



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poděkování

**Tento učební text vznikl za přispění
Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR
prostřednictvím Operačního programu
Vzdělávání pro konkurenceschopnost
v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím
se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).**

Cvičení předmětu M5444 Markovské řetězce

Marie Budíková

2013

1. cvičení

Příklad 1.: Na přímce jsou vyznačeny body $-1, 0, 1$. V bodě 0 se nachází kulička. Náhodně házíme mincí. Jestliže padne líc, posuneme kuličku do bodu 1 , jestliže padne rub, posuneme ji do bodu -1 . Je-li kulička v bodě 1 a padne-li líc, ponecháme ji v bodě 1 , padne-li rub, posuneme ji do bodu 0 . Je-li kulička v bodě -1 a padne-li rub, ponecháme ji v bodě -1 , padne-li líc, posuneme ji do bodu 0 .

Modelujte tuto situaci vhodným SP.

Pro posloupnost 10 hodů mincí $\{L, L, L, R, R, L, R, L, R, R\}$ graficky znázorněte odpovídající realizace SP.

Výsledek: Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ (t je pořadové číslo hodu mincí), $J = \{-1, 0, 1\}$.

Příklad 2.: Necht' náhodná veličina $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, tj.

hustota: $\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$, distribuční funkce: $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$. Zavedeme

SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$, $t > 0$.

a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.

b) K distribuční funkci $\Phi_t(x)$ najděte hustotu $\varphi_t(x)$.

Výsledek:

ad a) $\Phi_t(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda x}{t}} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$, ad b) $\varphi_t(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t} e^{-\frac{\lambda x}{t}} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$.

Znamená to, že $X \sim \text{Ex}\left(\frac{\lambda}{t}\right)$.

Příklad 3.: Náhodná veličina X má distribuční funkci $\Phi(x)$. Necht' $c, t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX + c$.

a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.

b) Najděte dvourozměrnou distribuční funkci $\Phi_{t_1 t_2}(x_1, x_2)$.

Výsledek:

ad a) $\Phi_t(x) = \Phi\left(\frac{x-c}{t}\right)$

ad b) $\Phi_{t_1 t_2}(x_1, x_2) = \Phi\left(\min\left\{\frac{x_1-c}{t_1}, \frac{x_2-c}{t_2}\right\}\right)$

Příklad 4.: Náhodná veličina X má distribuční funkci $\Phi(x)$. Necht' $t > 0$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX^2$. Určete jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.

Výsledek:

$\Phi_t(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{t}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{x}{t}}\right) + P\left(X = -\sqrt{\frac{x}{t}}\right)$, kde $P\left(X = -\sqrt{\frac{x}{t}}\right) = 0$, je-li X spojitá.

Příklad 5.: Necht' X_1, X_2, X_3, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$. Necht' $T = \{1, 2, 3, \dots\}$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$. Určete pravděpodobnostní rozložení tohoto SP.

Výsledek:

$$\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1) \cdot \dots \cdot \Phi(x_n)$$

Příklad 6.: Necht' náhodná veličina $X \sim Ex(\lambda)$, tj. $E(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$. Najděte střední hodnotu, rozptyl, autokovarianční a autokorelační funkci tohoto SP.

Výsledek:

$$\mu(t) = \frac{t}{\lambda}, \sigma^2(t) = \frac{t^2}{\lambda^2}, \gamma(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{\lambda^2}, \rho(t_1, t_2) = 1$$

Příklad 7.: Necht' Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny, které jsou nekorelované. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = t + Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t$, $\omega > 0$ konstanta. Zjistěte, zda daný SP je slabě stacionární.

Výsledek:

Protože střední hodnota SP $\mu(t) = t$ závisí na čase, není daný SP slabě stacionární.

Příklad 8.: Uvažme SP z příkladu 7. Zavedeme standardizovaný SP $\{U_t; t \in T\}$, kde

$$U_t = \frac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}. \text{ Zjistěte, zda tento standardizovaný SP je slabě stacionární.}$$

Výsledek:

$$\mu(t) = t \text{ (viz př. 7), } \sigma^2(t) = 1, \mu_U(t) = 0, \sigma^2_U(t) = 1, \gamma_U(t_1, t_2) = \cos \omega(t_2 - t_1)$$

Standardizovaný SP $\{U_t; t \in T\}$ je slabě stacionární.

Příklad 9.: Necht' Y, Z jsou náhodné veličiny se středními hodnotami $E(Y) = \mu_1$, $E(Z) = \mu_2$ a rozptyly $D(Y) = \sigma_1^2$, $D(Z) = \sigma_2^2$. Jejich koeficient korelace je $R(Y, Z) = 0,7$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = 2tY + Z$. Najděte střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci tohoto SP.

Výsledek:

$$\mu(t) = 2t\mu_1 + \mu_2, \sigma^2(t) = 4t^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2,8t\sigma_1\sigma_2, \gamma(t_1, t_2) = 4t_1t_2\sigma_1^2 + 1,4\sigma_1\sigma_2(t_1 + t_2) + \sigma_2^2$$

Příklad 10.: Necht' $\gamma_X(t_1, t_2)$ je autokovarianční funkce SP $\{X_t; t \in T\}$. Necht' $f(t), g(t)$ jsou reálné funkce definované na T . Zavedeme SP $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = f(t)X_t + g(t)$. Najděte autokovarianční funkci tohoto SP.

Výsledek:

$$\gamma_Y(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2)\gamma_X(t_1, t_2)$$

Příklad 11.: Necht' SP $\{X_t; t \in T\}$ má střední hodnotu $\mu_X(t) = t^2 - 1$ a autokovarianční funkci $\gamma_X(t_1, t_2) = 2e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}$. Zavedeme SP $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = tX_t + t^2 + 1$. Najděte jeho střední hodnotu a autokovarianční funkci.

Výsledek:

$$\mu_Y(t) = t^3 + t^2 - t + 1, \gamma_Y(t_1, t_2) = 2t_1t_2e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}$$

2. cvičení

Příklad 1.: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J =$

$\{0,1\}$. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Jaká je

pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1), jestliže jeho počáteční stav zvolíme

- a) podle výsledku hodu mincí
- b) podle výsledku náhodného pokusu, v němž je stavu 0 dosaženo s pravděpodobností 1/3 a stavu 1 s pravděpodobností 2/3.

Výsledek:

ad a) $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$, ad b) $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$

Příklad 2.: Model dvoustavového systému

Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1\}$.

Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, vektor počátečních

pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (\gamma, 1-\gamma)$. Najděte simultánní pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X_0, X_1, X_2) .

Výsledek:

x_0	x_1	x_2	$\pi(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	$\gamma(1-\alpha)^2$
0	0	1	$\gamma(1-\alpha)\alpha$
0	1	0	$\gamma\alpha\beta$
1	0	0	$(1-\gamma)\beta(1-\alpha)$
0	1	1	$\gamma\alpha(1-\beta)$
1	0	1	$(1-\gamma)\beta\alpha$
1	1	0	$(1-\gamma)(1-\beta)\beta$
1	1	1	$(1-\gamma)(1-\beta)^2$

Příklad 3.: (Model mužských zaměstnání) Předpokládáme rozdělení mužských zaměstnání do tří tříd: vědecktí pracovníci, kvalifikovaní pracovníci, nekvalifikovaní pracovníci. Je známo, že 80% synů vědeckých pracovníků se stane vědeckými pracovníky, 10% kvalifikovanými a 10% nekvalifikovanými pracovníky. Ze synů kvalifikovaných pracovníků 60% bude kvalifikovanými pracovníky, 20% vědeckými a 20% nekvalifikovanými pracovníky. Konečně v případě nekvalifikovaných pracovníků 50% synů bude nekvalifikovanými pracovníky, 25% kvalifikovanými a 25% vědeckými pracovníky. Předpokládejme, že každý muž má syna. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Výsledek: 0,375.

Příklad 4.: V příkladu 3 nyní předpokládejme, že muž má syna jen s pravděpodobností 0,8. Zaveďte nyní homogenní markovský řetězec se čtyřmi stavy – první tři jsou stejné jako v předešlé úloze a čtvrtý odpovídá případu, kdy muž nemá syna a proces končí. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Výsledek: 0,24

Příklad 5.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2.

Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtete vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

Výsledek: $\mathbf{p}(2) = (0,28, 0,48, 0,24)$.

Příklad 6.: V příkladu 5 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je $1/4$ průměrný $1/2$ a neúrodný $1/4$. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?

Výsledek: $\mathbf{p}(1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$.

3. cvičení

Příklad 1.: Půjčovna aut, která vlastní 1000 automobilů, působí ve třech pobočkách A, B, C. Zákazník si může vybrat auto v některé z poboček a vrátit ho v kterékoliv jiné pobočce.

Dlouhodobým sledováním v týdenním intervalu byly zjištěny tyto skutečnosti:

Pravděpodobnost vrácení auta do stejné pobočky, z níž bylo vypůjčeno, je pro pobočky A, B, C postupně 0,6; 0,6; 0,5. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v A bude vráceno v B, je 0,3 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v A, je 0,2. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v C, je 0,2 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v C bude vráceno v B, je 0,4. Zjednodušeně předpokládáme, že žádné auto není ukradeno ani nehavaruje.

- Modelujte provoz půjčovny aut pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Předpokládejme, že na počátku sledování je 500 aut v pobočce A, 300 v B a 200 v C. Určete, kolik aut bude v jednotlivých pobočkách po uplynutí 1 týdne.

Výsledek: Po týdnu sledování bude v pobočce A 380 aut, v pobočce B 410 aut a v pobočce C 210 aut.

Příklad 2.: Uvažme podnik, v němž jsou tři oddělené provozy – provoz 1, provoz 2 a provoz 3. V těchto provozech pracují dělníci vykonávající jednostranné úkony. Aby nedocházelo k otupění zaměstnanců, tak se dělníci na konci měsíce v jednotlivých provozech náhodně střídají. Existuje samozřejmě i jistá šance, že si dělník najde jiné zaměstnání a podnik opustí. Předpokládáme, že v takovém případě už se do podniku nevrátí. Dlouhodobým pozorováním pohybu zaměstnanců v tomto podniku byly zjištěny následující skutečnosti:

Dělníci z provozu 1 na konci měsíce s pravděpodobností $1/4$ zůstávají v provozu 1, s pravděpodobností $1/4$ přecházejí do provozu 2 a s pravděpodobností $1/2$ přecházejí do provozu 3.

Dělníci v provozu 2 na konci měsíce s pravděpodobností $1/4$ zůstávají v provozu 2, s pravděpodobností $1/4$ přecházejí do provozu 1 a s pravděpodobností $1/2$ přecházejí do provozu 3.

Jelikož práce v provozu 3 je velmi namáhavá, tak po měsíci dělníci z tohoto provozu odcházejí se stejnou pravděpodobností buď do provozu 1 nebo do provozu 2.

Dále bylo zjištěno, že zaměstnanci z tohoto podniku odcházejí pouze z provozu 3, a to s pravděpodobností $1/9$.

- Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Vypočtete pravděpodobnost, že zaměstnanec, který na počátku sledování pracoval v provozu 1, ve čtvrtém měsíci sledování již v podniku pracovat nebude.

Výsledek: ad b) Pravděpodobnost, že ve 4. měsíci už zaměstnanec nebude v podniku pracovat, je $\frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$.

Návod na hledání stacionárního vektoru stochastické matice pomocí MATLABu

function [a]=sv(P)

%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru

%syntaxe: a=sv(P)

% vstupni parametr ... stochasticka matice P

% vystupni parametr ... stacionarni vektor a

```

% zjistíme rad matice P:
n=size(P,1);
% vytvoříme pomocnou jednotkovou matici:
I=eye(n);
% sestavíme matici soustavy:
A=[[I-P]';ones(1,n)];
% vytvoříme vektor pravých stran:
f=[zeros(n,1);1];
% vypočteme stacionární vektor
a=(A\f)';

```

Příklad 3.: Předpokládejme, že v nějaké oblasti může být počasí pouze ve třech stavech, a to déšť, jasno, sníh. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají dva jasné dny za sebou. Jestliže je v jistém dni jasno, pak další den bude buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže je v jistém dni sníh nebo déšť, pak následující den se počasí buď nezmění, a to s pravděpodobností 0,5 nebo se změní, a pak v polovině případů bude jasno. Popište stav počasí homogenním markovským řetězcem a vypočtěte jeho stacionární rozložení.

Návod na řešení v MATLABu:

```

P=[0.5 0.25 0.25;0.5 0 0.5;0.25 0.25 0.5];
a=sv(P)

```

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,4 \ 0,2 \ 0,4)$

Znamená to, že po 40 % dnů prší, po 20 % dnů je jasno a po 40 % dnů sněží.

Příklad 4.: Obchodník prodává tři druhy pracích prášků, které označíme A, B, C. Aby zjistil, jak se vyvíjí poptávka po těchto prášcích, provedl v 1. měsíci prodeje průzkum, v němž se zjišťovalo, který druh prášku zákazníci kupují. Při tomto průzkumu bylo zjištěno, že prášek A kupuje 50% zákazníků, prášek B 20% a prášek C 30% zákazníků. Za měsíc byl proveden další průzkum, který zjišťoval, ke kterému druhu prášků zákazníci přešli. Výsledky průzkumu

zachycuje matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.

- Určete absolutní pravděpodobnosti po dvou měsících a interpretujte je
- Najděte vektor limitních pravděpodobností a limitní matici přechodu.

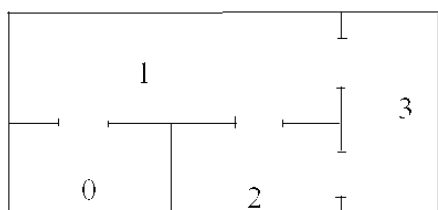
Výsledek:

ad a) Po dvou měsících bude prášek A nakupovat 80,6% zákazníků, prášek B 12,8% a C 6,6% zákazníků.

ad b) $\bar{\mathbf{p}} = (0,8281 \ 0,125 \ 0,0469)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \\ 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \\ 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \end{pmatrix}$

4. cvičení

Příklad 1.: Myš je vložena do bludiště tvaru



V každém okamžiku si myš vybere náhodně jedny z dveří, které vedou z přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky.

- Modelujte proces pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram
- Ukažte, že všechny stavy jsou trvalé nenulové.
- Jestliže myš byla na počátku vložena do nulté přihrádky, po kolika krocích se v průměru poprvé vrátí do této přihrádky?
- Jestliže myš byla na počátku vložena do nulté přihrádky a sýr do třetí přihrádky, s jakou pravděpodobností myš dospěje k potravě právě třemi přechody?

Výsledek:

ad c) Myš se v průměru vrátí po osmi krocích do nulté přihrádky.

ad d) $p_3(3) = \frac{1}{6}$.

Příklad 2.: Výskyt sledované vlastnosti u jedinců určitého typu je dán dvojicí alel A,a. Každý jedinec může mít dvojici alel AA (dominantní jedinec), aa (recesivní jedinec), aA=Aa (hybridní jedinec). Základním předpokladem genetiky je, že při křížení dostává potomek jednu alelu od každého z rodičů, že tyto alely se vybírají náhodně a nezávisle na sobě. Z populace náhodně vybereme jedince, zkřížíme ho s hybridním jedincem, v příštím kroku náhodně vybíráme jedince z populace tvořené jejich potomky, opět ho zkřížíme s hybridem atd.

- Modelujte tento proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici **P**.
- Jestliže proces probíhá dostatečně dlouho, jaká je pravděpodobnost výskytu dominantního (resp. recesivního resp. hybridního) jedince?
- Nechť proces probíhá již dlouhou dobu. Křížíme dominantního jedince s hybridem. Po kolika krocích se v průměru objeví další dominantní jedinec?

Výsledek:

ad c) Pravděpodobnost výskytu dominantního či recesivního jedince je 0,25, hybridního 0,5.

ad d) Jestliže např. byl první jedinec dominantní, tak dalšího dominantního jedince se dočkáme v průměru po čtyřech krocích.

Příklad 3.: Odhady absolutních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu v HMŘ

Zadání: Dva přátelé, Karel a Jiří, se každý týden pravidelně scházejí na kondičním tenisovém utkání. Karel si poslední dva roky zaznamenává svou úspěšnost. Ze 106 utkání vyhrál 65, přičemž ve 43 případech výhře předcházela výhra a v 16 případech prohře předcházela prohra.

- Modelujte popsanou situaci pomocí homogenního markovského řetězce.

b) Najděte bodové odhady počátečních pravděpodobností a 95% intervaly spolehlivosti pro počáteční pravděpodobnosti

c) Najděte bodové odhady pravděpodobností přechodu a 95% intervaly spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu.

Upozornění: Před výpočtem intervalů spolehlivosti nezapomeňte ověřit splnění podmínek dobré aproximace.

Výsledky:

Ad a) Zavedeme HMR $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s množinou stavů $J = \{1,2\}$, přičemž $X_n = 1$, když v n-tém týdnu Karel vyhrál nad Jiřím a $X_n = 2$, když v n-tém týdnu Karel s Jiřím prohrál.

Ad b) Odhad vektoru počátečních pravděpodobností: $\hat{p}(0) = (0,61;0,39)$.

Meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro $p_1(0), p_2(0)$:

$p_1(0) \in (0,52;0,706), p_2(0) \in (0,294;0,48)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Ad c) Odhadnutá matice přechodu: $\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,34 \\ 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

Meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu:

$p_{11} \in (0,5465;0,7766), p_{12} \in (0,2234;0,4535), p_{21} \in (0,46;0,759), p_{22} \in (0,241;0,54)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Příklad 4.: Simulace modelu II

Předpokládejte, že v modelu II havarijního pojištění je střední hodnota počtu pojistných událostí v pojistném období rovna 0,1. Přitom matice přechodu má tvar:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

a) Vypočtete stacionární rozložení

Návod na řešení v MATLABu: $a = sv(P)$

Výsledek: $a = (0,0145 \quad 0,0938 \quad 0,8917)$

b) Předpokládejte, že základní pojistné je 1200 Kč. Pro 1000 klientů vypočtete celkové vybrané pojistné.

Návod na řešení v MATLABu: $1000*1200*a*[1 \ 0.7 \ 0.5]'$

c) Generujte prvních 5000 realizací homogenního markovského řetězce, který popisuje zařazování klienta do bonusových tříd.

Návod na řešení v MATLABu: $realizace = simulovani_MR(P,p0,n)$,

kde $p0 = [1, 0, 0]$, $n = 5000$.

d) Vypočtete relativní četnosti jednotlivých bonusových tříd a porovnejte je se stacionárním rozložením.

Návod na řešení v MATLABu: $tabulka = tabulate(realizace)$

$rel_cetnosti = tabulka(:,2)/n$

5. cvičení

Příklad 1.: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je HMŘ s množinou stavů $J = \{0, \dots, 5\}$ a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}. \text{ Najděte kanonický tvar matice } \mathbf{P}.$$

Výsledek:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}. \text{ Odtud je vidět, že:}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1/8 & 7/8 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Návod na řešení v MATLABu: Použijte funkci `kant(P)` s výstupními parametry `KT`, `NU`, `DS`. Zajímá nás parametr `KT`.

Příklad 2.: Při analýze situace na trhu práce jednotliví pracovníci mohou: „pracovat ve své profesi“ (stav 1), „pracovat v jiné profesi“ (stav 2), „být nezaměstnaní“ (stav 3). Při sledování velkého souboru pracovníků se ukázalo, že během jednotlivých měsíců došlo ke změnám mezi uvedenými stavy následovně:

Ve své profesi pracovalo i v následujícím měsíci 80% pracovníků, 10% přešlo k jiné profesi a 10% se stalo nezaměstnanými.

Z pracovníků pracujících mimo svou profesi 10% přešlo v následujícím měsíci ke své profesi, 70% zůstalo nadále pracovat mimo svou profesi a 20% se stalo nezaměstnanými.

Z nezaměstnaných našlo práci ve své profesi 5% osob, 30% nezaměstnaných získalo práci mimo svou profesi a 65% osob zůstalo i v dalším měsíci nezaměstnanými.

Najděte maticí přechodu \mathbf{P} , limitní maticí \mathbf{A} , fundamentální maticí \mathbf{Z} a maticí \mathbf{M} středních hodnot dob prvního vstupu do stavů 1, 2, 3.

Výsledek:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2,8496 & -1,127 & -0,7227 \\ -0,5879 & 1,6855 & -0,09766 \\ 0,9004 & 0,125 & 1,7773 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3,6 & 6,9 & 8 \\ 12,2 & 2,5 & 6 \\ 13,3 & 3,8 & 3,2 \end{pmatrix}.$$

Interpretace např. prvku m_{13} : Pokud pracovník v daném měsíci pracoval ve své profesi, tak v průměru za 8 měsíců se stane nezaměstnaným.

Příklad 3.: Na počátku sledování je v procesu 1000 technicky homogenních prvků, všechny jsou nové. Maximální doba provozu prvků je 5 měsíců. Pravděpodobnosti selhání v 1. až 5. měsíci jsou 0,05; 0,1; 0,25; 0,4; 0,2.

a) Vypočítejte střední hodnotu životnosti prvků.

b) Popište proces obnovy HMŘ, najděte jeho matici přechodu a zjistěte střední hodnotu počtu obnov na konci 4. měsíce.

c) Vypočítejte limitní věkovou strukturu systému.

Výsledek:

Ad a) Střední hodnota životnosti prvků je 3,6 měsíce.

Ad b)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1053 & 0 & 0,8947 & 0 & 0 \\ 0,2941 & 0 & 0 & 0,7059 & 0 \\ 0,6667 & 0 & 0 & 0 & 0,3333 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Na konci 4. měsíce bude průměrně provedeno 435,8 obnov.

Ad c) Limitní věková struktura systému je (277,8; 263,9; 236,1; 166,7; 55,5).

6. cvičení

Příklad 1.: (Soustruh v kovoobráběčské firmě)

Jistá malá kovoobráběčská firma vlastní soustruh. Soustruh se může nacházet v následujících stavech, které jsou sledovány s časovým krokem jeden týden: stav 1 – bude v provozu, stav 2 – bude v opravě, stav 3 – dá se k prodeji, stav 4 – dá se do šrotu.

Situace je vyjádřena pomocí homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4\}$, přičemž $X_n = j$, je-li soustruh v n -tém týdnu ve stavu j .

Máme dānu matici p̑echodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 & 0,05 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Nakreslete p̑echodovy diagram.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice p̑echodu.

Výsledek:

Trvalé stavy jsou 3 a 4, oba jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční. Stavy 1 a 2 jsou neabsorpční.

Kanonický tvar matice p̑echodu:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,85 & 0,1 \\ 0,05 & 0,05 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

Výsledek:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Interpretace prvků matice \mathbf{M} : je-li v daném týdnů soustruh v provozu, pak můžeme očekávat, že než se prodá nebo d do šrotu, bude v průměru 16 tydn v provozu a 2 tydn v opravě. Je-li soustruh v daném týdnů v opravě, pak můžeme očekávat, že než se prodá nebo d do šrotu, bude v průměru 14 tydn v provozu a 3 tydn v opravě.

d) Vypočtete matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

Výsledek:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0,9 & 0,1 \\ 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$$

Interpretace prvků matice \mathbf{B} : je-li soustruh v daném týdnu v provozu, pak s pravděpodobností 0,9 půjde do prodeje a s pravděpodobností 0,1 půjde do šrotu. Je-li soustruh v daném týdnu v opravě, pak s pravděpodobností 0,85 půjde do prodeje a s pravděpodobností 0,15 půjde do šrotu.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Znamená to, že když je soustruh v daném týdnu v provozu resp. v opravě, tak bude v průměru trvat 18 resp. 17 týdnů, než půjde do prodeje nebo do šrotu.

Příklad 2.: (Pracovníci ve firmě)

Jistá firma provedla dlouhodobý průzkum pohybu pracovníků v jednom odboru společnosti. V průzkumu byly specifikovány 4 stavy, a to stav 1 - propuštění ze zaměstnání, stav 2 - odchod z osobních důvodů, stav 3 - práce ve funkci referenta a stav 4 - práce v řídicí funkci. Jednotkovým časovým obdobím bylo jedno čtvrtletí. Známe matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,07 & 0,8 & 0,1 \\ 0,08 & 0,01 & 0,03 & 0,88 \end{pmatrix}$$

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Částečné výsledky:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5,71 & 4,76 \\ 1,43 & 9,52 \end{pmatrix}$$

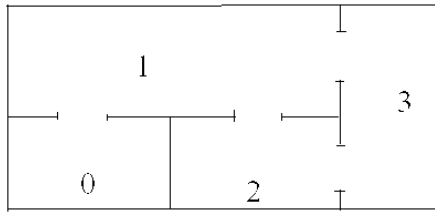
Interpretace 2. řádku matice \mathbf{M} : pracovník, který nastoupil do vedoucí funkce společnosti, bude pro společnost pracovat asi 2 roky a 9 měsíců, z toho 2 roky a 4,5 měsíce v řídicí funkci a 4,5 měsíce jako referent.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Interpretace 2. řádku matice \mathbf{B} : pracovník, který pracuje ve vedoucí funkci společnosti, s pravděpodobností 0,8 bude propuštěn a s pravděpodobností 0,2 odejde sám.

Příklad 3.: (Myš v bludišti)

Myš je vložena do bludiště tvaru:



V každém okamžiku si myš vybere náhodně jedny z dveří přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky. Předpokládáme, že v přihrádce 3 je potrava a myš tuto přihrádku neopustí, jakmile do ní jednou vstoupí. Pohyb myši v bludišti lze modelovat pomocí HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3\}$, přičemž $X_n = j$, když v okamžiku n je myš v j -té přihrádce. Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Částečné výsledky:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1,67 & 2 & 0,67 \\ 0,67 & 2 & 0,67 \\ 0,33 & 1 & 1,33 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice \mathbf{M} : Myš, která vychází z přihrádky 0, stráví v průměru 1,67 kroku v přihrádce 0 resp. 2 kroky v přihrádce 1 resp. 0,67 kroku v přihrádce 2 než dospěje k potravě.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Znamená to, že když myš vychází z kterékoli přihrádky, tak s pravděpodobností 1 dospěje k potravě.

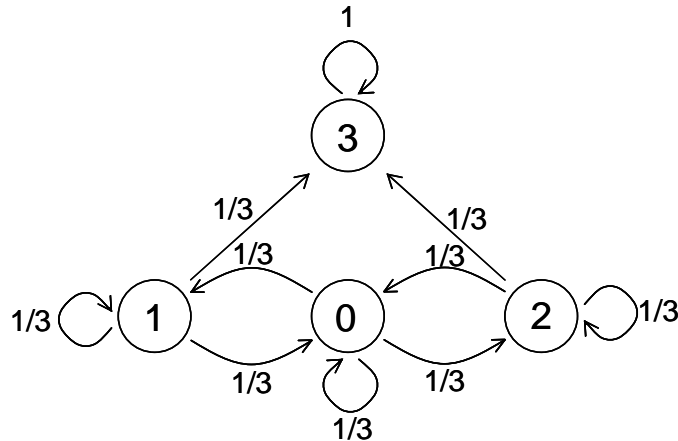
Příklad 4.: (Opilý námořník na mole)

Sledujeme opilého námořníka pohybujícího se po mole. Pokud je ve středu mola, s pravděpodobností $1/3$ po dalším kroku zůstane ve středu mola, s pravděpodobností $1/3$ se přiblíží k pravému okraji mola a s pravděpodobností $1/3$ se přiblíží k levému okraji mola. Pokud je námořník na pravém okraji mola, s pravděpodobností $1/3$ zůstane po dalším kroku na pravém okraji mola, s pravděpodobností $1/3$ se vrátí do středu mola a s pravděpodobností $1/3$ spadne do moře. Když je námořník na levém okraji mola, po dalším kroku na něm zůstane s pravděpodobností $1/3$, do středu mola se vrátí s pravděpodobností $1/3$ a s pravděpodobností $1/3$ spadne do moře. Pokud spadne námořník do moře, už se zpět na molo nedostane. Předpokládejme, že molo je nekonečně dlouhé, námořník tedy nemůže dojít na jeho konec. Pohyb opilého námořníka po mole lze modelovat homogenním markovským řetězcem $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3\}$, kde $X_n = 0$, pokud je námořník v n -tém kroku ve středu mola, $X_n = 1$, pokud je námořník v n -tém kroku na levém okraji mola, $X_n = 2$, pokud je námořník v n -tém kroku na pravém okraji mola, a $X_n = 3$, pokud se námořník v n -tém kroku topí (plave) v moři.

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Výsledek:

$$\text{ad a) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ad b) Řetězec má 3 přechodné stavy $J_P = \{0,1,2\}$, tedy: střed mola, pravý okraj mola a levý okraj mola a 1 trvalý stav $J_T = \{3\}$, moře.

ad c) Řetězec má jediný trvalý stav 3 (moře), který je absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad d) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}. \text{ Vidíme, že } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}. \text{ Dále}$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2,25 & 0,75 \\ 1,5 & 0,75 & 2,25 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Když je námořník na počátku ve středu mola, v průměru 3 kroky setrvá ve středu mola, než spadne do moře. Když je na počátku námořník ve středu mola, v průměru 1,5 kroku se bude pohybovat na levém okraji mola, než spadne do moře. Když je na počátku námořník ve středu mola, v průměru 1,5 kroku se bude pohybovat na pravém okraji mola, než spadne do moře. Pokud je námořník na počátku na levém okraji mola, tak v průměru 2,25 kroku setrvá na levém okraji mola, 1,5 kroku stráví ve středu mola a 0,75 kroku stráví na pravém okraji mola, než spadne do moře. Pokud je námořník na počátku na pravém okraji mola, tak v průměru 2,25 kroku setrvá na pravém okraji mola, 1,5 kroku stráví ve středu mola a 0,75 kroku stráví na levém okraji mola, než spadne do moře.

$$\text{ad e) } \mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Ať bude na začátku námořník ve středu mola, na levém okraji mola či na pravém okraji mola, s pravděpodobností 1 spadne do moře.

$$\text{ad f) } \mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Když bude na počátku námořník ve středu mola, v průměru za 6 kroků spadne do moře. Když bude na počátku na levém či pravém kraji mola, spadne do moře v průměru za 4,5 kroku.

7. cvičení

Příklad 1.: Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

Výsledek:

Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice **P**, **R** a vektor **v0**:

$P=[0.7 \ 0.3; 0.5 \ 0.5]$; $R=[100 \ 1000; 1000 \ 100]$; $v_0=[0 \ 0]^T$;

Vypočteme vektor $q = \text{diag}(P \cdot R')$;

Vypočteme vektor $v_1 = q + P \cdot v_0$

Vypočteme vektor $v_2 = q + P \cdot v_1$

Upozornění: Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce `vynos.m`, která pomocí rekurentní metody počítá:

- vektory středních hodnot celkových výnosů po jednom období až po n období,
 - znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.
- Dále je tam uložena funkce `vynosaprx.m`, která používá aproximační vzorec pro výpočet středních hodnot celkových výnosů po n období.

Příklad 2.: Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.

a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.

b) Pomocí rekurentního vzorce $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1)$ vypočítejte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, $n = 1, 2, \dots, 6$.

c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů $\mathbf{v}(n)$. Pro $n = 1, 2, \dots, 6$ porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

Výsledek:

ad a) Zavedeme HMR $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1\}$, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n -tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18,5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 20,5 \\ -18,25 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 21,75 \\ -17,625 \end{pmatrix}$$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.

Příklad 3.: Výrobce nealkoholických nápojů hodlá nabídnout síti potravinových obchodů nápoj D s novou příchuť. Je si vědom konkurence tří současných oblíbených typů nealkoholických nápojů A, B, C, ale věří, že zákazníci ocení příznivé složení a dobrou chuť nápoje D a budou jej preferovat, jakmile ho ochutnají. Na základě zkušeností s obdobnými produkty byla sestavena matice přechodu (časovým krokem je 1 týden):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,10 & 0,15 & 0,10 \\ 0,10 & 0,75 & 0,05 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,60 & 0,30 \\ 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Výnos nebo ztráta, které plynou z jednotlivých přechodů, jsou uvedeny v matici výnosů:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diskontní faktor je 0,5. Pro prvních 10 týdnů vypočítejte vektor středních hodnot celkových výnosů. Zjistěte také limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice **P**, **R**, vektor **v0** a diskontní faktor beta:

$P=[0.65 \ 0.1 \ 0.15 \ 0.1; 0.1 \ 0.75 \ 0.05 \ 0.1; 0.05 \ 0.05 \ 0.6 \ 0.3; 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.85];$

$R=[-2 \ -1 \ -1 \ 5; -1 \ -2 \ -1 \ 5; -1 \ -1 \ -2 \ 3; -3 \ -3 \ -3 \ 4];$

$v0=[0 \ 0 \ 0 \ 0]'$; beta=0.5;

Vypočteme vektor $q = \text{diag}(P \cdot R')$;

vektor $v1=q+\text{beta} \cdot P \cdot v0$

vektor $v2=q+\text{beta} \cdot P \cdot v1$

atd. až

vektor $v10=q+\text{beta} \cdot P \cdot v9$

Výsledek:

	v(0)	v(1)	v(2)	v(3)	v(4)	...	v(9)	v(10)
A	0	-1,050	-1,331	-1,360	-1,331	...	-1,255	-1,253
B	0	-1,150	-1,496	-1,574	-1,574	...	-1,525	-1,523
C	0	-0,400	-0,133	0,110	0,255	...	0,402	0,405
D	0	2,950	4,139	4,635	4,849	...	5,023	5,025

Výpočet limitního vektoru **v(n)**:

Zadáme jednotkovou matici $I = \text{eye}(4)$;

$\text{limitni_v}=(I-\text{beta} \cdot P)^{-1} \cdot q$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (-1,2506, -1,5216, 0,4069, 5,0276)$

Upozornění: Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce `diskont.m`, která počítá:

- vektory středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom období až po n obdobích,
- limitní vektor středních hodnot diskontovaných výnosů,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Dobrovolný samostatný úkol: Upravte funkci `vynos.m` tak, aby poskytovala ještě zisk řetězce,

$$\text{tj } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^m a_j q_j = g.$$

8. cvičení

Příklad 1.: Necht' HMŘ má matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte tvar matice přechodu po n krocích.

Výsledek: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

Příklad 2.: Výrobní linka se může nacházet v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Pokud se linka porouchá, pak již nemůže být opravena. Linka zůstává v 60 % případů v provozu. Předpokládejme, že na počátku sledování je linka v provozu. Pomocí vytvořujících funkcí najděte pravděpodobnost, že za n období bude linka v provozu.

Výsledek: Po n obdobích bude linka v provozu s pravděpodobností $0,6^n$.

9. cvičení

Příklad 1.: Je sledována výrobní linka, která se může nacházet buď v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Ve stavu 0 je možný provoz „bez kontroly agregátů“ (strategie 1) nebo „s kontrolou agregátů“ (strategie 2). Ve stavu 1 je možno rozlišit opravu „bez výměny agregátů“ (strategie 1) nebo „s výměnou agregátů“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:

$${}^1P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, {}^1R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, {}^2P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, {}^2R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.

Návod na řešení v MATLABu pomocí rekurentní metody:

Zadáme matice 1P , 1R , 2P , 2R :

$P1=[0.5 \ 0.5;0.2 \ 0.8]$; $R1=[2 \ 0;1 \ -5]$; $P2=[0.4 \ 0.6;0.4 \ 0.6]$; $R2=[3 \ 1;2 \ -2]$;

Vypočteme vektory $q1=\text{diag}(P1*R1')$; $q2=\text{diag}(P2*R2')$;

Vypočteme vektor $v1=\max(q1,q2)$

(Protože první složka vektoru $v1$ odpovídá první složce vektoru $q2$, znamená to, že když je linka v provozu, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.

Protože druhá složka vektoru $v1$ odpovídá druhé složce vektoru $q2$, znamená to, že když je linka v opravě, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

$$v2_provoz_s1 = q1(1)+P1(1,1)*v1(1)+P1(1,2)*v1(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v2_provoz_s2 = q2(1)+P2(1,1)*v1(1)+P2(1,2)*v1(2)$$

Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:

$$v2_oprava_s1 = q1(2)+P1(2,1)*v1(1)+P1(2,2)*v1(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v2_oprava_s2 = q2(2)+P2(2,1)*v1(1)+P2(2,2)*v1(2)$$

Vypočítáme vektor $v2$:

$$v2=[\max(v2_provoz_s1, v2_provoz_s2); \max(v2_oprava_s1, v2_oprava_s2)]$$

(Vidíme, že první složka vektoru $v2$ odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

$$v3_provoz_s1 = q1(1)+P1(1,1)*v2(1)+P1(1,2)*v2(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v3_provoz_s2 = q2(1)+P2(1,1)*v2(1)+P2(1,2)*v2(2)$$

Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:

$$v3_oprava_s1 = q1(2)+P1(2,1)*v2(1)+P1(2,2)*v2(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v3_oprava_s2 = q2(2)+P2(2,1)*v2(1)+P2(2,2)*v2(2)$$

Vypočítáme vektor $v3$:

$$v3=[\max(v3_provoz_s1, v3_provoz_s2); \max(v3_oprava_s1, v3_oprava_s2)]$$

(Vidíme, že první složka vektoru $v3$ odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Výsledek: V 1., 2. a 3. kroku je vektor optimálních strategií $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nepovinný úkol: Vytvořte v MATLABu funkci, která bude pomocí rekurentní metody hledat optimální strategii pro n prvních kroků .

Příklad 2.: Závod produkuje nějaký spotřební výrobek, u něhož lze rozeznat dva stavy: stav 0 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou, stav 1 – výrobek je neúspěšný, odbyt vážne a cena je nízká. Při 1. strategii vedení závodu neinvestuje ani do technického rozvoje ani do reklamy. Při této strategii je matice přechodu ${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ a matice výnosů

${}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Při 2. strategii vedení závodu zajistí technický rozvoj a investuje do reklamy.

Matice přechodu: ${}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$, matice výnosů: ${}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$. (Při 2. strategii se vyšší náklady promítnou do zisku, proto výnos ${}^2r_{00}$ musí být nižší než ${}^1r_{00}$, stejně tak ${}^2r_{11}$ musí být nižší než ${}^1r_{11}$.) Pomocí iterační metody je třeba zjistit, jakou strategii doporučit vedení závodu, aby střední hodnota celkového výnosu byla maximální.

Návod na řešení v MATLABu pomocí iterační metody:

Použijeme funkci howardn.m (vytvořil Jakub Buček) – je uloženy v ISu v Učebních materiálech ve složce programy.

Výsledek: Větší zisk přinese ta strategie, která zahrnuje náklady na technický rozvoj a reklamu výrobku.

Příklad 3.: U souboru dopravních letadel určitého typu byly získány informace, na jejichž základě bylo možno specifikovat z celé řady různých situací, v nichž se letadla nacházejí, následující 4 stavy: stav 1 – let, stav 2 – oprava, stav 3 – revize, stav 4 – čekání. Potřebné údaje pro odhad matice přechodu byly získány z dispečerských záznamů, které se vedou pro jednotlivá letadla. Dále bylo možné u stavů oprava, revize a čekání rozlišit různé alternativy.

Ve stavu oprava byly uvažovány alternativy „oprava bez dílčích agregátů“ a „oprava s výměnou agregátů“.

Rozhodujícím kritériem pro rozlišení alternativ ve stavu revize byla délka trvání revizí. Byly užity alternativy „krátkodobá revize“ a „dlouhodobá revize“.

V případě stavu čekání byly zvoleny alternativy „čekání bez zvláštní péče“ a „čekání v pohotovosti“.

Pravděpodobnosti přechodu u jednotlivých stavů i alternativ a údaje o ocenění přechodů, které byly získány z expertních odhadů, jsou uvedeny v tabulce:

Stav	alternativa	Pravděpodobnosti přechodu				Ocenění			
1	1	0,4	0	0,1	0,5	10	0	1	2
2	1	0,1	0,8	0	0,1	7	-3	0	-2
	2	0,15	0,7	0	0,15	8	-4	0	-3
3	1	0,15	0	0,8	0,05	6	0	-3	-2
	2	0,05	0	0,9	0,05	9	0	-2	-2
4	1	0,15	0	0,05	0,8	5	0	-2	-1
	2	0,3	0	0	0,7	4	0	0	-2

Pomocí funkce howardn.m (autor Jakub Buček) najděte vektor optimálních strategií.

10. cvičení

Příklad 1.: Částice se pohybuje po třech drahách 1, 2, 3, které jsou umístěny mezi odrazujícími stěnami. Na počátku sledování je částice na 2. dráze. Částice může změnit svoji dráhu v libovolném okamžiku. Je známo, že během krátkého časového intervalu o délce h (přitom $0 < h < 0,5$) částice může buď zůstat na dráze, na níž se právě nachází nebo může přeskóčit na sousední dráhu s pravděpodobností $2h$. Pravděpodobnosti přeskoků na další dráhy jsou zanedbatelně malé.

- a) Popište polohu částice na jednotlivých drahách pomocí HMŘ se spojitým časem.
- b) Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- c) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Výsledek: $\mathbf{a} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$

Příklad 2.: Uvažme provoz malé půjčovny aut, která má 4 auta. Doba mezi dvěma požadavky na zapůjčení auta je náhodná veličina, která má exponenciální rozložení se střední hodnotou polovina dne a doba výpůjčky je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou třetina dne.

- a) Popište počet vypůjčených aut pomocí HMŘ se spojitým časem.
- b) Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- c) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Nápověda: Pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se během intervalu $(t, t+h)$ zvětší o 1, je stále λh ($\lambda = 2$) a pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se v intervalu $(t, t+h)$ zmenší o 1, je úměrná počtu zapůjčených aut s koeficientem úměrnosti μ ($\mu = 3$).

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,5137 \quad 0,3425 \quad 0,1142 \quad 0,0254 \quad 0,0042)$

Příklad 3.: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem a množinou stavů

$J = \{0, 1, \dots, n, \dots, m\}$, kde pro čísla m a n platí $1 \leq n \leq m$. Intenzity přechodu jsou dány vztahy:

$$q_{j,j-1} = \begin{cases} j\mu & \text{pro } 0 < j < n \\ n\mu & \text{pro } n \leq j \leq m \end{cases}, \quad q_{j,j+1} = (m-j)\lambda \quad \text{pro } 0 \leq j \leq m.$$

Vypočtete stacionární rozložení tohoto řetězce pro $n = 2$, $m = 5$, $\lambda = 4$, $\mu = 12$.

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,2198 \quad 0,3664 \quad 0,2442 \quad 0,1221 \quad 0,0407 \quad 0,0068)$

Příklad 4.: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, množinou stavů $J = \{1, 2, 3\}$, maticí

intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a vektorem počátečních pravděpodobností

$\mathbf{p}(0) = (0, 1, 0)$. Pomocí Laplaceovy transformace najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Výsledek: $\mathbf{p}(t) = \frac{1}{5} (1 - e^{-5t}, 2 + 3e^{-5t}, 2 - 2e^{-5t})$

11. cvičení

Příklad 1.: Proud zákazníků směřujících do banky tvoří Poissonův proces s parametrem λ . Je známo, že během jedné hodiny přijdou do banky v průměru 2 zákazníci. Jaká je pravděpodobnost, že

a) přijdou právě 2 zákazníci během prvních 20 minut, kdy má banka otevřeno,

b) přijde aspoň jeden zákazník během prvních 20 minut?

Výsledek: ad a) 0,1141, ad b) 0,4866

Příklad 2.: Předpokládáme, že poruchy určité součástky tvoří Poissonův proces. V průměru připadá jedna porucha na 200 hodin provozu, tj. na 25 osmihodinových směn. Na skladě jsou dvě náhradní součástky. Po době odpovídající 60 směnám budou dodány další. Jaká je pravděpodobnost, že stroj nebude pro nedostatek náhradních součástek vyřazen z provozu do dodávky dalších náhradních součástek?

Výsledek: 0,5697

Příklad 3.: Předpokládáme, že na telefonní ústřednu přicházejí v určité denní době hovory s neměnnou intenzitou 3 hovory za 1 minutu.

a) Jaká je pravděpodobnost, že za 1 minutu dojde na ústřednu méně než 5 hovorů?

b) Určete střední hodnotu délky intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů.

c) Jaká je pravděpodobnost, že délka intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů je delší než 1 minuta?

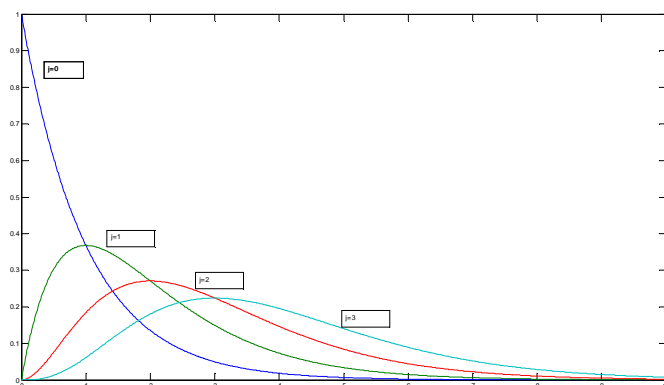
Výsledek: ad a) 0,8153, ad b) 20 s, ad c) 0,0498

Příklad 4.: Uvažme Poissonův proces s intenzitou λ , který popisuje náhodné a navzájem nezávislé příchody zákazníků do fronty. Již bylo odvozeno, že počet zákazníků ve frontě v okamžiku t se řídí rozložením $Po(\lambda t)$.

Předpokládejme, že $\lambda = 1$. Pro časový interval $(0,10)$ nakreslete do jednoho obrázku průběh pravděpodobností, že v okamžiku t bude ve frontě právě j zákazníků, $j = 0, 1, 2, 3$.

Řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=1;t=[0:0.1:10]';  
p0=exp(-lambda*t);  
p1=(lambda*t).*exp(-lambda*t);  
p2=(1/2)*(lambda*t).^2.*exp(-lambda*t);  
p3=(1/6)*(lambda*t).^3.*exp(-lambda*t);  
plot(t,p0,t,p1,t,p2,t,p3)
```



Simulace Poissonova procesu

Zadání:

V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

- Zjistěte celkovou dobu simulace.
- Vypočtěte průměrnou, maximální a minimální délku intervalu mezi vjezdy dvou aut.
- Vypočtěte směrodatnou odchylku délek intervalů.
- Porovnejte tvar histogramu délek intervalů (volte 5 třídicích intervalů) s tvarem hustoty exponenciálního rozložení s patřičným parametrem.
- Znáznorněte nasimulovaný Poissonův proces graficky.

Návod:

Zavedeme Poissonův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = j$, když v intervalu $(0, t)$ vjede do ulice právě j aut, $j = 0, 1, 2, \dots$. Parametr $\lambda = \frac{1}{8}$.

Pomocí funkce `exprnd` vygenerujeme 20 náhodných čísel z exponenciálního rozložení s parametrem 1/8:
`x=exprnd(8,20,1);`

Upozornění: Pokud bychom neměli k dispozici statistický toolbox MATLABu, postupujeme takto:

`r = unifrnd(0,1,20,1);`

Proměnnou r transformujeme vztahem $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-r)$:

`x = -8*log(1-r);`

V proměnné x jsou nyní uloženy délky intervalů mezi vjezdy aut.

Celková doba simulace:

`doba = sum(x)`

Průměrná délka intervalu:

`prumer = mean(x)`

Maximální délka intervalu:

`maximum = max(x)`

Minimální délka intervalu:

`minimum = min(x)`

Směrodatná odchylka délek intervalů:

`so = std(x)`

(Teoretická celková doba simulace by měla být $20 \cdot 8 = 160$ min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)

Histogram délek intervalů s pěti třídicími intervaly znázorníme příkazem `hist(x,5)`.

Znáznornění hustoty exponenciálního rozložení s parametrem 1/8:

`plot([0:0.01:maximum],exp-pdf([0:0.01:maximum],8))`

Znázornění nasimulovaného Poissonova procesu:
Do proměnné pocet uložíme celkový počet aut:
pocet = [1:20]';
Do proměnné t uložíme kumulované délky intervalů:
t = cumsum(x);
Pomocí funkce stairs znázorníme Poissonův proces:
stairs(t,pocet)

Celý postup můžeme zopakovat s větším počtem aut a sledovat, jak se zvyšujícím se počtem simulací se empirické charakteristiky procesu blíží teoretickým.

12. cvičení

Příklad 1.: Erlangův proces má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a parametry $\lambda = 2, \mu = 3$.

a) Napište matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Najděte stacionární rozložení a interpretujte ho.

Výsledek:

Ad b) Po odeznění vlivu počátečních podmínek bude proces asi 51,37 % celkové doby ve stavu 0, 34,25 % doby ve stavu 1, 11,42 % doby ve stavu 2, 2,54 % doby ve stavu 3 a 0,42 % doby ve stavu 4.

Příklad 2.: Benzínová stanice má dvě čerpadla. U každého čerpadla může čerpat benzín jen jedno auto. Když jsou obě čerpadla obsazena, další přijíždějící auta nečekají a odjíždějí. Průměrná doba čerpání benzínu je 2 min a průměrně přijíždí 40 aut za 1 h.

a) Kolik procent doby bude benzínová stanice nevyužitá?

b) S jakou pravděpodobností nebude přijíždějící auto obslouženo?

c) Jaká je střední hodnota počtu obsazených čerpadel?

Návod: Počet obsazených čerpadel modelujte Erlangovým procesem.

Výsledek:

Ad a) Benzínová stanice je nevyužitá asi po 31 % celkové doby.

Ad b) Přijíždějící auta nebudou obsloužena s pravděpodobností asi 0,28.

Ad c) Střední hodnota počtu obsazených čerpadel je asi 0,97.

Příklad 3.: Při sledování provozu telefonní ústředny bylo zjištěno, že za 1 min se vyskytne průměrně 5 požadavků na spojení a jeden hovor trvá průměrně 2 min. Kolik linek by minimálně měla mít tato TÚ, aby pravděpodobnost, že volající zastihne všechny linky obsazené, byla nanejvýš 0,5?

Návod: Počet obsazených linek modelujte Erlangovým procesem.

Výsledek: Minimální počet linek je 6.

Využití funkce Erlang.m

function [a]=Erlang(m,lambda,mi)

% funkce na vypocet stacionarniho rozlozeni Erlangova procesu

% syntaxe: [a]=Erlang(m,lambda,mi)

% vstupni parametry:

% m ... nejvyssi poradove cislo v mnozine stavu

% lambda ... intenzita vzniku

% lambda ... intenzita zaniku

% vystupni parametr

% a ... vektor stacionarnich pravdepodobnosti

V příkladu 2:

a=Erlang(2,2/3,1/2)

V bodě (a) nás zajímá 1. složka vektoru a, v bodě (b) 3. složka. Střední hodnotu v bodě (c) vypočteme jako $[0 \ 1 \ 2]*a$

V příkladu 3: Zde je lambda 5 a mi 0,5. Za m postupně dosazujeme 1,2,3,4,5,6 a sledujeme poslední složku vektoru a.

Využití funkce lpvz.m

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
```

```
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku
```

```
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zániku
```

```
% tau je konečný čas, k0 rozsah souboru v case t=0
```

```
% M je vektor středních hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
```

```
% S je vektor směrodatných odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
```

```
% P je pravděpodobnost zániku souboru v case t=0 az tau
```

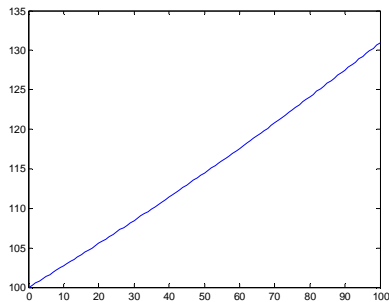
Praktická aplikace:

Nechť je dán lineární proces vzniku a zániku, v němž intenzita vzniku odpovídá roční míře porodnosti v ČSSR v r. 1983 ($\lambda = 0,0148$) a intenzita zániku odpovídá roční míře úmrtnosti v ČSSR v r. 1983 ($\mu = 0,0121$). Předpokládáme, že v čase $t = 0$ má soubor rozsah $k_0 = 100$.

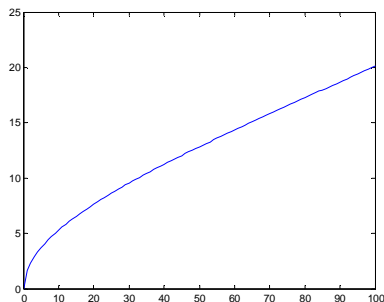
- Pro $t = 0, 1, 2, \dots, 100$ vypočítejte a graficky znázorněte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru.
- Pro $t = 0, 1, 2, \dots, 100$ vypočítejte a graficky znázorněte pravděpodobnost vyhynutí.

Výsledek:

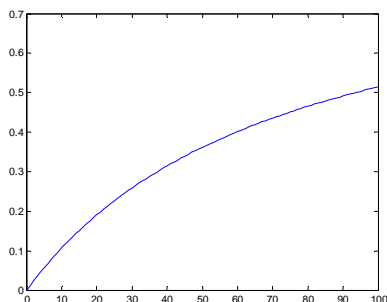
Graf závislosti střední hodnoty rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti směrodatné odchylky rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti pravděpodobnosti vyhynutí na čase



13. cvičení

Příklad 1.: Byl proveden průzkum úspěšnosti přijetí na jistou prestižní VŠ. Z průzkumu vyplynula následující zjištění:

Z uchazečů, kteří navštěvovali přípravný kurz, 60 % bylo přijato, 5 % se rozhodlo kurz opakovat a zkusit přijímací zkoušky příští rok, 15 % se rozhodlo na další přijímačky připravit jen samostudiem a 20 % snahu dostat se na tuto školu vzdalo.

Z uchazečů, kteří se na zkoušku připravovali samostudiem, 20 % bylo přijato, 50 % zůstává u samostudia, 20 % volí přípravný kurz a 10 % příští přijímací zkoušku již nechce absolvovat.

a) Modelujte situaci pomocí HMR s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4\}$, kde stav 1 znamená návštěvu přípravného kurzu, stav 2 samostudium, stav 3 přijetí a stav 4 konec snah o přijetí. Sestavte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

d) Vypočtěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí a interpretujte jeho prvky.

Výsledky:

$$\text{Ad a) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,15 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ad b) Řetězec má dva trvalé stavy, a to stavy 3 a 4, oba jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

$$\text{Ad c) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,7416 & 0,2584 \\ 0,6966 & 0,3034 \end{pmatrix}.$$

Bude-li uchazeč navštěvovat přípravný kurz, tak s pravděpodobností 0,7416 bude přijat a s pravděpodobností 0,2584 rezignuje na přijetí.

Bude-li se uchazeč připravovat samostudiem, tak s pravděpodobností 0,6966 bude přijat a s pravděpodobností 0,3034 rezignuje na přijetí.

$$\text{Ad d) } \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1,4607 \\ 2,5843 \end{pmatrix}.$$

Navštěvuje-li uchazeč v daném okamžiku přípravný kurz, tak v průměru za 1,5 roku bude přijat nebo snahu o přijetí vzdá.

Připravuje-li se uchazeč v daném okamžiku samostudiem, tak v průměru za 2,6 roku bude přijat nebo snahu o přijetí vzdá.

Příklad 2.: Uvažme systém, v němž je v provozu velké množství předmětů téže funkce, např. talíře v jídelně. Předpokládáme, že předměty pocházejí od tří různých výrobců (říkáme, že jsou tří různých typů) a že doby životnosti předmětů od různých výrobců jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $Ex(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$. Provádíme cyklickou záměnu typů podle schématu $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Zvolíme jedno místo v provozu a zavedeme HMR $\{X_t; t \in T\}$ se spojitým časem, kde $X_t = j$, když v okamžiku t je na tomto místě zařazen předmět typu j , $j = 1, 2, 3$.

Najděte matici intenzit přechodu a stanovte stacionární rozložení.

Výsledky:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad a_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad a_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}.$$

Příklad 3.: Necht' X je náhodná veličina se střední hodnotou $E(X) = \mu$ a rozptylem $D(X) = \sigma^2$. Necht' $T = \mathbb{R}$. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$. Najděte

- trend
- rozptyl
- autokovarianční funkci
- autokorelační funkci tohoto stochastického procesu. O čem svědčí vypočtená hodnota autokorelační funkce?
- Je tento proces slabě stacionární? Své rozhodnutí zdůvodněte.

Výsledky:

Ad a) $\mu(t) = t\mu$

Ad b) $\sigma(t)^2 = t^2\sigma^2$

Ad c) $\gamma_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 \sigma^2$

Ad d) $\rho_X(t_1, t_2) = 1$

Protože autokorelační funkce nabývá hodnoty 1, znamená to, že mezi libovolnými dvěma složkami stochastického procesu existuje úplná přímá lineární závislost.

Ad e) Daný proces není slabě stacionární, protože trend není konstantní, rozptyl není konečný a autokovarianční funkce není závislá pouze na rozdílu argumentů $t_1 - t_2$.

Příklad 4.: Provádíme posloupnost náhodných pokusů. V 1. pokusu nastane úspěch s pravděpodobností 0,5. Pokud byl pokus úspěšný, pak v následujícím pokusu nastane úspěch s pravděpodobností 0,7, v opačném případě nastane úspěch s pravděpodobností jen 0,6. Určete pravděpodobnost úspěchu n -tého pokusu.

Výsledek:

Hledaná pravděpodobnost je $\frac{2}{3} - \frac{1}{10^n \cdot 6}$.