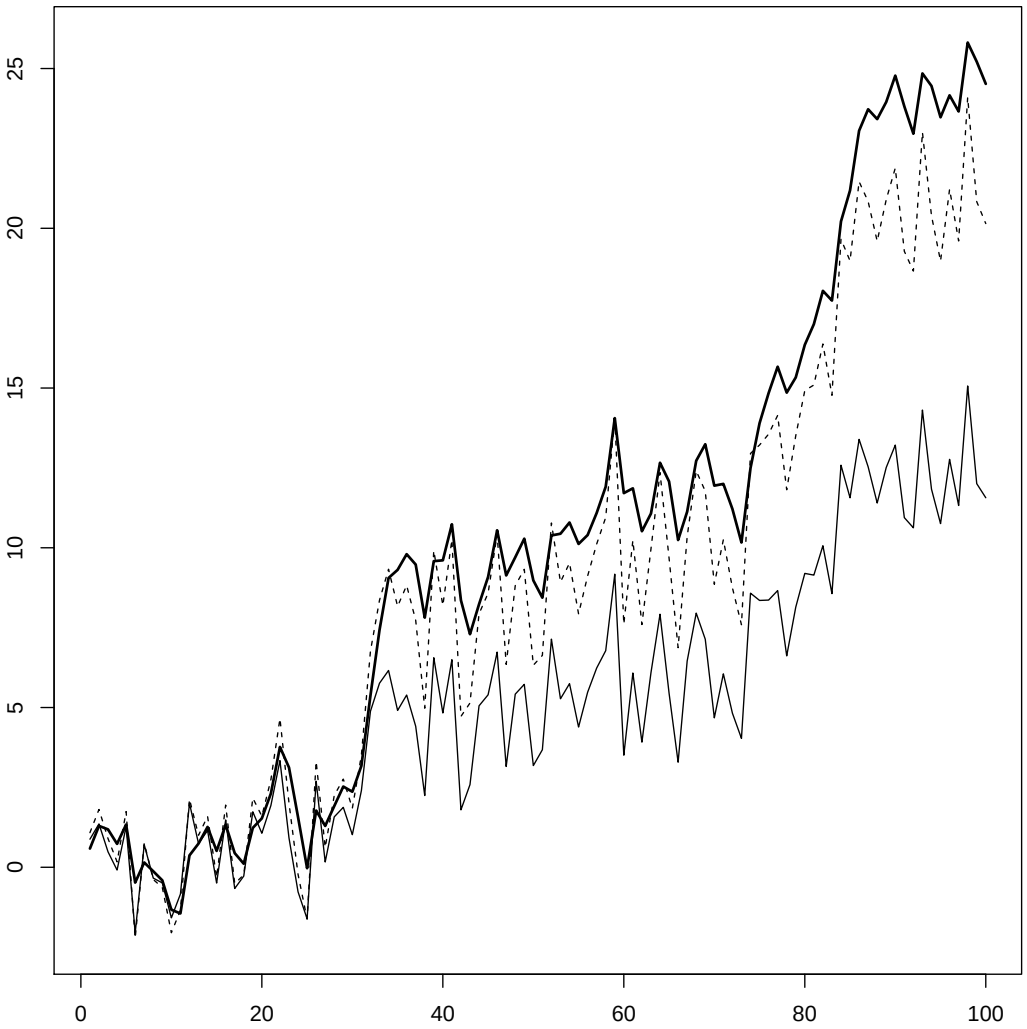
Podíváme-li se na jednorozměrný proces $\{Y_{2,t}, t \in \mathbb{Z}\}$, vidíme, že jde o náhodnou procházku, tj $Y_{2,t} \sim I(1)$. Také je zřejmé (viz první rovnice), že i $Y_{1,t} \sim I(1)$. Hned z první rovnice vidíme, jak bude vypadat kointegrační vektor, neboť

$$Y_{1,t} - \alpha Y_{2,t} = \varepsilon_{1,t} \ \sim \ WN(0, \sigma_{\varepsilon_1}2) \ \sim \ I(0),$$

takže vektor $\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t})$ je kointegrovaný řádu $CI(1,1)$ s kointegračním vektorem

$$\boldsymbol{\beta} = (1, -\alpha)'.$$

Pro názornost vykreslíme simulovaná data, která se řídí tímto modelem, a to pro dvě různé hodnoty parametru α.



Obrázek 2. Simulovaná data $CI(1,1)$ procesu pro dvě hodnoty $\alpha \in \{0.5, 0.85\}$. Tlustá čára se týká procesu $\{Y_{2,t}, t \in \mathbb{Z}\}$, proces $\{Y_{1,t}, t \in \mathbb{Z}\}$ reprezentují dvě řady, čárkovaná čára se týká hodnoty $\alpha = 0.85$ a tenká čára hodnoty $\alpha = 0.5$.

2.1. Jednorovnicové modely.

2.1.1. *Statický regresní model kointegrovaných veličin.* Uvažujme nejprve obecně $(m+1)$–rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Z}_t = (Y_t, \mathbf{X}_t')', t \in \mathbb{Z}\}$. Jedním z možných přístupů, jak modelovat vzájemný vztah mezi Y_t a $\mathbf{X}_t$, je použití tzv. **statického regresního modelu**

$$Y_t = c + \boldsymbol{\beta}\mathbf{X}_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Tyto jednoduché modely jsou velmi oblíbené. Jejich konstrukci je však třeba provádět obezřetně, neboť jejich použití má smysl jedině v případě kointegrovaných procesů $CI(1,1)$. Při použití **nekointegrovaných nestacionárních časových řad** může vzniknout situace, která se nazývá **zdánlivá**, resp. **nesmyslná regrese** (anglicky *spurious regression*).

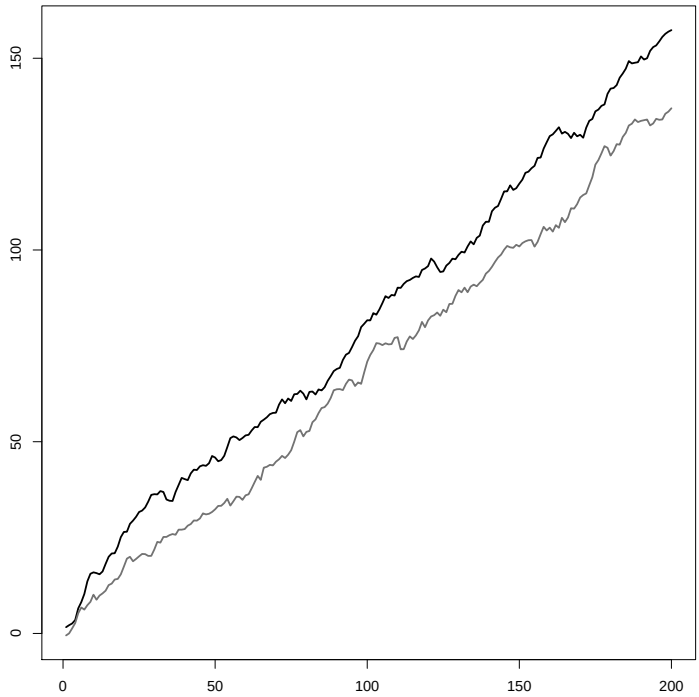
Uvažujme pro jednoduchost případ, kdy $m = 2$. Může se totiž stát, že i když $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ **věcně nesouvisí**, přesto v regresním modelu, kde jedna řada vystupuje v pozici nezávisle proměnné, druhá v pozici závisle proměnné, je index determinace R^2 velmi vysoký, také F-test i všechny t-testy ukazují na vhodnost regresního modelu.

Typický případ zdánlivé regrese budeme demonstrovat na následujícím příkladu.

Příklad 2.3. Uvažujme dvourozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t})', t \in \mathbb{Z}\}$, který je definovaný vztahy

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \alpha_1 + Y_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} &= \alpha_2 + Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned}$$

takže jde o dvě náhodné procházky s posunutím, které spolu nijak nesouvisí. Pro názornost vykresleme simulovaná data.



Obrázek 3. Ukázka dvou nesouvisejících vychýlených náhodných procházek $Y_{j,t} = \alpha_j + Y_{j,t-1} + \varepsilon_{j,t}$, kde $\varepsilon_{j,t} \sim N(0,1)$ $(j = 1, 2)$, $\alpha_1 = 0.8$ (černá čára), $\alpha_1 = 0.6$ (šedá čára)

Pro simulovaná data uvažujme statickou regresi tvaru

$$Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t} + \varepsilon_t, \qquad \text{kde} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

V následujících dvou tabulkách uvádíme výsledky statické regrese z hlediska odhadu parametrů a příslušných statistik.

Tabulka t–statistik pro koeficienty β_0, β_1

	Estimate	Std. Error	t value	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	7.7569	0.5280	14.69	0.0000
y2	1.0765	0.0067	161.16	0.0000

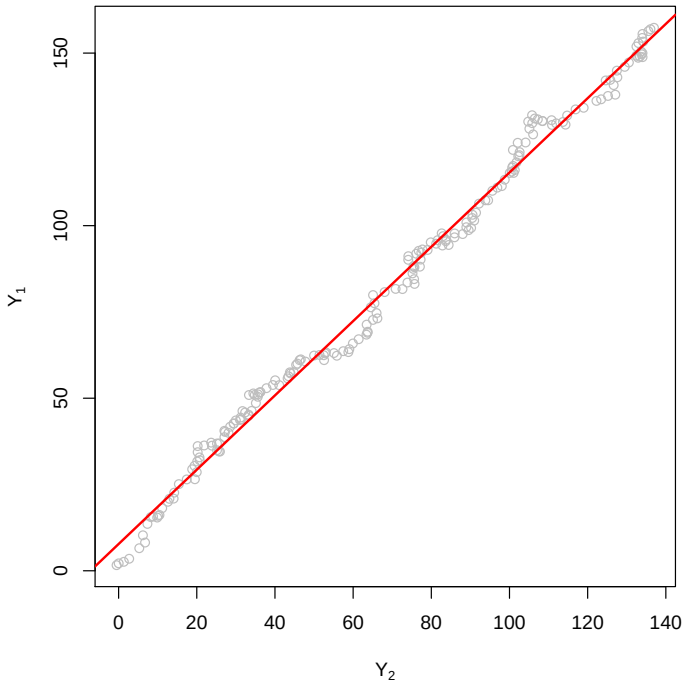
Tabulka s výsledky F–testu

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
y2	1	359465.55	359465.55	25973.43	0.0000
Residuals	198	2740.27	13.84		

$R^2 = 0.992$, $R^2_{adj} = 0.992$

Vidíme, že koeficienty β_0, β_1 se významně liší od nuly a také model se jeví jako velmi vhodný, neboť podle koeficientu determinace R^2 časová řada $\{Y_{2,t}\}$ vysvětluje 99% variability časové řady $\{Y_{1,t}\}$, přestože obě dvě časové řady spolu nesouvisí.

Výsledky regrese potvrzuje i grafická interpretace statické regrese.



Obrázek 4. Statický regresní model $Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t} + \varepsilon_t$ pro simulovaná data dvou nesouvisejících vychýlených náhodných procházek. Jednotlivými body je proložena regresní přímka.

Protože pro tyto dva náhodné procesy neexistuje kointegrační vektor, reziduální složka nebude bílým šumem. Pro testování autokorelace reziduí prvního řadu je používán Durbinův–Watsonův test.

Durbinův–Watsonův test autokorelace reziduí 1. řádu

Durbinova-Watsonova statistika je definována vztahem

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(r_t - r_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} r_t^2}.$$

Protože platí $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, dostáváme

$$DW \leq \frac{2\sum_{t=2}^{n} r_t^2 + 2\sum_{t=2}^{n} r_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} r_t^2} \leq 4 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{0 \leq DW \leq 4}.$$

Vzhledem k tomu, že $Er = 0$, bude pro větší hodnoty n platit

$$\sum_{t=2}^{n} r_t^2 \doteq \sum_{t=1}^{n} r_t^2 \doteq \sum_{t=1}^{n-1} r_{t+1}^2.$$

Označme výběrový autokorelační koeficient:

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\widehat{E}(r_t r_{t+1})}{\sqrt{\widehat{D}r_t \widehat{D}r_{t+1}}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} r_{t+1} r_t}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} r_t^2 \sum_{t=1}^{n-1} r_{t+1}^2}} \Rightarrow DW \approx 2(1-\hat{\rho}_1) \quad \text{nebo} \quad \hat{\rho}(1) \approx 1 - \tfrac{DW}{2}.$$

Pokud budou **rezidua málo korelovaná**, hodnota D se bude pohybovat **kolem 2**.

Kladná korelace způsobí, že $DW \in (0, 2)$ a **záporná korelace** způsobí, že $DW \in (2, 4)$.

Přesné rozdělení statistiky DW závisí na tvaru matice plánu $\mathbf{X}$, proto jsou tabelovány intervaly d_L a d_U, ve kterých se nachází kritické hodnoty (pro různá n, k a α).

Dolní a horní hranice Durbinova-Watsonova testu na 5% hladině významnosti

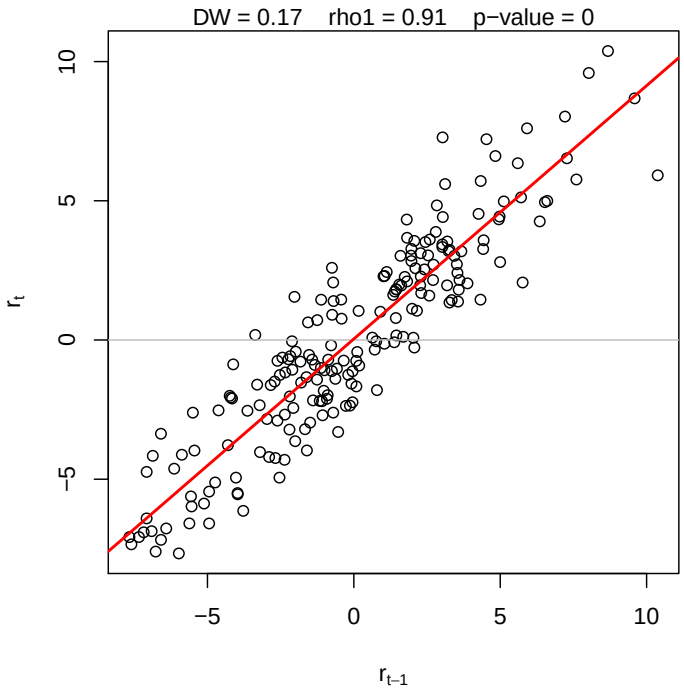
	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5+	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
100+	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

kde k je počet nezávisle proměnných v regresní rovnici.

Pro **rychlé posouzení autokorelace prvního řadu** vystačíme s následující tabulkou:

Pokud hodnota Durbinovy-Watsonovy statistiky DW bude v mezích				
0 až d_L	d_L až d_U	d_U až $(4-d_U)$	$(4-d_U)$ až $(4-d_L)$	$(4-d_L)$ až 4
Zamítáme H_0 KLADNÁ autokorelace	Ani nezamítáme ani nepřijímáme H_0	Nezamítáme nulovou hypotézu H_0	Ani nezamítáme ani nepřijímáme H_0	Zamítáme H_0 NEGATIVNÍ autokorelace

Pro rezidua našeho statického regresního modelu vykreleme bodový graf mezi r_{t-1} a r_t a vypočítejme hodnotu Durbinovy–Watsonovy statistiky.



Obrázek 5. Bodový graf mezi r_{t-1} a r_t pro statický regresní model $Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t} + \varepsilon_t$ pro simulovaná data dvou nesouvisejících vychýlených náhodných procházek. Jednotlivými body je proložena regresní přímka.

Vidíme, že rezidua vykazují významnou pozitivní autokorelaci. Navíc jsme prováděli regresi pro dvě časové řady, které spolu vůbec nesouvisí.

V literatuře (viz Arlt, 1997) je uveden empirický poznatek o souvislosti mezi vysokými hodnotami F–statistik modelů, jako i t–statistik regresních koeficientů a nízkými hodnotami Durbinovy-Watsonovy (DW) statistiky reziduí u zdánlivé regrese. Je to natolik charakteristická vlastnost zdánlivé regrese, že Granger a Newbold (1974) navrhli, aby splnění nerovnosti:

$$R^2 > DW$$

tj. když koeficient determinace je větší než DW statistika, bylo určitým indikátorem nebezpečí existence zdánlivé regrese.

Příklad 2.4. Vrátíme se k příkladu, kde vystupuje dvourozměrný kointegrovaný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t})', t \in \mathbb{Z}\} \sim CI(1,1)$, který je (pro $\lambda \neq 0$) definovaný vztahy

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \alpha Y_{2,t} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} &= Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned}$$

Pro simulovaná data uvažujme statickou regresi tvaru

$$Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t} + \varepsilon_t \qquad \text{kde} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

V následujících tabulkách uvádíme výsledky statické regrese z hlediska odhadu parametrů a příslušných statistik, a to pro dvě různé hodnoty parametru $\alpha \in \{0.85, 0.5\}$.

Tabulka t–statistik pro koeficienty β_0, β_1 pro $\alpha = 0.85$

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	0.0570	0.1819	0.31	0.7547
y2	0.8684	0.0141	61.64	0.0000

Tabulka s výsledky F–testu pro $\alpha = 0.85$

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
y2	1	4688.54	4688.54	3800.08	0.0000
Residuals	98	120.91	1.23		

$R^2 = 0.975$, $R^2_{adj} = 0.975$

Tabulka t–statistik pro koeficienty β_0, β_1 pro $\alpha = 0.5$

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	0.0570	0.1819	0.31	0.7547
y2	0.5184	0.0141	36.80	0.0000

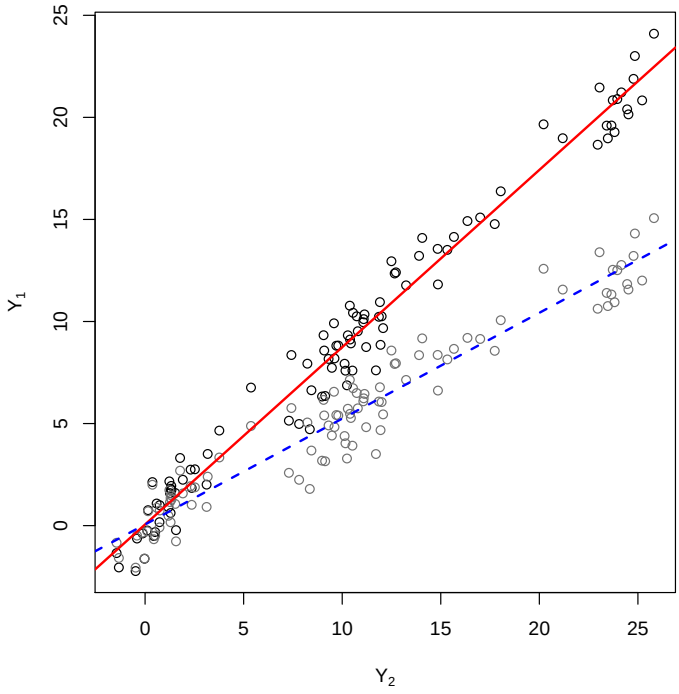
Tabulka s výsledky F–testu pro $\alpha = 0.5$

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
y2	1	1670.84	1670.84	1354.23	0.0000
Residuals	98	120.91	1.23		

$R^2 = 0.933$, $R^2_{adj} = 0.932$

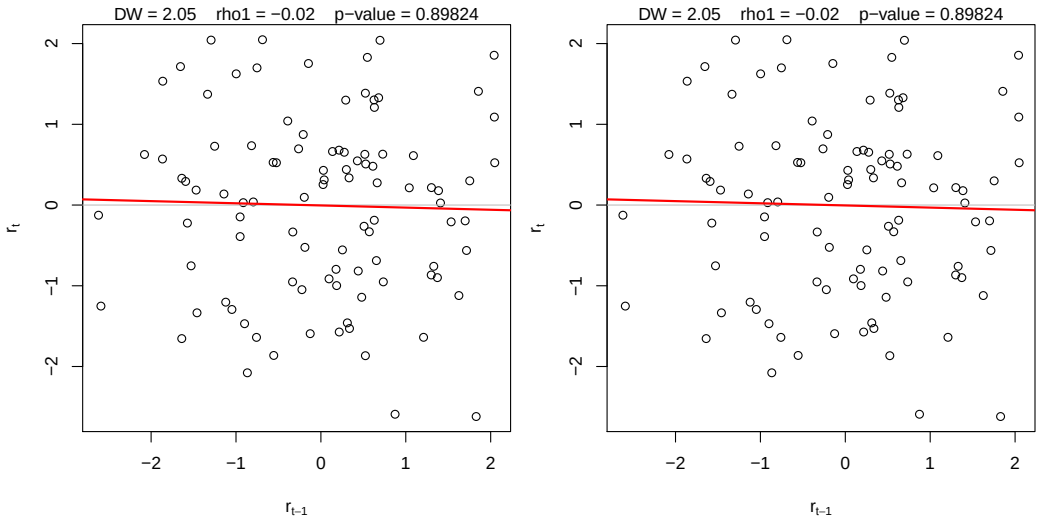
Vidíme, že koeficienty β_1 se významně liší od nuly a také oba modely se jeví jako velmi vhodné, neboť podle koeficientu determinace R^2 časová řada $\{Y_{2,t}\}$ vysvětluje 97.5% (pro $\lambda = 0.85$) a 93.2% (pro $\lambda = 0.5$) variability časové řady $\{Y_{1,t}\}$. Dále si všimněme, jak byl pomocí statické regrese poměrně dobře odhadnut parametr α pomocí parametru β_1.

Na následujícím obrázku jsou vykresleny pro dvě různé hodnoty parametru $\alpha \in \{0.85, 0.5\}$ výsledky statické regrese.



Obrázek 6. Statický regresní model pro simulovaná data $CI(1,1)$ procesu pro dvě hodnoty $\alpha \in \{0.5, 0.85\}$. Černá kolečka reprezentují dvojice $\{Y_{2,t}, Y_{1,t}\}_{t=1}^{100}$ pro hodnotu parametru $\alpha = 0.85$ a šedá kolečka pro hodnotu parametru $\alpha = 0.5$. Jednotlivými body je proložena regresní přímka. Pro první model byl odhad parametr β_1 roven hodnotě 0.868, v druhém případě hodnotě 0.518.

Pro rezidua obou statických regresních modelů vykreleme bodové grafy mezi r_{t-1} a r_t a vypočítejme hodnoty Durbinovy–Watsonovy statistiky.



Obrázek 7. Bodové grafy mezi r_{t-1} a r_t pro oba statický regresní modely. Jednotlivými body je proložena regresní přímka.

Vidíme, že zamítáme hypotézu o autokorelaci prvního řadu, neboť hodnota DW statistiky je velmi blízká ke dvojce. Výsledek testu odpovídá faktu, že jsme model navrhli tak, že platí

$$Y_{1,t} \quad = \quad \alpha Y_{2,t} + \varepsilon_{1,t} \qquad \varepsilon_{1,t} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Kromě toho platí

$$R^2 < DW,$$

což nesignalizuje vznik zdánlivé regrese. Tento regresní model je správný, statisticky korektní a existující.

Připomeňme, že zdánlivá regrese nemůže nastat v případě, kdy oba dva procesy jsou stacionární (tj. jde o procesy $I(0)$), nabízí se myšlenka nestacionární procesy $I(d)$ s $d \geq 1$ nejprve **diferencovat** a pak je použít ve statické regresi. Jenže touto cestou nelze postupovat, protože se tím ztrácí důležité informace o dlouhodobém vztahu $\{X_t\}$ a $\{Y_t\}$.

Je vidět, že právě snaha konstruovat **regresní model** tak, aby

- respektoval jak krátkodobé, tak dlouhodobé vztahy
- a přitom se vyvarovat zdánlivé, nesmyslné (angl. *spurious*) regrese

vedla k zavedení pojmu **kointegrace** a k závěru, že v regresi je třeba používat nediferencované časové řady, které však musí splnit určitou podmínku, a to aby byly **kointegrované**.

Závěr. Uveďme tři důvody, proč lze považovat princip kointegrace za ústřední myšlenku modelování integrovaných časových řad.

(1) **Stacionární** lineární kombinaci **integrovaných** (tj. nestacionárních) procesů (jde o jakýsi složený proces) lze chápat **jako odhad ekvilibria**, které spojuje uvažované procesy. **Ekvilibrium** je v tomto případě **střední hodnota** této lineární kombinace obou procesů.

(2) **Regrese** obsahující **integrované** (tj. nestacionární) procesy má smysl pouze tehdy, pokud jsou procesy **kointegrované** (tj. jsou spjaté společným stochastickým trendem, jinak má každá časová řada jiný směr vývoje). Test kointegrace dvou náhodných procesů je zároveň metoda odlišení mezi **pravou** regresí a **zdánlivou** regresí.

(3) Skupinu **kointegrovaných** procesů lze popsat (kromě jiných modelů) také pomocí tzv. ERROR-CORRECTION modelu. Tento model obsahuje **parametry**, které charakterizují míru vychýlení systému od dlouhodobě se prosazujícího ekvilibria.

2.2. Dynamická regresse. Uvažujme nejprve, že

$$\{X_t\}, \{Y_t\} \ \sim \ I(0).$$

Jejich vztah může být modelován pomocí regresního modelu

$$Y_t = c + \beta X_t + u_t,$$

přičemž mohou nastat dva případy (a) $u_t \ \sim \ WN(0, \sigma_u^2) \cdots$ jde o korektní regresní model
(b) $u_t \ \sim \ AR(p)$, tj. $u_t = \varphi_1 u_{t-1} + \cdots + \varphi_p u_{t-p} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Ad (b): pokud pro odhad parametrů c a β použijeme klasickou metodu nejmenších čtverců, tj. $\widehat{c}_{OLS}$ a $\widehat{\beta}_{OLS}$, pak odhady sice **budou nestranné**, ale **nebudou vydatné** (nebudou mít nejmenší rozpyl).

Pokud např.

$$u_t \sim AR(1) \qquad \text{tj.} \qquad u_t = \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{kde} \quad |\varphi| < 1 \quad \text{a} \quad \varphi > 0,$$

pak nekorektní OLS nabízí směrodatné odchylky odhadů, které jsou menší než ve skutečnosti, což v tomto případě může vést k zamítnutí nulové hypotézy, i když tomu tak být nemá.

Problém **autokorelovaných reziduí** lze řešit pomocí tzv. **dynamické regrese**. Vraťme se k jednoduchému příkladu

$$\underbrace{Y_t = c + \beta X_t + u_t}_{(*1)}, \qquad \text{kde} \qquad \underbrace{u_t = \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t}_{(*2)}, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Budeme se snažit dostat regresní rovnici, ve které bude místo chybového $AR(1)$ procesu **bílý šum**. Proto postupně upravujme

$$\begin{array}{lrcll} \text{z rovnice } (*2) & \varepsilon_t & = & u_t - \varphi u_{t-1} & (*2b) \\ \text{z rovnice } (*1) & u_t & = & Y_t - c - \beta X_t & (*1b) \end{array}$$

Dosadíme-li vztah $(*1b)$ do vztahu $(*2b)$, dostaneme

$$\varepsilon_t = Y_t - c - \beta X_t - \varphi(Y_{t-1} - c - \beta X_{t-1})$$

a odtud pak

$$Y_t = c(1-\varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta X_t - \varphi \beta X_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Tento model se nazývá AUTOREGRESSIVE DISTRIBUTED LAG MODEL (někdy se značí ADL, častěji ARDL) a píšeme

$$Y_t \ \sim \ ARDL(p,q) \equiv ARDL(p,q;k) \quad \text{s} \quad p = 1, q = 1 \quad \text{a} \quad k = 1 \text{ (počet vysvětlujících proměnných)}$$

Pořád zůstává otázka, jak **parametricky** popsat dlouhodobě rovnovážný stav (tj. ekvilibrium) mezi endogenní (tj. závislou) a exogenní (tj. nezávislou, vysvětlující) proměnnou.

Vraťme se k příkladu

$$Y_t = c + \beta X_t + u_t$$

kde

(a) $u_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$ s $Eu_t = 0$, $Du_t = \sigma_u^2$. Pak

$$EY_t = c + \beta EX_t,$$

takže dlouhodobě se prosazující vztah je dán **parametrem** $\boxed{\beta}$, který se pak nazývá **dlouhodobý multiplikátor** (*long-run multiplier*).

(b) v případě **dynamické regrese**, kdy např.

$$u_t = \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{s} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

a

$$Y_t \;=\; c(1-\varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta X_t - \varphi\beta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

přepišme předchozí vztah pomocí operátoru zpětného chodu

$$(1-\varphi B)Y_t = c(1-\varphi) + \beta(1-\varphi B)X_t + \varepsilon_t.$$

Protože předpokládáme, že

$$EY_t = EY_{t-l} \quad \text{a} \quad EX_t = EX_{t-l},$$

dostaneme

$$(1-\varphi)EY_t = c(1-\varphi) + \beta(1-\varphi)EX_t,$$

takže

$$EY_t = c\frac{(1-\varphi)}{(1-\varphi)} + \beta\frac{(1-\varphi)}{(1-\varphi)}EX_t = c + \beta EX_t$$

a **parametrem** $\boxed{\beta}$ je opět **dlouhodobý multiplikátor** (*long-run multiplier*).

Přepišme nyní model

$$Y_t = c(1-\varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta X_t - \varphi\beta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

trochu jinak. Proto upravujme

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= c(1-\varphi) + (\varphi-1)Y_{t-1} + \beta(X_t - X_{t-1}) - \beta(\varphi-1)X_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta Y_t &= \underbrace{c(1-\varphi) + \beta\Delta X_t}_{\text{modeluje krátkodobý vztah}} + \underbrace{(\varphi-1)(\overbrace{Y_{t-1} - \beta X_{t-1}}^{\text{error correction}})}_{\text{modeluje dlouhodobý vztah}} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Vztah na posledním řádku se nazývá **modelem korekce chyby** (anglicky Error Correction Model, EC–model či ECM).

Dlouhodobý vztah mezi časovými řadami je vyjádřen regresorem $(Y_{t-1} - \beta X_{t-1})$, který obsahuje **dlouhodobý multiplikátor** $\boxed{\beta}$. Zbytek modelu popisuje **krátkodobý vztah** mezi časovými řadami.

Parametr $\boxed{\varphi - 1}$ vyjadřuje míru odlišnosti krátkodobého vztahu od vztahu prosazujícího se dlouhodobě. Lze ho interpretovat jako rychlost, s jakou se krátkodobé vychýlení od rovnovážného stavu ztratí, nebo jakou silou se prosazuje rovnovážný vztah mezi časovými řadami.

Nyní uvažujme **obecný** $ARDL(p, q; k)$ model s k vysvětlujícími proměnnými ve tvaru:

$$\boldsymbol{\alpha}_p(B)Y_t = c + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\beta}_{iq}(B)X_{i,t} + u_t,$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_p(B) &= 1 - \alpha_1 B - \cdots - \alpha_p B^p \\ \boldsymbol{\beta}_{iq}(B) &= 1 + \beta_{i,1}B + \cdots + \beta_{i,q}B^q \qquad pro \qquad i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Tento model lze ve středních hodnotách vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_p(1)\; EY_t &= c + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\beta}_{iq}(1)\; EX_{i,t} \\ EY_t &= c^* + \sum_{i=1}^{k} \beta_i^*\; EX_{i,t} \qquad \text{kde} \qquad c^* = \tfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}_p(1)},\; \beta_i^* = \tfrac{\boldsymbol{\beta}_{iq}(1)}{\boldsymbol{\alpha}_p(1)}. \end{aligned}$$

Budeme se nyní snažit i tento model vyjádřit v ECM formě. Všimněme si, že lze pro $i = 1, \dots, k$ psát (za předpokladu, že položíme $\beta_{i,0} = 1$)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_{iq}(B)X_{it} = \sum_{j=1}^{q} \beta_{i,j} B^j X_{i,t} = \beta_{i,0}X_t &+\beta_{i,1}X_t &+\beta_{i,2}X_t &+\cdots+\beta_{i,q-2}X_t &+\beta_{i,q-1}X_t &+\beta_{i,q}X_t \\
&-\beta_{i,1}X_t &-\beta_{i,2}X_t &-\cdots-\beta_{i,q-2}X_t &-\beta_{i,q-1}X_t &-\beta_q X_t \\
&+\beta_{i,1}X_{t-1} &+\beta_{i,2}X_{t-1} &+\cdots+\beta_{i,q-2}X_{t-1} &+\beta_{i,q-1}X_{t-1} &+\beta_{i,q}X_{t-1} \\
& &-\beta_{i,2}X_{t-1} &-\cdots+\beta_{i,q-2}X_{t-1} &-\beta_{i,q-1}X_{t-1} &-\beta_{i,q}X_{t-1} \\
& & & \ddots & &\vdots \\
& & & +\beta_{i,q-2}X_{t-q+2} &+-\beta_{i,q-1}X_{t-q+2} &+\beta_{i,q}X_{t-q+2} \\
& & & &-\beta_{i,q-1}X_{t-q+2} &-\beta_{i,q}X_{t-q+2} \\
& & & &+\beta_{i,q-1}X_{t-q+1} &+\beta_{i,q}X_{t-q+1} \\
& & & & &-\beta_{i,q}X_{t-q+1} \\
& & & & &+\beta_{i,q}X_{t-q}
\end{aligned}$$

Tedy můžeme psát

$$\boldsymbol{\beta}_{iq}(B)X_{it} = \sum_{j=1}^{q} \beta_{i,j} B^j X_{i,t} = \beta^*_{i,0}X_t + \sum_{j=0}^{q} \beta^*_{i,j}\Delta X_{t-j},$$

kde

$$\beta^*_{i,0} = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j} = \boldsymbol{\beta}_{iq}(1)$$

a pro $h = 1, \dots, q$

$$\beta^*_{i,h} = -\sum_{j=h}^{q} \beta_{i,j}.$$

Zcela analogicky provedeme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_p(B)Y_t &= (1 - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j B^j)Y_t = Y_t - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j B^j Y_t \\
&= \underbrace{Y_t - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j Y_t}_{(1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j)Y_t} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j Y_t - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j Y_{t-1}}_{\Delta Y_t \cdot \sum_{j=1}^{p}\alpha_j} + \underbrace{\sum_{j=2}^{p} \alpha_j Y_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \alpha_j Y_{t-2}}_{\Delta Y_{t-1} \cdot \sum_{j=2}^{p}\alpha_j} + \sum_{j=3}^{p} \alpha_j Y_{t-2} + \cdots \\
&\quad - \sum_{j=p-1}^{p} \alpha_j Y_{t-p+1} + \underbrace{\alpha_p Y_{t-p+1} - \alpha_p Y_{t-p}}_{\alpha_p \Delta Y_{t-p+1}} \\
&= (1 - \alpha^*_0)Y_t + \sum_{j=1}^{p} \alpha^*_j \Delta Y_{t+1-j}
\end{aligned}$$

kde

$$(1 - \alpha^*_0) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = \boldsymbol{\alpha}_p(1), \qquad \text{a} \qquad \alpha_h* = \sum_{j=h}^{p} \alpha_j \qquad (h = 1, \dots, p).$$

Na základě předchozích vztahů a po dalších úpravách můžeme $ARDL(p, q; k)$ proces vyjádřit v ECM formě takto

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t = c &+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{q-1} \boldsymbol{\beta}_{ij}(1)\Delta X_{i,t-j} + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\beta}_{ij}(1) \sum_{j=0}^{q-1} \Delta X_{i,t-j} \\
&- \sum_{j=0}^{p-1} \boldsymbol{\alpha}_j(1)\Delta Y_{t-j} - \boldsymbol{\alpha}_p(1) \sum_{j=p}^{q-1} \Delta Y_{t-j} + \gamma(Y_{t-s} - \sum_{i=1}^{k} \beta^*_i X_{i,t-s}) + v_t,
\end{aligned}$$

kde

$$\gamma = \boldsymbol{\alpha}_p(1), \quad \beta^*_i = \frac{\boldsymbol{\beta}_{iq}(1)}{\boldsymbol{\alpha}_p(1)} \quad (i = 1, \dots, k) \qquad s = \max(p, q).$$

3. Kointegrační analýza

Koncept kointegrace by nebyl prakticky aplikovatelný bez statistické teorie testování kointegrace a odhadu parametrů kointegrovaných lineárních systémů. Tuto problematiku jako první zpracovali Granger a Engle (1987).

Přišli s jednoduchým testem kointegrace založeným na testu stacionarity reziduí statické regrese pomocí testů jednotkových kořenů a zdůvodnili metodou dvoustupňového odhadu parametrů modelu EC, který spočívá v tom, že se nejprve odhadnou parametry kointegračních vektorů a potom ve druhém kroku se na jejich základě odhadnou ostatní parametry. Uvedený test kointegrace a metoda odhadu parametrů modelu korekce chyby byly základním krokem k rozšíření praktických aplikací kointegrační analýzy zejména ekonomických časových řad.

Obecně lze říci, že kointegrační analýza může být uskutečněna více způsoby – buď korektně pomocí numerických testů a kointegrační regresní rovnice anebo přibližně, ale zato názorně, pomocí grafického znázornění.

V dalším textu bude ukázán pouze základní způsob pomocí numerické kointegrační analýzy, kde její postup pozůstává ze dvou následujících kroků:

(1) Testování integrovanosti veličin test I(1) = test tzv. jednotkových kořenů.
(2) Testování výskytu kointegrace dvou veličin test $CI(1,1)$. Prakticky to znamená, že kointegraci dvou (obecně m) veličin má význam testovat jen tehdy, pokud jsou obě veličiny nestacionární a tzv. integrované alespoň řádu 1. Tuto skutečnost lze zjistit právě pomocí testů jednotkových kořenů.

3.1. Testování jednotkových kořenů a kointegrace. Testování jednotkových kořenů slouží ke stanovení typu náhodné veličiny, tj. zda veličina je nestacionárním procesem typu $I(1)$, tzn. integrovaným procesem 1. řádu. Časová řada je typu $I(1)$, když jeho diference je obecná stacionární časová řada typu $I(0) = ARMA(p,q)$, ve speciálním a nejjednodušším případě je to tzv. bílý šum $WN = ARMA(0,0) = AR(0) = MA(0)$.

Pokud uvažujeme jednoduchý stacionární $AR(1)$ proces typu $I(0)$:

$$\Phi(B)Y_t = \varepsilon_t \qquad \text{tj.} \qquad Y_t = Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{a} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

pak se tento proces stane **nestacionárním** typu $I(1)$, když polynom $\Phi(z)$ má jednotkový kořen, což u $AR(1)$ znamená, že $\varphi_1 = 1$. V tom případě jde o *náhodnou procházku*, která obsahuje tzv. *stochastický* (nedeterministický) trend a proces je nestacionární v rozptylu, přičemž rozptyl roste přímo úměrně s časem (délkou) časové řady, tj.

$$DY_t = t\sigma_\varepsilon^2.$$

Na testování (nulové) hypotézy

$$H_0 : \varphi_1 = 1 \qquad \text{proti alternativě} \qquad H_1 : |\varphi_1| < 1 \quad \text{(stacionarita)}$$

existuje několik parametrických a neparametrických testů:

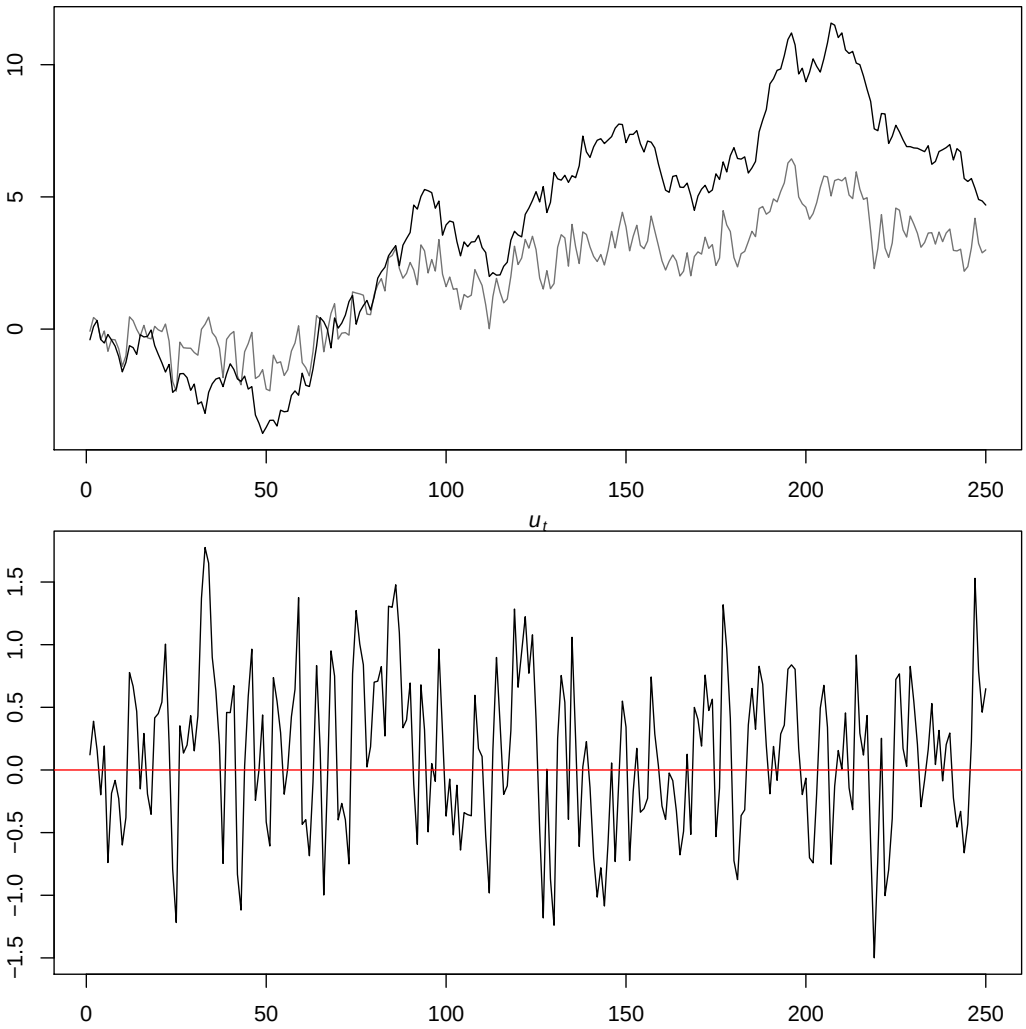
- mezi **parametrické** testy patří základní Dickey-Fullerův (DF) test a rozšířený Dickey-Fullerův (ADF) test;
- mezi testy **neparametrické** lze zařadit test Phillipsův, testy Phillips-Perronovy, Newey-Westovy, Bierensovy, Bierens-Guovy a alternativní KPSS (Kwiatkowski Phillips Shmidt Shin)

Pro testování **kointegrace** existuje vícero testů: CRDW Durbinův–Watsonův, CRDF Dickeyův–Fullerův (se dvěma variantami), CRADF Augmented DF, Phillipsův, Johansenův, Engle-Grangerův a Bierensův.

Uvedené testy jsou podrobně popsány v literatuře Hamilton (1994), Arlt (1999), Arlt & Arltová (2003), Neubauer (2005).

Příklad 3.5. Uvažujme dvourozměrný kointegrovaný náhodný proces, který je definován následujícím způsobem

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= 0.5\, Y_{2,t} + u_t \quad \text{kde} \quad u_t = 0.6u_{t-1} - 0.2u_{t-2} + 0.1u_{t-3} + \varepsilon_{1,t} \quad \text{a} \quad \varepsilon_{1,t} \sim N(0, 0.5^2) \\ Y_{2,t} &= Y_{1,t-1} + \varepsilon_{2,t} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \varepsilon_{2,t} \sim N(0, 0.5^2) \end{aligned}$$



Obrázek 8. Simulovaná data dvourozměrného kointegrovaného náhodného procesu jsou vykreslena v prvním panelu. Černá čára značí proces $Y_{2,t}$ a šedá $Y_{1,t}$. Ve druhém panelu je znázorněn $AR(3)$ proces u_t.

Kointegrační vektor je tvaru

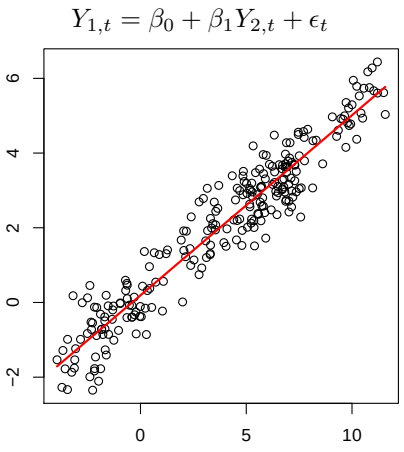
$$\boldsymbol{\beta} = (1, \beta)' = (1, -0.5)'.$$

Při odhadování neznámých parametrů využijeme dvoukrokový algoritmus navržený Grangerem a Englem.

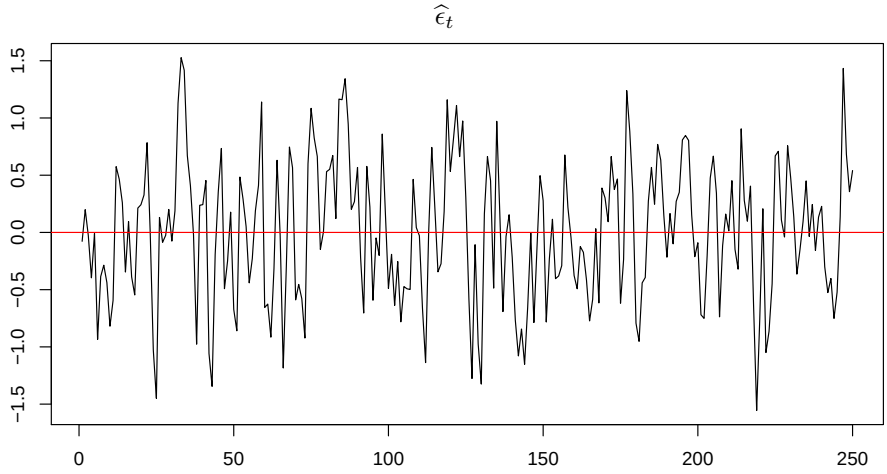
V prvním kroku získáme rezidua ze statického regresního modelu, který popisuje dlouhodobý vztah mezi dvěma časovými řadami.

$$Y_{1,t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2,t} + \epsilon_t$$

Odhadem $\widehat{\beta}_1$ obdržíme odhad dlouhodobého multiplikátoru, který popisuje dlouhodobý vztah mezi $Y_{2,t}$ a $Y_{1,t}$.



Obrázek 9. Regrese



Obrázek 10. Odhady reziduí

Výsledky regrese jsou dány v následujících dvou tabulkách.

Tabulka t–statistik pro koeficienty β_0, β_1

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> |t|)
(Intercept)	0.1914	0.0528	3.63	0.0003
y2	0.4822	0.0094	51.36	0.0000

Tabulka s výsledky F–testu

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
y2	1	975.95	975.95	2638.17	0.0000
Residuals	248	91.74	0.37		

$R^2 = 0.9141$, $R^2_{adj} = 0.9137$

Na základě výsledků vidíme, že odhad dlouhodobého multiplikátoru se blíží hodnotě 0.5.

Rezidua, která jsme získali v prvním kroku, použijeme do dalšího regresního modelu

$$\Delta Y_{1,t} = b_0 + b_1 \widehat{\epsilon}_t + b_2 \Delta Y_{2,t-1} + b_3 \Delta Y_{1,t-1} + e_t$$

Výsledky regrese v druhém kroku jsou dány v následujících dvou tabulkách.

Tabulka t–statistik pro koeficienty β_0, β_1

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> |t|)
(Intercept)	0.01	0.04	0.17	0.86
ect	-0.62	0.07	-8.58	0.00
DeltaY2.1	0.32	0.09	3.48	0.00
DeltaY1.1	-0.42	0.07	-6.03	0.00

Tabulka s výsledky F–testu

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
ect	1	14.02	14.02	40.12	0.0000
DeltaY2.1	1	0.26	0.26	0.73	0.3922
DeltaY1.1	1	12.69	12.69	36.32	0.0000
Residuals	244	85.25	0.35		

$R^2 = 0.2403$, $R^2_{adj} = 0.231$

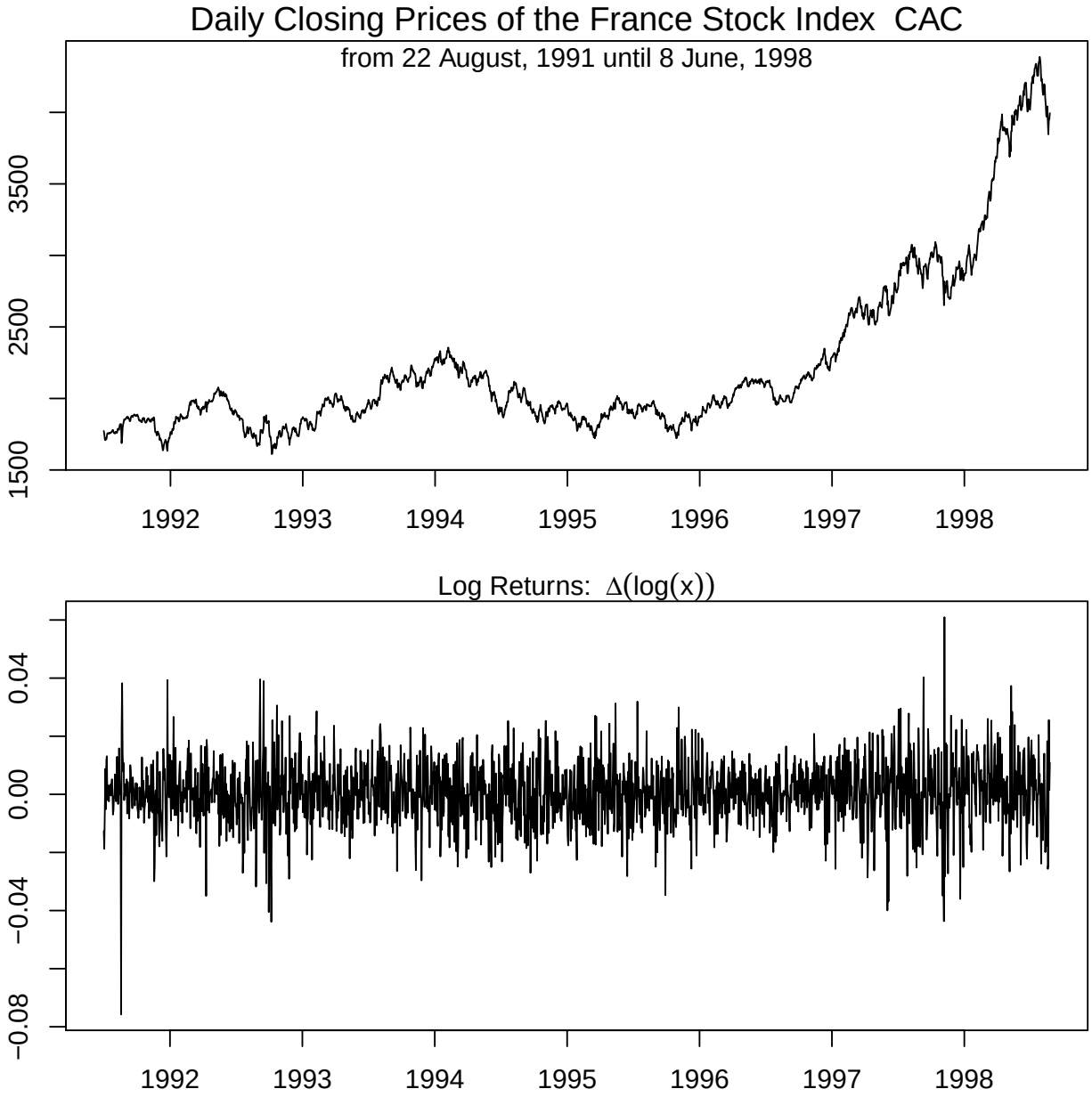
4. Modelování heteroskedasticity

Ve všech předchozích modelech chybové složky měly vždy konstantní, tj. homoskedastický rozptyl. V reálných situacích je však často tato podmínka nesplnitelná. Pak je možné

- buď provést **transformaci stabilizující rozptyl**,
- nebo použít modely, které **s heteroskedasticitou počítají**.

Nejznámější jsou modely navržené Robertem Englem (nositelem Nobelovy ceny za ekonomii v r. 2003). V ekonometrii se pojmu variabilita říka volatilita (přelétavost) a mluví se o volatilitě měnící se v čase.

4.1. Autoregresivní podmíněná heteroskedasticita. Autoregresní modely s podmíněnou heteroskedasticitou (ARCH; AutoRe-gressive Conditional Heteroskedasticity) představují poměrně rozsáhlou třídu modelů, využívaných zejména při analýze finančních časových řad. Právě finanční časové řady (například vývoj cen akcií, derivátů, dluhopisů, úrokových měr nebo směnných kurzů) se vyznačují v čase proměnlivým rozptylem, a tuto vlastnost je možné zachytit pomocí podmíněné heteroskedasticity.



Obrázek 11. Ukázka časových řad s proměnlivých rozptylem: vývoj denních zavíracích kurzů akcií a příslušné logaritmické výnosy.

Mějme realizace časové řady x_t, které vykazují poměrně malé, ale stálé procentní změny p_t, tj.

$$x_t = (1+p_t)x_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \log x_t = \log(1+p_t) + \log x_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \Delta \log x_t = \log x_t - \log x_{t-1} = \log(1+p_t).$$

Dále si připomeňme, že pro dostatečně malá p_t (v absolutní hodnotě - cca do 15%) platí

$$|p_t| \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \log(1+p_t) \approx p_t \quad \Rightarrow \quad \Delta \log x_t \approx p_t.$$

Většina analýz časových řad pracuje ne přímo s původní časovou řadou, ale nějakou její transformací. V případě finančních časových řad jde třeba o výnosy - relativní přírůstky cen.

Mějme například ceny akcií X_t, pak jednoduché (aritmetické) výnosy označme

$$Y_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \quad \Rightarrow \quad X_t = (1+Y_t)X_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \Delta \log X_t \approx Y_t.$$

A právě pro časové řady výnosů je charakteristická proměnlivost v rozptylu.

4.2. ARCH(1) modely. Nejjednoduššími modely, které počítají s variabilitou, která se v čase mění, jsou $ARCH(1)$ modely.

Tyto modely vycházejí z představy, že např. stacionární model $AR(1)$

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (|\varphi| < 1)$$

je vhodné z důvodu proměnlivého rozptylu (proměnlivé volatility) modifikovat tak, že $\boxed{\{\varepsilon_t\}}$ je tzv. **podmíněně heteroskedastický proces** s **konstantní** podmíněnou střední hodnotou

$$E(\varepsilon_t|\Omega_{t-1}) = 0$$

a s podmíněným **v čase se měnícím** rozptylem

$$D(\varepsilon_t|\Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1}) = \sigma_t^2,$$

kde Ω_{t-1} je relevantní minulá informace až do času $t-1$.

Konkrétní modely proměnlivého rozptylu (tj. proměnlivé volatility) jsou potom dány specifickou formou podmíněného rozptylu σ_t^2.

Engle navrhl modely podmíněného rozptylu třídy *ARCH* (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). Nejjednodušším z nich je model $ARCH(1)$, který má podmíněný rozptyl ve tvaru

$$ARCH(1): \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2,$$

model $ARCH(p)$ lze vyjádřit jako

$$ARCH(p): \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2.$$

Engle vyvinul teorii odhadu modelů *ARCH*, stanovil podmínky konzistence a asymptotické normality maximálně věrohodných odhadů jejich parametrů a představil test hypotézy o nepřítomnosti *ARCH* efektu ve složce ε_t.

Definice modelu *ARCH* se stala základem pro mnoho dalších typů lineárních a nelineárních modelů podmíněného rozptylu σ_t^2. Tyto modely vycházejí především z empiricky pozorovaných vlastností konkrétních finančních a ekonomických časových řad.

Bylo například zjištěno, že kvadráty logaritmů výnosů časových řad s vysokou frekvencí pozorování (denní nebo týdenní) jsou charakteristické relativně pomalu klesající autokorelační funkcí, což by vyžadovalo mnoho zpoždění v modelu *ARCH*, tj. vysokou hodnotu p. Engleho doktorský student Tim Bollerslev proto přišel s myšlenkou rozšířit model *ARCH* o zpožděný podmíněný rozptyl σ_t^2. Tímto způsobem upravený model *ARCH* lze zobecnit na tzv. *GARCH* (angl. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) model, který má tvar

$$GARCH(p,q): \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_q \sigma_{t-q}^2.$$

Model *GARCH(1,1)* se posléze stal nejpopulárnějším modelem volatility v empirické praxi.

Poznamenejme ještě, že aby předchozí vztahy měly smysl, musí platit

$$\alpha_i > 0, \quad \gamma_j > 0$$

a aby proces byl slabě stacionární, musí být

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j < 1.$$

Pokud platí

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j = 1.$$

model se nazývá *IGARCH*.

Engle svou myšlenkou modelu *ARCH* a dalšími ideami inspiroval statistiky, ekonometry, finanční teoretiky a analytiky a prakticky i teoreticky orientované ekonomy po celém světě k publikování stovek teoretických a praktických prací zabývajících se danou problematikou. Modely *ARCH* a *GARCH* se staly jedním ze základů nové vědní disciplíny, která se označuje jako finanční ekonometrie.

KAPITOLA 6

State–space modely

Místo jednorozměrné náhodné posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ uvažujme posloupnost w-rozměrných náhodných vektorů $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^w$, které splňují tzv. DATOVÉ A STAVOVÉ ROVNICE

DATOVÁ ROVNICE:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{G}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

STAVOVÁ ROVNICE:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{F}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

přičemž

$\mathbf{X}_t$ ... je tzv. *stavový* v-rozměrný náhodný vektor
$\mathbf{W}_t$ ... je *šum měření*
$\mathbf{V}_t$ ... je *šum procesu*
$\mathbf{G}_t$ ... je posloupnost matic typu $w \times v$ (popisují vztah pozorování ke stavu)
$\mathbf{F}_t$ ... je posloupnost matic typu $v \times v$ (modelují dynamiku - tzv. *matice přechodu*)

Dále platí

$$E\mathbf{V}_t = \mathbf{0}$$
$$E\mathbf{W}_t = \mathbf{0}$$
$$D\begin{pmatrix} \mathbf{W}_t \\ \mathbf{V}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_t & \mathbf{S}_t \\ \mathbf{S}_t' & \mathbf{Q}_t \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{matrix} E\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t' = \mathbf{R}_t \\ E\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t' = \mathbf{Q}_t \\ E\mathbf{W}_t\mathbf{V}_t' = \mathbf{S}_t \end{matrix}$$
$$C(\mathbf{X}_t, (\mathbf{W}_t', \mathbf{V}_t')') = \mathbf{0}, \text{ tj. jsou nekorelované}$$

Všechny náhodné vektory mají konečné druhé momenty.

Příklad 0.1. NÁHODNÁ PROCHÁZKA S TRENDEM

Mějme $\beta \in \mathbb{R}$,
šum procesu $V_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$,
náhodné veličiny Tr_t, přičemž $Tr_0 = \mu_0 = 0$.

Dále nechť pro $t = 1, 2, \ldots$ platí

$$C(Tr_t, V_t) = 0 \qquad \text{tj. } Tr_t \text{ a } V_t \text{ jsou nekorelované, což značíme } Tr_t \perp V_t.$$

Definujme

$$\boxed{Tr_{t+1}} = Tr_t + \beta + V_t = Tr_{t-1} + \beta + V_{t-1} + \beta + V_t$$
$$= Tr_{t-1} + 2\beta + V_t + V_{t-1} = \cdots$$
$$\text{po } t \text{ krocích} = \underbrace{Tr_0}_{=\mu_0=0} + \beta t + \sum_{j=1}^{t} V_j$$

Položme

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} Tr_t \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_t = \begin{pmatrix} V_t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\boxed{\mathbf{X}_{t+1}} = \begin{pmatrix} Tr_{t+1} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Tr_t \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_t \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{F}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t} \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Označme šum měření $W_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$ a položme

$$\boxed{Y_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{G}_t}\begin{pmatrix} Tr_t \\ \beta \end{pmatrix} + W_t = \boxed{\mathbf{G_t}\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t} \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Jestliže $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} Tr_1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\underbrace{V_1, W_1}$, $\underbrace{V_2, W_2}$, ... jsou nekorelované, dostáváme *stavově-prostorovou reprezentaci náhodné procházky*, pro kterou platí

$$E\mathbf{V}_t = \mathbf{0} \qquad D\mathbf{V}_t = E\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t' = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}$$

$$E\mathbf{W}_t = EW_t = 0 \qquad D\mathbf{W}_t = E\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t' = EW_t^2 = \sigma_w^2 = R_t = R$$

$$E\mathbf{V}_t\mathbf{W}_t' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_t = \mathbf{S}.$$

Příklad 0.2. SEZÓNNÍ ŘADA SE ŠUMEM

Uvažujme sezónu délky $\boxed{d}$
a sezónní komponenty $\boxed{s_1, \ldots, s_d}$

přičemž platí

$$s_{t+d} = s_t \quad \text{a} \quad s_1 + \cdots + s_d = 0.$$

Takže dostaneme

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= s_{t+1-d} \\ &\vdots \\ s_{t+1} + s_t + s_{t-1} + \cdots + s_{t+1-d+1} &= 0 \end{aligned}$$

Odtud získáme *deterministickou rovnici*

$$s_{t+1} = -s_t - s_{t-1} - \cdots - s_{t+2-d}$$

Přidejme šum procesu $V_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$ a dostaneme po přeznačení *stochastickou rovnici*

$$Y_{t+1} = -Y_t - Y_{t-1} - \cdots - Y_{t+2-d} + V_t.$$

Položme

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} Y_{t+1} \\ Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t+3-d} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}_t} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t+2-d} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} V_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{V}_t}$$

tj. stavově-prostorový model sezónní řady se šumem je roven

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{t+1} &= \mathbf{F}\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \\ Y_t &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{G}_t} \mathbf{X}_t \end{aligned}$$

1. Stacionární stavově-prostorové modely

DATOVÁ ROVNICE:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{G}\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

STAVOVÁ ROVNICE:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

přičemž

- $\mathbf{X}_t$ ... je tzv. *stavový* v-rozměrný náhodný vektor
- $\mathbf{W}_t$ ... je *šum měření*
- $\mathbf{V}_t$ ... je *šum procesu*
- $\mathbf{G}$ ... je matice typu $w \times v$ (popisují vztah pozorování ke stavu)
- $\mathbf{F}$ ... je matice typu $v \times v$ tzv. *matice přechodu*

Dále platí

$$E\mathbf{V}_t = 0$$
$$E\mathbf{W}_t = 0$$
$$D\begin{pmatrix} \mathbf{W}_t \\ \mathbf{V}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_t & \mathbf{S}_t \\ \mathbf{S}_t' & \mathbf{Q}_t \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{l} E\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t' = \mathbf{R}_t \\ E\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t' = \mathbf{Q}_t \\ E\mathbf{W}_t\mathbf{V}_t' = \mathbf{S}_t \end{array}$$
$$C(\mathbf{X}_t, (\mathbf{W}_t', \mathbf{V}_t')' = \mathbf{0}, \text{ tj. jsou nekorelované}$$

Všechny náhodné vektory mají konečné druhé momenty.

Stavová rovnice se nazývá *stabilní* (také *kauzální*), právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{F}$ leží uvnitř jednotkové kružnice, tj.

$$det(\mathbf{I} - \mathbf{Fz}) \neq \mathbf{0} \text{ pro } \forall\, |\mathbf{z}| < 1.$$

Pokud je systém *stabilní* (*kauzální*), pak

$$\mathbf{X}_{t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}^j \mathbf{V}_{t-j}$$
$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{W}_t + \mathbf{G} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}^j \mathbf{V}_{t-1-j}$$

Příklad 1.3. AUTOREGRESNÍ MODEL ŘÁDU p

$$AR(p): \quad Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \,, \quad \text{kde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t+1} \\ Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t+1-p} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_{t+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{p-1} & \varphi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{V}_t}$$

$$Y_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{G}} \mathbf{X}_t$$

Příklad 1.4. MA PROCES ŘÁDU q

$$MA(q): \quad Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \,, \quad \text{kde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+1-q} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_{t+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2} \\ \varepsilon_{t-3} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{V}_t}$$

$$Y_t = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_q \end{pmatrix}}_{=\mathbf{G}} \mathbf{X}_t + \underbrace{\varepsilon_t}_{=\mathbf{W}_t}$$

Příklad 1.5. ARMA PROCES ŘÁDU p, q

$$ARMA(p,q): \quad Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \,, \quad \text{kde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{t+1-p} \\ \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+1-q} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_{t+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{p-1} & \varphi_p & 1 & \theta_1 & \cdots & \theta_{q-1} & \theta_q \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{t-p} \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{V}_t}$$

$$Y_t = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_p & 1 & \theta_1 & \cdots & \theta_q \end{pmatrix}}_{=\mathbf{G}} \mathbf{X}_t$$

2. Nejlepší lineární predikce pomocí projekce náhodných vektorů druhého řádu

Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pro pevně zvolené $v \in \mathbb{N}$ označme

$$L_2^v = \{\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_v)' : X_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P), \ldots, X_v \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)\}$$

a označme

$$L_2^\infty = \bigcup_{v=1}^{\infty} L_2^v.$$

Pak lze nad tímto prostorem definovat *skalární součin* pro $\mathbf{X} \in L_2^v$ a $\mathbf{Y} \in L_2^w$ $(v, w \in \mathbb{N})$ předpisem

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = E\mathbf{X}\mathbf{Y}'$$

za předpokladu, že existuje sdružené rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{Z} \in L_2^{v+w}$.

Označme pro $\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_t \in L_2^w$

$$\mathcal{M}_t = \overline{sp}\{\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_t\}$$

uzavřený podprostor generovaný všemi možnými lineárními kombinacemi typu

$$\mathbf{C}_0\mathbf{Y}_0 + \cdots + \mathbf{C}_t\mathbf{Y}_t,$$

kde $\mathbf{C}_0, \ldots, \mathbf{C}_t$ jsou reálné matice.

Pak uvažujme nad L_2^∞ **projekci** $\mathbf{X} \in L_2^v$ do $\mathcal{M}_t$

$$P_{\mathcal{M}_t}(\mathbf{X}) = \left(P_{\mathcal{M}_t}(X_1), \ldots, P_{\mathcal{M}_t}(X_v)\right)',$$

kterou budeme značit různými způsoby, a to

$$P_{\mathcal{M}_t}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{X}} = P_t(\mathbf{X}) = P_t(\mathbf{X}|\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_t).$$

Připomeňme vlastnosti predikce, které v následujících důkazech využijeme

(a) vždy existuje jediný vektor $P_t(\mathbf{X})$ takový, že pro $\forall \mathbf{Y} \in \mathcal{M}_t = \overline{sp}\{\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_t\}$ platí

$$\langle \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \hat{\mathbf{X}}, \mathbf{Y} \rangle \Leftrightarrow E\mathbf{X}\mathbf{Y}' = E\hat{\mathbf{X}}\mathbf{Y}'.$$

Protože $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_t$, pak

$$E\mathbf{X}\hat{\mathbf{X}}' = E\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}'.$$

(b) Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_t$ mají sdružené normální rozdělení, pak (pokud $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)'$) platí

$$\hat{\mathbf{X}} = P_t(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}|\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_t) \qquad t \geq 1.$$

(c) Predikce $\hat{\mathbf{X}} = P_t(\mathbf{X})$ je **lineární** v tom smyslu, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k+v}$ a $\mathbf{X}, \mathbf{Z} \in L_2^v$ platí:

$$P_t(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{A}P_t(\mathbf{X})$$
$$P_t(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) = P_t(\mathbf{X}) + P_t(\mathbf{Z})$$

(d) Pokud $\mathbf{X} \in L_2^v$ a $\mathbf{Y} \in L_2^w$,pak

$$P_t(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \mathbf{M}\mathbf{Y},$$

kde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{v+w}$, pro níž platí

$$\mathbf{M} = E\mathbf{X}\mathbf{Y}' \, [E\mathbf{Y}\mathbf{Y}']^-$$

a $\mathbf{A}^-$ značí *pseudoinverzní matici* k matici $\mathbf{A}$, což je taková matice, pro níž

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A}$$

Každá matice má alespoň jednu pseudoinverzní matici. Pokud matice $\mathbf{A}$ je regulární, pak

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^{-1}.$$

Připomeňme opět definici stavového modelu

DATOVÁ ROVNICE:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{G}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

STAVOVÁ ROVNICE:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{F}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

přičemž

$\mathbf{X}_t$ ... je tzv. *stavový* v-rozměrný náhodný vektor
$\mathbf{W}_t$ ... je *šum měření*
$\mathbf{V}_t$ ... je *šum procesu*
$\mathbf{G}_t$ ... je posloupnost matic typu $w \times v$
$\mathbf{F}_t$ ... je posloupnost matic typu $v \times v$

Dále platí

$$E\mathbf{V}_t = \mathbf{0}$$
$$E\mathbf{W}_t = \mathbf{0}$$
$$D\begin{pmatrix}\mathbf{W}_t \\ \mathbf{V}_t\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\mathbf{W}_t \\ \mathbf{V}_t\end{pmatrix}(\mathbf{W}_t' \quad \mathbf{V}_t') = \begin{pmatrix}E\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t' & E\mathbf{W}_t\mathbf{V}_t' \\ E\mathbf{V}_t\mathbf{W}_t' & E\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{R}_t & \mathbf{S}_t \\ \mathbf{S}_t' & \mathbf{Q}_t\end{pmatrix}$$
$$C(\mathbf{X}_t, (\mathbf{W}_t', \mathbf{V}_t')' = \mathbf{0}, \text{ tj. jsou nekorelované: } \mathbf{X}_t \perp (\mathbf{W}_t', \mathbf{V}_t')'$$

Označme

$$\hat{\mathbf{X}}_{t|k} = P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_k\}}(\mathbf{X}_t) = P(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_k)$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{t|k} = E(\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|k})(\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|k})'$$

Pokud $k = t - 1$ ... jde o tzv. problém (jednokrokové) *predikce*
$k = t$ ... jde o tzv. problém *filtrace*
$k = n > t$ ... jde o tzv. problém *vyhlazení*

Přidejme předpoklady pro $\forall\, t$

$\mathbf{W}_t \perp \{\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_{t-1}\}$, tj. jsou nekorelované
$\mathbf{V}_t \perp \{\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_{t-1}\}$
$\mathbf{S}_t = \mathbf{0}$ (tj. šumy procesu $\mathbf{V}_t$ a měření $\mathbf{W}_t$ jsou nekorelované)

Věta 2.1. Jednokroková Kalmanova predikce

$$\boxed{\widehat{\mathbf{X}}_t} = \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} = P_{t-1}(\mathbf{X}_t) = P(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_0, \ldots, \mathbf{Y}_{t-1}) = P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}(\mathbf{X}_t)$$

a chybová predikční kovarianční matice

$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{t|t-1}} = E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)' = E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})'$$

jsou jednoznačně určeny

(1) počátečními podmínkami:

$$\boxed{\widehat{\mathbf{X}}_1} = \widehat{\mathbf{X}}_{1|0} = P(\mathbf{X}_1|\mathbf{Y}_0) = P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0\}}(\mathbf{X}_1)$$
$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{1|0}} = \mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1} - \mathbf{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1}$$

kde

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1} = E\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1'$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1} = E\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1'$$

(2) a platí pro ně následující rekurentní vztahy:

$$\boxed{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}} = \widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = \mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_{t+1|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}),$$

kde $\mathbf{K}_{t+1|t}$ *je tzv.* predikční Kalmanův zisk*, pro nějž platí:*

$$\mathbf{K}_{t+1|t} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}$$

přičemž

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t} = \mathbf{F}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} = \mathbf{G}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t' + \mathbf{R}_t$$

a

$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{t+1|t}} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}} - \mathbf{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}}$$

přičemž

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}} = \mathbf{F}_t\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t}\mathbf{F}_t' + \mathbf{Q}_t$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}} = \mathbf{F}_t\mathbf{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_t\widehat{\mathbf{X}}_t}\mathbf{F}_t' + \mathbf{K}_{t+1|t}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{K}_{t+1|t}'$$

a kde $\mathbf{I}_t$ *jsou* inovace *pro* $\mathbf{Y}_t$*, tj.*

$$\mathbf{I}_t = \mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{Y}_t - P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}(\mathbf{Y}_t)$$

Důkaz. Nejprve definujme inovaci pro $\mathbf{Y}_t$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_0 &= \mathbf{Y}_0\\ \mathbf{I}_t &= \mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_t\\ &= \mathbf{Y}_t - P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}(\mathbf{Y}_t)\\ &= \mathbf{Y}_t - P_{t-1}(\mathbf{Y}_t)\\ &= \mathbf{Y}_t - P_{t-1}(\mathbf{G}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t)\\ &= \mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t P_{t-1}(\mathbf{X}_t) - P_{t-1}(\mathbf{W}_t)\end{aligned}$$

Díky nezávislosti náhodných vektorů

$$\mathbf{W}_t \perp \{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}$$

platí

$$P_{t-1}(\mathbf{W}_t) = P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}(\mathbf{W}_t) = 0,$$

takže dostaneme

$$\boxed{\mathbf{I}_t} = \boxed{\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t} = \mathbf{G}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t = \boxed{\mathbf{G}_t\left(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t\right) + \mathbf{W}_t}.$$

Je třeba si uvědomit, že inovace jsou ortogonální (tj. nekorelované)

$$\mathbf{I}_0 \perp \mathbf{I}_1 \perp \mathbf{I}_2 \perp \ldots \perp \mathbf{I}_t,$$

takže pro libovolné $\mathbf{X}$ platí

$$\begin{aligned}P_t(\mathbf{X}) &= P(\mathbf{X}|\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_t)\\ &= P(\mathbf{X}|\mathbf{I}_0,\ldots,\mathbf{I}_t)\\ &= P(\mathbf{X}|\mathbf{I}_0,\ldots,\mathbf{I}_{t-1}) + P(\mathbf{X}|\mathbf{I}_t) = P_{t-1}(\mathbf{X}) + P(\mathbf{X}|\mathbf{I}_t)\\ &= P_{t-1}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}\mathbf{I}_t,\end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{M} = E\mathbf{X}\mathbf{I}_t'[E\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t']^-.$$

Takže

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1} &= \widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = P_t(\mathbf{X}_{t+1})\\ &= P_{t-1}(\mathbf{X}_{t+1}) + P(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{I}_t)\\ &= P_{t-1}(\mathbf{F}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t) + E\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t'[E\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t']^-\mathbf{I}_t\end{aligned}$$

a označíme-li

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t} &= E\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t'\\ \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} &= E\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t',\end{aligned}$$

pak

$$\widehat{\mathbf{X}}_{t+1} = \mathbf{F}_t\underbrace{P_{t-1}(\mathbf{X}_t)}_{=\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}} + \underbrace{P_{t-1}(\mathbf{V}_t)}_{=0} + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}^-(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)$$

Vyjádřeme nyní

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t}} &= E\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t'\\ &= E(\mathbf{F}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t)\left[\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \mathbf{W}_t\right]'\\ &= E\left[\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{V}_t\right]\left[\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \mathbf{W}_t\right]'\\ &= \mathbf{F}_t\underbrace{E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)'}_{=\mathbf{\Omega}_{t|t-1}}\mathbf{G}_t' + \mathbf{F}_t\underbrace{E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)\mathbf{W}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)} + \mathbf{F}_t\underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\\ &\quad + \mathbf{F}_t\underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_t\mathbf{W}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)} + \underbrace{E\mathbf{V}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{G}_t' + \underbrace{E\mathbf{V}_t\mathbf{W}_t'}_{=\mathbf{S}_t=\mathbf{0}}\\ &= \boxed{\mathbf{F}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'}\end{aligned}$$

Dále počítejme

$$\begin{aligned}\boxed{\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}} &= E\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t' = E\left[\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t)+\mathbf{W}_t\right]\left[\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t)+\mathbf{W}_t\right]'\\ &= \mathbf{G}_tE(\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t)(\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t)'\mathbf{G}_t'\\ &\quad+\mathbf{G}_t\underbrace{E(\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t)\mathbf{W}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}+\underbrace{E\mathbf{W}_t(\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t)'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{G}_t'+E\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t'\\ &= \boxed{\mathbf{G}_t\boldsymbol{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'+\mathbf{R}_t}\end{aligned}$$

Tedy celkově máme

$$\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}=\widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t}=\mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t}\boldsymbol{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\underbrace{(\mathbf{Y}_t-\mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)}_{=\mathbf{I}_t}$$

a

$$\mathbf{K}_{t+1|t}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t}\boldsymbol{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}$$

je tzv. Kalmanův predikční zisk a můžeme tedy psát

$$\boxed{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}=\mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}+\mathbf{K}_{t+1|t}(\mathbf{Y}_t-\mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})}$$

Zbývá najít rekurentní vztah pro $\boldsymbol{\Omega}_{t+1|t}$. Přitom využijeme důležitý vztah, který vychází z vlastností ortogonální projekce, tj. že pro $\forall\mathbf{Y}\in P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}$ platí

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{X}_t-\widehat{\mathbf{X}}_t,\mathbf{Y}\rangle &= \mathbf{0}\\ \langle\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}\rangle &= \langle\widehat{\mathbf{X}}_t,\mathbf{Y}\rangle\\ E\mathbf{X}_t\mathbf{Y} &= E\widehat{\mathbf{X}}_t\mathbf{Y}\end{aligned}$$

a protože $\widehat{\mathbf{X}}_t\in P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}$, dostaneme

$$\boxed{E\mathbf{X}_t\widehat{\mathbf{X}}_t=E\widehat{\mathbf{X}}_t\widehat{\mathbf{X}}_t}.$$

Proto počítejme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{1|0}=\boldsymbol{\Omega}_1 &= E(\mathbf{X}_1-\widehat{\mathbf{X}}_1)(\mathbf{X}_1-\widehat{\mathbf{X}}_1)'\\ &= E\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1'-\underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_1'}_{=E\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1'}-\underbrace{E\mathbf{X}_1\widehat{\mathbf{X}}_1}_{=E\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1'}+E\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1'\\ &= E\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1'-E\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1'=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1}-\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_1\widehat{\mathbf{X}}_1}\end{aligned}$$

Úplnou matematickou indukcí obdobně dokážeme, že pokud budeme předpokládat, že platí

$$\boldsymbol{\Omega}_{t|t-1}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t}-\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_t\widehat{\mathbf{X}}_t},$$

pak

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{t+1|t} &= E(\mathbf{X}_{t+1}-\widehat{\mathbf{X}}_{t+1})(\mathbf{X}_{t+1}-\widehat{\mathbf{X}}_{t+1})'\\ &= E\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}'-\underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}'}_{=E\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}'}-\underbrace{E\mathbf{X}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}'}_{=E\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}'}+E\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}'\\ &= E\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}'-E\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}'=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}}-\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}} &= E\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}'=E(\mathbf{F}_t\mathbf{X}_t)+\mathbf{W}_t)(\mathbf{F}_t\mathbf{X}_t)+\mathbf{W}_t)'\\ &= \mathbf{F}_t\underbrace{E\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t}_{=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t}}\mathbf{F}_t'+\mathbf{F}_t\underbrace{E\mathbf{X}_t\mathbf{W}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}+\underbrace{E\mathbf{W}_t\mathbf{X}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{F}_t'\mathbf{F}_tE\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t'\\ &= \mathbf{F}_t\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t}\mathbf{F}_t'+\mathbf{Q}_t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}} &= E\widehat{\mathbf{X}}_{t+1}\widehat{\mathbf{X}}'_{t+1} \\
&= E\left[\mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{K}_{t+1|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)\right]\left[\mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{K}_{t+1|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)\right]' \\
&= \mathbf{F}_t \underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_t\widehat{\mathbf{X}}'_t}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\mathbf{X}}_t\widehat{\mathbf{X}}_t}}\mathbf{F}'_t + \mathbf{F}_t \underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_t \overbrace{(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)'}^{=\mathbf{I}_t}}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{K}'_{t+1|t} \\
&\quad + \mathbf{K}_{t+1|t}\underbrace{E(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)\widehat{\mathbf{X}}_t}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{F}'_t \\
&\quad + \mathbf{K}_{t+1|t}\underbrace{E(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)'}_{=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}}\mathbf{K}'_{t+1|t} \\
&= \mathbf{F}_t\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t}\mathbf{F}'_t + \mathbf{K}_{t+1|t}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{K}'_{t+1|t}
\end{aligned}
$$

□

Věta 2.2. *Pro* Kalmanovu filtraci

$$\boxed{\widehat{\mathbf{X}}_{t|t}} = P(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_t)$$

a filtrovací chybovou kovarianční matici

$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{t|t}} = E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})'$$

pro $\forall t \geq 1$ *platí následující rekurentní vztahy*

$$\boxed{\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} = \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_{t|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})},$$

kde $\mathbf{K}_{t|t}$ *je tzv.* filtrační Kalmanův zisk, *pro nějž platí*

$$\boxed{\mathbf{K}_{t|t} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}},$$

přičemž

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t} &= \mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'\\ \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} &= \mathbf{G}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t' + \mathbf{R}_t\end{aligned}$$

a

$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{t|t}\mathbf{G}_t)\mathbf{\Omega}_{t|t-1}},$$

kde $\mathbf{I}$ *je jednotková matice řádu* $v \times v$.

Důkaz. Využijme opět inovací

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_0 &= \mathbf{Y}_0\\ \mathbf{I}_t &= \mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_t\\ &= \mathbf{Y}_t - P_{\overline{sp}\{\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_{t-1}\}}(\mathbf{Y}_t)\\ &= \mathbf{Y}_t - P_{t-1}(\mathbf{Y}_t)\\ &= \mathbf{Y}_t - P_{t-1}(\mathbf{G}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t)\\ &= \mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_tP_{t-1}(\mathbf{X}_t) - P_{t-1}(\mathbf{W}_t\\ &= \mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t\\ &= \mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \mathbf{W}_t\end{aligned}$$

které jsou navzájem kolmé (tj. nekolerované).

Počítejme

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} &= P(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_0,\ldots,\mathbf{Y}_t)\\ &= P(\mathbf{X}_t|\mathbf{I}_0,\ldots,\mathbf{I}_t)\\ &= P(\mathbf{X}_t|\mathbf{I}_0,\ldots,\mathbf{I}_{t-1}) + P(\mathbf{X}_t|\mathbf{I}_t)\\ &= \widehat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{M}\mathbf{I}_t\\ &= \widehat{\mathbf{X}}_t + E\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t'\left[E\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t'\right]^-\mathbf{I}_t\\ &= \widehat{\mathbf{X}}_t + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)\end{aligned}$$

přičemž

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t} &= E\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t'\\ &= E\mathbf{X}_t\left[\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \mathbf{W}_t\right]'\\ &= E\left[(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \widehat{\mathbf{X}}_t\right]\left[\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t) + \mathbf{W}_t\right]'\\ &= E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)'\mathbf{G}_t + \underbrace{E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)\mathbf{W}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\\ &\quad + \underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{G}_t' + \underbrace{E\widehat{\mathbf{X}}_t\mathbf{W}_t}_{=\mathbf{0}(nekorel.)} = \mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'\end{aligned}$$

Takže celkově dostaneme

$$\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} = \widehat{\mathbf{X}}_t + \underbrace{\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}}_{ozn.\mathbf{K}_{t|t}}\underbrace{(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t)}_{=\mathbf{I}_t},$$

odtud

$$\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} - \widehat{\mathbf{X}}_t = \mathbf{K}_{t|t}\mathbf{I}.$$

Zbývá dopočítat $\mathbf{\Omega}_{t|t}$. Víme, že

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{t|t-1} &= E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t)' \\
&= E\left[(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}) + \underbrace{(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})}_{=\mathbf{K}_{t|t}\mathbf{I}_t}\right]\left[(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}) + \underbrace{(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})}_{=\mathbf{K}_{t|t}\mathbf{I}_t}\right]' \\
&= \underbrace{E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})'}_{\mathbf{\Omega}_{t|t}} + \underbrace{E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})\mathbf{I}_t'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)}\mathbf{K}_{t|t}' \\
&\quad + \mathbf{K}_{t|t}\underbrace{E\mathbf{I}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})'}_{=\mathbf{0}(nekorel.)} + \mathbf{K}_{t|t}\, E\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t'\, \mathbf{K}_{t|t}' = \mathbf{\Omega}_{t|t} + \mathbf{K}_{t|t}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{K}_{t|t}'
\end{aligned}$$

Protože

$$\mathbf{K}_{t|t} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} = \mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'\Sigma^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{t|t-1} &= \mathbf{\Omega}_{t|t} + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}'_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t} \\
&= \mathbf{\Omega}_{t|t} + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}'_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t} = \mathbf{\Omega}_{t|t} + \underbrace{\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}}_{=\mathbf{K}_{t|t}}\mathbf{G}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}
\end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbf{\Omega}_{t|t} = \mathbf{\Omega}_{t|t-1} - \mathbf{K}_{t|t}\mathbf{G}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{t|t}\mathbf{G}_t)\mathbf{\Omega}_{t|t-1}.$$

□

3. Kalmanův iterační proces

Shrňme předchozí výsledky Kalmanovy predikce a filtrace takto

1) Protože

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{K}_{t+1|t} &= \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} &&= \mathbf{F}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'\Sigma^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} \\
\mathbf{K}_{t|t} &= \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_t\mathbf{I}_t}\mathbf{\Sigma}^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t} &&= \mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'\Sigma^-_{\mathbf{I}_t\mathbf{I}_t}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathbf{K}_{t+1|t} = \mathbf{F}_t\mathbf{K}_{t|t}}.$$

2) Dále platí

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t}} &= \mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{F}_t\mathbf{K}_{t|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t) \\
&= \mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_{t+1|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_t) \\
&= \boxed{\widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t}}.
\end{aligned}$$

3) Budeme se snažit nově vyjádřit $\mathbf{\Omega}_{t+1|t}$. Protože

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbf{X}_{t+1} - \widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t}} &= \mathbf{F}_t\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t - \mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} \\
&= \boxed{\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}) + \mathbf{V}_t}
\end{aligned}$$

a vzhledem k tomu, že $\mathbf{V}_t \perp (\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbf{\Omega}_{t+1|t}} &= E(\mathbf{X}_{t+1} - \widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t})(\mathbf{X}_{t+1} - \widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t})' \\
&= E\left[\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}) + \mathbf{V}_t\right]\left[\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}) + \mathbf{V}_t\right]' \\
&= \mathbf{F}_t E(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})(\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})'\mathbf{F}_t' + E\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t' \\
&= \boxed{\mathbf{F}_t\mathbf{\Omega}_{t|t}\mathbf{F}_t' + \mathbf{Q}_t}.
\end{aligned}$$

Všechny předchozí mezivýsledky použijeme pro odvození velmi jednoduchého Kalmanova iteračního procesu, který je spojením filtrace a predikce.

Kalmanův iterační proces

(I) Počátečí podmínky

$$\widehat{\mathbf{X}}_{1|0} = \widehat{\mathbf{X}}_1 = E\mathbf{X}_1 \quad \text{při} \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{\Omega}_{1|0} = E(\mathbf{X}_1 - E\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_1 - E\mathbf{X}_1)' = D\mathbf{X}_1$$

(II) Datový (filtrační) krok Kalmanova filtru

Nejprve se spočítá tzv. Kalmanův zisk (nebo též *Kalmanovo zesílení*)

$$\mathbf{K}_{t|t} = \mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t'(\mathbf{G}_t\mathbf{\Omega}_{t|t-1}\mathbf{G}_t' + \mathbf{R}_t)^-,$$

pak

$$\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} = \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_{t|t}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{G}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1})$$

a filtrační chybovou kovariančí matici

$$\mathbf{\Omega}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{t|t}\mathbf{G}_t)\mathbf{\Omega}_{t|t-1}.$$

(III) Časový (predikční) krok Kalmanova filtru

$$\widehat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = \mathbf{F}_t\widehat{\mathbf{X}}_{t|t}$$
$$\mathbf{\Omega}_{t+1|t} = \mathbf{F}_t\mathbf{\Omega}_{t|t}\mathbf{F}_t' + \mathbf{Q}_t.$$

Literatura

[1] ANDĚL, J. *Statistická analýza časových řad*. Praha. SNTL 1976.

[2] ANDERSON, T.W. *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons Inc. 1971.

[3] BOX, G.E.P, COX, D.R. Analysis of Transformations. *Journals of the Royal Statistical Society*,Biometrika 26, 1964, 211–252.

[4] BOX, G., JENKINS, G. *Time series analysis - forecasting and control*. Holden-Day 1976.

[5] BROCKWELL, P.J., DAVIS, R.A. *Time Series: Theory and Methods*. Springer–Verlag, New York, 1991.

[6] BROCKWELL, P.J., DAVIS, R.A. *Introduction to time series and forecasting*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[7] BROWN, R.G. *Statistical forecasting for inventory control*. New York. McGraw-Hill. 1959.

[8] CIPRA, T. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*.SNTL, Praha, 1986.

[9] ČERNOHLÁVKOVÁ, P. *CHKO Moravský kras (management chráněné oblasti)*. Bakalářská práce.Masarykova univerzita. Brno 2002.

[10] DOOB, J.L. *Stochastic processes*. New York, Wiley 1953.

[11] FORBELSKÁ, M. Detekce periodicity v hydrologických datech.In *XIII. letní škola bometriky, Biometrické metody a modely v současné vědě a výzkumu*. 1. vyd. Brno: ÚKZÚZ Brno, 1998. s. 173–178.

[12] FORBELSKÁ, M. *Stochastické modelování jednorozměrných časových řad*. Brno. MUNI PRESS 2009.

[13] GICHMAN, I.I., SKOROCHOD, A.V. *Teorija slučajnych processov*. Moskva. Nauka 1971.

[14] HAMILTON, J.D. *Time Series Analysis*. Princeton University Press. 1994.

[15] HANNAN, E.J., QUINN, B. G. The Determination of the Order of an Autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 41, No.2, 1979, 190–195.

[16] HOLT, C.C. Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages. *Office of Naval Research, Research Memorandum* No. 52. 1957.

[17] KALMAN, R. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME J. Basic Eng.* D 82 (1960), 34–45.

[18] KUBÁČKOVÁ, L., KUBÁČEK, L., KUKUČA, J. *Pravdepodobnosť a štatistika v geodézii a geofyzike*. Veda, Bratislava, 1982.

[19] MICHÁLEK, J., BUDÍKOVÁ, M., BRÁZDIL, R. *Metody odhadu trendu časové řady na příkladu středoevropských teplotních řad.* 1. vyd. Praha : Český hydrometeorologický ústav, 1993, 53 s.

[20] NEUBRUNN, T., RIEČAN, B. *Miera a integrál*. Bratislava. Veda 1981.

[21] PRIESTLEY, M. *Spectral analysis and time series*. Academic Press 1989.

[22] RAO, R.C. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*. ACADEMIA Praha, 1978.

[23] ŠTULAJTER, F. *Odhady v náhodných procesoch*. Alfa. Bratislava. 1989.

[24] VESELÝ, V. Knihovna programů TSA-M pro analýzu časových řad.Ed. P.Fľak. In *XIV. letná škola biometriky, Biometrické metódy a modely v pôdohospodárskej vede, výskume a výuke*. Nitra: Agentúra Slovenskej akadémie pôdohospodárskych vied, 2000. s. 239–248.

[25] VESELÝ, V. Úvod do časových řad. In *Proceedings ANALÝZA DAT'2003/II*. Pardubice (Czech Rep.): Trilobyte, Ltd., 2004. od s. 7–31.

[26] ZVÁRA, K. *Regresní analýza* Praha. Academia. 1989.