



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přednášky

předmětu M5444 Markovské řetězce

Marie Budíková

2013

Poděkování

Tento učební text vznikl za přispění

Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR

prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost

v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě

(CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

1. Úvod do studia stochastických procesů

1.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme pojem **stochastického procesu**,

naučíme se rozlišovat stochastický proces

s **diskrétním časem** a **spojitým časem**

a stochastický proces

s **diskrétními stavy** a **spojitými stavy**,

budeme definovat **pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu**,

poznáme vlastnosti pravděpodobnostního rozložení stochastického procesu,

naučíme se klasifikovat stochastické procesy podle různých kritérií.

1.2. Definice: Definice stochastického procesu (SP)

Nechť (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor, \mathbb{R} množina reálných čísel, $T \neq \emptyset$ neprázdná množina (nejčastěji jí přisuzujeme význam času). Nechť zobrazení $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ má tyto dvě vlastnosti:

- $\forall t \in T$ je $X(.,t)$ náhodná veličina vzhledem k jevovému poli \mathcal{A} . Značí se X_t .
- $\forall \omega \in \Omega$ je $X(\omega,.)$ prvkem množiny všech reálných funkcí definovaných na T .

Zobrazení X s těmito dvěma vlastnostmi se nazývá **stochastický proces definovaný na T** . Značí se $\{X_t; t \in T\}$.

1.3. Definice: Definice složky SP, realizace SP a realizace složky SP příslušné možnému výsledku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

- Pro libovolné, ale pevně dané $t \in T$ se náhodná veličina $X(.,t) = X_t$ nazývá **t-tá složka stochastického procesu**.
- Pro libovolné, ale pevně dané $\omega \in \Omega$ se reálná funkce $X(\omega,.)$ **nazývá realizace stochastického procesu příslušná k možnému výsledku ω** .
- Pro libovolná, ale pevně daná $t \in T$ a $\omega \in \Omega$ se číslo $X(\omega,t)$ nazývá **realizace t-té složky stochastického procesu příslušná k možnému výsledku ω** .

1.4. Příklad: Vývoj hmotnosti novorozených dětí

Nechť Ω je množina novorozenců, ω novorozenec, $T = \langle 0, \infty \rangle$ časový interval počítaný od narození novorozence, t je časový okamžik. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, který popisuje průběh hmotnosti kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence.

- a) $X_t = X(.,t)$ je náhodná veličina udávající hmotnost kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence v okamžiku t (fixovaný okamžik, libovolný novorozenec).
- b) $X(\omega,.)$ je reálná funkce popisující průběh hmotnosti daného novorozence ω (libovolný okamžik, fixovaný novorozenec).
- c) $X(\omega,t)$ je číselná realizace náhodné veličiny X_t příslušná k možnému výsledku ω , tj. konkrétní hmotnost daného novorozence v daný časový okamžik (fixovaný okamžik, fixovaný novorozenec).

1.5. Definice: Definice časové řady a náhodné funkce

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

- a) Je-li množina T spočetná a lineárně uspořádaná, tj. $t_0 < t_1 < \dots$, jde o **stochastický proces s diskrétním časem** (tj. o **časovou řadu**).
- b) Je-li množina T interval, jde o **stochastický proces se spojitým časem** (tj. o **náhodnou funkci**).

1.6. Definice: Definice SP s diskrétními stavy a spojitými stavy

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

- a) Jestliže pro $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t diskrétní, jde o **stochastický proces s diskrétními stavy**.
- b) Jestliže pro $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t spojitá, jde o **stochastický proces se spojitými stavy**.

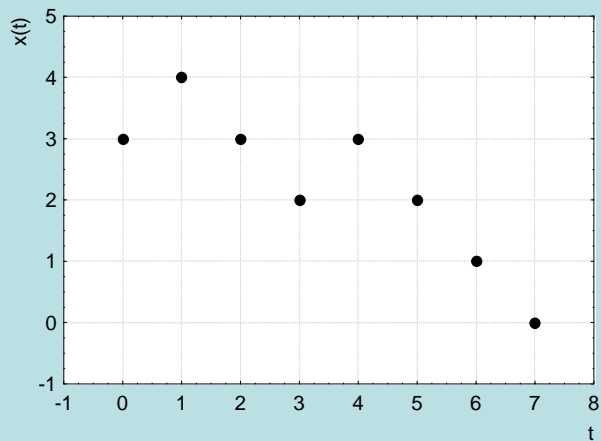
Množina všech hodnot, jichž může náhodná veličina X_t nabývat, se nazývá **množina stavů** a značí se J .

1.7. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskretním časem a diskretními stavy:

Dva hráči, označme je A a B, dali do hry dohromady vklad 5 Kč, z toho hráč A 3 Kč a hráč B 2 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhraje 1 Kč, když rub, prohraje 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů ruinován. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $t = 1, 2, \dots$ je pořadové číslo hodů mincí a $X_t = j$, když hráč A má po t-tém hodu j Kč, tedy $J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Např. pro posloupnost hodů $\{L, R, R, L, R, R, R\}$ je odpovídající realizace stochastického procesu $x(t) = \{4, 3, 2, 3, 2, 1, 0\}$.

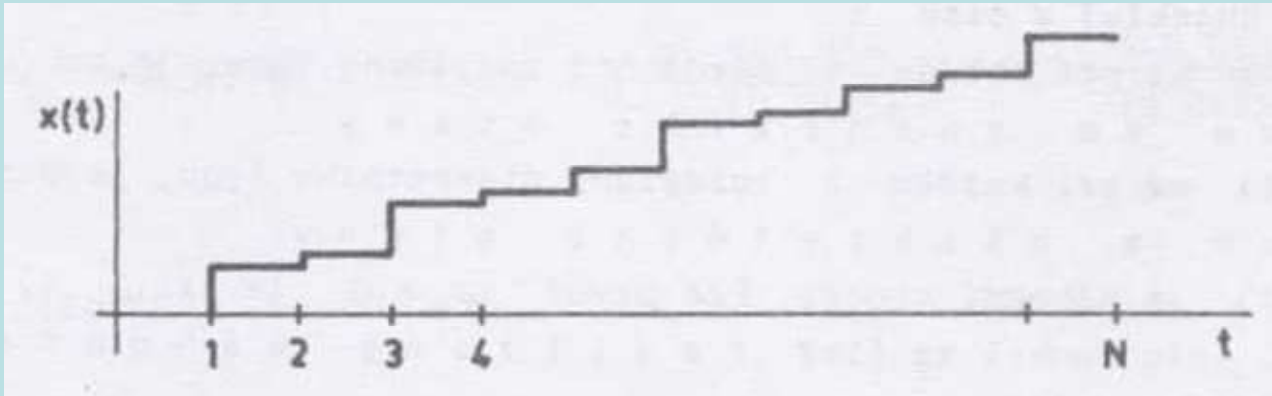
Grafické znázornění:



1.8. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskrétním časem a spojitými stavy:

Po určité výrobní operaci měříme velikost opotřebení obráběcího nože. Nůž se po N výrobních operacích vymění. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají opotřebení nože. Máme tedy stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{1, 2, \dots, N\}$ (t je pořadové číslo výrobní operace), $X_t \in J$, kde $J = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq a\}$, přičemž a je maximální opotřebení obráběcího nože.

Grafické znázornění:

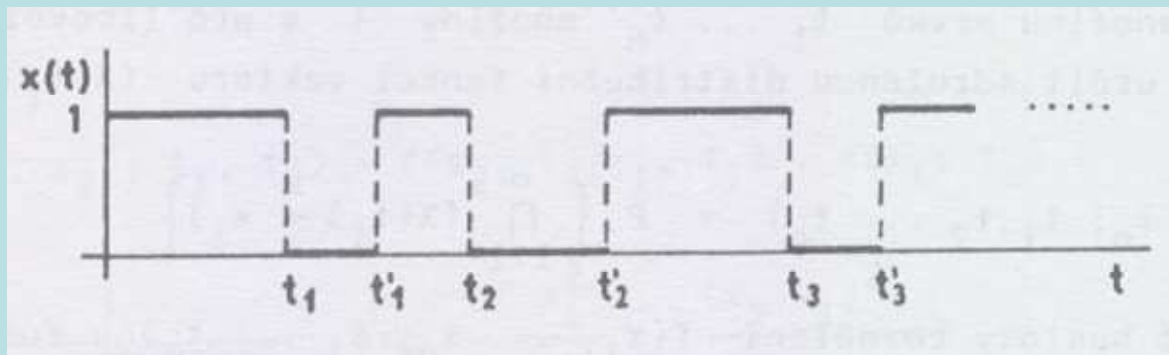


1.9. Příklad: Příklad stochastického procesu se spojitým časem a diskretními stavy:

Sledujeme určité zařízení, které může být v každém okamžiku buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 0).

Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{t; t \geq 0\}$, $X_t \in J$, $J = \{0, 1\}$.

Grafické znázornění: Označme t_1, t_2, \dots okamžiky poruch, t'_1, t'_2, \dots okamžiky oprav.



1.11. Definice: Definice pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces. Pro $\forall t \in T$ lze pravděpodobnostní rozložení náhodné veličiny X_t popsat distribuční funkcí: $\forall x \in \mathbb{R} : \Phi_t(x) = P(X_t \leq x)$.

(Tato distribuční funkce je obecně funkcí dvou proměnných t a x a popisuje jednorozměrné rozložení stochastického procesu. Nepodává však úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahuje informace o závislostech náhodných veličin X_t při různých hodnotách t . Úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu podává teprve systém distribučních funkcí.)

Nechť $(t_1, \dots, t_n) \in T$ je uspořádaná n -tice indexů, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je marginální vektor daného stochastického procesu. Pro $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ označme $\Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \leq x_n)$ marginální distribuční funkci náhodného vektoru $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Systém $F_T = \{\Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n); n = 1, 2, \dots, t_1, \dots, t_n \in T\}$ se nazývá **pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu** $\{X_t; t \in T\}$.

1.12. Věta: Věta o vlastnostech pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť F_T je pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$. Pak systém F_T má tyto vlastnosti:

a) F_T je symetrický systém distribučních funkcí, tj.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in T \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), \text{ kde } \{i_1, \dots, i_n\}$$

je libovolná permutace množiny indexů $\{1, \dots, n\}$.

b) F_T je konzistentní systém distribučních funkcí, tj. je-li $\{i, \dots, j\} \cup \{k, \dots, l\} = \{1, \dots, n\}$ disjunktní rozklad množiny

indexů $\{1, \dots, n\}$, pak
$$\Phi_{t_i \dots t_j}(x_i, \dots, x_j) = \lim_{\substack{x_k \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_1 \rightarrow \infty}} \Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Důkaz: plyne z vlastností distribuční funkce.

1.13. Věta: Kolmogorovova věta

Každý systém distribučních funkcí, který je symetrický a konzistentní, je pravděpodobnostním rozložením nějakého stochastického procesu.

1.14. Definice: Definice stochasticky ekvivalentních SP

Řekneme, že dva stochastické procesy jsou stochasticky ekvivalentní, mají-li stejné pravděpodobnostní rozložení.

1.15. Příklad: Odvození pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $\Psi(x)$ a $f(t)$ je reálná funkce taková, že

a) $f(t) > 0$ pro $\forall t \in T$

b) $f(t) < 0$ pro $\forall t \in T$.

Pro $\forall t \in T$ položme $X_t = f(t)X$. Odvoďte pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$.

Řešení:

ad a)

$$\begin{aligned}\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \leq x_n) = P(f(t_1)X \leq x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \leq x_n) = \\ &= P\left(X \leq \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \leq \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = \Psi\left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).\end{aligned}$$

ad b)

$$\begin{aligned}\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \leq x_n) = P(f(t_1)X \leq x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \leq x_n) = \\ &= P\left(X \geq \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \geq \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \geq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 1 - P\left(X \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = \\ &= 1 - \Psi\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).\end{aligned}$$

Je-li X spojitá náhodná veličina, pak $P\left(X = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 0$.

1.16. Poznámka: Dělení SP podle různých kritérií

a) Rozdělení stochastických procesů podle závislosti jejich pravděpodobnostního rozložení na čase

– **striktně stacionární procesy** (je pro ně charakteristická určitá stálost v čase): $\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n)$, kde $h > 0$

– **evoluční procesy** (mají výrazný časový trend)

b) Rozdělení stochastických procesů podle toho, zda k určení jejich pravděpodobnostního rozložení stačí znát pouze dvourozměrné distribuční funkce či nikoliv:

– **definitní procesy**

– **hereditní procesy**

c) Rozdělení definitních procesů podle toho, zda jejich pravděpodobnostní rozložení závisí pouze na rozdílu časových okamžiků, nikoliv na jejich umístění na časové ose

– **homogenní procesy**

– **nehomogenní procesy.**

2. Funkcionální charakteristiky stochastických procesů

2.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme **trend**, **rozptyl** a **směrodatnou odchylku** stochastického procesu,

autokovarianční a **autokorelační funkci** stochastického procesu,

poznáme vlastnosti těchto funkcionálních charakteristik,

budeme definovat **centrovaný** a **standardizovaný stochastický proces**

slabě stacionární stochastický proces.

2.2. Definice: Definice střední hodnoty a rozptylu SP, definice centrovaného a standardizovaného SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Jestliže pro $\forall t \in T$ existuje střední hodnota $E(X_t)$, pak zavedeme reálnou funkci $\mu(t)$ vztahem:

$$\forall t \in T : \mu(t) = E(X_t).$$

Tato funkce se nazývá **střední hodnota (trend) SP**. ($\mu(t)$ charakterizuje polohu realizací SP na časové ose.)

b) Jestliže pro $\forall t \in T$ existuje rozptyl $D(X_t)$, pak zavedeme reálnou funkci $\sigma^2(t)$ vztahem:

$$\forall t \in T : \sigma^2(t) = D(X_t).$$

Tato funkce se nazývá **rozptyl SP**. Funkce $\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)}$ se nazývá **směrodatná odchylka SP**.

($\sigma^2(t)$ charakterizuje variabilitu realizací stochastického procesu kolem trendu.)

c) Nechť stochastický proces má střední hodnotu $\mu(t)$ a rozptyl $\sigma^2(t)$, který je konečný a nenulový.

Transformovaný stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = X_t - \mu(t)$, se nazývá **centrovaný SP**.

Transformovaný stochastický proces $\{Z_t; t \in T\}$, kde $Z_t = \frac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$, se nazývá **standardizovaný SP**.

(Lze snadno ukázat, že centrovaný SP má nulovou střední hodnotu a rozptyl stejný jako původní SP. Standardizovaný SP má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.)

2.3. Příklad:

Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu $E(X) = 2$ a rozptyl $D(X) = 9$.

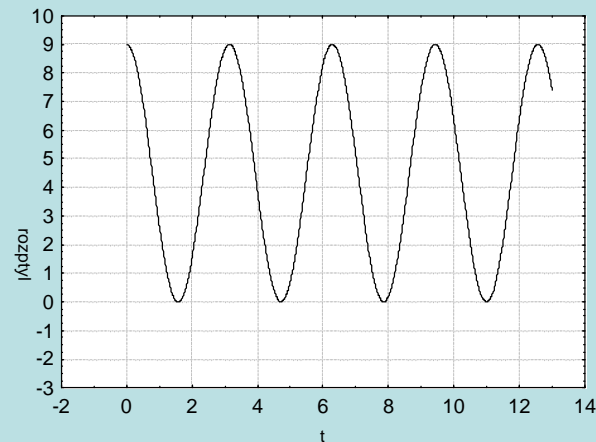
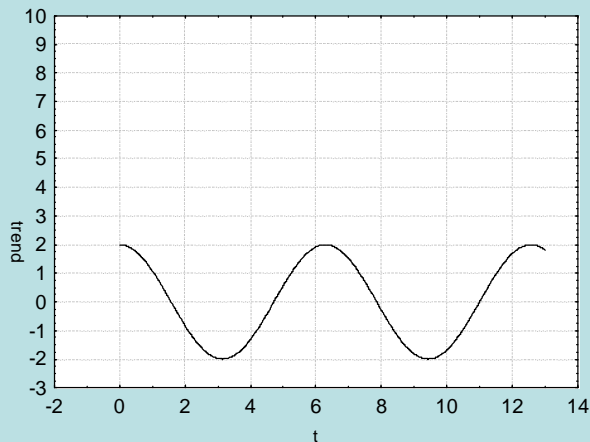
Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = X \cdot \cos \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(X \cdot \cos \omega t) = \cos \omega t \cdot E(X) = 2 \cos \omega t$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(X \cdot \cos \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(X) = 9 \cos^2 \omega t$$

Např. pro $\omega = 1$ dostaneme:



2.4. Poznámka: Další funkcionální charakteristiky stochastického procesu

Podobně jako u náhodných veličin lze pro stochastický proces zavést další momentové charakteristiky, např. šikmost a špičatost. Všechny tyto charakteristiky, které vycházejí ze znalosti jednorozměrného rozložení stochastického procesu, však nepostačují k popisu pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahují informace o závislostech mezi složkami stochastického procesu.

2.5. Definice: Definice autokovarianční a autokorelační funkce SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces. Předpokládáme, že pro $\forall t \in T$ existuje střední hodnota $E(X_t)$ a $E(X_t^2) < \infty$.

a) Reálnou funkci $\gamma(t_1, t_2)$ dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = E((X_{t_1} - \mu(t_1))(X_{t_2} - \mu(t_2)))$ nazveme **autokovarianční funkcí stochastického procesu**.

b) Reálnou funkci $\rho(t_1, t_2)$ dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T: \rho(t_1, t_2) = R(X_{t_1}, X_{t_2}) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$ nazveme **autokorelační funkcí stochastického procesu**.

(Autokovarianční funkce je zobecněním varianční matice náhodného vektoru a autokorelační funkce je zobecněním korelační matice náhodného vektoru. Tyto funkce obsahují informace o lineárních závislostech mezi složkami SP.)

2.6. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce SP

Pro autokovarianční funkci stochastického procesu platí:

$$\text{a) } \forall t \in T : \gamma(t, t) = \sigma^2(t)$$

$$\text{b) } \forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_2, t_1)$$

$$\text{c) } \forall t_1, t_2 \in T : |\gamma(t_1, t_2)| \leq \sigma(t_1)\sigma(t_2) \text{ (zobecněná Cauchyho – Schwarzova – Buňakovského nerovnost)}$$

Důkaz: Plyne z vlastností kovariance.

2.7. Příklad:

Najděte autokovarianční a autokorelační funkci SP z příkladu 2.3. V tomto příkladu byl SP zaveden vztahem $X_t = X \cdot \cos \omega t$, přičemž $E(X) = 2$, $D(X) = 9$

Řešení:

$$\begin{aligned} \gamma(t_1, t_2) &= C(X_{t_1}, X_{t_2}) = C(X \cdot \cos \omega t_1, X \cdot \cos \omega t_2) = \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \cdot C(X, X) = \\ &= \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \cdot D(X) = 9 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \end{aligned}$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{9 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2}{\sqrt{9 \cos^2 \omega t_1} \sqrt{9 \cos^2 \omega t_2}} = 1$$

2.8. Věta: Věta o střední hodnotě a autokovarianční funkci transformovaného SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces se střední hodnotou $\mu_X(t)$ a autokovarianční funkcí $\gamma_X(t_1, t_2)$. Nechť $f(t)$ je reálná funkce definovaná na T .

a) Zavedeme stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = X_t + f(t)$. Pak platí:

$$\forall t \in T: \mu_Y(t) = \mu_X(t) + f(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma_Y(t_1, t_2) = \gamma_X(t_1, t_2)$$

b) Zavedeme stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = f(t) X_t$. Pak platí:

$$\forall t \in T: \mu_Y(t) = f(t)\mu_X(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma_Y(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2)\gamma_X(t_1, t_2)$$

Důkaz: Plyne z vlastností střední hodnoty a kovariance.

2.9. Definice: Definice slabě stacionárního SP

Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ se nazývá **slabě stacionární**, jestliže platí:

- a) $\forall t \in T : \mu(t) = c$ (trend je konstantní)
- b) $\forall t \in T : \sigma^2(t) < \infty$ (rozptyl je konečný)
- c) $\forall t_1, t_2 \in T, \forall h > 0 : \gamma(t_1 + h, t_2 + h) = \gamma(t_1, t_2)$ (kovariance libovolných dvou složek SP závisí pouze na jejich vzdálenosti na časové ose a nikoliv na jejich umístění na časové ose)

2.10. Poznámka: Vztah mezi striktní a slabou stacionaritou SP, zavedení autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

- a) Je-li stochastický proces striktně stacionární, je i slabě stacionární.
- b) Je-li stochastický proces slabě stacionární, pak pro $\forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = \gamma(0, t_2 - t_1)$. Znamená to, že autokovarianční funkce závisí pouze na rozdílu argumentů $t_2 - t_1 =: h$. V tomto případě zavádíme funkci jedné proměnné, kterou značíme rovněž symbolem γ , vztahem $\forall h \in T : \gamma(h) = \gamma(0, h)$. Je to autokovarianční funkce slabě stacionárního SP.

2.11. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

Autokovarianční funkce slabě stacionárního stochastického procesu má tyto vlastnosti:

a) $\forall t \in T : \sigma^2(t) = \gamma(0) = \sigma^2$ (všechny složky SP mají týž rozptyl)

b) $\forall h > 0 : \gamma(h) = \gamma(-h)$ (autokovarianční funkce je sudá)

c) $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

Důkaz: Důkaz vlastností a) , b) je triviální.

Ad c) Uvažme centrovaný slabě stacionární SP $\{X_t; t \in T\}$ (tj. pro $\forall t \in T : \mu(t) = 0$). Pak

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = E(X_t^2) - [E(X_t)]^2 = E(X_t^2).$$

$$\text{Dále } \gamma(h) = \gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h}).$$

Počítáme

$$E\left([X_t \pm X_{t+h}]^2\right) = E(X_t^2) \pm 2E(X_t X_{t+h}) + E(X_{t+h}^2) = \sigma^2(t) \pm 2\gamma(h) + \sigma^2(t+h) = 2[\gamma(0) \pm \gamma(h)].$$

Protože $E\left([X_t \pm X_{t+h}]^2\right) \geq 0$, plyne odtud, že $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$.

2.12. Příklad:

Nechť Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny (tj. $E(Y) = 0, E(Z) = 0, D(Y) = 1, D(Z) = 1$), které jsou stochasticky nezávislé. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos \omega t \cdot E(Y) + \sin \omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(Y) + \sin^2 \omega t \cdot D(Z) = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstantní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit $\gamma(h) = \gamma(t, t+h)$. První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\begin{aligned} \gamma(t, t+h) &= C(X_t, X_{t+h}) = C(Y \cdot \cos t + Z \cdot \sin t, Y \cdot \cos(t+h) + Z \cdot \sin(t+h)) = \\ &= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Y, Y) + \sin t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Z, Y) + \cos t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Y, Z) + \\ &+ \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Z, Z) = \\ &= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot D(Y) + \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot D(Z) = \cos t \cdot \cos(t+h) + \sin t \cdot \sin(t+h) = \\ &= \cos(t - (t+h)) = \cos(-h) = \cos(h) = \gamma(h) \end{aligned}$$

2.13. Věta: Věta o vlastnostech autokorelační funkce slabě stacionárního SP

Pro autokorelační funkci slabě stacionárního SP platí:

$$\forall h \in T : \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Důkaz:

$$\forall t_1, t_2 \in T : \rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}. \text{ Je-li SP slabě stacionární, pak } \gamma(t_1, t_2) = \gamma(h), \sigma^2(t_1) = \sigma^2(t_2) = \gamma(0), \text{ tedy } \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

2.14. Příklad:

Nechť je dán SP $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodné veličiny X_{t_1}, X_{t_2}, \dots jsou stochasticky nezávislé a mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$. Určete střední hodnotu, rozptyl a autokorelační funkci tohoto SP.

Řešení: Protože náhodné veličiny $X_t, t \in T$ mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$, mají i stejnou střední hodnotu

$$E(X_t) = \mu \text{ a stejný rozptyl } D(X_t) = \sigma^2. \text{ Dále počítáme autokovarianční funkci } \gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}. \text{ Jedná}$$

se tedy o slabě stacionární SP. Nyní spočteme autokorelační funkci $\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Znamená to, že

neexistuje žádná závislost mezi realizacemi SP ve dvou různých okamžicích.

3. Markovské řetězce s diskretním časem

3.1. Definice: Definice markovského řetězce s diskretním časem

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a $J = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ nebo $J = \{0, 1, \dots, n\}$). Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, A) , jehož složky nabývají hodnot z množiny stavů J , se nazývá **markovský řetězec** (s diskretním časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J \exists n \in N_0 : P(X_n = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall n \in N_0 \forall j_0, j_1, \dots, j_n \in J : P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_0 = j_0) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$ za předpokladu, že $P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_0 = j_0) > 0$.

(markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých)

Vysvětlení: Nejčastější interpretací markovských řetězců je nějaká soustava, která se může nacházet ve stavech a_0, a_1, \dots

V průběhu času soustava mění svoje stavy. Tyto stavy pozorujeme v diskretních časových okamžicích $n = 0, 1, \dots$. Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j , když v okamžiku n je soustava ve stavu a_j . Markovská vlastnost znamená, že všechny dosavadní stavy soustavy mají vliv na budoucí stav pouze prostřednictvím stavu přítomného.

Příklady situací, které lze popsat markovským řetězcem

Nákupy pracích prášků

Zákazník má tři oblíbené druhy pracích prášků, označme je A, B, C. Pro jednoduchost předpokládáme, že změnu pracího prášku provádí pouze na konci měsíce.

Dynamiku nákupů pracích prášků můžeme popsat markovským řetězcem $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3\}$, kde $X_n = 1$ (resp. 2 resp. 3), když n-tý měsíc zákazník kupuje prášek A (resp. B resp. C).

Studium na střední škole

Student čtyřleté střední školy může:

- úspěšně ukončit ročník a postoupit do dalšího ročníku
- opakovat ročník
- zanechat studia.

Průběh studia lze popsat markovským řetězcem $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3,4,5,6\}$, kde

$X_n = 1$, když v roce n student studuje 1. ročník,

$X_n = 2$, když v roce n student studuje 2. ročník,

$X_n = 3$, když v roce n student studuje 3. ročník,

$X_n = 4$, když v roce n student studuje 4. ročník,

$X_n = 5$, když v roce n student úspěšně ukončil studium,

$X_n = 6$, když v roce n student zanechal studia.

Soustruh ve výrobní dílně

Ve výrobní dílně se nachází soustruh, který sledujeme s časovým krokem 1 týden. Soustruh může být

- v provozu
- v opravě
- určen k prodeji
- určen do šrotu.

Činnost soustruhu popíšeme markovským řetězcem $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3,4\}$, kde

$X_n = 1$, když v n-tém týdnu je soustruh v provozu,

$X_n = 2$, když v n-tém týdnu je soustruh v opravě,

$X_n = 3$, když v n-tém týdnu je soustruh určen k prodeji,

$X_n = 4$, když v n-tém týdnu je soustruh určen do šrotu.

Křížení jedince s hybridem

Máme populaci diploidních cizosprašných rostlin, v níž sledujeme gen se dvěma alelami a, A.

Má-li rostlina dvojici alel A, A, nazývá se dominantní.

Má-li rostlina dvojici alel a, a, nazývá se recesivní.

Má-li rostlina dvojici alel A, a (resp. a, A) nazývá se hybridní.

Z populace náhodně vybereme rostlinu, zkřížíme ji s hybridem a počkáme na potomstvo. V dalším kroku náhodně vybereme jedince z těchto potomků, opět ho zkřížíme s hybridem atd.

Takto popsaný proces množení rostlin lze popsat řetězcem $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3\}$, kde

$X_n = 1$, když po n-tém křížení vybereme dominantní rostlinu (tj. s dvojicí alel A, A),

$X_n = 2$, když po n-tém křížení vybereme recesivní rostlinu (tj. s dvojicí alel a, a),

$X_n = 3$, když po n-tém křížení vybereme hybridní rostlinu (tj. s dvojicí alel A, a resp. a, A).

3.2. Věta: Věta o simultánní pravděpodobnostní funkci markovského řetězce s diskretním časem

Je-li $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ markovský řetězec, pak platí:

$$P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \dots \wedge X_n = j_n) = P(X_0 = j_0)P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot \dots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

pokud $P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} = j_{n-1}) > 0$, = 0 jinak.

Důkaz:

Podle věty o násobení pravděpodobností a podle markovské vlastnosti dostáváme:

$$\begin{aligned} P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \dots \wedge X_n = j_n) &= \\ &= P(X_0 = j_0) \cdot P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot P(X_2 = j_2 / X_1 = j_1 \wedge X_0 = j_0) \cdot \dots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_0 = j_0) = \\ &= P(X_0 = j_0) \cdot P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot P(X_2 = j_2 / X_1 = j_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1}) \end{aligned}$$

Věta o násobení pravděpodobností:

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, A_1, A_2, \dots, A_n takové jevy, že $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Pak $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

Markovská vlastnost:

$$P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_0 = j_0) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

3.3. Příklad: Necht' Y_1, Y_2, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny

$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (jde o tzv. celočíselné náhodné veličiny). Položme $X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^n Y_i, n \geq 1$. Dokažte, že stochastický

proces $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec.

Řešení: Dokážeme, že levá strana v markovské vlastnosti se rovná pravé straně.

$$\text{Levá strana: } P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \dots \wedge X_0 = 0) = \left| P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right| = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \dots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_0 = 0)}.$$

Jevy zapsané pomocí náhodných veličin X_0, X_1, \dots, X_n se budeme snažit zapsat pomocí náhodných veličin Y_1, Y_2, \dots, Y_n , které jsou stochasticky nezávislé.

$X_0 = 0, X_1 = X_0 + Y_1 \Rightarrow Y_1 = X_1 - X_0, X_2 = X_1 + Y_2 \Rightarrow Y_2 = X_2 - X_1, \dots, X_n = X_{n-1} + Y_n \Rightarrow Y_n = X_n - X_{n-1}$, tedy

$$\{X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \dots \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_n = j_n - j_{n-1} \wedge Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge \dots \wedge Y_1 = j_1\}$$

Dále $\{X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \dots \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge \dots \wedge Y_1 = j_1\}$.

Po dosazení do levé strany:

$$\frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \dots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_0 = 0)} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(Y_1 = j_1)}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(Y_1 = j_1)} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$$

$$\text{Pravá strana: } P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1}) = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_{n-1} = j_{n-1})} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$$

Protože levá strana se rovná pravé straně, je daný stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec.

3.4. Příklad: Necht' Y_1, Y_2, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají rovnoměrné diskrétní rozložení na množině $G = \{-1, 1\}$ (tj. nabývají hodnot ± 1 s pravděpodobností $1/2$). Položme $X_0 = 0$ a zavedeme náhodnou veličinu

$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Tato náhodná veličina udává polohu částice na přímce, kterou částice zaujme po n krocích, když na počátku je

v bodě 0 a pohybuje se v obou možných směrech se stejnou pravděpodobností. Markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá **symetrická náhodná procházka na přímce**.

Náhodnou procházku lze simulovat v MATLABu pomocí funkce np:

```
function [poloha]=np(N)
```

```
%funkce na simulaci symetricke nahodne prochazky po primce
```

```
%syntaxe: poloha=np(N)
```

```
%vstupni parametry: N ... delka nahodne prochazky
```

```
%vystupni parametr: poloha ... vektor souradnic bodu, v nichz se castice nachazi v jednotlivych krocich
```

```
%funkce nakresli trajektorii nahodne prochazky
```

```
%funkce poskytne tabulku rozlozeni cetnosti souradnic castice na primce, v nichz se nahodna prochazka nachazi
```

```
NC=unidrnd(2,N,1);poloha(1)=0;
```

```
for i=2:N
```

```
    if NC(i)==1 poloha(i)=poloha(i-1)-1;
```

```
    else poloha(i)=poloha(i-1)+1;
```

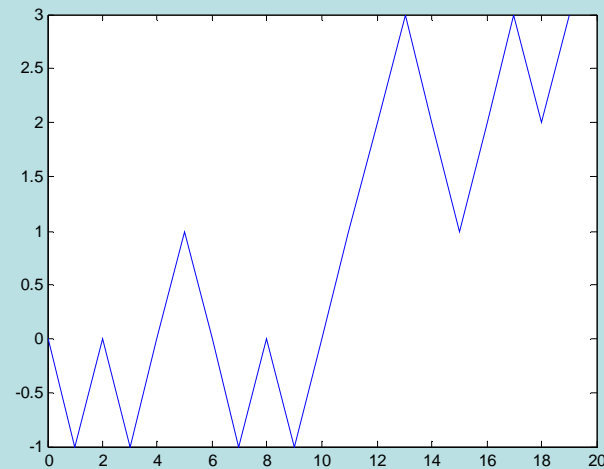
```
    end
```

```
end
```

```
t=[0:N-1];
```

```
plot(t,poloha)
```

```
tabulate(poloha)
```



3.5. Označení

Jev $\{X_n = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku n ve stavu j .

$P(X_n = j) = p_j(n)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku n .

$\mathbf{p}(n) = (\dots, p_j(n), \dots)$ – **vektor absolutních pravděpodobností**.

$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku n do stavu j v okamžiku $n+1$ (pravděpodobnost přechodu 1. řádu).

$\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(n, n+1) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ – **matice pravděpodobností přechodu 1. řádu**.

$P(X_{n+m} = j / X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku n do stavu j v okamžiku $n+m$ (pravděpodobnost přechodu m -tého řádu).

$\mathbf{P}(n, n+m) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(n, n+m) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ – **matice pravděpodobností přechodu m -tého řádu**.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j .

$\mathbf{p}(0) = (\dots, p_j(0), \dots)$ – **vektor počátečních pravděpodobností**.

3.6. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce s diskrétním časem

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je markovský řetězec. Pokud dále uvedené podmíněné pravděpodobnosti existují, platí pro

$\forall n, m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0 \forall i, j \in J$:

a) $P(X_{n+m} = j / X_n = i) \geq 0$, tj. $p_{ij}(n, n+m) \geq 0$

$$P(X_n = j / X_n = i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}, \text{ tj. } p_{ij}(n, n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}.$$

b) $\sum_{j \in J} P(X_{n+m} = j / X_n = i) = 1$, tj. $\sum_{j \in J} p_{ij}(n, n+m) = 1$.

(Přechod ze stavu i v okamžiku n do nějakého stavu j v okamžiku $n+m$ je jev s pravděpodobností 1.)

c) $P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_n = i) = \sum_{k \in J} P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)$, tj.

$$p_{ij}(n, n+m_1+m_2) = \sum_{k \in J} p_{ik}(n, n+m_1) p_{kj}(n+m_1, n+m_1+m_2)$$

(Chapmanovy – Kolmogorovovy rovnice)

d) $P(X_{n+m} = j) = \sum_{k \in J} P(X_n = k) P(X_{n+m} = j / X_n = k)$, tj. $p_j(n+m) = \sum_{k \in J} p_k(n) p_{kj}(n, n+m)$

(Zákon evoluce)

Důkaz:

ad a) $P(X_n = j / X_n = i) = \frac{P(X_n = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} \geq 0$, protože $P(X_n = j \wedge X_n = i) \geq 0$ a $P(X_n = i) > 0$ podle (a) z definice 3.1.

$$P(X_n = j / X_n = i) = \frac{P(X_n = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

ad b) $\sum_{j \in J} P(X_{n+m} = j / X_n = i) = P\left(\bigcup_{j \in J} \{X_{n+m} = j\} / X_n = i\right) = \frac{P(\Omega \cap \{X_n = i\})}{P(X_n = i)} = 1$

ad c)

$$\begin{aligned} P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_n = i) &= \frac{P(X_{n+m_1+m_2} = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \frac{P(\{X_{n+m_1+m_2} = j\} \cap \Omega \cap \{X_n = i\})}{P(X_n = i)} = \\ &= \frac{P\left(\{X_{n+m_1+m_2} = j\} \cap \bigcup_{k \in J} \{X_{n+m_1} = k\} \cap \{X_n = i\}\right)}{P(X_n = i)} = \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i \wedge X_{n+m_1} = k \wedge X_{n+m_1+m_2} = j)}{P(X_n = i)} = \\ &= \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i) P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i) P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)}{P(X_n = i)} \\ &= \sum_{k \in J} P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k) \end{aligned}$$

ad d)

$$P(X_{n+m} = j) = P(\Omega \cap \{X_{n+m} = j\}) = P\left(\bigcup_{k \in J} \{X_n = k\} \cap \{X_{n+m} = j\}\right) = \sum_{k \in J} P(X_n = k \wedge X_{n+m} = j) = \sum_{k \in J} P(X_n = k) P(X_{n+m} = j / X_n = k)$$

3.7. Poznámka: Zázpis vlastností markovského řetězce s diskretním časem v maticovém tvaru

a) $\mathbf{P}(n, n+m) \geq \mathbf{0}$, kde $\mathbf{0}$ je nulová matice, $\mathbf{P}(n, n) = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice.

b) $\mathbf{P}(n, n+m)\mathbf{e} = \mathbf{e}$, kde \mathbf{e} je sloupcový vektor ze samých jedniček.

c) $\mathbf{P}(n, n+m_1+m_2) = \mathbf{P}(n, n+m_1) \mathbf{P}(n+m_1, n+m_1+m_2)$.

d) $\mathbf{p}(n+m) = \mathbf{p}(n) \mathbf{P}(n, n+m)$.

3.8. Příklad:

Nechť je dán markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1\}$. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány

maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n je $\mathbf{p}(n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Jaká je pravděpodobnost,

že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1)?

Řešení: Podle zákona evoluce máme: $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n) \mathbf{P}(n, n+1) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}, \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{13}{24} \right) = (0,4583; 0,5417)$$

Po jednom kroku tedy bude řetězec ve stavu 0 s pravděpodobností 0,4583 a ve stavu 1 s pravděpodobností 0,5417.

3.9. Definice: Definice stochastického vektoru a stochastické matice

- a) Řádkový vektor s nejvýše spočetným počtem nezáporných složek, jejichž součet je roven 1, se nazývá **stochastický vektor**.
- b) Čtvercová matice, jejímž každým řádkem je stochastický vektor, se nazývá **stochastická matice**.
- c) Řekneme, že **markovský řetězec, stochastický vektor a stochastická matice jsou odpovídající dimenze**, když počet stavů markovského řetězce, počet složek stochastického vektoru a řád stochastické matice jsou stejné.

4. Homogenní markovské řetězce s diskretním časem

4.1. Definice: Definice homogenního markovského řetězce (s diskretním časem)

Řekneme, že markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J je **homogenní**, jestliže jeho pravděpodobnosti přechodu 1. řádu $p_{ij}(n, n+1)$ nezávisí na okamžiku n , tj. pro $\forall n \in N_0 \forall j \in J : P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}$. Matice pravděpodobností přechodu

1. řádu je pak rovna $\mathbf{P}(1)$ a značí se \mathbf{P} . Matice \mathbf{P} se nazývá matice přechodu homogenního markovského řetězce.

Vysvětlení homogenity: Pravděpodobnostní chování HMR se sice může s časem měnit, ale náhodný mechanismus, který tyto změny způsobuje – matice přechodu \mathbf{P} – je sám časově neproměnný.

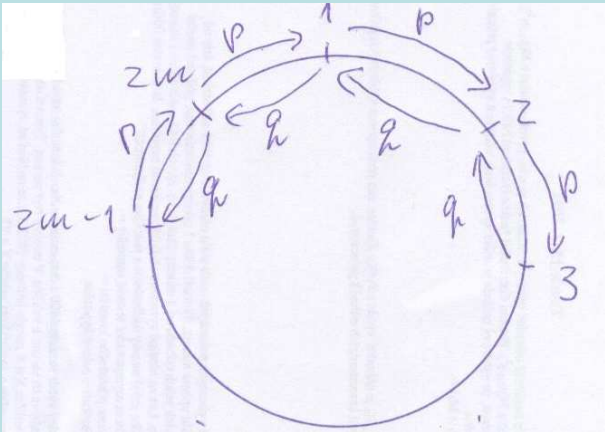
4.2. Příklad:

Na okružní trase je umístěno $2m$ bodů. Mezi nimi převáží auto náklady. Náklad se z každého bodu převáží do následujícího s pravděpodobností p nebo do předchozího s pravděpodobností $q = 1 - p$. Zavedeme stochastický proces $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je auto v bodě j , $j = 0, 1, \dots, 2m$. Ukažte, že tento stochastický proces je homogenní markovský řetězec a najděte jeho matici přechodu.

Řešení:

Daný stochastický proces je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Je to homogenní markovský řetězec, protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n .

Grafické znázornění situace:



Matrice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Věta:

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je stochastický proces s množinou stavů J , \mathbf{p} je stochastický vektor odpovídající dimenze a \mathbf{P} stochastická matice odpovídající dimenze. Pak $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ a maticí přechodu \mathbf{P} , právě když všechny marginální pravděpodobnostní funkce tohoto procesu jsou tvaru:

$$\forall n \in N_0 \forall j_0, j_1, \dots, j_n \in J: P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \dots \wedge X_n = j_n) = p_{j_0}(0) p_{j_0 j_1} \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1} j_n}.$$

Důkaz: Plyne z věty 3.2. a markovské vlastnosti.

4.4. Věta: Vlastnosti homogenního markovského řetězce v maticovém tvaru

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a maticí přechodu \mathbf{P} . Pak pro

$\forall n, m \in N_0, n \geq 1$ platí:

a) $\mathbf{P}(n, n+m) = \mathbf{P}(m) = \mathbf{P}^m$.

b) $\mathbf{p}(n, n+m) = \mathbf{p}(m) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^m$.

Důkaz:

ad a) Z Ch – K rovnice plyne: $\mathbf{P}(m) = \mathbf{P}(m-1+1) = \mathbf{P}(m-1)\mathbf{P} = \mathbf{P}(m-2+1)\mathbf{P} = \mathbf{P}(m-2)\mathbf{P}^2 = \dots = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^m$.

ad b) Ze zákona evoluce plyne: $\mathbf{p}(m) = \mathbf{p}(m-1+1) = \mathbf{p}(m-1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(m-2+1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(m-2)\mathbf{P}^2 = \dots = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^m$.

4.5. Poznámka: Z věty 4.4. plyne, že k určení pravděpodobnostního chování homogenního markovského řetězce stačí znát vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a matici přechodu \mathbf{P} .

4.6. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$, vektorem počátečních

pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1/2, 1/6, 1/3)$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Určete vektor absolutních pravděpodobností po

čtyřech krocích.

Řešení: $\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{31}{96}, \frac{31}{96}, \frac{34}{96}\right)$

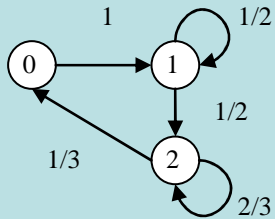
4.7. Poznámka: Přechodový diagram v rozvinutém a nerozvinutém tvaru.

Homogenní markovský řetězec lze graficky znázornit pomocí **přechodového diagramu**, a to buď v rozvinutém nebo nerozvinutém tvaru. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde vrcholy jsou stavy, orientované hrany se zakreslují pro kladné pravděpodobnosti přechodu za jeden krok a ohodnocení hran (váhy) jsou dána kladnými pravděpodobnostmi přechodu.

4.8. Příklad: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \text{ Nakreslete přechodový diagram.}$$

Řešení:

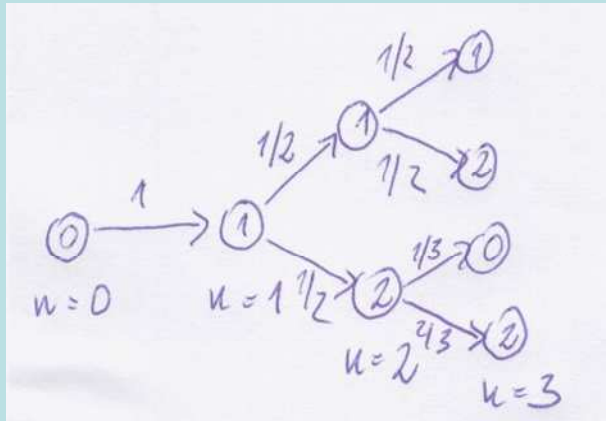


4.9. Poznámka: Pomocí přechodového diagramu v rozvinutém tvaru lze získat vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n . Postupuje se tak, že se pro každý možný stav v okamžiku n sečtou součiny vah těch hran, které v okamžiku n v daném stavu končí.

4.10. Příklad: Pro HMŘ z př. 4.8. vypočtěte pomocí přechodového diagramu v rozvinuté podobě vektor absolutních pravděpodobností pro $n = 3$.

Řešení:

Přechodový diagram v rozvinutém tvaru pro první tři kroky:



$$p_0(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$p_1(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_2(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12} \right)$$

4.11. Příklad: Model havarijního pojištění

Počet výskytů pojistné události v n -tém pojistném období je náhodná veličina Y_n , $n = 1, 2, \dots$. Předpokládáme, že náhodné veličiny Y_n jsou stochasticky nezávislé a všechny se řídí rozložením $Po(\lambda)$. Existují tři kategorie pojistného: 0 ... základní pojistné, 1 ... pojistné s bonusem 30%, 2 ... pojistné s bonusem 50%. V prvním pojistném období platí klient základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezeškoní průběh, je klient v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše. Pokud uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže. Při uplatnění dvou a více pojistných událostí je zařazen o dvě kategorie níže. Nechť náhodná veličina X_n značí kategorii pojistného v n -tém pojistném období. Lze snadno odvodit, že platí

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min\{X_n + 1, 2\} & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max\{X_n - 1, 0\} & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n \geq 2 \end{cases}$$

Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$ je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n , jde o homogenní markovský řetězec.

a) Najděte vektor počátečních pravděpodobností a matici přechodu. (Návod: využijte toho, že matice přechodu je stochastická matice.

b) Nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

Ad a) Vektor počátečních pravděpodobností: $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0)$.

Stanovíme jednotlivé prvky matice přechodu.

$$p_{00} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$p_{01} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = P(Y_n = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$p_{02} = 1 - (p_{00} + p_{01}) = 0$$

$$p_{10} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 0$$

$$p_{12} = P(X_{n+1} = 2 / X_n = 1) = P(Y_n = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

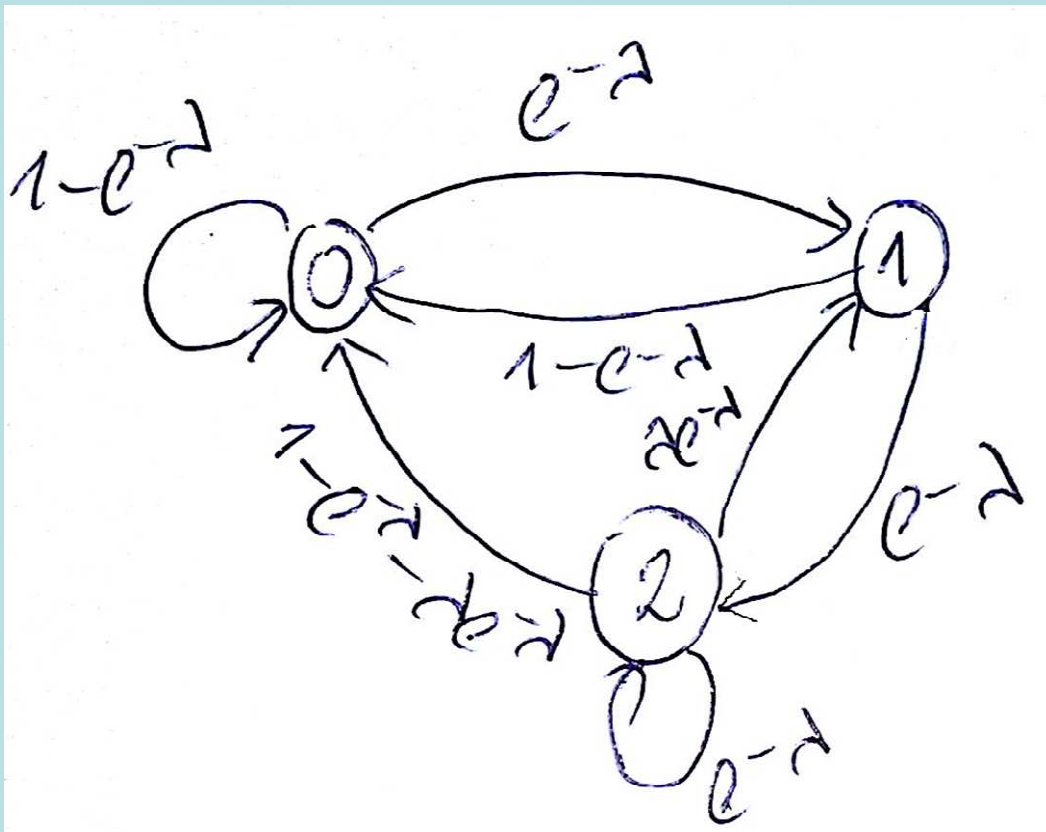
$$p_{20} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 2) = P(Y_n \geq 2) = 1 - P(Y_n = 0) - P(Y_n = 1) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

$$p_{21} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 2) = P(Y_n = 1) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$p_{22} = P(X_{n+1} = 2 / X_n = 2) = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



4.12. Příklad: Je dán je homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1\}$ a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}. \text{ Jaký je tvar této matice po } n \text{ krocích?}$$

Řešení: V teorii matice se dokazuje Perronův vzorec: $\mathbf{P}^n = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou vlastní čísla matice \mathbf{P} (protože \mathbf{P} je

stochastická matice, je aspoň jedno vlastní číslo rovno 1), \mathbf{w}_i je sloupcový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i

($\mathbf{P} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$) a \mathbf{v}_i je řádkový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i ($\mathbf{v}_i \mathbf{P} = \lambda_i \mathbf{v}_i$). Přitom vektory \mathbf{w}_i a \mathbf{v}_i jsou ortogonální.

Nejdříve vypočítáme vlastní čísla matice \mathbf{P} : $0 = |\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0,7 - \lambda & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,3\lambda + 0,3 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

Stanovíme sloupcové vlastní vektory: $\mathbf{P} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$

$$i = 1: \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, i = 2: \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} = 0,3 \cdot \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -4/7 \end{pmatrix}$$

Stanovíme řádkové vlastní vektory:

$$\mathbf{v}_i \mathbf{P} = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$i = 1: (v_{11}, v_{12}) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (v_{11}, v_{12}) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (4/7, 3/7), i = 2: (v_{21}, v_{22}) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = 0,3 \cdot (v_{21}, v_{22}) \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -1)$$

$$\text{Celkem: } \mathbf{P}^n = 1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (4/7, 3/7) + 0,3^n \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ -4/7 \end{pmatrix} \cdot (1, -1) = \dots = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix} + 0,3^n \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

4.13. Poznámka: Uvažme homogenní markovský řetězec, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2\}$, vektor počátečních

pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1/2, 1/3, 1/6)$ a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Ukážeme si, jak lze simulovat realizace tohoto

řetězce pomocí MATLABu.

Nejprve získáme počáteční stav řetězce:

Vygenerujeme náhodné číslo u z intervalu $(0,1)$. Interval $(0,1)$ rozdělíme na tři podintervaly podle kumulativních součtů vektoru počátečních pravděpodobností.

Je-li $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak $X(0)=0$. Je-li $u \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$, pak $X(0)=1$. Je-li $u \in \left[\frac{5}{6}, 1\right)$, pak $X(0)=2$.

Při simulaci dalších realizací $i = 1, 2, \dots, n$ postupujeme podle kumulativních součtů v jednotlivých řádcích matice \mathbf{P} :

Vždy vygenerujeme náhodné číslo u z intervalu $(0,1)$.

Je-li $X(i-1)=0 \wedge u \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, pak $X(i)=0$. Je-li $X(i-1)=0 \wedge u \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$, pak $X(i)=1$.

Je-li $X(i-1)=1 \wedge u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak $X(i)=0$. Je-li $X(i-1)=1 \wedge u \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, pak $X(i)=1$. Je-li $X(i-1)=1 \wedge u \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$, pak $X(i)=2$.

Je-li $X(i-1)=2 \wedge u \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, pak $X(i)=1$. Je-li $X(i-1)=2 \wedge u \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$, pak $X(i)=2$.

```

function realizace = simulovani_MR(P,p0,n)
% funkce generuje prvnich n realizaci MR
% syntaxe: [realizace]=simulace_MR(P,p0,n)
% vstupni parametry:
% P ... matice prechodu
% p0 ... vektor pocatecnich pravdepodobnosti (radkovy)
% n ... pocet kroku simulace
% vystupni parametr: realizace ... vektor realizaci MR

realizace = zeros(n, 1);
realizace(1) = randomQ(p0);

for i=2:n
    realizace(i) = randomQ(P(realizace(i-1), :));
end
plot(realizace, 'o');
axis([-1 n+2 0.8 size(p0,2)+0.2]);
end

function q = randomQ(prob)
% funkce vygeneruje nahodny stav q dle vektoru pravdepobnosti
% syntaxe: q=randomQ(prob)
% vstupni parametr:
% prob ... radkovy vektor pravdepodobnosti (napr. [0.5 0.4 0.1])
% vystupni parametr:
% q: nahodny index vstupniho vektoru
%napr. 1 s pravd. 0.5, 2 s pravd. 0.4, 3 s pravd. 0.1

r = random('unif', 0, 1);

leng = size(prob, 2);
sum = 0;
for q = 1:leng
    sum = sum+prob(q);
    if(r <= sum)
        break;
    end
end
end
end

```


5. Stacionární a limitní rozložení homogenních markovských řetězců

5.1. Definice: Definice stacionárního vektoru

Nechť \mathbf{a} je stochastický vektor a \mathbf{P} stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, pak vektor \mathbf{a} se nazývá **stacionární vektor matice \mathbf{P}** .

5.2. Příklad: Najděte stacionární vektor stochastické matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Řešení: $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, tj. $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$a_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{2a_3}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$6a_1 = 3a_1 + 2a_2$$

$$6a_2 = 3a_1 + a_2 + 2a_3$$

$$6a_3 = 3a_2 + 4a_3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{4}{19}, \frac{6}{19}, \frac{9}{19} \right) = (0,211; 0,316; 0,474)$$

5.3. Poznámka: Stacionární vektor lze v MATLABu získat pomocí funkce sv.m:

```
function [a]=sv(P)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=sv(P)
%vstupni parametr ... stochasticka matice P
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
%zjistime rad matice P:
n=size(P,1);
%vytvorime pomocnou jednotkovou matici:
I=eye(n);
%sestavime matici soustavy:
A=[[I-P]';ones(1,n)];
%vytvorime vektor pravých stran:
f=[zeros(n,1);1];
%vypocteme stacionární vektor
a=(A\f)';
```

5.4. Definice: Definice stacionárního rozložení homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Stochastický vektor \mathbf{a} , který je stacionárním vektorem matice \mathbf{P} , se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Vysvětlení: Stacionární rozložení popisuje chování HMR po dostatečně dlouhé době sledování, kdy již odezněl vliv počátečních podmínek. Složka a_j stacionárního rozložení udává podíl celkové doby, kterou řetězec stráví ve stavu j .

5.5. Věta: Věta o existenci limity vektoru absolutních pravděpodobností

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Jestliže pro $\forall i, j \in J$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = a_j$, pak existuje též $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = a_j$.

Důkaz: Ze zákona evoluce plyne: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in J} p_i(0) p_{ij}(n) = \sum_{i \in J} p_i(0) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \sum_{i \in J} p_i(0) a_j = a_j \sum_{i \in J} p_i(0) = a_j$.

5.6. Příklad:

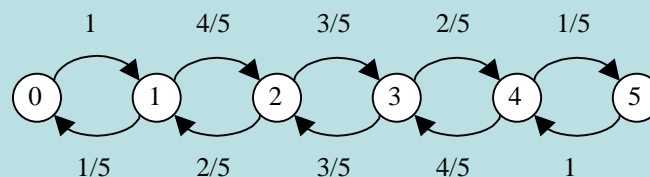
Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v černé urně. V každém kroku pokusu náhodně vybereme jednu kouli, přičemž výběr každé koule je stejně pravděpodobný a přemístíme ji do druhé urny.

Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, 5\}$, kde $X_n = j$, když po n -tém kroku bude v černé urně právě j koulí.

- Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.
- Vypočítejte střední hodnotu počtu koulí v černé urně po stabilizaci pokusu.

Řešení:

$$\text{ad a) } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{ad b) } (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{1}{5}a_1, a_1 = a_0 + \frac{2}{5}a_2, a_2 = \frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3, a_3 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_4, a_4 = \frac{2}{5}a_3 + a_5, a_5 = \frac{1}{5}a_4$$

$$a_1 = 5a_0, a_2 = 10a_0, a_3 = 10a_0, a_4 = 5a_0, a_5 = a_0$$

Protože $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, dostáváme $a_0 + 5a_0 + 10a_0 + 10a_0 + 5a_0 + a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{32}$

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32} \right)$

$$\text{ad c) } E(X) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2,5$$

Výsledek je ve shodě s očekáváním, že po dostatečně velkém počtu pokusů bude v obou urnách v průměru stejný počet koulí.

5.7. Poznámka: Pro daný homogenní markovský řetězec příslušné stacionární rozložení nemusí existovat.

5.8. Definice: Definice limitního rozložení a ergodického řetězce

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$. Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \bar{\mathbf{p}}$, pak vektor $\bar{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\bar{\mathbf{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$, pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

5.9. Poznámka: Interpretace ergodického řetězce

Ergodický řetězec lze interpretovat takto: podíl případů, kdy je řetězec ve stavu j , se blíží číslu a_j bez ohledu na to, jak proces začal.

5.10. Věta: Věta o vztahu mezi limitním a stacionárním rozložením u ergodického řetězce

Jestliže $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení \mathbf{a} , pak limitní rozložení $\bar{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení \mathbf{a} .

Důkaz: $\bar{\mathbf{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} = \bar{\mathbf{p}}\mathbf{P}$, tedy $\bar{\mathbf{p}}$ je stacionární vektor matice \mathbf{P} a ten značíme \mathbf{a} .

5.11. Věta: Markovova věta

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Jestliže existuje takové číslo $n \in N_0$, že matice \mathbf{P}^n má všechny prvky kladné (říkáme, že je **regulární**), pak

a) existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné

b) řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický

c) matice \mathbf{P}^n konverguje k limitní matici \mathbf{A} , jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru \mathbf{a} .

Důkaz: Nebudeme provádět.

5.12. Poznámka:

Matice \mathbf{P} je regulární, jestliže není rozložitelná na tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \text{ nebo } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

5.13. Příklad: Uvažme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech: v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním provozu výrobní linky se dospělo k následujícím závěrům: pokud se výrobní linka v jednom období nacházela v provozu, tak v následujícím období v 50% případů zůstala v provozu a v 50% případů se nacházela v opravě. Pokud se výrobní linka nacházela v jednom období v opravě, pak v dalším období zůstala v 75% případů v opravě a v 25% případů se vrátila do provozu.

a) Modelujte tuto situaci pomocí homogenního markovského řetězce.

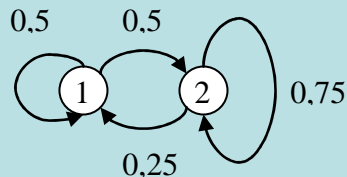
b) Najděte matici přechodu \mathbf{P} a nakreslete přechodový diagram.

c) Najděte limitní rozložení daného homogenního řetězce a interpretujte ho.

Řešení:

ad a) $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, $X_n = j$, když v n -tém období je linka ve stavu j , $j = 1, 2$.

ad b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$



ad c) $(a_1, a_2) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$, $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$, tedy $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$

Znamená to, že po dostatečně dlouhé době bude linka v provozu s pravděpodobností $1/3$ a v opravě s pravděpodobností $2/3$.

5.14. Příklad: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$,

kde $p + q = 1$. (Tento HMŘ se nazývá **náhodná procházka s odražujícími stěnami**.) Určete stacionární rozložení tohoto HMŘ.

Řešení: $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots) \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$

$$a_0 = qa_0 + qa_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1-q}{q}a_0 = \frac{p}{q}a_0$$

$$a_1 = pa_0 + qa_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\frac{p}{q}a_0 - pa_0}{q} = \frac{p(1-q)}{q^2}a_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 a_0$$

$$\text{Obecně: } a_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j a_0, j=1,2,\dots$$

a) Necht' $p < q$. Pak $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j a_0 = \frac{a_0}{1 - \frac{p}{q}} \Rightarrow a_0 = 1 - \frac{p}{q}$. Stacionární rozložení existuje a má tvar:

$$a_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \left(1 - \frac{p}{q}\right), j = 0, 1, 2, \dots \text{ Jedná se o geometrické rozložení s parametrem } \vartheta = 1 - \frac{p}{q}.$$

(Připomenutí geometrického rozložení:

Náhodná veličina X udává počet neúspěchů v posloupnosti opakovaných nezávislých pokusů předcházejících prvnímu úspěchu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ . Píšeme $X \sim \text{Ge}(\vartheta)$. Pravděpodobnostní funkce:

$$\pi(x) = \begin{cases} (1 - \vartheta)^x \vartheta & \text{pro } x = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

b) Necht' $p \geq q$. Pak $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$ a stacionární rozložení neexistuje.

5.15. Příklad: Na malém městě jsou dva obchody, označme je A a B. Zajímáme se o nákupy zákazníků v těchto obchodech. Uvažujeme přitom týdenní období a sledujeme, kde zákazníci v jednotlivých týdnech nakupovali a jak tyto obchody střídali. Pro jednoduchost předpokládejme, že v průběhu jednoho týdne navštěvovali buď pouze obchod A nebo obchod B. Jako součást marketingového výzkumu byla shromážděna data od 1000 zákazníků v časovém horizontu 10 týdnů. Na základě tohoto výzkumu bylo zjištěno, že 90% zákazníků nakupujících v obchodě A tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 10% přejde do obchodu B. Dále 80% zákazníků nakupujících v obchodě B tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 20% přejde do obchodu A.

a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ a najděte matici přechodu.

b) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě A, kolik jich bude po šesti týdnech?

c) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě B, kolik jich bude po šesti týdnech?

d) Jak velký je tržní podíl těchto dvou obchodů za předpokladu dostatečně velkého počtu období?

e) Obchod B provede reklamní kampaň, aby přilákal zákazníky nakupující v obchodě A. Došlo k určitému přesunu zájmu

nakupovat v obchodě B. Dle nového průzkumu byla stanovena matice přechodu $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$. Jak se nyní změnil tržní podíl

obchodů A a B za předpokladu dostatečně velkého počtu období?

Řešení:

Ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2\}$, přičemž $X_n = 1$, když zákazník v n -tém týdnu nakupuje v obchodě A a $X_n = 2$, když zákazník v n -tém týdnu nakupuje v obchodě B.

Podle textu úlohy sestavíme matici přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Ad b) Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (1,0)$, vektor absolutních pravděpodobností po 6 týdnech bude $\mathbf{p}(6) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^6 = (0,7059; 0,2941)$, tedy v obchodě A bude nakupovat 706 zákazníků.

Ad c) Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (0,1)$, vektor absolutních pravděpodobností po 6 týdnech bude $\mathbf{p}(6) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^6 = (0,5882; 0,4118)$, tedy v obchodě B bude nakupovat 412 zákazníků.

Ad d) Hledáme stacionární rozložení daného HMR. Toto rozložení bude existovat, protože již matice \mathbf{P} má všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$(a_0, a_1) = (a_0, a_1) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, a_0 + a_1 = 1$. Dostaneme složky stacionárního vektoru: $a_0 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$. Tržní podíl obchodu A tedy činí 66,7%, obchodu B 33,3%.

Ad e) V tomto případě hledáme stacionární rozložení pro HMR s maticí přechodu $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$.

Získáme vektor $\mathbf{a} = (0,5714; 0,4286)$, tedy tržní podíl obchodu A činí 57,1%, obchodu B 42,9%.

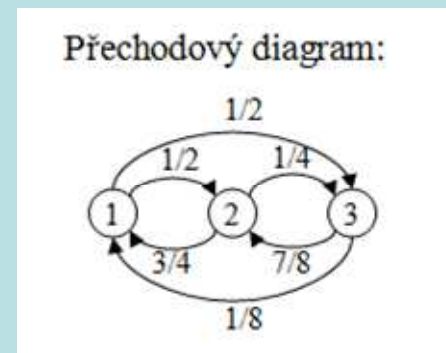
5.16. Příklad: Profesor má tři oblíbené otázky, z nichž jedna se objeví v každém testu, který profesor zadá. Studenti znají jeho zvyklosti dobře. Profesor nikdy nepoužívá téže otázky dvakrát po sobě. Když naposled užil otázky 1, hodí mincí a v případě, že padne líc, užije otázky 2. Jestliže užil otázky 2, hází dvěma mincemi a přejde k otázce 3, když na obou mincích padne líc. Jestliže užil otázky 3, hází třemi mincemi a přejde k otázce 1, když na všech třech padl líc.

- Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Za předpokladu, že uplynulo již dosti dlouhé období, zjistěte, kterou otázku použil profesor nejčastěji a v kolika procentech případů ji užil.

Řešení:

Ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, 3\}$, přičemž $X_n = j$, když v okamžiku n zadá profesor otázku číslo j , $j = 1, 2, 3$.

$$\text{Matice přechodu: } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$



Ad b) Hledáme stacionární vektor daného HMŘ.

$$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 7/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}, a_1 + a_2 + a_3 = 1. \text{ Řešením získáme stacionární vektor } \mathbf{a} = (5/15, 6/15, 4/15), \text{ tedy}$$

profesor zadává nejčastěji otázku číslo 2 a užil ji ve 40% případů.

5.17. Příklad: V příkladu 4.11. „Model havarijního pojištění“ jsme zjistili, že matice přechodu má tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

a) Odvodte stacionární rozložení daného HMŘ.

b) Za předpokladu, že základní výše pojistného je w Kč, vypočtete střední hodnotu výše pojistného, kterou pojištěnec zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu.

Řešení:

Ad a) Pro zjednodušení zavedeme označení $c_0 = e^{-\lambda}$, $c_1 = \lambda e^{-\lambda}$. Matice \mathbf{P} má pak tvar: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - c_0 & c_0 & 0 \\ 1 - c_0 & 0 & c_0 \\ 1 - c_0 - c_1 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$. Stacionární

rozložení existuje, protože již matice \mathbf{P}^2 má všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} 1 - c_0 & c_0 & 0 \\ 1 - c_0 & 0 & c_0 \\ 1 - c_0 - c_1 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}, a_0 + a_1 + a_2 = 1. \text{ Dostaneme složky stacionárního vektoru:}$$

$$a_0 = \frac{1 - c_0 - c_0 c_1}{1 - c_0 c_1} = \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}, a_1 = \frac{c_0(1 - c_0)}{1 - c_0 c_1} = \frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}, a_2 = \frac{c_0^2}{1 - c_0 c_1} = \frac{e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}$$

Ad b) Připomeneme, že stavy 0, 1, 2 znamenají, že 0 je základní pojistné, 1 je pojistné s bonusem 30%, 2 je pojistné s bonusem 50%.

$$\text{Střední hodnota výše pojistného tedy bude } w(a_0 + 0,7a_1 + 0,5a_2) = w \left[\frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}} + 0,7 \frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{1 - \lambda e^{-2\lambda}} + 0,5 \frac{e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}} \right].$$

6. Odhady absolutních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu v HMR

6.1. Poznámka: Předpokládejme, že HMR $\{X_n; n \in N_0\}$ s konečným počtem stavů k má vektor počátečních

pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0))$ a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$. Tyto pravděpodobnosti však

neznáme, můžeme je pouze odhadnout na základě dlouhodobého pozorování systému.

Podívejme se nejprve na odhad pravděpodobností přechodu. Pro $i, j = 1, \dots, k$ označme:

c_{ij} ... počet pozorování přechodu systému ze stavu i do stavu j

$c_i = \sum_{j=1}^k c_{ij}$... celkový počet přechodů, které začínaly ve stavu i (je-li i absorpční stav, $c_i = 0$)

Bodové odhady pravděpodobností přechodu získáme takto:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{c_{ij}}{c_i} & \text{pro } c_i \neq 0 \\ 0 & \text{pro } c_i = 0 \end{cases}.$$

Je-li splněna podmínka $\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})c_i \geq 5$ (tzv. podmínka dobré aproximace), můžeme spočítat též $100(1-\alpha)\%$ asymptotický interval spolehlivosti pro p_{ij} . Jeho meze jsou:

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})}{c_i}} u_{1-\alpha/2}.$$

Dodatek: Odvození mezí 100(1- α) % asymptotického intervalu spolehlivosti pro parametr alternativního rozložení

S náhodným výběrem rozsahu n z alternativního rozložení s parametrem ϑ se setkáváme v situaci, kdy provádíme n opakovaných nezávislých pokusů a v každém z těchto pokusů sledujeme nastoupení úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná a je rovna číslu ϑ . Náhodná veličina X_i nabude hodnoty 1, pokud v i -tém pokusu nastal úspěch a hodnoty 0, pokud v i -tém pokusu úspěch nenastal, $i = 1, 2, \dots, n$. Realizací náhodného výběru X_1, \dots, X_n je tedy posloupnost 0 a 1.

Při výpočtu mezí intervalu spolehlivosti využijeme **centrální limitní větu**:

Jsou-li náhodné veličiny X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^n X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme

$\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^n X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak

rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru.

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Označme M výběrový

průměr tohoto výběru. Pak statistika $U = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným

normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$.

Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika

$U = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením $N(0,1)$. Pokud čitatele i jmenovatele

podělíme n , dostaneme vyjádření: $U = \frac{\frac{Y_n}{n} - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$.

Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ .

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$,

konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \vartheta \in \Xi : 1-\alpha &\leq P \left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2} \right) = \\ &= P \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) \end{aligned}$$

V našem případě máme c pozorování, za úspěch považujeme, když se řetězec v okamžiku 0 realizuje ve stavu i . K tomu dojde s pravděpodobností $p_i(0)$. Těchto úspěchů nastává c_i . Relativní četnost úspěchu je tedy $\hat{p}_i(0) = \frac{c_i}{c}$, což je vlastně realizace m výběrového průměru M .

Dosadíme do vzorce pro meze $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro pravděpodobnost úspěchu:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

a dostaneme

$$d = \hat{p}_i(0) - \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1-\hat{p}_i(0)]}{c}} u_{1-\alpha/2}, h = \hat{p}_i(0) + \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1-\hat{p}_i(0)]}{c}} u_{1-\alpha/2}$$

Bodové odhady pravděpodobností přechodu získáme opět pomocí relativních četností takto:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{c_{ij}}{c_i} & \text{pro } c_i \neq 0 \\ 0 & \text{pro } c_i = 0 \end{cases}.$$

Je-li splněna podmínka dobré aproximace, $\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})c_i > 9$ můžeme spočítat též $100(1-\alpha)\%$ asymptotický interval spolehlivosti pro p_{ij} . Jeho meze jsou:

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})}{c_i}} u_{1-\alpha/2}.$$

6.2. Příklad: V jistém regionu bylo náhodně vybráno 2501 domácností. Bylo zjištěno, že k určitému datu 629 domácností nepředplácelo žádný deník, 750 předplácelo regionální deník a zbytek celostátní deník. Z těch domácností, které neměly žádné předplatné, hodlá v příštím měsíci 126 předplácet regionální a 63 celostátní deník. Z domácností, které předplácejí regionální deník, u něj v příštím měsíci zůstane 525 domácností a 75 začne předplácet celostátní deník. A nakonec z těch domácností, které předplácejí celostátní deník, 673 nezmění předplatné a 112 přejde na předplatné regionálního deníku. Modelujte situaci pomocí homogenního markovského řetězce a najděte bodové a intervalové odhady (se spolehlivostí 95 %) počátečních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, 3\}$, kde $X_n = 1$, když v n -tém měsíci náhodně vybraná domácnost nemá žádné předplatné, $X_n = 2$, když má předplatné na regionální deník a $X_n = 3$, když má předplatné na celostátní deník. Údaje obsažené v textu úlohy uspořádáme do tabulky:

	1	2	3	Σ
1	440	126	63	629
2	150	525	75	750
3	337	112	673	1122
Σ				2501

Nejprve odhadneme počáteční pravděpodobnosti podle vzorce $\hat{p}_i(0) = \frac{c_i}{c}, i = 1, 2, \dots, k$.

V našem případě $k = 3, c_1 = 629, c_2 = 750, c_3 = 1122, c = 2501$.

$$\hat{p}_1(0) = \frac{629}{2501} = 0,2515, \hat{p}_2(0) = \frac{750}{2501} = 0,2999, \hat{p}_3(0) = \frac{1122}{2501} = 0,4486$$

Odhad vektoru počátečních pravděpodobností: $\hat{p}(0) = (0,25; 0,3; 0,45)$.

Znamená to, že na počátku sledování 25 % domácností v daném regionu nemělo žádné předplatné, 30 % předplácelo regionální deník a 45 % celostátní deník.

Před výpočtem intervalů spolehlivosti ověříme, zda jsou splněny podmínky dobré aproximace $\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]c > 9$.

Přitom $\hat{p}_1(0) = \frac{629}{2501}$, $\hat{p}_2(0) = \frac{750}{2501}$, $\hat{p}_3(0) = \frac{1122}{2501}$, $c = 2501$. Tedy

$$i = 1: \frac{629}{2501} \left(1 - \frac{629}{2501}\right) 2501 = 469,$$

$$i = 2: \frac{750}{2501} \left(1 - \frac{750}{2501}\right) 2501 = 525,$$

$$i = 3: \frac{1122}{2501} \left(1 - \frac{1122}{2501}\right) 2501 = 619.$$

Vidíme, že podmínky jsou splněny. Pro $i = 1, 2, 3$ a $\alpha = 0,05$ dosadíme do vzorce $\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]}{c}} u_{1-\alpha/2}$.

Dostaneme meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$.

$p_1(0) \in (0,2345; 0,2685)$, $p_2(0) \in (0,2819; 0,3178)$, $p_3(0) \in (0,4291; 0,4681)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Interpretujeme např. 1. interval spolehlivosti: Ve sledovaném regionu je k danému datu s pravděpodobností 95 % 23,45 % až 26,85 % domácností, které nepředplácejí žádný deník.

Nyní se budeme věnovat odhadům pravděpodobností přechodu. Použijeme vzorec $\hat{p}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}, i, j = 1, \dots, k$.

Znovu uvedeme tabulku se zadanými údaji:

	1	2	3	Σ
1	440	126	63	629
2	150	525	75	750
3	337	112	673	1122
Σ				2501

V našem případě $k = 3$,

$$c_{11} = 440, c_{12} = 126, c_{13} = 63, c_1 = 629,$$

$$c_{21} = 150, c_{22} = 525, c_{23} = 75, c_2 = 750,$$

$$c_{31} = 337, c_{32} = 112, c_{33} = 673, c_3 = 1122.$$

$$\hat{p}_{11} = \frac{440}{629} = 0,6995, \hat{p}_{12} = \frac{126}{629} = 0,2003, \hat{p}_{13} = \frac{63}{629} = 0,1002$$

$$\hat{p}_{21} = \frac{150}{750} = 0,2, \hat{p}_{22} = \frac{525}{750} = 0,7, \hat{p}_{23} = \frac{75}{750} = 0,1$$

$$\hat{p}_{31} = \frac{337}{1122} = 0,3004, \hat{p}_{32} = \frac{112}{1122} = 0,0998, \hat{p}_{33} = \frac{673}{1122} = 0,5998$$

$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ Interpretujeme např. 1. řádek odhadnuté matice přechodu: Pokud v jednom měsíci náhodně vybraná domácnost neodebírala žádný deník, tak v příštím měsíci s pravděpodobností 0,7 opět nebude mít žádné předplatné, s pravděpodobností 0,2 si předplatí regionální deník a s pravděpodobností 0,1 celostátní deník.

Před výpočtem intervalů spolehlivosti ověříme splnění podmínek dobré aproximace $\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})c_i > 9$. Připomínáme, že

$$c_{11} = 440, c_{12} = 126, c_{13} = 63, c_1 = 629, \\ c_{21} = 150, c_{22} = 525, c_{23} = 75, c_2 = 750, \\ c_{31} = 337, c_{32} = 112, c_{33} = 673, c_3 = 1122.$$

$$i = 1: \frac{440}{629} \left(1 - \frac{440}{629}\right) 629 = 132, \frac{126}{629} \left(1 - \frac{126}{629}\right) 629 = 101, \frac{63}{629} \left(1 - \frac{63}{629}\right) 629 = 57$$

$$i = 2: \frac{150}{750} \left(1 - \frac{150}{750}\right) 750 = 120, \frac{525}{750} \left(1 - \frac{525}{750}\right) 750 = 158, \frac{75}{750} \left(1 - \frac{75}{750}\right) 750 = 68$$

$$i = 3: \frac{337}{1122} \left(1 - \frac{337}{1122}\right) 1122 = 236, \frac{112}{1122} \left(1 - \frac{112}{1122}\right) 1122 = 109, \frac{673}{1122} \left(1 - \frac{673}{1122}\right) 1122 = 269$$

Ve všech devíti případech jsou podmínky dobré aproximace splněny, můžeme tedy spočítat meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu. Pro $i, j = 1, 2, 3$ a $\alpha = 0,05$ dosadíme do vzorce

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})}{c_i}} u_{1-\alpha/2}.$$

$$p_{11} \in (0,6637; 0,7354), p_{12} \in (0,169; 0,2316), p_{13} \in (0,0767; 0,1236),$$

$$p_{21} \in (0,1714; 0,2286), p_{22} \in (0,6672; 0,7328), p_{23} \in (0,0785; 0,1215),$$

$$p_{31} \in (0,2735; 0,3272), p_{32} \in (0,0823; 0,1174), p_{33} \in (0,5712; 0,6285).$$

Interpretujeme např. interval spolehlivosti pro p_{11} : Pokud v jednom měsíci náhodně vybraná domácnost neodebírala žádný deník, tak v příštím měsíci můžeme se spolehlivostí 95 % zaručit, že s pravděpodobnostmi 66,37 % až 73,54 % opět nebude odebírat žádný deník.

7. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

7.1. Označení: Označení prvků matice \mathbf{P}^n

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J a s maticí přechodu \mathbf{P} . Prvky matice \mathbf{P}^n budeme značit $p_{ij}(n)$.

7.2. Definice: Definice doby prvního návratu do stavu j

Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ vychází ze stavu j , tj.

$P(X_0 = j) = 1$. Zavedeme množinu $T_j = \{n \geq 1; X_n = j\}$, která udává pořadí okamžiků návratů do stavu j . Náhodná veličina

$$\tau_j = \begin{cases} \min\{T_j\} & \text{pro } T_j \neq \emptyset \\ \infty & \text{pro } T_j = \emptyset \end{cases} \quad \text{se nazývá **doba prvního návratu do stavu } j \text{.}**$$

7.3. Označení: Označení pravděpodobnostní funkce doby prvního návratu do stavu j

Náhodná veličina τ_j je diskrétní náhodná veličina, nabývá hodnot $1, 2, 3, \dots$. Její pravděpodobnostní funkci označíme $f_j(n)$, tedy $f_j(n) = P(\tau_j = n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (pro $n = 0$ položíme $f_j(0) = 0$). Pravděpodobnost, že homogenní markovský řetězec

vycházející ze stavu j , se vůbec někdy vrátí do stavu j , je tedy $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$. Pravděpodobnost f_j lze vyjádřit jako $P(\tau_j < \infty)$.

7.4. Věta: Souvislost pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu s pravděpodobnostmi přechodu

Pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu do stavu j souvisí s pravděpodobnostmi přechodu takto:

$$\forall j \in J : p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^n p_{jj}(n-k) f_j(k), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtud lze $f_j(n)$ vyjádřit pomocí rekurentního vztahu:

$$\forall j \in J : p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k) + f_j(n) \Rightarrow f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k).$$

Důkaz:

Pro $k = 1, 2, 3, \dots$ označme jev $A_k = \{X_n = j \wedge \tau_j = k\}$. Jevy A_k jsou neslučitelné a $\bigcup_{k=1}^n A_k = \{X_n = j\}$. Počítáme

$$\begin{aligned} p_{jj}(n) &= P(X_n = j / X_0 = j) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k / X_0 = j\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k / X_0 = j) = \sum_{k=1}^n P(X_n = j \wedge \tau_j = k / X_0 = j) = \\ &= \sum_{k=1}^n P(\tau_j = k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge \tau_j = k) = \sum_{k=1}^n f_j(k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \dots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j) = \\ &= \sum_{k=1}^n f_j(k) P(X_n = j / X_k = j) = \sum_{k=1}^n f_j(k) p_{jj}(n-k) \end{aligned}$$

(Při úpravách byla použita rovnost $P(A \cap B / C) = P(B / C)P(A / B \cap C)$.)

7.5. Příklad: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$. Je-li vektor

počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$, vypočtěte pravděpodobnost, že doba 1. návratu do stavu 0 bude n , $n = 1, 2, 3, \dots$ a vypočtěte pravděpodobnost, že řetězec se vůbec někdy vrátí do stavu 0.

Řešení: Použijeme vzorec $f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k)f_j(k)$. Počítáme

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta & 1 - p_{00}(3) \\ 1 - p_{11}(3) & (1-\alpha)\alpha\beta + 2(1-\beta)\alpha\beta + (1-\beta)^3 \end{pmatrix}$$

$$f_0(1) = p_{00} = 1 - \alpha$$

$$f_0(2) = p_{00}(2) - p_{00}f_0(1) = (1-\alpha)^2 + \alpha\beta - (1-\alpha)^2 = \alpha\beta$$

$$f_0(3) = p_{00}(3) - p_{00}(2)f_0(1) - p_{00}f_0(2) = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - [(1-\alpha)^2 + \alpha\beta](1-\alpha) - (1-\alpha)\alpha\beta =$$

$$= (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - (1-\alpha)^3 - (1-\alpha)\alpha\beta - (1-\alpha)\alpha\beta = (1-\beta)\alpha\beta$$

$$\text{Obecně: } f_0(n) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{pro } n = 1 \\ (1 - \beta)^{n-2} \alpha \beta & \text{pro } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

7.6. Definice: Definice trvalého a přechodného stavu

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J .

- a) Stav $j \in J$ se nazývá **trvalý**, jestliže $f_j = 1$ (tj. $P(\tau_j < \infty)$). (Znamená to, že řetězec se do stavu j vrátí po konečně mnoha krocích.)
- b) Stav $j \in J$ se nazývá **přechodný**, jestliže $f_j < 1$ (tj. $P(\tau_j = \infty)$). (Znamená to, že řetězec se do stavu j s kladnou pravděpodobností nikdy nevrátí.)

Množina trvalých stavů se značí J_T , množina přechodných stavů J_P . Přitom $J_T \cup J_P = J, J_T \cap J_P = \emptyset$.

7.7. Věta: Kritérium pro klasifikaci trvalých a přechodných stavů.

- a) Stav j je trvalý, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$.
- b) Stav j je přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

7.8. Příklad: Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých hodů kostkou. Necht' náhodná veličina X_n udává maximální číslo dosažené v prvních n hodech, $n = 1, 2, 3, \dots$. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, \dots, 6\}$, kde $X_n = j$, když v prvních n hodech bylo nejvyšší dosažené číslo j . Najděte matici přechodu \mathbf{P} a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zajímají nás jen diagonální prvky matice \mathbf{P}^n , protože zkoumáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$.

$p_{11} = \frac{1}{6}, p_{11}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, p_{11}(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \dots$

$p_{22} = \frac{2}{6}, p_{22}(2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2, p_{22}(3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3, \dots$

Obecně: $p_{jj}(n) = \left(\frac{j}{6}\right)^n, j = 1, \dots, 6$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{6}\right)^n$ absolutně konverguje pro $j = 1, 2, 3, 4, 5$ a diverguje pro $j = 6$. Tedy $J_T = \{6\}, J_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7.9. Definice: Definice trvalého nenulového stavu a trvalého nulového stavu

Nechť $j \in J$ je trvalý stav homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$.

- a) Stav j se nazývá **trvalý nenulový**, jestliže existuje střední hodnota μ_j náhodné veličiny τ_j .
- b) Stav j se nazývá **trvalý nulový**, jestliže střední hodnota náhodné veličiny τ_j neexistuje.

7.10. Důsledek: Kritérium pro klasifikaci trvalých nenulových stavů a trvalých nulových stavů

Stav j je trvalý nenulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ absolutně konverguje.

Stav j je trvalý nulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ diverguje.

7.11. Poznámka: Lze ukázat, že HMŘ s konečnou množinou stavů nemůže mít trvalé nulové stavy.

7.12. Definice: Definice periodického stavu, neperiodického stavu, ergodického stavu

Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro něž $p_{jj}(n) > 0$.

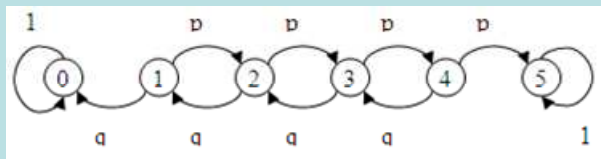
Je-li $d_j > 1$, pak řekneme, že stav j je **periodický** s periodou d_j .

Je-li $d_j = 1$, pak řekneme, že stav j je **neperiodický**.

Trvalý nenulový neperiodický stav se nazývá **ergodický** stav.

7.13. Příklad: Na úsečce délky 5 jsou vyznačeny body 0, 1, ..., 5. V bodě 3 se nachází kulička. Kulička koná náhodnou procházku po úsečce tak, že s pravděpodobností p se posune o jednotku napravo a s pravděpodobností $q = 1 - p$ se posune o jednotku nalevo. Dosáhne-li bodu 0 nebo bodu 5, setrvává tam. Popište proces pomocí homogenního markovského řetězce a klasifikujte stavy na periodické a neperiodické.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je kulička v bodě j .



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{00}(n) = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ stav 0 je neperiodický.
 $p_{55}(n) = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ stav 5 je neperiodický.
 $p_{11}(1) = 0, p_{11}(2) = pq, p_{11}(3) = 0, p_{11}(4) = pqp, \dots$ Největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... je 2, tedy stav 1 je periodický s periodou 2. Stejně to dopadne se stavy 2, 3, 4.

7.14. Věta: Výpočet střední hodnoty doby 1. návratu do ergodického stavu a trvalého nenulového periodického stavu

a) Necht' $j \in J$ je trvalý nenulový neperiodický stav (tj. ergodický stav). Pak $\mu_j = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(n)}$.

b) Necht' $j \in J$ je trvalý nenulový periodický stav s periodou d_j . Pak $\mu_j = \frac{d_j}{\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(nd_j)}$.

7.15. Příklad: Necht' je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$ a maticí

přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vypočtěte střední hodnoty dob 1. návratů do stavů 0, 1, 2.

Řešení: Jelikož matice \mathbf{P} je regulární matice, bude matice \mathbf{P}^n konvergovat k limitní matici, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru \mathbf{a} matice \mathbf{P} .

$$\left. \begin{array}{l} (a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_0 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{6} \\ a_1 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_2 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} \end{array} \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = \frac{6}{25} \\ a_1 = \frac{10}{25} \\ a_2 = \frac{9}{25} \end{array} \quad \bar{\mathbf{P}} = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25} \right), \quad \boldsymbol{\mu} = \left(\frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9} \right)$$

Vychází-li řetězec např. ze stavu 1, tak v průměru po 2,5 krocích se tam vrátí.

7.16. Systém bonus – malus v pojišťovnictví

Tento systém se používá v havarijním pojištění. Má určitý počet tříd výše pojistného (tzv. **bonusových tříd**), do nichž je klient zařazován podle počtu uplatnění pojistných událostí v pojistném období.

Bonusová třída (a tím i výše pojistného) pro následující období se určí

- podle bonusové třídy klienta v daném období
- podle počtu uplatnění pojistných událostí v daném období.

Předpokládáme, že existuje k bonusových tříd, přičemž na počátku smluvního vztahu s pojišťovnou je klient zařazen do třídy 0 a platí základní pojistné, tj. 100 %. V j -té bonusové třídě platí klient pojistné c_j , přičemž $c_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Tedy vektor $\mathbf{c} = (1, c_1, \dots, c_k)$ udává výši pojistného (jako část základu) pro všechny bonusové třídy.

Zavedeme náhodnou veličinu X_n , která značí bonusovou třídu klienta v n -tém pojistném období. Pak stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, k\}$ je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí na pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých a je to homogenní řetězec, protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na časovém okamžiku n .

Počet výskytů pojistné události v n -tém pojistném období je náhodná veličina Y_n , $n = 1, 2, \dots$

Předpokládáme, že náhodné veličiny Y_n jsou stochasticky nezávislé a všechny se řídí

rozložením $Po(\lambda)$, tedy $P(Y_n = y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$, $y = 0, 1, 2, \dots$

Model I

V tomto modelu existují 4 bonusové třídy, tj. $J = \{0,1,\dots,4\}$ a vektor výše pojistného je $\mathbf{c} = (1 \ 0,9 \ 0,8 \ 0,7 \ 0,6)$.

Jestliže v pojistném období klient neuplatní žádnou pojistnou událost, je v dalším období zařazen do 4. bonusové třídy, kde platí pojistné 60 % základu.

Pokud však klient uplatní aspoň jednu pojistnou událost, je v dalším období zařazen o třídu níže, je-li to možné. Označíme-li Y_n počet pojistných událostí v n-tém pojistném období, pak

$$X_{n+1} = \begin{cases} 4 & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max\{X_n - 1, 0\} & \text{pro } Y_n \geq 1 \end{cases}$$

Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Stanovíme jednotlivé prvky matice přechodu.

$$p_{00} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0, p_{04} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda},$$

$$p_{10} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{11} = p_{12} = p_{13} = 0, p_{14} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda},$$

$$p_{20} = 0, p_{21} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{22} = p_{23} = 0, p_{24} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda},$$

$$p_{30} = p_{31} = 0, p_{32} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{33} = 0, p_{34} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda},$$

$$p_{40} = p_{41} = p_{42} = 0, p_{43} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{44} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}.$$

Dostáváme matici přechodu \mathbf{P} ve tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 1 - e^{-\lambda} & 0 & 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

V modelu I odvodíme stacionární rozložení. Stacionární rozložení existuje, protože již matice \mathbf{P}^4 má všechny prvky kladné. Pro jednoduchost označme $b_0 = e^{-\lambda}$, $b_1 = 1 - e^{-\lambda}$.

Řešíme systém rovnic

$$(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4) \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=0}^4 a_j = 1.$$

Řešením tohoto systému dostaneme:

$$a_0 = b_1^4 = (1 - e^{-\lambda})^4,$$

$$a_1 = b_1^3(1 - b_1) = (1 - e^{-\lambda})^3 e^{-\lambda},$$

$$a_2 = b_1^2(1 - b_1) = (1 - e^{-\lambda})^2 e^{-\lambda},$$

$$a_3 = b_1(1 - b_1) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda},$$

$$a_4 = 1 - b_1 = e^{-\lambda}.$$

Je-li základní výše pojistného w , pak střední hodnota výše pojistného, kterou klient zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu, je $w(a_0 + 0,9a_1 + 0,8a_2 + 0,7a_3 + 0,6a_4)$.

Model II

V tomto modelu existují 2 bonusové třídy, tj. $J = \{0,1,2\}$ a vektor výše pojistného je $\mathbf{c} = (1 \ 0,7 \ 0,5)$.

Má-li pojistné období bezeškodní průběh, je klient v dalším období zařazen o třídu výš, je-li to možné.

Pokud klient uplatní jeden pojistný nárok, je v dalším období zařazen o třídu níž, je-li to možné.

Při uplatnění dvou a více pojistných nároků je zařazen o dvě třídy níže, je-li to možné.

Znamená to, že

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min\{X_n + 1, 2\} & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max\{X_n - 1, 0\} & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n \geq 2 \end{cases}$$

Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0)$.

Stanovíme jednotlivé prvky matice přechodu.

$$p_{00} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{01} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}, p_{02} = 0,$$

$$p_{10} = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}, p_{11} = 0, p_{12} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda},$$

$$p_{20} = 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}, p_{21} = P(Y_n = 1) = \lambda e^{-\lambda}, p_{22} = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}.$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

V modelu II odvodíme stacionární rozložení (viz př. 5.17.):

Pro zjednodušení zavedeme označení $b_0 = e^{-\lambda}$, $b_1 = \lambda e^{-\lambda}$. Matice \mathbf{P} má pak tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 \\ 1-b_0 & 0 & b_0 \\ 1-b_0-b_1 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}. \text{ Stacionární rozložení existuje, protože již matice } \mathbf{P}^2 \text{ má}$$

všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 \\ 1-b_0 & 0 & b_0 \\ 1-b_0-b_1 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}, a_0 + a_1 + a_2 = 1.$$

Dostaneme složky stacionárního vektoru:

$$a_0 = \frac{1-b_0-b_0b_1}{1-b_0b_1} = \frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}, a_1 = \frac{b_0(1-b_0)}{1-b_0b_1} = \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}}, a_2 = \frac{b_0^2}{1-b_0b_1} = \frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}.$$

Je-li základní výše pojistného w , pak střední hodnota výše pojistného, kterou klient zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu, je $w(a_0 + 0,7a_1 + 0,5a_2)$.

Výpočet pravděpodobnosti uplatnění pojistné události

Předpokládáme, že klient uplatní pojistnou událost pouze za předpokladu, že škoda, jejíž výši udává náhodná veličina Z , je větší než odpovídající navýšení r pojistného v následujícím pojistném období.

Označme A jev, že klient uplatní pojistnou událost a H jev, že nastala pojistná událost. Protože platí, že $A \subseteq H$, $P(A/H) = P(Z > r)$ a $P(H) = 1 - e^{-\lambda}$, dostaneme z definice podmíněné pravděpodobnosti

$$P(A \cap H) = P(A) = P(Z > r)(1 - e^{-\lambda})$$

Budeme-li předpokládat, že výše škody se řídí logaritmicko-normálním rozložením s parametry μ, σ^2 , můžeme vypočítat

$$P(A/H) = P(Z > r) = P(\ln Z > \ln r) = P\left(\frac{\ln Z - \mu}{\sigma} > \frac{\ln r - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln r - \mu}{\sigma}\right).$$

Výsledná pravděpodobnost uplatnění pak je

$$P(A) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln r - \mu}{\sigma}\right)\right](1 - e^{-\lambda}).$$

Příklad na výpočet pravděpodobnosti uplatnění pojistné události

Uvažme model II, v němž je vektor výše pojistného $\mathbf{c} = (1 \ 0,7 \ 0,5)$. Předpokládáme, že základní výše pojistného činí 1200 Kč, počet pojistných událostí v pojistném období má Poissonovo rozložení parametrem $\lambda = 0,1$ a velikost škod má logaritmicko – normální rozložení s parametry $\mu = 8, \sigma^2 = 2$ (znamená to, že střední hodnota škody je asi 8100 Kč, protože střední hodnota logaritmicko – normálního rozložení je $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$). Nechť klient je zařazen v 1. bonusové třídě, tj. platí pojistné $1200 \cdot 0,7 = 840$ Kč. Pokud dojde k uplatnění pojistné události, bude klient v následujícím období zařazen do třídy 0 a bude platit pojistné 1200 Kč, tj. o 360 Kč víc. Vypočtete pravděpodobnost, že klient uplatní pojistnou událost.

Řešení:

$$r = 360, \mu = 8, \sigma^2 = 2, \lambda = 0,1.$$

$$P(A) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln r - \mu}{\sigma}\right) \right] (1 - e^{-\lambda}) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln 360 - 8}{\sqrt{2}}\right) \right] (1 - e^{-0,1}) = 0,0887.$$

Za daných podmínek klient uplatní pojistnou událost s pravděpodobností 8,9 %.

8. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

8.1. Definice: Definice dosažitelných a sousledných stavů

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J .

a) Řekneme, že stav j je **dosažitelný** ze stavu i , když existuje $n \geq 1$ tak, že $p_{ij}(n) > 0$.

Pokud $p_{ij}(n) = 0$ pro všechna $n \geq 1$, pak řekneme, že stav j **není dosažitelný** ze stavu i .

b) Řekneme, že stav j je **sousledný** se stavem i , jestliže j je dosažitelný z i a i je dosažitelný z j .

(Symbolicky se dosažitelnost stavu j ze stavu i označuje takto: $i \rightarrow j$ a souslednost stavů i, j se označuje takto: $i \leftrightarrow j$.)

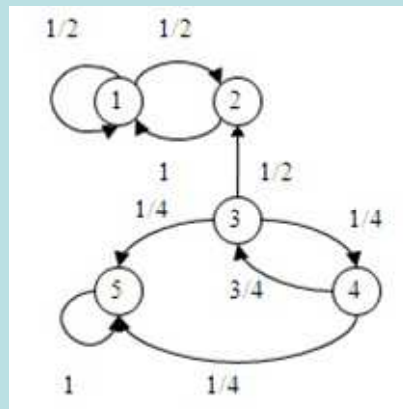
8.2. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů

$$J = \{1, 2, \dots, 5\} \text{ a maticí přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

Řešení:

Přechodový diagram



Tabulka dosažitelných stavů Tabulka sousledných stavů

stav	dosažitelný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+

stav	sousledný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	-	-	+	+	-
4	-	-	+	+	-
5	-	-	-	-	+

8.3. Definice: Definice třídy trvalých stavů a třídy přechodných stavů

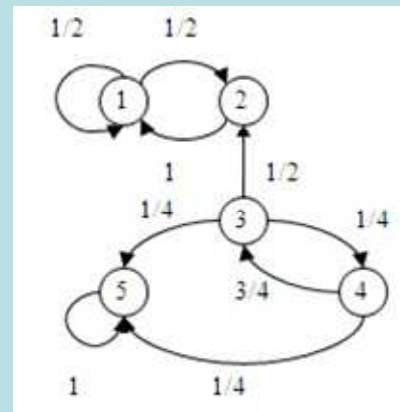
Neprázdná množina stavů $C \subseteq J$ se nazývá **třída trvalých stavů**, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný ze žádného stavu uvnitř C . Množina stavů, která není třídou trvalých stavů, se nazývá **třída přechodných stavů**.

8.4. Příklad: Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení:

Nejprve uvedeme matici přechodu. Nakreslíme přechodový diagram.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Z diagramu je zřejmé, že když řetězec vstoupí do třídy stavů $\{1, 2\}$ nebo $\{5\}$, není odtud dosažitelný žádný stav vně třídy $\{1, 2\}$ resp. $\{5\}$, tedy $J_T = \{1, 2\} \cup \{5\}$. Když řetězec vstoupí do třídy stavů $\{3, 4\}$, je odtud dosažitelný stav 5, tedy $J_p = \{3, 4\}$.

8.5. Poznámka: Poznámka o podřetězci homogenního markovského řetězce

Jestliže v matici přechodu \mathbf{P} vynecháme ty řádky a sloupce, které odpovídají stavům nepatřícím do třídy trvalých stavů C , dostaneme opět stochastickou matici. Lze ji považovat za matici přechodu homogenního markovského řetězce s množinou stavů C . Nazývá se podřetězec původního řetězce. Např. pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. , který má

$$\text{matici přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dostaneme podřetězec s maticí přechodu } \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.6. Důsledek: Důsledek pro třídu trvalých stavů a pro třídu přechodných stavů

- a) Řetězec nikdy neopustí třídu trvalých stavů, jakmile do ní jednou vstoupí.
- b) Řetězec se nikdy nevrátí do třídy přechodných stavů, jakmile ji jednou opustí.

8.7. Věta: Kritérium pro stanovení třídy trvalých stavů

Množina stavů $C \subseteq J$ je třída trvalých stavů, právě když $p_{ij} = 0$ pro $\forall i \in C, j \notin C$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.8. Definice: Definice rozložitelného a nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Homogenní markovský řetězec se nazývá **nerozložitelný**, jestliže všechny jeho stavy jsou sousledné. V opačném případě říkáme, že řetězec je **rozložitelný**.

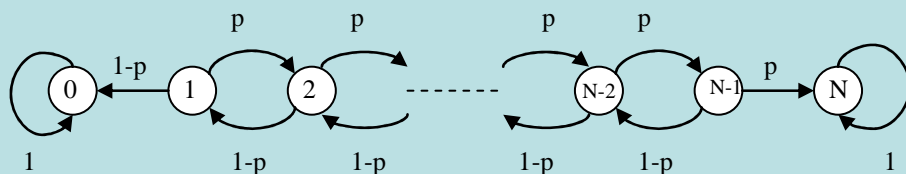
Ekvivalentní definice: HMR se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm neexistuje jiná třída trvalých stavů než J .

8.9. Věta: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice přechodu (po případném přečíslování stavů) tvar $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kde \mathbf{P}_1 , \mathbf{B} jsou čtvercové matice.

Důkaz: viz Prášková, str. 37.

8.10. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$

s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, N-1, N\}$ a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení: Z přechodového diagramu okamžitě vyplývá, že stavy 0 a N jsou sousledné jenom samy se sebou.

Ostatní stavy 1, 2, ..., N-1 jsou sousledné, řetězec je tedy rozložitelný a $J_T = \{0\} \cup \{N\}$, $J_P = \{1, 2, \dots, N-1\}$.

8.11. Definice: Definice stavů stejného typu

Řekneme, že stavy $i, j \in J$ homogenního markovského řetězce jsou **stejného typu**, jestliže jsou oba

- a) přechodné
- b) trvalé nenulové
- c) trvalé nulové
- d) neperiodické
- e) periodické s touž periodou.

8.12. Věta: Věta o solidaritě

Jsou-li stavy i a j sousledné, pak jsou stejného typu.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.13. Důsledek: Důsledek pro nerozložitelný homogenní markovský řetězec

V nerozložitelném homogenním markovském řetězci jsou všechny stavy stejného typu. Má-li nerozložitelný homogenní markovský řetězec konečnou množinu stavů, pak jsou všechny stavy trvalé nenulové.

8.14. Věta: Věta o stacionárním rozložení nerozložitelného HMŘ

Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec . Pak platí:

1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, pak stacionární rozložení neexistuje.
2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozložení existuje a je jediné.

2a) Jsou-li všechny stavy neperiodické, pak $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) > 0, i, j \in J$ a také $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) > 0, j \in J$

2b) Jsou-li všechny stavy periodické, pak $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}(k) > 0, i, j \in J$ a také $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_j(k) > 0, j \in J$

8.15. Důsledek: V nerozložitelném homogenním markovském řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozložení existuje.

8.16. Věta: Věta o množině stavů dosažitelných z trvalého stavu.

Nechť stav i je dosažitelný z nějakého trvalého stavu j . Pak platí:

a) stav i je trvalý stav stejného typu jako stav j

b) i a j jsou sousledné stavy

c) $f_{ji} = f_{ij} = 1$ (tj. pravděpodobnost, že řetězec vycházející ze stavu j resp. i vůbec někdy vstoupí do stavu i resp. j , je rovna 1).

(Znamená to, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu j je množina trvalých stavů a tvoří nerozložitelný podřetězec původního řetězce.)

8.17. Poznámka:

Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že v rozložitelném řetězci existují jen dvě třídy stavů. Znamená to, že současným přečíslováním stavů v matici přechodu lze vytvořit nulové submatice.

Dostáváme pak buď matici typu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \text{ jsou čtvercové matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami stavů, přičemž obě}$$

třídy jsou třídy trvalých stavů,

nebo typu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{P}_1, \mathbf{Q} \text{ jsou čtvercové matice, přičemž } \mathbf{P}_1 \text{ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi trvalými stavy,}$$

matice \mathbf{Q} obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy a matice \mathbf{R} je tvořena pravděpodobnostmi přechodu z přechodných do trvalých stavů.

Je-li matice \mathbf{P} rozložitelná na tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{0} \text{ jsou nulové čtvercové matice, bude systém oscilovat mezi dvěma třídami přechodných stavů a}$$

příslušná matice \mathbf{P} bude popisovat periodický řetězec.

8.18. Poznámka: poznámka o rozkladu konečné množiny stavů J a o kanonickém tvaru matice přechodu

Předpokládejme nyní, že rozložitelný HMR je tvořen jak trvalými, tak přechodnými stavy, přičemž má r tříd trvalých stavů.

Věta 8.16. umožní rozložit množinu stavů J takto:

Nechť j_1 je trvalý stav s nejnižším indexem a J_1 je množina všech stavů dosažitelných z j_1 .

Nechť j_2 je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do J_1 a necht' J_2 je množina všech stavů dosažitelných z j_2 atd.

Lze tedy psát $J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_r \cup J_p$, kde J_1, J_2, \dots, J_r jsou neslučitelné množiny trvalých stavů a J_p je množina stavů přechodných. Je-li J konečná množina, pak matici přechodu \mathbf{P} lze psát v tzv. kanonickém tvaru (po eventuálním přečíslování stavů).

Kanonický tvar matice \mathbf{P}

$\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r$ jsou matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami trvalých stavů

J_1, \dots, J_r . Matice $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_r$ obsahují pravděpodobnosti přechodu mezi třídami přechodných a trvalých stavů. Matice \mathbf{Q} obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy.

J		J_T				J_P
		J_1	J_2	...	J_r	
J_T	J_1	\mathbf{P}_1	\emptyset	...	\emptyset	\emptyset
	J_2	\emptyset	\mathbf{P}_2	...	\emptyset	\emptyset

	J_r	\emptyset	\emptyset	...	\mathbf{P}_r	\emptyset
J_P	\mathbf{R}_1	\mathbf{R}_2	...	\mathbf{R}_r	\mathbf{Q}	

8.19. Poznámka: Kanonický tvar matice přechodu lze v MATLABu získat pomocí funkce kant(P)

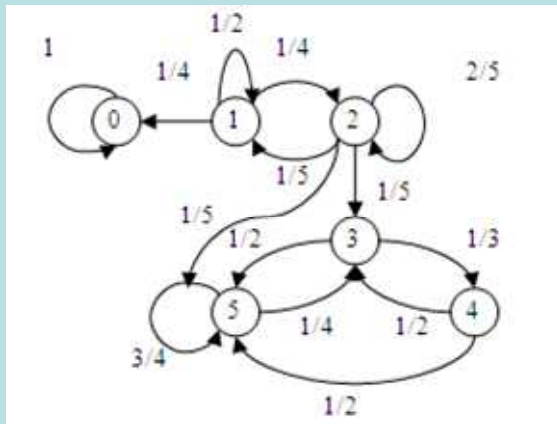
```
function[KT,NU,DS] = kant(P)
% Funkce pro vypocet kanonickeho tvaru matice prechodu rozlozitelneho HMR
% Syntaxe: [KT,NU,DS] = kant(P)
% Vstupni parametr: P ... matice prechodu HMR
% Vystupni parametry: KT ... matice prechodu v kanonickem tvaru
%           NU ... nove usporadani
%           DS ... tabulka dosazitelnych stavu
% Vytvoril: Karel Vaculik
```

8.20. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, 5\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}. \text{ Najděte kanonický tvar matice } P.$$

Řešení:

Přechodový diagram



$J_1 = \{0\}, J_2 = \{3, 4, 5\}, J_P = \{1, 2\}.$

Kanonický tvar matice přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že

$$P_1 = (1)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

8.21. Definice: Definice fundamentální matice nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Limitní matici přechodu označme

A. Fundamentální matice \mathbf{Z} tohoto řetězce definujeme vztahem: $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$.

8.22. Věta: Věta o výpočtu středních hodnot dob prvních vstupů

Označme m_{ij} střední hodnotu doby 1. vstupu řetězce do stavu j za předpokladu, že vychází ze stavu i . Sestavíme matici

$\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j \in J}$. Pak $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}})\hat{\mathbf{M}}$, kde \mathbf{E} je matice ze samých jedniček, matice $\hat{\mathbf{Z}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice

\mathbf{Z} a matice $\hat{\mathbf{M}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice \mathbf{M} .

8.23. Příklad: Při dlouhodobém sledování velkého souboru voličů s časovým krokem 1 měsíc byly zkoumány volební preference. Rozlišujeme strany A, B, C a Ostatní. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4\}$, kde $X_n = 1$, když náhodně vybraný volič preferuje v n -tém měsíci stranu A, $X_n = 2$ pro stranu B, $X_n = 3$ pro stranu C a $X_n = 4$ pro ostatní strany. Pravděpodobnosti přechodu sympatií voličů jsou uvedeny v matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,11 & 0,14 \\ 0,01 & 0,82 & 0,05 & 0,12 \\ 0,05 & 0,05 & 0,8 & 0,1 \\ 0,05 & 0 & 0,03 & 0,92 \end{pmatrix}. \text{ Najděte limitní matici přechodu a vypočtěte matici středních hodnot dob prvních přechodů.}$$

Řešení: Limitní matici přechodu získáme složením čtyř stacionárních vektorů. Stacionární vektor existuje, neboť již matice \mathbf{P}^2 má všechny prvky kladné.

Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$ s podmínkou $\sum_{j=1}^4 a_j = 1$ získáme stacionární vektor: $\mathbf{a} = (0,1328; 0,0881; 0,1843; 0,5949)$.

Znamená to, že během dlouhé doby může strana A očekávat 13,3% voličů, strana B 8,8%, strana C 18,4% a ostatní strany dohromady 59,5%.

Limitní matice přechodu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \\ 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \\ 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \\ 0,1328 & 0,0881 & 0,1843 & 0,5949 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice \mathbf{A} : Pokud volič v jednom měsíci preferoval stranu A, pak v následujícím měsíci ji bude s pravděpodobností 13,3% preferovat opět. Ke straně B se přikloní s pravděpodobností 8,8%, ke straně C s pravděpodobností 18,4% a s pravděpodobností 59,5% zvolí některou z ostatních stran.

K výpočtu matice středních hodnot dob prvních přechodů potřebujeme fundamentální matici \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0,2999 & 0,2549 & -2,1411 \\ -0,7741 & 4,7037 & -0,531 & -2,3986 \\ -0,2863 & 0,4354 & 3,6153 & -2,7644 \\ -0,1508 & -0,7502 & -0,7885 & 2,6895 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Matice } \hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,6153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6895 \end{pmatrix}, \text{ matice } \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,1328} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0,0881} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0,1843} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0,5949} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Matice } \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}})\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 7,5306 & 50 & 18,2353 & 8,1207 \\ 25,3061 & 11,3538 & 22,5 & 8,5535 \\ 21,6327 & 48,4615 & 5,4265 & 9,1686 \\ 20,6122 & 61,9231 & 23,8971 & 1,6811 \end{pmatrix}.$$

Interpretace 1. řádku matice \mathbf{M} : Volič, který na začátku sledování preferoval stranu A, v průměru za 7,5 měsíce dá poprvé znovu hlas této straně. V průměru za 50 měsíců bude poprvé preferovat stranu B a v průměru za 18,2 měsíce bude poprvé preferovat stranu C. V průměru za 8,1 měsíce se poprvé přikloní k některé z ostatních stran.

8.24. Využití markovských řetězců v modelech obnovy

Úvod: Modely obnovy popisují procesy opotřebovávání a vyřazování prvků z procesu a jejich nahrazování novými prvky. Jedná se např. o knihy v knihovně, žárovky veřejného osvětlení, lyže v půjčovně apod.

Budeme se zabývat nejjednodušším modelem, a to modelem prosté obnovy s diskretním časem.

Předpoklady:

1. Časová období, v nichž se proces sleduje, jsou stejně dlouhá.
2. Vyřazení a obnova prvků probíhá nespojitě, vždy na konci časového období.
3. Celkový počet prvků v procesu se nemění.
4. Všechny prvky mají stejnou maximální životnost.
5. Všechny prvky jsou technicky homogenní, tj. stejného druhu.
6. Na počátku procesu jsou všechny prvky nové a obnova se provádí pouze novými prvky.
7. Neuvažuje se morální ani částečné opotřebení prvků.

Označení:

N ... maximální doba životnosti prvků.

a_n ... pravděpodobnost selhání prvku v n -tém období, $n = 1, 2, \dots, N$. Protože životnost objektů je konečná s maximální délkou N , musí do doby N dojít k selhání všech prvků, tedy $\sum_{n=1}^N a_n = 1$.

r_n ... pravděpodobnost dožití n a více období. Přitom $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Speciálně $r_{N-1} = a_N$, $r_0 = 1$.

w_0 ... počet nových prvků na počátku sledování procesu.

w_n ... počet prvků, které jsou v provozu na počátku n -tého období, $n = 1, 2, \dots, N$.

Pravděpodobnosti a_n , r_n v praxi zpravidla neznáme. Můžeme je však odhadnout pomocí relativních četností.

Odhad pravděpodobnosti selhání a_n označíme \hat{a}_n a je to relativní četnost prvků, které selhaly

mezi časem $n-1$ a n , tj. $\hat{a}_n = \frac{w_n - w_{n-1}}{w_0}$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Odhad pravděpodobnosti dožití r_n označíme \hat{r}_n a je to relativní četnost prvků, které jsou

v provozu na konci n -tého období, tj. $\hat{r}_n = \frac{w_n}{w_0}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

V modelu prosté obnovy s diskretním časem řešíme několik úloh.

Úloha č. 1: Jaká je střední hodnota doby životnosti prvků?

Řešení: V tomto pojetí je doba životnosti objektu diskretní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí a_j pro $j = 1, 2, \dots, N$. Její střední hodnota je $V = \sum_{n=1}^N n a_n$. Odhadem této střední hodnoty je průměrná doba životnosti $\bar{V} = \sum_{n=1}^N n \hat{a}_n$.

Úloha č. 2: Jaká je střední hodnota počtu obnov (tj. nově zařazených prvků) na konci n-tého období, tj. na počátku (n+1). období?

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, N\}$, kde $X_n = j$, když v n-tém období má prvek stáří j.

V každém kroku procesu má prvek dva možné přechody:

- pokud selže v čase od n – 1 do n, je vyřazen ve stáří n – 1 a je nahrazen novým prvkem;
- pokud neselže v čase od n – 1 do n, přejde ze stáří n – 1 do stáří n.

Matice přechodu má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_2}{r_1} & 0 & \frac{r_2}{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_3}{r_2} & 0 & 0 & \frac{r_3}{r_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{N-1}}{r_{N-2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_{N-1}}{r_{N-2}} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

V matici přechodu je nutné uvažovat podmíněné pravděpodobnosti, podmínkou je, že prvek došel do daného stáří.

Vektor počátečních pravděpodobností:

$\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$, protože na počátku procesu jsou všechny prvky nové.

Střední hodnotu počtu obnov získáme jako první složku vektoru $w_0 \mathbf{p}(n) = w_0 \cdot \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n$.

Úloha č. 3: Jaký je limitní počet obnov?

Řešení:

Označme u_0 ($\equiv w_0$) počet prvků na začátku sledování procesu, u_n počet obnov na konci n -tého období.

Na konci 1. období: $u_1 = a_1 u_0$,

na konci 2. období: $u_2 = a_1 u_1 + a_2 u_0$,

na konci 3. období: $u_3 = a_1 u_2 + a_2 u_1 + a_3 u_0$,

.....

na konci $(N-1)$. období: $u_{N-1} = a_1 u_{N-2} + a_2 u_{N-3} + \dots + a_{N-1} u_0$.

Pro $n \geq N$: $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_N u_{n-N}$ (z procesu už jsou vyřazeny všechny původní prvky).

Těmto rovnicím se říká **rovnice obnovy**. Řeší se buď přímým dosazováním nebo analyticky – jedná se o systém homogenních lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Francouzský matematik M. R. Fréchet odvodil, že $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existuje tehdy a jen tehdy, když indexy nenulových pravděpodobností a_n , $n = 1, 2, \dots, N$ nemají společného dělitele. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{u_0}{V}$.

Limitní počty prvků pro jednotlivá stáří jsou pak dány vektorem $\frac{u_0}{V} (1, r_1, r_2, \dots, r_{N-1})$.

Úloha č. 4: Jaké jsou počty prvků pro jednotlivá stáří v n-tém období (tzv. **věková struktura souboru podle stáří prvků**)?

Řešení: Vektor počátečních pravděpodobností: $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

Matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & r_1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{r_1} & 0 & \frac{r_2}{r_1} & 0 \\ \frac{a_3}{r_2} & 0 & 0 & \frac{r_3}{r_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Podle zákona evoluce je vektor absolutních pravděpodobností po n krocích: $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n$ a strukturu souboru podle stáří prvků získáme jako $w_0 \mathbf{p}(n)$.

Příklad: Systém má na počátku 2000 nových prvků. Maximální doba životnosti prvku je 4 roky. Pravděpodobnosti selhání v 1. až 4. roce jsou $a_1 = 0,2$, $a_2 = 0,25$, $a_3 = 0,25$, $a_4 = 0,3$.

- a) Najděte střední hodnotu životnosti prvků.
- b) Jaká je střední hodnota počtu obnov na konci 6. roku?
- c) Vypočtete limitní počet obnov.
- d) Určete věkovou strukturu systému na konci 8. roku.
- e) Vypočtete limitní věkovou strukturu systému.

Řešení:

Ad a)

Střední hodnotu životnosti prvků vypočteme podle vzorce $V = \sum_{n=1}^N n a_n$:

$$V = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,3 = 2,65$$

Střední hodnota životnosti prvků je 2,65 roku.

Ad b) (Jaká je střední hodnota počtu obnov na konci 6. roku?)

Ze známých pravděpodobností selhání vypočteme pravděpodobnosti dožití:

$$r_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,3 = 1$$

$$r_1 = a_2 + a_3 + a_4 = 0,25 + 0,25 + 0,3 = 0,8$$

$$r_2 = a_3 + a_4 = 0,25 + 0,3 = 0,55$$

$$r_3 = a_4 = 0,3$$

Sestavíme matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & r_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & r_2 & 0 \\ r_1 & & r_1 & \\ a_3 & 0 & 0 & r_3 \\ r_2 & & & r_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,55 & 0 \\ 0,8 & & 0,8 & \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0,55 & & & 0,55 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,3125 & 0 & 0,6875 & 0 \\ 0,4545 & 0 & 0 & 0,5455 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektor počátečních pravděpodobností: $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$

Střední hodnotu počtu obnov získáme jako první složku vektoru $w_0 \mathbf{p}(6) = 2000 \cdot \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^6 = (728,378; 513,312; 543,51; 214,8)$, tedy na konci 6. roku bude průměrně provedeno 729 obnov.

Upozornění: Použijeme-li pro výpočet aplikaci uvedenou na adrese

<http://www.milankabrt.cz/modelObnovy/step1.php>,

dostaneme poněkud odlišný výsledek (728,883; 513,613; 542,903; 214,601).

Odlišnost je způsobena zaokrouhlováním.

Ad c) (Vypočtete limitní počet obnov.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{u_0}{V} = \frac{2000}{2,65} = 754,72$$

Limitní počet obnov činí 754,72 prvků.

Ad d) (Určete věkovou strukturu systému na konci 8. roku.)

$$w_0 \mathbf{p}(8) = 2000 \cdot \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^8 = (792,5516; 614,3485; 400,6079; 192,492),$$

což znamená, že na konci 8. roku bude v systému průměrně

792,5516 nových prvků,

614,3485 prvků starých 1 rok,

400,6079 prvků starých 2 roky a

192,492 prvků starých 3 roky.

Při použití webové aplikace je výsledek: (792,574; 614,572; 400,594; 192,304).

Ad e) (Vypočtete limitní věkovou strukturu systému.)

Limitní věková struktura systému je (754,717; 603,7736; 415,0943; 226,4151) resp.

(755; 604; 414,9; 226,1).

9. Absorpční homogenní markovské řetězce

9.1. Definice: Definice absorpčního stavu

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J .

Řekneme, že stav $j \in J$ je **absorpční stav**, jestliže $p_{jj} = 1$ (tzn., že ze stavu j není dosažitelný žádný jiný stav). Když řetězec vstoupí do absorpčního stavu, pak řekneme, že je **absorbován**.

9.2. Věta: Věta o vztahu mezi absorpčním stavem a trvalým stavem

Každý absorpční stav je trvalým stavem.

Důkaz: Plyne přímo z definice trvalého stavu.

9.3. Definice: Definice absorpčního homogenního markovského řetězce

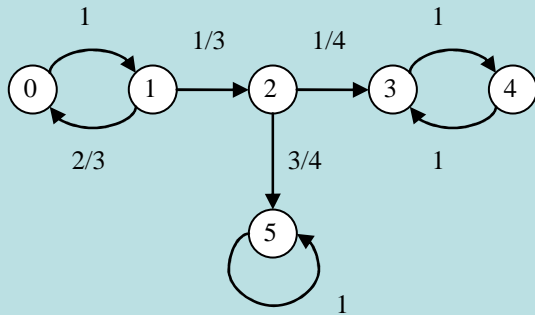
Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá **absorpční**, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

9.4. Příklad: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, 5\}$ a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Zjistěte, zda jde o absorpční řetězec.}$$

Řešení:

Přechodový diagram



$$J_T = \{3, 4\} \cup \{5\}, J_P = \{0, 1, 2\}.$$

Stavy 3 a 4 jsou trvalé, ale nejsou absorpční. Řetězec tedy není absorpční.

9.5. Definice: Definice fundamentální matice absorpčního řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je absorpční řetězec s konečnou množinou stavů, který má r absorpčních a s neabsorpčních stavů. Stavy přechíslijeme tak, aby po množině J_A r absorpčních stavů následovala množina J_N s neabsorpčních stavů. Matici přechodu \mathbf{P}

přepíšeme do kanonického tvaru $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde

\mathbf{I} je jednotková matice řádu r ,

$\mathbf{0}$ je nulová matice typu $r \times s$,

\mathbf{R} je matice typu $s \times r$ obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů a

\mathbf{Q} je čtvercová matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Matice $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ (kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu s) se nazývá **fundamentální matice absorpčního řetězce**.

Vysvětlení: Prvek m_{ij} matice \mathbf{M} udává střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčním stavu j před přechodem do absorpčního stavu, pokud vyšel z neabsorpčního stavu i . Inverzní matice existuje, pokud \mathbf{Q}^n konverguje k $\mathbf{0}$.

9.6. Poznámka: Význam součtu prvků v i -tém řádku fundamentální matice \mathbf{M}

Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i -tém řádku fundamentální matice \mathbf{M} . Maticový zápis: $\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e}$, kde \mathbf{e} je sloupcový vektor typu $s \times 1$ ze samých jedniček.

9.7. Příklad: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

- Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Ukažte, že řetězec je absorpční.
- Najděte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
- Vypočtěte střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech.

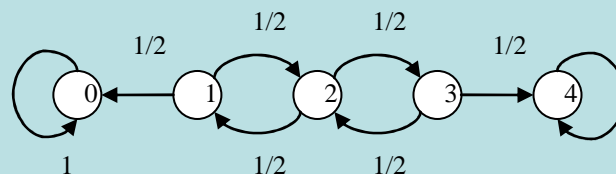
Řešení:

ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, přičemž $X_n = j$, když v n -tém kroku hry má hráč A právě j Kč.

Matice přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) $J_T = \{0\} \cup \{4\}$, $J_P = \{1, 2, 3\}$. Trvalé stavy 0 a 4 jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

ad c) Matici přechodu v kanonickém tvaru získáme tak, že nejprve zapíšeme pravděpodobnosti přechodu vztahující se k absorpčním stavům 0 a 4 a poté pravděpodobnosti přechodu vztahující se k neabsorpčním stavům 1, 2, 3.

Původní matice přechodu: Matice přechodu v kanonickém tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet fundamentální matice \mathbf{M} potřebujeme matici \mathbf{Q} obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace: Podívejme se např. na druhý řádek matice \mathbf{M} . Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak lze očekávat, že před skončením hry bude mít v průměru jedenkrát 1 Kč, dvakrát 2 Kč a jedenkrát 3 Kč.

ad d) Podle poznámky 8.6. dostáváme:

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku buď 1 Kč nebo 3 Kč, tak v průměru po třech krocích hra skončí. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak v průměru po čtyřech krocích hra skončí.

9.8. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů

Označme b_{ij} pravděpodobnost, že řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i bude absorbován ve stavu j .

Sestavíme matici $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j \in J}$.

Pak $\mathbf{B} = \mathbf{MR}$, kde \mathbf{M} je fundamentální matice absorpčního řetězce a \mathbf{R} je matice v levém dolním rohu matice přechodu \mathbf{P} v kanonickém tvaru.

Důkaz: Necht' i je neabsorpční a j absorpční stav. Stav j může být dosaženo 1. krokem s pravděpodobností p_{ij} nebo přechodem do neabsorpčního stavu k s pravděpodobností p_{ik} a odtud přechodem do absorpčního stavu j s pravděpodobností b_{kj} . Tedy $b_{ij} = \sum_{k \in J} p_{ik} b_{kj}$. Maticově: $\mathbf{B} = \mathbf{R} + \mathbf{QB}$, $\mathbf{B} - \mathbf{QB} = \mathbf{R}$, $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{B} = \mathbf{R}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{MR}$.

9.9. Definice: Definice matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce

Matice \mathbf{B} se nazývá **matice přechodu do absorpčních stavů** daného absorpčního řetězce.

9.10. Příklad: Pro zadání z příkladu 9.7. vypočtete matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky. Pro připomenutí: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

Řešení:

Matice přechodu v kanonickém tvaru: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Již jsme vypočetli, že

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku 1 Kč, pak bude s pravděpodobností 3/4 zruinován on a s pravděpodobností 1/4 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/2 zruinován on a s pravděpodobností 1/2 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 3 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/4 zruinován on a s pravděpodobností 3/4 bude zruinován hráč B.

9.11. Poznámka: Charakteristiky absorpčního řetězce můžeme v MATLABu vypočítat pomocí funkce absorb.m:

```
function [P0,M,B,t,rt]=absorb(P)
% Funkce pro vypočet základních charakteristik absorpčního řetězce
% Autor: Hana Tužilová
% function [P0,M,B,t]=absorb(P)
% vstupní parametr: matice přechodu P
% výstupní parametry: P0 ... matice přechodu v kanonickém tvaru
%                     M ... fundamentální matice
%                     B ... matice přechodu do absorpčních stavů
%                     t ... vektor středních hodnot počtu kroků před
%                     absorpcí
%                     rt ... vektor rozptylu počtu kroků před
%                     absorpcí

D=diag(P); % identifikace absorpčních stavů
j=find(D==1);
n=length(P);
T=1:n;
T(j)=[];
T=[j',T];

A=zeros(n); % sestavení kanonického tvaru matice P
T=(0:n:(n^2-n))+T;
A(T)=1;
P0=A'*P*A;

m=length(j); % vypočet ostatních charakteristik
Q=P0((m+1):n,(m+1):n);
M=eye(n-m)/(eye(n-m)-Q);
R=P0((m+1):n,1:m);
B=M*R;
t=M*ones(n-m,1);
tkv=t.*t;
rt=(2*M-eye(n-m))*t-tkv;
```

Použijeme-li tuto funkci na řešení příkladu 9.10., dostaneme výsledky:

$$\begin{array}{r} P_k = \\ \begin{array}{ccccc} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5000 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0.5000 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} M = \\ \begin{array}{ccc} 1.5000 & 1.0000 & 0.5000 \\ 1.0000 & 2.0000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 1.5000 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} B = \\ \begin{array}{cc} 0.7500 & 0.2500 \\ 0.5000 & 0.5000 \\ 0.2500 & 0.7500 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} t = \\ \begin{array}{c} 3.0000 \\ 4.0000 \\ 3.0000 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} rt = \\ \begin{array}{c} 8.0000 \\ 8.0000 \\ 8.0000 \end{array} \end{array}$$

9.12. Příklad: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do 30 denních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kde

stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti,

stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti,

stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti,

stav 4 splacené pohledávky a

stav 5 nedobytné pohledávky.

Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou:

$p_{12} = 0,77$, $p_{14} = 0,23$, $p_{23} = 0,34$, $p_{24} = 0,66$, $p_{34} = 0,73$ a $p_{35} = 0,27$.

Úkoly:

a) Sestavte matici přechodu.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.

c) Vypočtete fundamentální matici a interpretujte její prvky.

d) Vypočtete matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

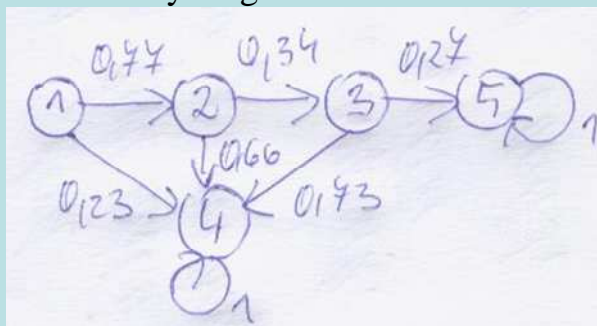
f) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a)

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 & 0,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,73 & 0,27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,23 & 0 & 0 & 0,77 & 0 \\ 0,66 & 0 & 0 & 0 & 0,34 \\ 0,73 & 0,27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad c) Vypočteme fundamentální matici absorpčního řetězce:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví $1 \times 30 = 30$ dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru $0,77 \times 30 = 23,1$ dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru $0,26 \times 30 = 7,8$ dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) Vypočteme matici přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) Vypočteme vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2,03 \\ 1,34 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpretace:

$2,03 \times 30 = 60,9$ – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

$1,34 \times 30 = 40,2$ – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

$1 \times 30 = 30$ – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Připomínáme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.

10. Vytvořující funkce a jejich aplikace při analýze homogenních markovských řetězců

10.1. Motivace:

Při analýze homogenních markovských řetězců se často pracuje s mocninami přechodu, což je výpočetně náročné. Tomu se lze vyhnout, pokud použijeme vytvořující funkce. Postupujeme tak, že najdeme transformaci daného originálu, učiníme příslušnou operaci a provedeme zpětnou transformaci. Lze dokázat, že mezi originálem a jeho transformací existuje vzájemně jednoznačný vztah. Vytvořující funkce se též nazývají z-transformace a jsou diskretní obdobou Laplaceovy transformace, která se často používá především v technických aplikacích.

10.2. Definice: Definice vytvořující funkce reálné posloupnosti

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje v nějakém okolí 0, nazveme ji

vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. (Obecněji lze vytvořující funkci zavést i pro posloupnost komplexních čísel, ale tímto případem se zabývat nebudeme.)

10.3. Příklad:

Najděte vytvořující funkce k posloupnostem:

- a) $a_n = 1, n = 0, 1, \dots$
- b) $a_n = n, n = 0, 1, \dots$
- c) $a_n = x^n, n = 0, 1, \dots$
- d) $a_n = nx^n, n = 0, 1, \dots$

Řešení:

$$\text{ad a) } G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

$$\text{ad b) } G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}, |z| < 1$$

$$\text{ad c) } G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xz)^n = \frac{1}{1-xz}, |z| < |x|$$

$$\begin{aligned} \text{ad d) } G_a(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n (xz)^n = \text{substituce } t = xz = t \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = t \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \\ &= t \frac{d}{dt} \frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{xz}{(1-xz)^2}, |z| < \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

Výsledky uspořádáme do přehledné tabulky:

a_n	$G_a(z)$
1	$1/(1-z)$
n	$z/(1-z)^2$
x^n	$1/(1-xz)$
nx^n	$xz/(1-xz)^2$

10.4. Věta:

Nechť $G_a(z)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Pak pro $n = 0, 1, 2, \dots$ platí: $a_n = \frac{G_a^{(n)}(z)}{n!} \Big|_{z=0}$.

Důkaz:

Řadu $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ budeme derivovat člen po členu a vyjádříme hodnotu této derivace v bodě $z = 0$. Přitom uijeme konvenci $0^0 = 1$.

$$n = 0: G_a(0) = a_0$$

$$n = 1: \frac{d}{dz} G_a(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \frac{d}{dz} G_a(0) = a_1$$

$$n = 2: \frac{d^2}{dz^2} G_a(z) = \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}, \frac{d^2}{dz^2} G_a(0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = \frac{G_a^{(2)}(0)}{2!}$$

$$n = 3: \frac{d^3}{dz^3} G_a(z) = \frac{d^3}{dz^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \frac{d^3}{dz^3} G_a(0) = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = \frac{G_a^{(3)}(0)}{3!}$$

atd.

10.5. Příklad:

Je dána vytvořující funkce $G_a(z) = e^z$. Najděte odpovídající posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Řešení:

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3!}, \dots, \text{tedy } \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

10.6. Definice: Definice konvoluce a konvoluční mocniny

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti. Jejich **konvolucí** rozumíme posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Zkráceně píšeme $\{c\} = \{a\} * \{b\}$.

Konvoluci $\{a\} * \{a\}$ nazýváme **druhou konvoluční mocninou** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme ji $\{a\}^{2*}$.

Obecně **k-tá konvoluční mocnina** posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $\{a\}^{k*} = \{a\} * \dots * \{a\}$.

10.7. Věta: Věta o vytvořující funkci konvoluce

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_a(z)$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_b(z)$, pak posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, která je konvolucí daných dvou posloupností, má vytvořující funkci $G_c(z) = G_a(z) \cdot G_b(z)$. k-tá konvoluční mocnina $\{a\}^{k*}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_a(z)^k$.

Důkaz:

Součin $G_a(z) \cdot G_b(z)$ dostaneme vynásobením mocninných řad.

Koeficient u z^n je v tomto součinu roven $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

10.8. Definice: Definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic

a) Nechť I je nejvýše spočetná indexová množina. Uvažme posloupnost vektorů $\mathbf{a}_0 = (a_{0i})_{i \in I}$, $\mathbf{a}_1 = (a_{1i})_{i \in I}$, ...

Vytvořující funkce posloupnosti vektorů $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována vztahem: $G_{\mathbf{a}}(z) = (G_{a_i}(z))_{i \in I}$, kde $G_{a_i}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni} z^n$.

Zkráceně píšeme: $G_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n z^n$.

b) Nechť I, J jsou nejvýše spočetná indexové množiny. Uvažme posloupnost matic $\mathbf{A}_0 = (a_{0ij})_{i \in I, j \in J}$, $\mathbf{A}_1 = (a_{1ij})_{i \in I, j \in J}$, ...

Vytvořující funkce posloupnosti matic $\{\mathbf{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definována vztahem: $G_{\mathbf{A}}(z) = (G_{a_{ij}}(z))_{i \in I, j \in J}$, kde $G_{a_{ij}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nij} z^n$.

Zkráceně píšeme:

$$G_{\mathbf{A}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n z^n.$$

(Vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic vznikne tak, že získáme vytvořující funkce posloupnosti odpovídajících složek a vzniklé vytvořující funkce uspořádáme do vektoru či do matice.)

10.9. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti matic přechodu po n krocích

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Pak vytvořující funkce posloupnosti matic $\{\mathbf{P}^n\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $G_{\mathbf{P}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

Důkaz: $G_{\mathbf{P}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z\mathbf{P})^n = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

10.10. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností po n krocích

Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ má maticí přechodu \mathbf{P} a vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$. Pak vytvořující funkce posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $G_{\mathbf{p}}(z) = \mathbf{p}(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

Důkaz: Podle definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů platí: $G_{\mathbf{p}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n)z^n$. Ovšem $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n) \cdot \mathbf{P}$, tedy

vytvořující funkce posloupnosti vektorů $\{\mathbf{p}(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1)z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n)z^n \right) \cdot \mathbf{P} = G_{\mathbf{p}}(z) \cdot \mathbf{P}$. Upravíme levou stranu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1)z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1)z^{n+1} = |k = n+1| = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{p}(k)z^k = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{p}(k)z^k - \mathbf{p}(0) \right) = \frac{1}{z} (G_{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{p}(0))$$

pravé strany:

$$\frac{1}{z} (G_{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{p}(0)) = G_{\mathbf{p}}(z) \cdot \mathbf{P}. \text{ Po úpravě: } G_{\mathbf{p}}(z) = \mathbf{p}(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}.$$

(Z tohoto vztahu je zřejmé, že při výpočtu vektoru absolutních pravděpodobností se vyhneme umocňování matice \mathbf{P} , což znamená úsporu numerických výpočtů. Na druhou stranu však musíme počítat inverzní matici $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.)

10.11. Příklad: Necht' homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů

$J = \{1, 2\}$ popisuje chování výrobní linky, která se v n -tém období nachází buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2).

Dlouhodobým sledováním byla zjištěna matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte matici

přechodu po n krocích \mathbf{P}^n a vektor absolutních pravděpodobností po n krocích $\mathbf{p}(n)$.

Řešení: Z věty 10.9. plyne, že $G_{\mathbf{p}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & \frac{3z}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{4} & 1 - \frac{3z}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I} - z\mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{4}\right) - \frac{z^2}{8} = \dots = (1 - z) \cdot \left(1 - \frac{z}{4}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1 - z) \left(1 - \frac{z}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{4} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & 1 - \frac{z}{2} \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{4}} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Upozornění: Prvky matice $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ byly získány rozkladem na parciální zlomky.

$$\text{Např. prvek } a_{11} = \frac{1 - \frac{3z}{4}}{(1 - z) \left(1 - \frac{z}{4}\right)} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{1 - \frac{z}{4}} = \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - z} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{z}{4}}. \text{ Podobně získáme další prvky.)}$$

$\frac{1}{1 - z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 1, n = 0, 1, 2, \dots$

$\frac{1}{1 - \frac{z}{4}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Matici \mathbf{P}^n lze tedy psát ve tvaru: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Interpretace: První matice je konstantní a nezávisí na počtu kroků. Lze snadno ověřit, že je to limitní matice přechodu \mathbf{A} .

Druhá matice násobená koeficientem $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ představuje přechodnou složku daného homogenního markovského řetězce.

Pro vektor absolutních pravděpodobností platí:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0) \left[\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \right].$$

Druhý sčítanec v závorce pro $n \rightarrow \infty$ konverguje k 0, tedy lze psát $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (1,0) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ (0,1) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$.

Pomocí vytvořujících funkcí jsme tedy dostali vektor limitních pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

11. Markovské řetězce s oceněním přechodů

11.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J , v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$, která se nazývá **matice výnosů**. Řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se pak nazývá **markovský řetězec s oceněním přechodů**.

11.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po n krocích

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu \mathbf{P} a matici ocenění \mathbf{R} . Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i . Dále označme

$q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i . Pak pro $\forall i \in J$ a $n = 1, 2, 3, \dots$ platí rekurentní vztah:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_i(n-1), \text{ přičemž } v_i(0) = 0.$$

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

11.3. Příklad: Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo

v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Jednotlivým přechodům jsou

přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Pro $i = 0, 1$ položíme

$v_i(0) = 0$. Pro oba stavy vypočtete střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za $n = 1, 2, \dots, 6$ období.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1. Přitom

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$q_0 = \sum_{j=0}^1 p_{0j} r_{0j} = p_{00} r_{00} + p_{01} r_{01} = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 4 = 7, \quad q_1 = \sum_{j=0}^1 p_{1j} r_{1j} = p_{10} r_{10} + p_{11} r_{11} = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot (-5) = -1, \quad \text{tj. } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nyní počítáme } \mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1,2 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

Tabulka středních hodnot celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots, 6$:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n+1) - v_0(n)$	x	3	2,6	2,56	2,556	2,5556
$v_1(n+1) - v_1(n)$	x	2,2	2,52	2,552	2,5558	2,55492
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n) - v_1(n)$ blíží konstantě $8,8\bar{8}$. Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o $8,8\bar{8}$ jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě. Dále můžeme pozorovat, že s rostoucím n se rozdíl $v_1(n+1) - v_1(n)$ blíží konstantě $2,5\bar{5}$. To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

11.4. Poznámka: Je-li $\{X_n; n \in N_0\}$ homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, m\}$ s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^m a_j q_j = g.$$

Konstanta g se nazývá **zisk řetězce**. V př. 10.3. $\mathbf{a} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $g = \frac{4}{9} \cdot 7 - \frac{5}{9} = 2, \bar{5}$.

11.5. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po n krocích

Pro vytvořující funkci $G_v(z)$ posloupnosti vektorů $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ platí: $G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$.

Důkaz: Podle definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů platí: $G_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)z^n$. Protože platí rekurentní vztah $v(n+1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}v(n)$, lze vytvořující funkci posloupnosti vektorů $\{v(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ psát ve tvaru:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(n+1)z^n = \mathbf{q} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \mathbf{P} \sum_{n=0}^{\infty} v(n)z^n = \mathbf{q} \frac{1}{1-z} + G_v(z) \cdot \mathbf{P}. \text{ Upravíme levou stranu:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(n+1)z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} v(n+1)z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} v(k)z^k = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} v(k)z^k - v(0) \right) = \frac{1}{z} G_v(z) \text{ Odtud dostaneme porovnáním levé a pravé}$$

strany:

$$\frac{1}{z} G_v(z) = \frac{1}{1-z} \mathbf{q} + G_v(z) \cdot \mathbf{P}. \text{ Po úpravě: } G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}.$$

11.6. Příklad: Pro zadání z příkladu 11.3. najděte vyjádření pro vektor $\mathbf{v}(n)$ pomocí vytvořujících funkcí.

Řešení: Z věty 11.5. plyne, že $G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/2 & z/2 \\ 2z/5 & 3z/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/2 & -z/2 \\ -2z/5 & 1-3z/5 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{I} - z\mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{5}\right) - \frac{z^2}{5} = \dots = (1-z) \cdot \left(1 - \frac{z}{10}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{10}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{5} & \frac{z}{2} \\ \frac{2z}{5} & 1 - \frac{z}{2} \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{10}} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} = \left[\frac{z}{(1-z)^2} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{10}\right)} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right]$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{z}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{10}\right)} = \dots = \frac{\frac{10}{9}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{9}}{1 - \frac{z}{10}}$$

$\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{10}{9} \cdot 1^n = \frac{10}{9}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$-\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{10}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Celkem:

$$\mathbf{v}(n) = \left[n \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{10}{9} (1 - 0,1^n) \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23n}{9} \\ \frac{23n}{9} \end{pmatrix} + (1 - 0,1^n) \begin{pmatrix} \frac{400}{81} \\ -\frac{320}{81} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tedy } v_0(n) = \frac{23n}{9} + \frac{400}{81} (1 - 0,1^n), v_1(n) = \frac{23n}{9} - \frac{320}{81} (1 - 0,1^n).$$

Pro dostatečně velká n se výraz $0,1^n$ bude blížit nule. Když ho zanedbáme, získáme přibližné vyjádření:
 $v_0(n) \approx 2,5555 n + 4,9383$, $v_1(n) \approx 2,5555 n - 34,9506$.

11.7. Věta: Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po n krocích pomocí limitní matice přechodu

Nechť \mathbf{A} je limitní matice přechodu daného markovského řetězce s oceněním přechodů. Pak pro dostatečně velká n platí: $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

11.8. Příklad: Pro zadání z příkladu 11.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor $\mathbf{v}(n)$.

Řešení: Použijeme vzorec $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$. Nejprve najdeme limitní matici \mathbf{A} , jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru matice \mathbf{P} . Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, $a_1 + a_2 = 1$ získáme vektor $\mathbf{a} = (4/9 \ 5/9)$, tudíž

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dále } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1,0617 & -0,0617 \\ -0,0494 & 1,0494 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$$\mathbf{v}(n) \approx (n-1) \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,0617 & -0,0617 \\ -0,0494 & 1,0494 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2,5n + 4,9383 \\ 2,5n - 3,9506 \end{pmatrix}.$$

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

Pro porovnání uvedeme tabulku získanou pomocí rekurentního vzorce:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272

11.9. Poznámka: Vektor středních hodnot celkových výnosů po jednom až n obdobích lze získat pomocí funkce

vynos.m:

```
function a = vynos(P,R,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% syntaxe: function a=vynos(P,R,n);
% funkce pocita:
%     vektory strednich hodnot celkovych vynosu po jednom az po n obdobich
%     znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlivé stavy
%     v závislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu, R - matice vynosu, n - pocet obdobi
disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp('pozn: na prvni radku hodnoty n')

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
```



```

legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);
%graf celkovych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end

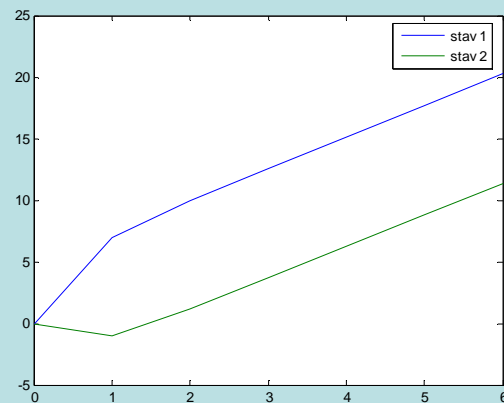
```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.3. pro jedno až 6 období, dostaneme výsledky:
sloupce vektory středních hodnot celkových výnosu po n krocích

0	1	2	3	4	5	6
0	7	10	12.6	15.16	17.716	20.2716
0	-1	1.2	3.72	6.272	8.8272	11.3827

pozn: na prvním radku hodnoty n

Graf celkových výnosů:



11.10. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β ($0 < \beta < 1$) je tzv. diskontní faktor. Uvedený řetězec se pak nazývá **markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů**.

Vysvětlení: Diskontní faktor snižuje hodnotu budoucího výnosu. Vystupuje v roli odúročitele, může být $1/(1+i)$, kde i je úročitel. Může také vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Jeho užití bude účelné tam, kde se může očekávat, že proces skončí, ale neví se, kdy přesně k tomu dojde.

11.11. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1), \text{ přičemž } \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů je $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

11.12. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po n krocích

Pro vytvořující funkci posloupnosti vektorů $\{\mathbf{v}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ v markovském řetězci s diskontovaným oceněním přechodů platí:

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - \beta z \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}.$$

Důkaz: Podobně jako důkaz věty 11.5.

11.13. Příklad: V příkladu 11.3. předpokládejme, že diskontní faktor $\beta = 0,5$ značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.

a) Pomocí rekurentního vztahu najděte vektor $\mathbf{v}(n)$ středních hodnot celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots, 6$ a stanovte limitní hodnotu tohoto vektoru.

b) Pomocí vytvořujících funkcí najděte vyjádření pro vektor $\mathbf{v}(n)$.

Řešení:

$$\text{Ad a) } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \beta = 0,5, \mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1).$$

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 0,1 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

Dále uvedeme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots, 6$.

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	8,5	9,15	9,47	9,6297	9,7096
$v_1(n)$	-1	0,1	0,73	0,1049	1,2087	1,2886
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,4	8,42	8,3651	8,4210	8,4210

Nyní vypočteme limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů podle vzorce: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$.

$$\mathbf{I} - \beta \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, |\mathbf{I} - \beta \mathbf{P}| = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{19}{40},$$

$$(\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} = \frac{40}{19} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{186}{19} \\ \frac{26}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,7895 \\ 1,3684 \end{pmatrix}$$

Rozdíl složek limitního vektoru: $9,7895 - 1,3684 = 8,4219$.

Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o 8,4219 jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

Ad b) Z věty 11.12. plyne, že $G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - \beta z \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/4 & z/4 \\ z/5 & 3z/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/4 & -z/4 \\ -z/5 & 1-3z/10 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{10}\right) - \frac{z^2}{20} = \dots = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{20}\right)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right) \left(1 - \frac{z}{20}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{10} & \frac{z}{4} \\ \frac{z}{5} & 1 - \frac{z}{4} \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{20}} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{q} = \left[\frac{z}{(1-z) \left(1 - \frac{z}{2} \right)} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z) \left(1 - \frac{z}{20} \right)} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right]$$

$$\frac{z}{(1-z) \left(1 - \frac{z}{2} \right)} = \dots = \frac{2}{1-z} + \frac{-2}{1 - \frac{z}{2}}$$

$2 \cdot \frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 2, n = 0, 1, 2, \dots$

$-2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{z}{(1-z) \left(1 - \frac{z}{20} \right)} = \dots = \frac{20}{1-z} + \frac{-20}{1 - \frac{z}{20}}$$

$\frac{20}{19} \cdot \frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{20}{19} \cdot 1^n = \frac{20}{19}, n = 0, 1, 2, \dots$

$-\frac{20}{19} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{20}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{20}{19} \cdot \left(\frac{1}{20} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Celkem:

$$v(n) = \left[2 \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{20}{19} (1 - 0,05^n) \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 186 \\ 19 \\ 26 \\ 19 \end{pmatrix} + 0,5^n \begin{pmatrix} -46 \\ 9 \\ -46 \\ 9 \end{pmatrix} + 0,05^n \begin{pmatrix} -800 \\ 171 \\ 640 \\ 171 \end{pmatrix}$$

Tedy $v_0(n) = 9,7895 - 0,5^n \cdot 5,1 - 0,05^n \cdot 4,6784, v_1(n) = 1,3684 - 0,5^n \cdot 5,1 + 0,05^n \cdot 3,7427.$

11. 14. Poznámka: Vektor středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až n obdobích a limitní hodnotu tohoto vektoru lze získat pomocí funkce `diskont.m`:

```
function a=diskont(P,R,beta,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% function a=diskont(P,R,beta,n);
% funkce pocita:
%     vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po jednom az po n obdobich
%     limitni vektor strednich hodnot diskontovanych vynosu
%     znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlivé stavy
%     v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu
% R - matice vynosu
% beta - diskontni faktor
% n - pocet obdobi
%clc;

disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
```

```

q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+beta*P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupce vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp(['pri hodnote diskontniho faktoru beta = ',num2str(beta)])
disp('pozn: na prvni radku hodnoty n')
disp(' ')
disp('limitni vektor v(n)')
v_n=inv(eye(vel(1))-beta*P)*q;
disp(num2str(v_n))

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))= ['stav ',num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);

%graf diskontovanych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end

```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 11.13. a) pro jedno až 6 období, dostaneme tyto výsledky:

sloupceve vektory středních hodnot diskontovaných výnosů po n krocích

0	1	2	3	4	5	6
0	7	8.5	9.15	9.47	9.6297	9.7096
0	-1	0.1	0.73	1.049	1.2087	1.2886

pri hodnotě diskontního faktoru $\beta = 0.5$

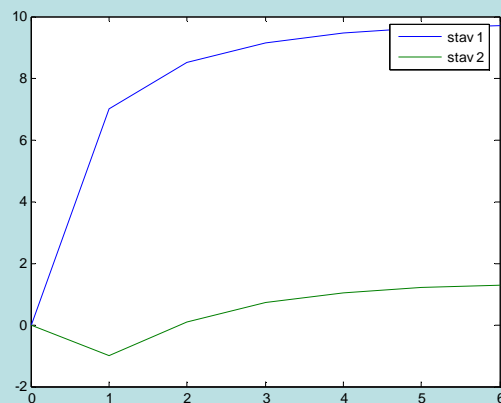
pozn: na prvním radku hodnoty n

limitní vektor $v(n)$

9.7895

1.3684

Graf diskontovaných výnosů:



12. Řízené markovské řetězce

12.1. Definice: Definice optimální strategie

Nechť v každém kroku je možno ergodický homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, N\}$ definovat h různými maticemi přechodu ${}^1\mathbf{P} = ({}^1p_{ij})$, ..., ${}^h\mathbf{P} = ({}^hp_{ij})$ a h různými maticemi výnosů ${}^1\mathbf{R} = ({}^1r_{ij})$, ..., ${}^h\mathbf{R} = ({}^hr_{ij})$. V každém kroku můžeme vybrat jednu matici přechodu a odpovídající matici výnosů. Možnosti 1, 2, ..., h se nazývají strategie. Označme $d_i(n)$ strategií vybranou v n -tém kroku ve stavu i . Ta strategie $d_i^*(n)$, pro kterou dosahuje střední hodnota celkového výnosu svého maxima, se nazývá **optimální strategie**.

12.2. Věta: Věta o optimální strategii

Předpokládejme, že v krocích $n-1, n-2, \dots, 1$ byla nalezena optimální strategie. Označme $v_i(n)$ maximální střední hodnotu celkového výnosu v n -tém kroku ve stavu i , tj.
$$v_i(n) = \max_{1 \leq k \leq h} \left\{ q_i^k + \sum_{j \in J} p_{ij}^k v_j(n-1) \right\}.$$
 Je-li maxima dosaženo pro $k = k^*$, pak optimální strategie v n -tém kroku ve stavu i je $d_i^*(n) = k^*$.

12.3. Příklad: Je sledována výrobní linka, která se může nacházet buď v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Ve stavu 0 je možný provoz „bez kontroly agregátů“ (strategie 1) nebo „s kontrolou agregátů“ (strategie 2). Ve stavu 1 je možno rozlišit opravu „bez výměny agregátů“ (strategie 1) nebo „s výměnou agregátů“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:

$${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, {}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.

Řešení: Připomeňme, že střední hodnota výnosu při jednom přechodu ze stavu i se vypočte podle vzorce $q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$.

A dále, maximální střední hodnota výnosu v n -tém kroku ve stavu i je $v_i(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ k q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1) \right\}$. Je-li maxima

dosaženo pro $k = k^*$, pak optimální strategie v n -tém kroku ve stavu i je právě k^* .

Přitom

$${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, {}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{tedy}$$

$${}^1q_0 = {}^1p_{00} r_{00} + {}^1p_{01} r_{01} = 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0 = 1, {}^1q_1 = {}^1p_{10} r_{10} + {}^1p_{11} r_{11} = 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot (-5) = -3,8$$

$${}^2q_0 = {}^2p_{00} r_{00} + {}^2p_{01} r_{01} = 0,4 \cdot 3 + 0,6 \cdot 1 = 1,8, {}^2q_1 = {}^2p_{10} r_{10} + {}^2p_{11} r_{11} = 0,4 \cdot 2 + 0,6 \cdot (-2) = -0,4$$

$${}^1\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3,8 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

$$v_0(1) = \max\{1; 1,8\} = 1,8 \Rightarrow d_0^*(1) = 2, v_1(1) = \max\{-3,8; -0,4\} = -0,4 \Rightarrow d_1^*(1) = 2$$

$$v_0(2) = \max\{{}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0(1) + {}^1p_{01}v_1(1); {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0(1) + {}^2p_{01}v_1(1)\} =$$

$$= \max\{1 + 0,5 \cdot 1,8 + 0,5 \cdot (-0,4); 1,8 + 0,4 \cdot 1,8 + 0,6 \cdot (-0,4)\} = \max\{1,7; 2,28\} = 2,28 \Rightarrow d_0^*(2) = 2$$

$$v_1(2) = \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0(1) + {}^1p_{11}v_1(1); {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0(1) + {}^2p_{11}v_1(1)\} =$$

$$= \max\{-0,2 + 0,2 \cdot 1,8 + 0,8 \cdot (-0,4); -0,4 + 0,4 \cdot 1,8 + 0,6 \cdot (-0,4)\} = \max\{-3,76; 0,08\} = 0,08 \Rightarrow d_1^*(2) = 2$$

$$v_0(3) = \max\{{}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0(2) + {}^1p_{01}v_1(2); {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0(2) + {}^2p_{01}v_1(2)\} =$$

$$= \max\{1 + 0,5 \cdot 2,28 + 0,5 \cdot 0,08; 1,8 + 0,4 \cdot 2,28 + 0,6 \cdot 0,08\} = \max\{2,18; 2,76\} = 2,88 \Rightarrow d_0^*(3) = 2$$

$$v_1(3) = \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0(2) + {}^1p_{11}v_1(2); {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0(2) + {}^2p_{11}v_1(2)\} =$$

$$= \max\{-0,2 + 0,2 \cdot 2,28 + 0,8 \cdot 0,08; -0,4 + 0,4 \cdot 2,28 + 0,6 \cdot 0,08\} = \max\{-3,28; 0,56\} = 0,56 \Rightarrow d_1^*(3) = 2$$

Závěr: V prvním, druhém i třetím kroku je vektor optimálních strategií $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

12.4. Poznámka: Uvedená metoda hledání optimálních strategií se nazývá **rekurentní metoda**. Hodí se jen pro malý počet kroků. Pro větší počet kroků je vhodnější použít **iterační metodu**.

12.5. Poznámka: Popis iterační metody hledání optimální strategie

Ve větě 11.5. bylo dokázáno, že vytvořující funkce posloupnosti vektorů $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ má tvar:

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}. \text{ V teorii matic se dokazuje, že matice } (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \text{ obsahuje stacionární složku } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{a}$$

je stacionární vektor matice \mathbf{P} a tranzientní složku \mathbf{T} . Lze tedy psát

$$G_v(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \mathbf{S}\mathbf{q} + \frac{z}{(1-z) \left(1 - \frac{z}{c_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{c_k}\right)} \mathbf{T}\mathbf{q} = \frac{z}{(1-z)^2} \mathbf{S}\mathbf{q} + \left(\frac{A}{1-z} + \frac{B_1}{1 - \frac{z}{c_1}} + \dots + \frac{B_k}{1 - \frac{z}{c_k}} \right) \mathbf{T}\mathbf{q}, \text{ kde } c_i > 1, i = 1, \dots, k.$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$.

$A \frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = A$ (nezávisí tedy na n).

$B_i \frac{1}{1 - \frac{z}{c_i}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = B_i \left(\frac{1}{c_i}\right)^n$. Protože $c_i > 1$, budou výrazy obsahující $\left(\frac{1}{c_i}\right)^n$ pro

dostatečně velká n velmi malé. Pro dostatečně velká n tedy platí:

$\mathbf{v}(n) = n\mathbf{S}\mathbf{q} + \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q}$. Označíme-li $\mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{g}$ a $\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} = \mathbf{v}$, lze psát pro dostatečně velká n :

$\mathbf{v}(n) = n\mathbf{g} + \mathbf{v}$ neboli $v_i(n) = ng + v_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. Dosadíme-li toto vyjádření do rekurentního vztahu

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=0}^N p_{ij} v_j(n-1), \text{ dostaneme}$$

$ng + v_i = q_i + \sum_{j=0}^N p_{ij}[(n-1)g + v_j]$. Upravíme:

$$ng + v_i = q_i + ng \sum_{j=0}^N p_{ij} - g \sum_{j=0}^N p_{ij} + \sum_{j=0}^N p_{ij} v_j = q_i + ng - g + \sum_{j=0}^N p_{ij} v_j \Rightarrow g + v_i = q_i + \sum_{j=0}^N p_{ij} v_j$$

Dostali jsme systém $N + 1$ rovnic pro $N + 2$ neznámých g, v_0, v_1, \dots, v_N . Protože neznámých je o jednu více než rovnic, nelze určit skutečné hodnoty neznámých v_0, v_1, \dots, v_N , kterým se říká váhy. Howard navrhl položit $v_N = 0$. Tím se počet neznámých sníží a lze vypočítat relativní váhy v_0, v_1, \dots, v_{N-1} , které se od skutečných vah budou lišit jenom o konstantu, tedy jejich rozdíly budou stejné jako u skutečných vah. Např. rozdíl $v_0 - v_1$ lze interpretovat jako rozdíl mezi střední hodnotou výnosu procesu, který vyšel ze stavu 0 a střední hodnotou výnosu procesu, který vyšel ze stavu 1. Kritériem pro volbu strategie je výraz ${}^k q_i + \sum_{j=0}^N {}^k p_{ij} v_j$.

Algoritmus Howardova iteračního postupu:

1. krok: Pomocí veličin p_{ij}, q_i určíme veličiny g, v_i z rovnic $g + v_i = q_i + \sum_{j=0}^N p_{ij} v_j$, přičemž $v_N = 0$.
2. krok: Pro každý stav $i \in J$ najdeme strategii k^* , která maximalizuje výraz ${}^k q_i + \sum_{j=0}^N {}^k p_{ij} v_j$.
3. krok: Nalezená strategie k^* poskytne hodnoty ${}^{k^*} q_i, {}^{k^*} p_{ij}$ pro opakování kroků 1 a 2.

Algoritmus končí, jakmile vektor strategií je stejný ve dvou po sobě následujících iteracích. (Zpravidla stačí provést jen několik málo iterací.)

12.6. Příklad:

Závod produkuje nějaký spotřební výrobek, u něhož lze rozeznat dva stavy: stav 0 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou, stav 1 – výrobek je neúspěšný, odbyt vážne a cena je nízká. Při 1. strategii vedení závodu neinvestuje ani do technického rozvoje ani do reklamy. Při této strategii je matice přechodu ${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ a matice výnosů ${}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Při 2. strategii vedení závodu zajistí technický rozvoj a investuje do reklamy. Matice přechodu: ${}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$, matice výnosů: ${}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$. (Při 2. strategii se vyšší náklady promítnou do zisku, proto výnos ${}^2r_{00}$ musí být nižší než ${}^1r_{00}$, stejně tak ${}^2r_{11}$ musí být nižší než ${}^1r_{11}$.) Pomocí iterační metody je třeba zjistit, jakou strategii doporučit vedení závodu, aby střední hodnota celkového výnosu byla maximální.

Řešení:

Nejprve vypočítáme vektory ${}^1\mathbf{q} = ({}^1q_0, {}^1q_1)$ a ${}^2\mathbf{q} = ({}^2q_0, {}^2q_1)$.

$$\text{Přitom } {}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, {}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$$

$${}^1q_0 = {}^1p_{00} {}^1r_{00} + {}^1p_{01} {}^1r_{01} = 0,5 \cdot 9 + 0,5 \cdot 3 = 6, {}^1q_1 = {}^1p_{10} {}^1r_{10} + {}^1p_{11} {}^1r_{11} = 0,4 \cdot 3 + 0,6 \cdot (-7) = -3$$

$${}^1\mathbf{q} = (6, -3)$$

$${}^2q_0 = {}^2p_{00} {}^2r_{00} + {}^2p_{01} {}^2r_{01} = 0,8 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 = 4, {}^2q_1 = {}^2p_{10} {}^2r_{10} + {}^2p_{11} {}^2r_{11} = 0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-19) = -5$$

$${}^2\mathbf{q} = (4, -5)$$

1. iterace: zvolíme $d_0(1) = 1$, $d_1(1) = 1$ a pro $i = 0, 1$ vyřešíme systém rovnic $g + v_i = q_i + \sum_{j=0}^N p_{ij} v_j$ (přitom položíme $v_1 = 0$)

$$g + v_0 = {}^1q_0 + {}^1p_{00} v_0 + {}^1p_{01} v_1 : g + v_0 = 6 + 0,5 \cdot v_0$$

$$g + v_1 = {}^1q_1 + {}^1p_{10} v_0 + {}^1p_{11} v_1 : g = -3 + 0,4 \cdot v_0$$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10$, $g = 1$.

2. iterace:

$$i = 0, k = 1: {}^1q_0 + {}^1p_{00} v_0 + {}^1p_{01} v_1 = 6 + 0,5 \cdot 10 = 11$$

$$k = 2: {}^2q_0 + {}^2p_{00} v_0 + {}^2p_{01} v_1 = 4 + 0,8 \cdot 10 = 12$$

$$\max\{11, 12\} = 12, \text{ tedy } d_0(2) = 2$$

$$i = 1, k = 1: {}^1q_1 + {}^1p_{10} v_0 + {}^1p_{11} v_1 = -3 + 0,4 \cdot 10 = 1$$

$$k = 2: {}^2q_1 + {}^2p_{10} v_0 + {}^2p_{11} v_1 = -5 + 0,7 \cdot 10 = 2$$

$$\max\{1, 2\} = 2, \text{ tedy } d_1(2) = 2$$

Výsledek 2. iterace dává vektor strategií $(2, 2)$.

S tímto vektorem vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$$g + v_0 = {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 : g + v_0 = 4 + 0,8 \cdot v_0$$

$$g + v_1 = {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 : g = -5 + 0,7 \cdot v_0$$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10, g = 2$.

3. iterace:

$$i = 0, k = 1: {}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0 + {}^1p_{01}v_1 = 6 + 0,5 \cdot 10 = 11$$

$$k = 2: {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 = 4 + 0,8 \cdot 10 = 12$$

$$\max\{11, 12\} = 12, \text{ tedy } d_0(3) = 2$$

$$i = 1, k = 1: {}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 = -3 + 0,4 \cdot 10 = 1$$

$$k = 2: {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 = -5 + 0,7 \cdot 10 = 2$$

$$\max\{1, 2\} = 2, \text{ tedy } d_1(3) = 2$$

Výsledek 3. iterace dává vektor strategií $(2, 2)$.

Protože ve dvou po sobě jdoucích iteracích jsme dostali stejný vektor strategií, výpočet končí.

Interpretace: Kromě počátečního kroku přinese větší zisk ta strategie, která zahrnuje náklady na technický rozvoj a reklamu výrobku.

12.7. Poznámka: Pro libovolný počet strategií lze v MATLABu použít funkci `howardn.m`, kterou v r. 2012 vytvořil student Jakub Buček.

Aplikujeme-li tuto funkci na příklad 12.6, dostaneme výstup:

D =

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}$$

Konečný vektor strategií je $(2 \ 2)'$.

```

function D = howardn(P,R)

% Algoritmus Howardova iteracniho postupu pro libovolny pocet stavu
% a libovolny pocet strategii
% Autor: Jakub Bucek, 2012
% Vstupni parametry:
%   P...matice prechodu vseh strategii naskladane do jedne matice
%   R...matice vynosu vseh strategii naskladane do jedne matice
%   Mame-li jednotlivé matice P1,P2,...,Pk a R1,R2,...,Rk, doporučuje se
%   uvadet funkci ve tvaru: howardn([P1,P2,...,Pk],[R1,R2,...,Rk])
% Vystup:
%   D...matice obsahujici optimalni strategii pro jednotlivé období,
%   jednotlivá období jsou oznacena císlem radku

[a,b]=size(P);

% vypocet matice Q, která obsahuje v radcich vektory q pro jednotlivé
% strategie
for k=1:(b/a)
    Q(k,:)=diag(P(1:a,(1+a*(k-1)):(a*k))*R(1:a,(1+a*(k-1)):(a*k))');
end;

% matice D, obsahujici vektory strategii pro jednotlivá období
[x,d]=max(Q);
D(1,:)=d;

% nastaveni pocatecnich podmínek pro cyklus
konec=false;
j=1;

```

```

while konec==false
% indexujeme strategii z minuleho obdobi
    d=D(j,:);
% sestrojime rovnici podle vektoru strategii
    for k=1:a
        PP(k,:)=P(k,(a*d(k)-a+1):(a*d(k)));
        QQ(k)=Q(d(k),k);
    end;

% vyresime rovnici a ziskame vektor v, pro pripad pozdejsiho vypisu jej
% take ulozi do matice V, kterou vsak nebudeme ve vystupu zobrazovat
    A=eye(a)-PP;
    v=inv([ones(a,1),A(:,1:(a-1))])*QQ';
    v(a+1)=0;
    V(j,:)=v;

% nahrazeni prvni slozky ve vektoru v za 1, zbavujeme se tak g, ktere vsak
% v dalsim vypoctu nepotrebujeme
    v(1)=1;

% pocitame optimalni strategii pro soucasne obdobi
    for k=1:(b/a)
        M(k,:)= [Q(k,:)',P(1:a,(1+a*(k-1)):(a*k))]*v;
    end;

    [x,m]=max(M);

% a vysledek ulozi do nasi matice D
    D(j+1,:)=m;

```

```
% kontrola, zdali je splnena podminka pro ukoncení algoritmu
    if sum(all(D(j,:) == D(j+1,:))) == 1
        konec = true;
    end;

% navysujeme krok v období
    j = j + 1;

end;

end
```

13. Markovské řetězce se spojitým časem – základní pojmy

13.1. Definice: Definice markovského řetězce se spojitým časem

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $T = \langle 0, \infty \rangle$ je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a $J = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ nebo $J = \{0, 1, \dots, n\}$). Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, A) , jehož složky X_t nabývají hodnot z množiny stavů J , se nazývá **markovský řetězec** (se spojitým časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J \exists t \in T : P(X_t = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall t_0, t_1, \dots, t_n \in T (t_0 < t_1 < \dots < t_n) \forall j_0, j_1, \dots, j_n \in J : P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_{t_0} = j_0) = P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1})$

za předpokladu, že $P(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_{t_0} = j_0) > 0$ (markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých).

Vysvětlení: Markovské řetězce se spojitým časem modelují fyzikální či jiné soustavy, které mohou v libovolném okamžiku náhodně přejít do některého ze svých možných stavů. Markovská vlastnost znamená, že to, do jakého stavu se soustava dostane při následující změně, závisí pouze na tom, v jakém stavu se soustava právě nachází a nezávisí na stavech předchozích. Např. sledujeme-li během pracovní doby provoz automatických strojů v dílně, náhodná veličina X_t , $t \in \langle 0, T \rangle$ je počet strojů, které v okamžiku t nepracují (jsou opravovány nebo čekají na opravu).

13.2. Příklad: Uvažme populaci, jejíž jedinci se mohou množit a zanikat. Pravděpodobnost, že z libovolného jedince vznikne v časovém intervalu $(t, t + h)$ nový jedinec, je $\lambda h + o(h)$ (symbol $o(h)$ znamená, že $\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0$) a pravděpodobnost, že libovolný jedinec zanikne v intervalu $(t, t + h)$, je $\mu h + o(h)$. Osudy jedinců jsou navzájem nezávislé. Označme X_t rozsah populace v čase t . Pak stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Nazývá se lineární proces vzniku a zániku (resp. lineární proces množení a úmrtí).

13.3. Označení:

Jev $\{X_t = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku t ve stavu j .

$P(X_t = j) = p_j(t)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku t .

$\mathbf{p}(t) = (\dots, p_j(t), \dots)$ – **vektor absolutních pravděpodobností**.

$P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(t, t+h)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku t do stavu j v okamžiku $t+h$

$\mathbf{P}(t, t+h) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(t, t+h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ – **matice pravděpodobností přechodu mezi okamžiky $t, t+h$** .

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j .

$\mathbf{p}(0) = (\dots, p_j(0), \dots)$ – **vektor počátečních pravděpodobností**.

13.4. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec. Pokud dále uvedené podmíněné pravděpodobnosti existují, platí pro

$\forall t, h, g \in T \forall i, j \in J$:

a) $P(X_{t+h} = j / X_t = i) \geq 0$, tj. $p_{ij}(t, t+h) \geq 0$

$$P(X_t = j / X_t = i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}, \text{ tj. } p_{ij}(t, t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}.$$

b) $\sum_{j \in J} P(X_{t+h} = j / X_t = i) = 1$, tj. $\sum_{j \in J} p_{ij}(t, t+h) = 1$.

(Přechod ze stavu i v okamžiku t do nějakého stavu j v okamžiku $t+h$ je jev s pravděpodobností 1.)

c) $P(X_{t+h+g} = j / X_t = i) = \sum_{k \in J} P(X_{t+h} = k / X_t = i) P(X_{t+h+g} = j / X_{t+h} = k)$, tj. $p_{ij}(t, t+h+g) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+g)$

(Chapmanovy – Kolmogorovovy rovnice)

d) $P(X_{t+h} = j) = \sum_{k \in J} P(X_t = k) P(X_{t+h} = j / X_t = k)$, tj. $p_j(t+h) = \sum_{k \in J} p_k(t) p_{kj}(t, t+h)$

(Zákon evoluce)

Důkaz: Analogicky jako v diskrétním případě.

13.5. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce se spojitým časem v maticovém tvaru

a) $\mathbf{P}(t, t+h) \geq \mathbf{0}$, kde $\mathbf{0}$ je nulová matice, $\mathbf{P}(t, t) = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice.

b) $\mathbf{P}(t, t+h)\mathbf{e} = \mathbf{e}$, kde \mathbf{e} je sloupcový vektor ze samých jedniček.

c) $\mathbf{P}(t, t+h+g) = \mathbf{P}(t, t+h) \mathbf{P}(t+h, t+h+g)$.

d) $\mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t) \mathbf{P}(t, t+h)$.

13.6. Definice: Definice HMŘ se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Řekneme, že tento řetězec je **homogenní**, jestliže platí:

$$\forall i, j \in J \forall t, h \in T : P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h).$$

Vysvětlení: Znamená to, že pravděpodobnosti přechodu $P(X_{t+h} = j / X_t = i)$ – pokud existují – závisí pouze na časovém přírůstku h a nezávisí na časovém okamžiku t .

Matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t, t+h)$ se pak značí $\mathbf{P}(h)$ a nazývá se **matice přechodu za časový přírůstek h** . Pro HMŘ se spojitým časem tedy existuje celý systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Je zvykem definovat $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

13.7. Věta: Vyjádření simultánní pravděpodobnostní funkce pro HMŘ

Pro homogenní markovský řetězec se spojitým časem platí:

$$\forall t, h_1, \dots, h_n \in T \forall j_0, j_1, \dots, j_n \in J : P(X_t = j_0 \wedge X_{t+h_1} = j_1 \wedge \dots \wedge X_{t+h_1+\dots+h_n} = j_n) = p_{j_0 j_1}(t) p_{j_0 j_1}(h_1) \dots p_{j_{n-1} j_n}(h_n)$$

Důkaz: Plyne z věty o násobení pravděpodobností a markovské vlastnosti.

13.8. Věta: CH-K rovnice a zákon evoluce pro HMŘ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak pro $\forall h, g \in T$ platí:

a) $\mathbf{P}(h+g) = \mathbf{P}(h) \mathbf{P}(g)$ (Chapmanova – Kolmogorovova rovnice)

b) $\mathbf{p}(h) = \mathbf{p}(0) \mathbf{P}(h)$ (zákon evoluce)

Důkaz: ad a) plyne z tvrzení (c) věty 13.4

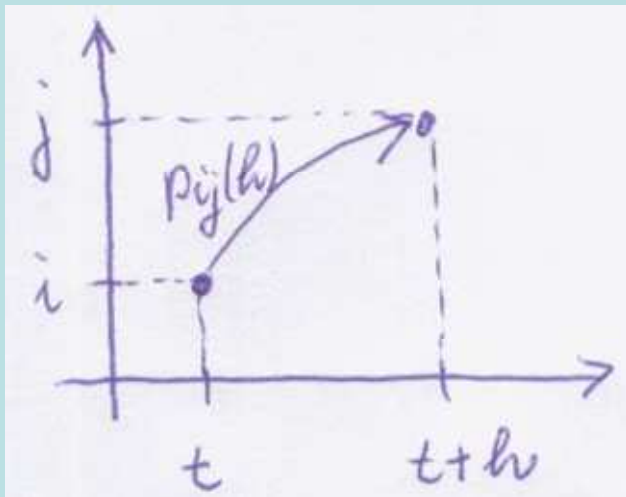
ad b) plyne z tvrzení (d) věty 13.4

13.9. Věta: Existenční věta

Ke každému stochastickému vektoru $\mathbf{p}(0)$ a ke každému systému stochastických matic $\{\mathbf{P}(h); h \in T\}$, které splňují CH-K rovnice, existuje HMŘ se spojitým časem, jehož počáteční pravděpodobnosti jsou dány vektorem $\mathbf{p}(0)$ a systémem matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\mathbf{P}(h); h \in T\}$.

14. Matice intenzit přechodu homogenního markovského řetězce se spojitým časem

14.1. Motivace: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem. Předpokládejme, že v okamžiku t je řetězec ve stavu i a za časový přírůstek h přejde do stavu j s pravděpodobností $p_{ij}(h)$.



Číslo $\frac{p_{ij}(h)}{h}$ vyjadřuje průměrnou pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za časový přírůstek h .

Označme $p_{ii}(h)$ pravděpodobnost, že za časový přírůstek h řetězec setrvá ve stavu i . Pak $1 - p_{ii}(h)$ je pravděpodobnost, že za časový přírůstek h řetězec přejde do nějakého jiného stavu.

Číslo $\frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$ vyjadřuje průměrnou pravděpodobnost výstupu řetězce ze stavu i za časový přírůstek h .

Intenzity přechodu resp. výstupu popisují chování těchto průměrných pravděpodobností pro $h \rightarrow 0_+$.

14.2. Poznámka: Nadále budeme předpokládat, že

a) $\forall i, j \in J$ existuje $\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$

b) $\forall i \in J$ existuje $\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$

c) $\forall i, j \in J$ existuje $\lim_{h \rightarrow 0_+} p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$

14.3. Definice: Definice intenzit přechodu a výstupu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem se systémem matic přechodu $\{P(h), h \in T\}$. Pak definujeme:

a) $\forall i, j \in J: q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$ - intenzita přechodu ze stavu i do stavu j

b) $\forall i \in J: q_i = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$ - intenzita výstupu ze stavu i .

Vysvětlení: Z definice intenzity přechodu resp. výstupu plyne, že $p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h)$ resp. $p_{ii}(h) = 1 - hq_i + o(h)$. Pro dostatečně malá h tedy dostáváme $p_{ij}(h) \approx hq_{ij}$ resp. $p_{ii}(h) \approx 1 - hq_i$. Číslo q_{ij} vyjadřuje koeficient nárůstu pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(h)$ během krátkého časového intervalu délky h a číslo q_i vyjadřuje koeficient poklesu pravděpodobnosti setrvání $p_{ii}(h)$ během krátkého časového intervalu délky h .

14.4. Věta: Věta o součtu intenzit přechodu

Je-li množina stavů J konečná, pak pro intenzity přechodu platí: $\forall i \in J: \sum_{j \in J} q_{ij} = 0$, kde $q_{ii} = -q_i$.

Důkaz: Vztah $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0$ přepíšeme do tvaru $\sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij} = q_i$.

$$\text{Počítáme } \sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \in J, j \neq i} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \sum_{j \in J, j \neq i} p_{ij}(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [1 - p_{ii}(h)] = q_i.$$

14.5. Definice: Definice matice intenzit přechodu

Matice $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá **matice intenzit přechodu** HMR se spojitým časem.

Vysvětlení: Matice \mathbf{Q} je charakterizována tím, že $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} < 0$ a součet prvků v každém řádku je nulový. Je to **kvazistochastická matice**.

14.6. Věta: Vztah mezi maticí intenzit přechodu a maticí přechodu

Je-li $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má konečnou množinu stavů J , matici intenzit přechodu \mathbf{Q} a systém matic pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, pak pro $\forall t \in T$ platí: $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$, kde $e^{\mathbf{Q}t}$ je maticová

exponenciální funkce definovaná předpisem: $e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}$

14.7. Poznámka:

Matici intenzit přechodu lze graficky vyjádřit pomocí přechodového diagramu. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde

a) vrcholy jsou stavy

b) hrany odpovídají nenulovým intenzitám přechodu

c) ohodnocení hran je rovno těmto intenzitám. Hrany, které nejsou smyčkami, mají kladné ohodnocení ($q_{ij} > 0$) a smyčky mají záporné ohodnocení ($q_{ii} < 0$).

14.8. Příklad: Doba bezporuchového provozu přístroje je náhodná veličina s rozložením $Ex(\alpha)$. Když dojde k poruše, přístroj začne být okamžitě opravován. Doba opravy je náhodná veličina s rozložením $Ex(\beta)$. Jakmile je oprava ukončena, přístroj je okamžitě uveden do provozu.

a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ se spojitým časem.

b) Najděte matici intenzit přechodu Q a nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

Ad a) Zavedeme náhodnou veličinu $X_t = \begin{cases} 0, & \text{pokud v čase } t \text{ stroj pracuje} \\ 1, & \text{pokud v čase } t \text{ je stroj v opravě} \end{cases}$. Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se

spojitým časem s množinou stavů $J = \{0, 1\}$.

Ad b) Je-li Y spojitá náhodná veličina, pak její pravděpodobnostní chování je popsáno hustotou pravděpodobnosti $\varphi(y)$. Pro distribuční funkci $\Phi(y)$ platí: $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt$. Dále zavedeme funkci přežití $\Psi(y) = P(Y > y)$ a intenzitu $\lambda(y) = -\frac{\Psi'(y)}{\Psi(y)}$.

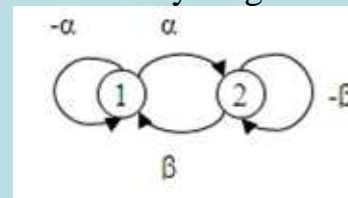
V našem případě označme Y_1 dobu bezporuchového provozu přístroje, $Y_1 \sim Ex(\alpha)$, tedy $\varphi_1(y_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y_1} & \text{pro } y_1 > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$,

$$\Phi_1(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha y_1} & \text{pro } y_1 > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad \Psi_1(y_1) = \begin{cases} e^{-\alpha y_1} & \text{pro } y_1 > 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}, \quad \lambda_1(y_1) = -\frac{\Psi_1'(y_1)}{\Psi_1(y_1)} = -\frac{-\alpha e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1}} = \alpha.$$

Analogicky označme Y_2 dobu opravy přístroje, $Y_2 \sim Ex(\beta)$. Stejným způsobem odvodíme, že $\lambda_2(y_2) = \beta$.

Matice intenzit přechodu: Přechodový diagram:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \end{matrix}.$$



14.9. Věta: Věta o významu intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má spočetnou množinu stavů J a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

a) Nechť $t \in \langle s, s+h \rangle$, kde $s \geq 0$ a $h > 0$. Pak $P(X_t = i / X_s = i) = e^{-q_i h}$, kde $e^{-q_i h} = 0$, je-li $q_i = \infty$.

b) Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(h) = 1$.

c) Je-li $0 < q_i < \infty$, pak veličina, která udává dobu setrvání řetězce ve stavu i , se řídí rozložením $Ex(q_i)$. Znamená to, že

střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu i je $\frac{1}{q_i}$. Dále, pravděpodobnost toho, že první přechod ze stavu i se uskuteční

právě do stavu j , $j \neq i$, je $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

14.10. Definice: Definice různých typů stavů

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

a) Jestliže $q_i = 0$, pak řekneme, že stav i je **absorpční**. (Řetězec, který vstoupí do absorpčního stavu, už v něm zůstane.

Střední hodnota doby setrvání v absorpčním stavu je nekonečně velká.)

b) Jestliže $0 < q_i < \infty$, pak řekneme, že stav i je **stabilní**. (Budeme se zabývat výhradně řetězci se stabilními stavy)

c) Jestliže $q_i = \infty$, pak řekneme, že stav i je **nestabilní**. (Střední hodnota doby setrvání v nestabilním stavu je nulová.)

14.11. Definice: Definice stacionárního vektoru HMŘ se SČ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$. Stochastický vektor \mathbf{a} takový, že pro $\forall t \in T$ platí $\mathbf{a} = \mathbf{aP}(t)$, se nazývá **stacionární vektor** (**stacionární rozložení**) daného řetězce.

14.12. Poznámka: Řešení rovnice $\mathbf{a} = \mathbf{aP}(t)$ pro $\forall t \in T$ může být obtížné. Proto stacionární vektor počítáme raději pomocí matice intenzit přechodu.

14.13. Věta: Věta o získání stacionárního vektoru pomocí matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$. Jestliže existuje $t \in T$ tak, že matice $\mathbf{P}(t)$ je regulární (tj. všechny její prvky jsou kladné), pak existuje stacionární vektor daného řetězce a je dán vztahem: $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$. Toto řešení je jediné.

14.14. Příklad: Pro zadání příkladu 14.8. najděte stacionární vektor.

Řešení: Odvodili jsme, že $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$. Hledáme $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$, kde $a_0 + a_1 = 1$, tak, aby $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$.

$$(a_0, a_1) \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} = (0, 0), a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1 - a_0.$$

$$-\alpha a_0 + \beta a_1 = 0 \Rightarrow -\alpha a_0 + \beta(1 - a_0) = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, a_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Stacionární vektor má tedy tvar: $\mathbf{a} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$.

14.15. Definice: Definice ergodického řetězce

Homogenní markovský řetězec se spojitým časem a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ se nazývá **ergodický**, jestliže pro všechny stochastické vektory \mathbf{a} odpovídající dimenze existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{aP}(t)$ a tato limita na nich nezávisí.

14.16. Definice: Definice limitního rozložení a limitní matice přechodu

a) Jestliže existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) = \bar{\mathbf{p}}$, pak $\bar{\mathbf{p}}$ se nazývá **limitní rozložení (limitní vektor)** daného řetězce.

b) Jestliže existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \mathbf{A}$, pak \mathbf{A} se nazývá **limitní matice přechodu** daného řetězce. Má-li všechny řádky stejné, nazývá se **ergodická limitní matice přechodu**.

14.17. Věta: Věta o souvislosti stacionárního a limitního rozložení

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má stacionární rozložení \mathbf{a} . Pak platí:

- a) Jeho limitní rozložení $\bar{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení \mathbf{a} .
- b) Všechny řádky limitní matice \mathbf{A} jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru \mathbf{a} .

14.18. Poznámka: Při hledání stacionárního rozložení lze v MATLABu použít funkci `stacionarni_vektor.m`:

```
function [a]=stacionarni_vektor(Q)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=stacionarni_vektor(Q)
%vstupni parametr ... kvazistochasticka matice Q
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
n=size(Q,1);
A=[Q';ones(1,n)];
f=[zeros(n,1);1];
a=(A\f);
```

14.19. Příklad: Necht' HMŘ se SČ má množinu stavů $\{0,1,2\}$ a matici intenzit přechodu

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Pomocí MATLABu najděte jeho stacionární rozložení.}$$

Řešení:

Zadáme matici $Q=[-1 \ 1 \ 0; 2 \ -3 \ 1; 0 \ 1 \ -1]$

Zavoláme funkci `stacionarni_vektor`:

`a=stacionarni_vektor(Q)`

Dostaneme výsledek:

`a =`

`0.5000 0.2500 0.2500`

Znamená to, že po uplynutí dostatečně dlouhé doby polovinu doby stráví řetězec ve stavu 0, čtvrtinu doby ve stavu 1 a rovněž čtvrtinu doby ve stavu 2.

14.20. Příklad: V dílně pracuje N strojů téhož typu. V libovolný okamžik může nastat porucha kteréhokoliv stroje. O stroje se stará r opravářů, $r < N$. Na opravě stroje se podílí vždy jen jeden z nich. Stroj se v případě poruchy začne okamžitě opravovat, pokud je některý z opravářů volný. Porouchá-li se stroj v okamžiku, kdy jsou všichni opraváři zaměstnáni, musí se čekat, až se některý uvolní. Je známo, že:

stroj, který pracuje v čase t , se během krátkého časového intervalu $(t, t + h)$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$;

stroj, který je v čase t opravován, se během krátkého časového intervalu $(t, t + h)$ vrátí do provozu s pravděpodobností $\mu h + o(h)$.

Pomocí HMŘ se spojitým časem modelujte počet strojů, které v čase t nepracují. Najděte matici intenzit přechodu a najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.

Řešení:

Nechť X_t je počet strojů, které v čase t nepracují. Pak $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má množinu stavů $J = \{0, 1, \dots, N\}$.

Jeho matici pravděpodobností přechodu určíme takto:

Pravděpodobnost, že se počet strojů, které nepracují, zvětší v intervalu $(t, t + h)$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které v čase t pracují, tj. $p_{j,j+1}(h) = (N - j)\lambda h + o(h)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Pravděpodobnost, že se počet strojů, které nepracují, zmenší v intervalu $(t, t + h)$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které jsou v čase t opravovány, tj. $p_{j,j-1}(h) = j\mu h + o(h)$, $j = 1, 2, \dots, r$ resp. $p_{j,j-1}(h) = r\mu h + o(h)$, $j = r+1, \dots, N$.

Pravděpodobnost, že se počet nepracujících strojů změní v intervalu $(t, t + h)$ o více než 1, je $o(h)$.

Z těchto pravděpodobností přechodu získáme intenzity přechodu podle vzorce $q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$.

$$q_{j,j+1} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{j,j+1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{(N - j)\lambda h + o(h)}{h} = (N - j)\lambda, j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$q_{j,j-1} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{j\mu h + o(h)}{h} = j\mu, j = 1, 2, \dots, r \text{ resp. } q_{j,j-1} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{r\mu h + o(h)}{h} = r\mu, j = r+1, \dots, N$$

Intenzity setrvání ve stavech $j = 0, 1, \dots, N$ můžeme určit z podmínky, že Q je kvazistochastická matice.

Sestavíme tedy matici intenzit přechodu:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -N\lambda & N\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -[(N-1)\lambda + \mu] & (N-1)\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu & -[(N-2)\lambda + 2\mu] & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -[(N-r)\lambda + r\mu] & (N-r)\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r\mu & -[(N-r-1)\lambda + r\mu] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -r\mu \end{pmatrix}$$

Stacionární rozložení získáme řešením systému rovnic : $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$ s podmínkou $\sum_{j=0}^N a_j = 1$:

$$-N\lambda a_0 + \mu a_1 = 0$$

$$(N-j+1)\lambda a_{j-1} - [(N-j)\lambda + j\mu]a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0, j = 1, \dots, r-1$$

$$(N-j+1)\lambda a_{j-1} - [(N-j)\lambda + r\mu]a_j + r\mu a_{j+1} = 0, j = r, \dots, N-1$$

$$\lambda a_{N-1} + r\mu a_N = 0$$

Řešení obdržíme ve tvaru:

$$a_j = \binom{N}{j} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j a_0, j = 1, \dots, r-1$$

$$a_j = \frac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{r!r^{j-r}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j a_0, j = r, \dots, N$$

$$\text{Přítom } a_0 = 1 - \sum_{j=1}^N a_j.$$

14.21. Příklad: Uvažme systém, v němž je v provozu velké množství předmětů téže funkce, např. talíře v jídelně. Předpokládáme, že předměty pocházejí od tří různých výrobců (říkáme, že jsou tří různých typů) a že doby životnosti předmětů od různých výrobců jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $Ex(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$. Provádíme cyklickou záměnu typů podle schématu $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Zvolíme jedno místo v provozu a zavedeme HMŘ $\{X_t; t \in T\}$ se spojitým časem, kde $X_t = j$, když v okamžiku t je na tomto místě zařazen předmět typu j , $j = 1, 2, 3$. Najděte matici intenzit přechodu a stanovte stacionární rozložení.

Řešení: Označme Y_j dobu životnosti předmětu j -tého typu, $Y_j \sim Ex(\lambda_j)$, $j = 1, 2, 3$. V příkladu 14.8. bylo ukázáno, že intenzita poruchy je λ_j , tedy

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Stacionární rozložení získáme řešením systému rovnic : $\mathbf{a}Q = \mathbf{0}$ s podmínkou $\sum_{j=1}^3 a_j = 1$:

$$-\lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3 = 0$$

$$\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 = 0$$

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Řešením tohoto systému obdržíme:

$$a_1 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad a_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad a_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}.$$

15. Laplaceova transformace a její užití při řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a evolučních diferenciálních rovnic

15.1. Motivace: Pro HMŘ se spojitým časem lze pravděpodobnosti přechodu vyjádřit jako řešení systému **Kolmogorovových diferenciálních rovnic** a absolutní pravděpodobnosti lze vyjádřit jako řešení systému **evolučních diferenciálních rovnic**. V obou těchto případech vystupují v uvedených rovnicích intenzity přechodu a jedná se o systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Takovéto systémy můžeme řešit pomocí různých integrálních transformací, z nichž nejrozšířenější je **Laplaceova transformace**. Laplaceova transformace převádí soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce na soustavu algebraických rovnic pro obrazy těchto funkcí. Tuto soustavu vyřešíme a pomocí operátorového slovníku najdeme k obrazu řešení jeho vzor.

15.2. Definice: Definice Laplaceovy transformace

Nechť $f(t)$ je funkce splňující podmínky:

- $f(t)$ je spojitá pro $t > 0$,
- $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$,
- $f(t)$ je exponenciálního řádu, tj. existují konstanty $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(t)| \leq Me^{-\alpha t}$.

Pak funkce $F(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt$ se nazývá **Laplaceova transformace funkce $f(t)$** . Funkce $f(t)$ se nazývá **vzor** a $F(z)$ **obraz**.

(Obecně je z komplexní proměnná, pro naše účely však postačí $z \geq 0$.)

15.3. Označení:

Laplaceovu transformaci (dále LT) značíme $L(f(t)) = F(z)$ a zpětnou (inverzní) transformaci značíme $L^{-1}(F(z)) = f(t)$.

15.4. Věta: Vztah mezi vzorem a obrazem

Mezi původní funkcí $f(t)$ a její LT $F(z)$ existuje vzájemně jednoznačný vztah.

15.5. Příklad: Najděte LT funkce $f(t) = e^{at}$.

Řešení:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(z-a)} dt = -\frac{1}{z-a} \left[e^{-t(z-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{z-a}$$

15.6. Věta: Linearita LT

LT i zpětná LT je lineární je lineární, tj. pro libovolné konstanty $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, aspoň jedna konstanta je nenulová,

$$\text{platí: } L\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^n c_i L(f_i(t)) \text{ a } L^{-1}\left(\sum_{i=1}^n c_i F_i(z)\right) = \sum_{i=1}^n c_i L^{-1}(F_i(z))$$

15.7. Věta: LT derivace funkce

Pro LT derivace platí: $L(f'(t)) = zF(z) - f(0)$.

15.8. Věta: LT n-té derivace funkce

Pro LT n-té derivace platí: $L(f^{(n)}(t)) = z^n F(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

15.9. Poznámka: Uvedeme stručný operátorový slovník.

Vzor $f(t)$	Obraz $F(z)$
1	$1/z$
t	$1/z^2$
e^{at}	$1/(z-a)$
$t e^{at}$	$1/(z-a)^2$
$A e^{-at}$	$A/(z+a)$
$t^k e^{-at}$	$k!/(z+a)^{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$

15.10. Příklad: Užitím LT vyřešte diferenciální rovnici $y'(t) + y(t) = e^{-2t}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.

Řešení: $zY(z) - y(0) + Y(z) = \frac{1}{z+2} \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}$

$$1 = A(z+2) + B(z+1)$$

$$2A + B = 1 \Rightarrow 2A - A = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = -1$$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{-1}{z+2}\right) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Zkouška: $y'(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$

$$-e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t} = e^{-2t} - \text{splněno}$$

Počáteční podmínka: $y(0) = 1 - 1 = 0 - \text{splněno}$

15.11. Příklad: Užitím LT najděte řešení systému lineárních diferenciálních rovnic

$$2y_1'(t) - y_2'(t) + y_2(t) = 0$$

$$y_1(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = 1$$

s počátečními podmínkami $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

Řešení:

$$2[zY_1(z) - y_1(0)] - [zY_2(z) - y_2(0)] + Y_2(z) = 0 \Rightarrow 2zY_1(z) + (1 - z)Y_2(z) = 0$$

$$Y_1(z) - 3[zY_2(z) - y_2(0)] + 2Y_2(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow Y_1(z) + (2 - 3z)Y_2(z) = \frac{1}{z}$$

Řešením systému těchto dvou rovnic získáme $Y_2(z) = \frac{-2}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{z - \frac{1}{3}}$, tedy $y_2(t) = -2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}}$.

Z 2. rovnice plyne, že $y_1(t) = 1 + 3y_2'(t) - 2y_2(t) = 1 + 3\left(-e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}\right) + 4e^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{3}} = 1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}}$.

Celkem: $y_1(t) = 1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}}$, $y_2(t) = -2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}}$.

Zkouška: $y_1'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}$, $y_2'(t) = -e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}$

1. rovnice: $e^{\frac{t}{2}} - \frac{4}{3}e^{\frac{t}{3}} + e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}} - 2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}} = 0$ - splněno, 2. rovnice: $1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}} + 3e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}} - 4e^{\frac{t}{2}} + 4e^{\frac{t}{3}} = 0$ - splněno

Počáteční podmínky: $y_1(0) = 1 + 1 - 2 = 0$, $y_2(0) = -2 + 2 = 0$ - splněno.

15.12. Věta: Kolmogorovovy systémy a systém evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(t); t \in T\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a matici intenzit přechodu \mathbf{Q} . Pak platí:

- a) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (Kolmogorovův systém prospektivních diferenciálních rovnic)
- b) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (Kolmogorovův systém retrospektivních diferenciálních rovnic)
- c) $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) =$ daný stochastický vektor (systém evolučních diferenciálních rovnic).

15.13. Věta: Věta o řešení Kolmogorovových systémů a systému evolučních diferenciálních rovnic

Nechť \mathbf{Q} je kvazistochastická matice řádu n . Pak platí:

- a) Existuje jediné řešení systému prospektivních a retrospektivních Kolmogorovových diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Toto řešení představuje systém matic přechodu HMR se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \dots, n\}$.
- b) Existuje jediné řešení systému evolučních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) =$ daný stochastický vektor. Toto řešení představuje systém vektorů absolutních pravděpodobností HMR se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \dots, n\}$.

15.14. Příklad: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{1, 2\}$, matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) Najděte vektor stacionárních pravděpodobností.

b) Najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

Ad a) Hledáme vektor \mathbf{a} tak, aby $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$, $a_1 + a_2 = 1$.

$$(a_1, a_2) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0), a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 - a_1$$

$$-2a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow 2a_1 - 1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ tedy } \mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ad b) Řešíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$(p_1'(t), p_2'(t)) = (p_1(t), p_2(t)) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, p_1(t) + p_2(t) = 1 \Rightarrow p_2(t) = 1 - p_1(t)$$

$$p_1'(t) = -2p_1(t) + p_2(t) \Rightarrow p_1'(t) = -2p_1(t) + 1 - p_1(t), p_1(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Laplaceův obraz: } zP_1(z) - p_1(0) = -2P_1(z) + \frac{1}{z} - P_1(z) \Rightarrow P_1(z)(z+3) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \frac{z+2}{2z} \Rightarrow P_1(z) = \frac{z+2}{2z(z+3)} = \frac{\frac{2}{3}}{2z} + \frac{\frac{1}{6}}{z+3}$$

$$p_1(t) = L^{-1} \left(\frac{\frac{1}{3}}{z} + \frac{\frac{1}{6}}{z+3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{-3t}, p_2(t) = 1 - p_1(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} e^{-3t}. \text{ Zkouška vyjde.}$$

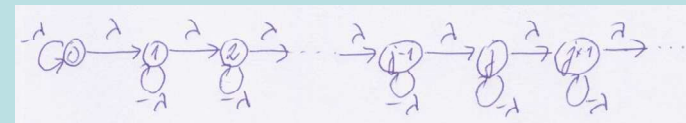
16. Poissonův proces

16.1. Definice: Definice Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ je konstanta, nazývá se } \text{intenzita}.$$

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá **Poissonův proces** (s parametrem λ).

(Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Vysvětlení: Poissonův proces popisuje např. náhodné a navzájem nezávislé události. Náhodná veličina $X_t \in \{0, 1, \dots\}$ udává počet událostí, které nastanou v intervalu $(0, t)$. Přitom střední hodnota počtu událostí, které nastanou za časovou jednotku, je konstanta $\lambda > 0$. Pravděpodobnost $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ vyjadřuje, že v intervalu $(0, t)$ nenastala žádná událost. Označíme-li S dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu), pak $P(S > t) = e^{-\lambda t}$, tedy

$$P(S \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \text{ To znamená, že je-li rozložení počtu událostí, které nastaly v intervalu } (0, t) \text{ Poissonovo, je}$$

rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

Příklady uvažovaných událostí:

- dopady částic kosmického záření zaznamenávané čítačem částic
- rozpady radioaktivního prvku
- výzvy přicházející do telefonní ústředny
- dopravní nehody registrované na nějakém silničním úseku
- poruchy automatického stroje
- příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy apod.

Upozornění: U těchto praktických příkladů není splněn předpoklad, že intenzita výskytu událostí λ je nezávislá na čase.

Provoz v telefonní ústředně je jistě živější dopoledne než večer; silniční provoz záleží jak na denní době tak na dnu v týdnu; množství radioaktivní látky časem ubývá a tedy ubývá i intenzita rozpadu jejích atomů; poruchovost stroje se může zvyšovat s jeho opotřebením apod. Často se ale sleduje výskyt těchto událostí jen po nějakou omezenou dobu, během níž lze předpokládat neměnnost intenzity λ .

16.2. Věta: Věta o pravděpodobnostním rozložení složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t \in T \forall j \in J: p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$.

Vysvětlení: Náhodná veličina X_t , která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu $(0, t)$, se řídí rozložením $Po(\lambda t)$. Číslo $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t)$ nenastane žádná změna.

Důkaz: Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$.

$$(\mathbf{p}'_0(t), \mathbf{p}'_1(t), \mathbf{p}'_2(t), \dots) = (\mathbf{p}_0(t), \mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \begin{matrix} \mathbf{p}'_0(t) = -\lambda \mathbf{p}_0(t) \\ \mathbf{p}'_1(t) = \lambda \mathbf{p}_0(t) - \lambda \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}'_2(t) = \lambda \mathbf{p}_1(t) - \lambda \mathbf{p}_2(t) \\ \vdots \end{matrix}$$

Obecně: $\mathbf{p}'_j(t) = \lambda \mathbf{p}_{j-1}(t) - \lambda \mathbf{p}_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}_0(0) = 1$, $\mathbf{p}_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$

Při řešení těchto rovnic použijeme LT.

Obraz 1. rovnice: $zP_0(z) - p_0(0) = 1 = -\lambda P_0(z) \Rightarrow P_0(z) = \frac{1}{z + \lambda} \Rightarrow p_0(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z + \lambda}\right) = e^{-\lambda t}$

Obraz 2. rovnice: $zP_1(z) - p_1(0) = 0 = \lambda P_0(z) - \lambda P_1(z) \Rightarrow P_1(z) = \frac{\lambda}{(z + \lambda)^2} \Rightarrow p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{(z + \lambda)^2}\right) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Obraz 3. rovnice: $zP_2(z) - p_2(0) = 0 = \lambda P_1(z) - \lambda P_2(z) \Rightarrow P_2(z) = \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3} \Rightarrow p_2(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3}\right) = \frac{1}{2!} (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}$

Obecně: $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

16.3. Příklad: Majitel obchodu s potravinami zjistil, že v ranní špičce přichází do obchodu průměrně 20 zákazníků za 5 minut. Majitelova manželka se domnívá, že v průběhu 10 minut může očekávat v průměru 30 zákazníků, zatímco optimističtější majitel v průběhu 10 minut očekává 40 zákazníků. Který odhad je pravděpodobnější?

Řešení:

Příchody zákazníků do obchodu lze modelovat Poissonovým procesem $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = j$, když za časový interval $(0, t)$ přijde do obchodu právě j zákazníků, $j = 0, 1, 2, \dots$

Parametr procesu (intenzita procesu): $\lambda = \frac{20}{5} = 4$ zákazníci za 1 minutu .

Podle předpokladu: $X_t \sim \text{Po}(4t)$, tedy $P(X_t = j) = \frac{(4t)^j}{j!} e^{-4t}$

Odhad manželky: $P(X_{10} = 30) = \frac{(4 \cdot 10)^{30}}{30!} e^{-4 \cdot 10} = p_{30}(10) = 0,01847$

V MATLABu: `poisspdf(30,40)`

Odhad manžela: $P(X_{10} = 40) = \frac{(4 \cdot 10)^{40}}{40!} e^{-4 \cdot 10} = p_{40}(10) = 0,06297$

V MATLABu: `poisspdf(40,40)`

Optimistický odhad majitele je pravděpodobnější než opatrný odhad jeho manželky.

16.4. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu v Poissonově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t \in T \forall i, j \in J : p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$.

Důkaz: Z matice intenzit přechodu plyne, že jediný přechod s nenulovou pravděpodobností je přechod do stavu o 1 vyššího.

Přitom počáteční stav je nulový, tedy $p_j(t) = p_{0j}(t)$. V důsledku homogenity: $p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$.

16.5. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak $E(X_t) = \lambda t$, $D(X_t) = \lambda t$.

Důkaz: Plyne z vlastností Poissonova rozložení, protože $X_t \sim \text{Po}(\lambda t)$.

16.6. Věta: Věta o rozložení doby setrvání řetězce v daném stavu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Označme S_j dobu, kterou řetězec setrvá ve stavu $j-1$, $j = 1, 2, \dots$. Pak

$S_j \sim \text{Ex}(\lambda)$ a střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu $j-1$ je $\frac{1}{\lambda}$.

Důkaz: Plyne z věty 14.9.

16.7. Věta: Věta o nezávislosti dob setrvání řetězce v daných stavech

Náhodné veličiny S_j , $j = 1, 2, \dots$ jsou stochasticky nezávislé.

Důkaz: Nebudeme provádět.

16.8. Příklad: Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linek č. 1 a č. 2. Předpokládáme, že příjezdy autobusů obou linek tvoří události Poissonových procesů s parametry λ_1, λ_2 , přičemž tyto procesy probíhají nezávisle na sobě. Vypočtěte pravděpodobnost, že za časový interval délky t přijede na zastávku právě k autobusů.

Řešení:

Označme X_t počty příjezdů linky č. 1 v intervalu $(0, t)$, $X_t \sim \text{Po}(\lambda_1 t)$, $P(X_t = j) = \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Označme Y_t počty příjezdů linky č. 2 v intervalu $(0, t)$, $Y_t \sim \text{Po}(\lambda_2 t)$, $P(Y_t = j) = \frac{(\lambda_2 t)^j}{j!} e^{-\lambda_2 t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Dále označme Z_t počty příjezdů autobusů obou linek v intervalu $(0, t)$, $Z_t = X_t + Y_t$. Máme počítat $P(Z_t = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Podle věty o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin dostáváme:

$$P(Z_t = k) = \sum_{j=0}^k P(X_t = j)P(Y_t = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2 t} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda_1 t)^j (\lambda_2 t)^{k-j} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Znamená to, že $Z_t \sim \text{Po}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$.

16.9. Věta: Věta o bodovém a intervalovém odhadu parametru λ Poissonova procesu

Nechť v intervalu $\langle 0, T \rangle$ byl sledován Poissonův proces s neznámým parametrem λ a bylo pozorováno n událostí.

a) Bodový odhad parametru λ je dán vzorcem: $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$, přičemž $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ (tj. $\hat{\lambda}$ je nestranný odhad) a $D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{T}$.

b) $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro λ má meze: $d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n+2)$, $h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2)$.

16.10. Příklad: Na určitém zařízení byly po dobu 580 h sledovány poruchy. Za tuto dobu jich nastalo 22. Za předpokladu, že poruchy tvoří události Poissonova procesu s parametrem λ , odhadněte tento parametr a najděte pro něj 95% empirický interval spolehlivosti.

Řešení:

$$T = 580, n = 22, \text{ tedy } \hat{\lambda} = \frac{n}{T} = \frac{22}{580} = 0,0379$$

$$d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,025}(46) = \frac{1}{1160} 29,2 = 0,0252$$

$$h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,975}(46) = \frac{1}{1160} 66,6 = 0,0574$$

$0,0252 < \lambda < 0,0574$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

16.11. Poznámka: Poissonův proces lze v MATLABu simulovat pomocí funkce Poisson.m:

```
function [v,absctet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)
```

```
% vstupni parametry
```

```
%CPS ... celkovy pocet simulovanych prichodu zakazniku
```

```
%lambda ... intenzita vstupniho proudu zakazniku
```

```
%t ... casovy krok
```

```
% vystupni parametry
```

```
%v ... vektor variant poctu zakazniku
```

```
%absctet ... abs. cetnosti jednotlivych variant
```

```
%relcet ... relativni cetnosti jednotlivych variant
```

```
%p ... pravdepodobnosti jednotlivych variant
```

```
%tabulka1 ... empiricke a teoreticke charakteristiky simulovaneho poctu
```

```
%zakazniku
```

```
%tabulka2 ... empiricke a teoreticke charakteristiky doby simulace
```

Tuto funkci použijeme při řešení následujícího příkladu.

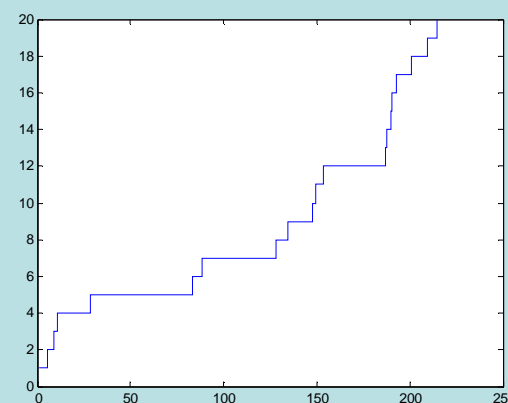
16.12. Příklad: V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

Řešení: V tomto případě jsou vstupní parametry tyto: CPS = 20, lambda = 1/8, časový krok zvolíme např. t = 8. Teoretická celková doba simulace by měla být $20 \cdot 8 = 160$ min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)
`[v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)`

Počet aut, která vjíždějí vždy během 8 minut	Abs. četnost	Rel. četnost	pravděpodobnost
0	15	0,5357	0,3679
1	6	0,2143	0,3679
2	6	0,2143	0,1839
4	1	0,0357	0,0153

Průměrný počet aut za časový krok: 0,7857
 Střední hodnota počtu aut za časový krok: 1
 Pozorovaná směr. odch. počtu aut za časový krok: 1,0313
 Směrodatná odchylka počtu aut za časový krok: 1
 Celková doba simulace: 214,7869
 Teoretická celková doba simulace: $20 \cdot 8 = 160$
 Průměrná doba mezi vjezdy aut: 10,7393
 Střední hodnota doby mezi vjezdy aut: 8
 Pozorovaná směr. odch. doby mezi vjezdy aut: 14,8255
 Směrodatná odchylka doby mezi vjezdy aut: 8

Realizace Poissonova procesu:



17. Proces vzniku a zániku

17.1. Motivace: Budeme se zabývat popisem kolísání rozsahu souboru objektů v čase za předpokladu, že

a) v náhodných okamžicích vstupují do tohoto souboru nové objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + h)$ vstoupí do souboru rozsahu j nový objekt, je $\lambda_j h + o(h)$, kde $\lambda_j > 0$ je **intenzita vstupu do stavu j** ;

b) v náhodných okamžicích vystupují z tohoto souboru jiné objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + h)$ vystoupí ze souboru rozsahu j jeden objekt, je $\mu_j h + o(h)$, kde $\mu_j > 0$ je **intenzita výstupu ze stavu j** ;

c) vstupy a výstupy objektů jsou stochasticky nezávislé jevy;

d) během krátkého časového intervalu zůstává rozsah souboru týž nebo se jedničku zvětší či zmenší.

Bude nás především zajímat, jak se chová rozsah tohoto souboru po dostatečně dlouhé době, tj. po odeznění vlivu počátečních podmínek.

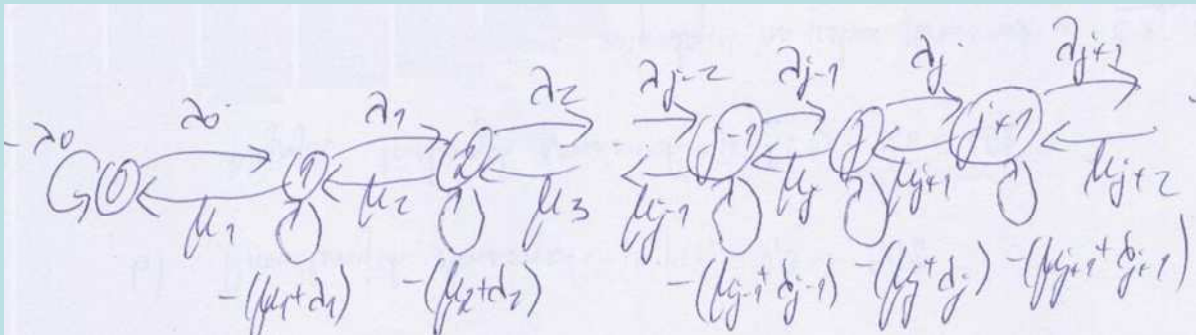
17.2. Definice: Definice procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j > 0, j=0,1,2,\dots \text{ a } \mu_j > 0, j=1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **proces vzniku a zániku** (resp. množení a úmrtí).

Přechodový diagram:



Upozornění: Je zřejmé, že Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku a zániku, v němž

$\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots$ a $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$

17.3. Věta: Stacionární rozložení procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku s intenzitami vzniku $\lambda_j > 0, j = 0, 1, 2, \dots$ a intenzitami zániku $\mu_j > 0, j = 1, 2, \dots$

Pak stacionární rozložení tohoto procesu je dáno vzorcem: $\forall j \in J: a_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0$, kde $a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}}$ za

předpokladu, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}$ absolutně konverguje. Jinak stacionární rozložení neexistuje.

Důkaz: Hledáme řešení systému rovnic $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$, $a_0 + a_1 + \dots = 1$, tj.

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (0, 0, 0, \dots),$	$-\lambda_0 a_0 + \mu_1 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0$
$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$	$-\lambda_{j-1} a_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j) a_j + \mu_{j+1} a_{j+1} = 0, j = 1, 2, \dots \Rightarrow$ $a_{j+1} = -\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} a_{j-1} + \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_{j+1}} a_j$
	$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$

Nechť $j = 1$: $a_2 = -\frac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} a_1 = -\frac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} a_0$

Obecně: $a_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0$, přičemž $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}}$, pokud

řada $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}$ absolutně konverguje.

17.4. Příklad: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku s množinou stavů $J = \{0, 1\}$, intenzitou vzniku λ a intenzitou zániku μ . Najděte:

- vektor absolutních pravděpodobností $\mathbf{p}(t)$
- matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t)$
- stacionární rozložení \mathbf{a} .

Řešení: Matice intenzit přechodu: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$

Ad a) Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$.

$$(p_0'(t), p_1'(t)) = (p_0(t), p_1(t)) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, p_0(t) + p_1(t) = 1 \Rightarrow p_1(t) = 1 - p_0(t)$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \Rightarrow p_0'(t) = -\lambda p_1(t) + \mu - \mu p_0(t) \Rightarrow p_0'(t) + (\lambda + \mu)p_0(t) = \mu, p_0(0) = 1$$

$$\text{Laplaceův obraz: } zP_0(z) - p_0(0) = 1 + (\lambda + \mu)P_0(z) = \frac{\mu}{z} \Rightarrow P_0(z) = \frac{\lambda + \mu}{z(z + \lambda + \mu)} \Rightarrow P_0(z) = \frac{\mu}{z} + \frac{\lambda}{z + \lambda + \mu}$$

$$p_0(t) = L^{-1} \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\lambda}{z + \lambda + \mu} \right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

$$\text{Celkem: } \mathbf{p}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} (\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}, \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t})$$

Ad b) Pravděpodobnosti přechodu určíme např. ze systému Kolmogorovových retrospektivních diferenciálních rovnic

$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} p_{00}'(t) & p_{01}'(t) \\ p_{10}'(t) & p_{11}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{ pro řešení tohoto systému opět využijeme Laplaceovu}$$

transformaci a získáme výsledek:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix}.$$

Ad c) Stacionární rozložení můžeme určit několika způsoby. Podle věty 17.3. máme:

$$a_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad a_1 = 1 - a_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

$$\text{Celkem: } \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda + \mu}(\mu, \lambda)$$

18. Speciální případy procesu vzniku a zániku

18.1. Definice: Definice lineárního procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (0, 1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\mu + \lambda) & 2\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0, \mu > 0 \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ** .

(Intenzity přechodu jsou lineárními funkcemi pořadí stavů, v nichž byl proces v předešlém okamžiku, tj. $\lambda_j = j\lambda, j = 0, 1, 2, \dots$ $\mu_j = j\mu, j = 1, 2, \dots$)

18.2. Věta: Věta o absolutních pravděpodobnostech v lineárním procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ . Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

$$\text{Pro } \lambda = \mu: p_0(t) = \frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, p_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1 + \lambda t)^{j+1}}, j = 1, 2, \dots$$

$$\text{Pro } \lambda \neq \mu \text{ zavedeme označení } A(t) = \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}. \text{ Pak } p_0(t) = \mu A(t), p_j(t) = [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1}, j = 1, 2, \dots$$

Důkaz: Uvedené vztahy získáme řešením systému evolučních diferenciálních rovnic.

18.3. Důsledek: Pravděpodobnost zániku

Pravděpodobnost, že soubor objektů v čase t zanikne, je $P(X_t = 0) = p_0(t) = \begin{cases} \frac{\lambda t}{1 + \lambda t} & \text{pro } \lambda = \mu \\ \mu A(t) & \text{pro } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Limitním přechodem

pro $t \rightarrow \infty$ zjistíme, že limitní pravděpodobnost zániku je $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \leq \mu \\ \frac{\mu}{\lambda} & \text{pro } \lambda > \mu \end{cases}$.

18.4. Věta: Střední hodnota a rozptyl rozsahu souboru

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ . Předpokládejme, že v čase $t = 0$ má soubor rozsah $k_0 \geq 1$. Pak pro střední hodnotu a rozptyl rozsahu souboru v čase $t > 0$ platí:

Pro $\lambda = \mu$: $E(X_t) = k_0, D(X_t) = 2k_0\lambda t$.

Pro $\lambda \neq \mu$: $E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t}, D(X_t) = k_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} [e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

18.5. Poznámka: Limitním přechodem pro $t \rightarrow \infty$ zjistíme, že limitní střední hodnota rozsahu souboru je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(X_t) = \begin{cases} k_0 & \text{pro } \lambda = \mu \\ 0 & \text{pro } \lambda < \mu \\ \infty & \text{pro } \lambda > \mu \end{cases}$$

18.6. Příklad: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$, intenzitou vzniku $\lambda = 0,01$ a intenzitou zániku $\mu = 0,001$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že proces zanikne v čase $t = 100$?

b) Jaká je limitní pravděpodobnost zániku?

Řešení:

$$\text{Ad a) Podle důsledku 18.3. } p_0(t) = \mu \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}, \text{ tedy } p_0(100) = 0,001 \frac{1 - e^{0,9}}{0,001 - 0,01e^{0,9}} = 0,0619$$

Pravděpodobnost, že v čase $t = 100$ proces zanikne, je 6,2 %.

$$\text{Ad b) } \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{0,001}{0,01} = 0,1$$

Limitní pravděpodobnost zániku je 10 %.

18.7. Příklad: V příkladu 18.6. předpokládejme, že v čase $t = 0$ soubor obsahoval 20 objektů. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka rozsahu souboru v čase $t = 100$?

Řešení:

$$E(X_t) = k_0 e^{(\lambda - \mu)t} = 20e^{0,9} = 49,1921, \sqrt{D(X_t)} = \sqrt{k_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} [e^{(\lambda - \mu)t} - 1]} = \sqrt{20 \frac{11}{9} e^{0,9} (e^{0,9} - 1)} = 9,3679$$

18.8. Poznámka: Vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku lze v MATLABu ilustrovat pomocí funkce lpvz.m:

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti linearniho procesu vzniku a zaniku
% syntaxe: [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% vstupni parametry:
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zaniku
% tau je konecny cas, k0 rozsah souboru v case t=0
% vystupni parametry:
% M je vektor strednich hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
% S je vektor smerodatnych odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
% P je pravdepodobnost zaniku souboru v case t=0 az tau
t=[0:tau]';
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
P=mi*((1-exp((lambda-mi).*t))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t)));
plot(t,M)
figure
plot(t,S)
figure
plot(t,P)
```

Použijeme tuto funkci pro proces popsaný v př. 18.6. a 18.7.

$\lambda=0.01; \mu=0.001; \tau=100; k_0=20;$

Dostaneme



18.9. Definice: Definice Erlangova procesu

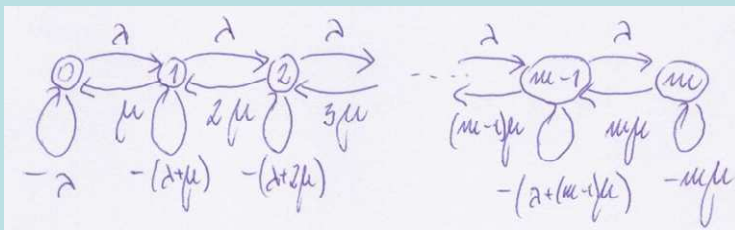
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku, který má konečnou množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots, 0)$ a matici intenzit přechodu

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ a } \mu > 0 \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **Erlangův proces**.

Vysvětlení: Erlangův proces charakterizuje např. provoz telefonní ústředny, do níž vede m linek. Necht' X_t je počet obsazených linek v okamžiku t , $X_t = 0, 1, \dots, m$. Počet obsazených linek se v krátkém časovém intervalu můžeme změnit jen o jedničku. Intenzita nové výzvy je λ , zatímco intenzita ukončování hovoru je úměrná momentálnímu počtu obsazených linek s koeficientem úměrnosti μ . Výzva, která přichází k plně obsazené telefonní ústředně, se ztrácí.

Přechodový diagram:



Agner Krarup Erlang (1878 – 1929) byl dánský matematik, jako první se vědecky zabýval problematikou telefonních sítí. Pracoval 20 let pro Kodaňskou telefonní společnost. Na jeho počest byl zaveden 1 erlang jako jednotka telefonního provozu.



18.10. Věta: Věta o stacionárním rozložení Erlangova procesu

Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem: $a_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$, $j=0,1,\dots,m$. Stacionární rozložení existuje vždy.

Důkaz: Hledáme řešení systému $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$, $\sum_{j=0}^m a_j = 1$.

$$(a_0, a_1, \dots, a_m) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\lambda a_0 + \mu a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{\lambda}{\mu} a_0$$

$$\lambda a_{j-1} - (\lambda + j\mu) a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0 \Rightarrow a_{j+1} = \frac{1}{j+1} \left(-\frac{\lambda}{\mu} a_{j-1} + \frac{\lambda + j\mu}{\mu} a_j \right), j=1, 2, \dots, m-1$$

$$\lambda a_{m-1} - m\mu a_m = 0$$

Necht' $j = 1$: $a_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda}{\mu} a_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} a_1 \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda}{\mu} a_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} a_0 \right) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 a_0$. Obecně: $a_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j a_0$, $j=1, 2, \dots, m$.

Přitom $1 = \sum_{j=0}^m a_j = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j}$. Celkem: $a_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j$, $j=0, 1, \dots, m$

18.11. Příklad: V dílně pracují tři opraváři. Do této dílny přichází v průměru 24 zákazníků za 1 h. Jestliže přichází zákazník najde volného opraváře, je k němu přiřazen a začne oprava. Jestliže není žádný opravář volný, zákazník nečeká a odchází. Předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením, přičemž průměrná doba opravy je 5 min.

a) Jakou procentuální část pracovní doby jsou opraváři nevyužiti?

b) Kolik procent potenciálních zákazníků je odmítnuto?

c) Jaký je průměrný počet obsluhujících opravářů?

Řešení: Zavedeme Erlangův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t je počet obsluhujících opravářů v okamžiku t , $X_t = 0, 1, 2, 3$.

Přitom $\lambda = 24, \mu = \frac{1}{5} = 12, \frac{\lambda}{\mu} = 2, m = 3$

Ad a) $a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^3 \frac{1}{j!} 2^j} = \left(1 + 2 + \frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{6} 2^3\right)^{-1} = \frac{3}{19} = 0,158$, tedy 15,8 % pracovní doby opraváři nepracují.

Ad b) Zákazník bude odmítnut, když budou všichni tři opraváři pracovat. Počítáme $a_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 a_0 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \frac{3}{19} = 0,211$, tedy 21,1 % potenciálních zákazníků bude odmítnuto.

Ad c) Vypočítáme zbylé složky stacionárního rozložení $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$: $a_1 = \frac{\lambda}{\mu} a_0 = \frac{6}{19}$, $a_2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0 = \frac{6}{19}$

Střední hodnota počtu obsluhujících opravářů: $\sum_{j=0}^3 j a_j = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{6}{19} + \frac{12}{19} + \frac{12}{19} = \frac{30}{19} = 1,579$.

18.12. Poznámka: Stacionární rozložení Erlangova procesu můžeme vypočítat v MATLABu pomocí funkce Erlang.m:

```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% funkce na vypocet stacionarniho rozlozeni Erlangova procesu
% syntaxe: [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% vstupni parametry:
% m ... nejvyssi poradove cislo v mnozine stavu
% lambda ... intenzita vzniku
% lambda ... intenzita zaniku
% vystupni parametr
% a ... vektor stacionarnich pravdepodobnosti
a0=1/sum(((lambda/mi).^(0:m)).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^(1:m)).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Použijeme tuto funkci pro řešení příkladu 18.11.:

```
m=3;lambda=24;mi=12;
```

```
a=Erlang(m,lambda,mi)
```

Dostaneme výsledek:

```
a =
```

```
0.1579 0.3158 0.3158 0.2105
```

18.13. Definice: Definice procesu vzniku

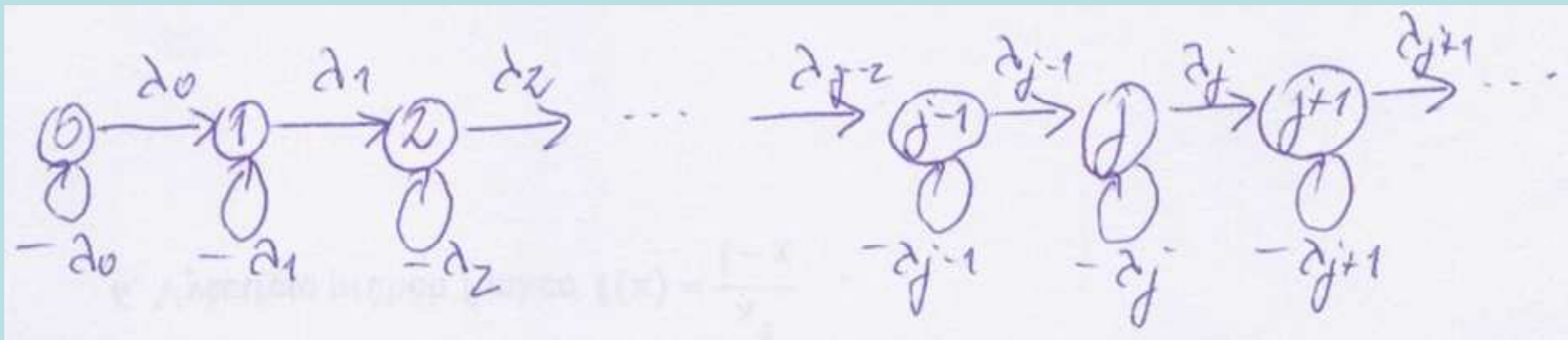
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j > 0, j=0,1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **proces vzniku** (resp. množení) s intenzitami $\lambda_j > 0, j=0,1,2,\dots$

Vysvětlení: Proces vzniku popisuje kolísání rozsahu souboru objektů v čase, přičemž objekty mohou do souboru pouze vstupovat a nemohou vystupovat. Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku, kde $\lambda_j = \lambda, j=0, 1, 2, \dots$

Přechodový diagram:



18.14. Věta: Absolutní pravděpodobnosti a pravděpodobnosti přechodu v procesu vzniku

Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku s intenzitami $\lambda_j > 0, j = 0, 1, 2, \dots$ Pak platí:

a) Absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0) \cdot \dots \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot \dots \cdot (\lambda_i - \lambda_j)}, j = 1, 2, \dots$$

b) Pravděpodobnosti přechodu jsou dány vztahy:

$$p_{j,j+1} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} (e^{-\lambda_j t} - e^{-\lambda_{j+1} t}) & \text{pro } \lambda_{j+1} \neq \lambda_j \\ \lambda_j t e^{-\lambda_j t} & \text{pro } \lambda_{j+1} = \lambda_j \end{cases}$$

Důkaz:

Ad a) Plyne ze systému evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$

Ad b) Plyne ze systému Kolmogorovových prospektivních diferenciálních rovnic $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$

s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$

18.15. Příklad: Necht' v procesu vzniku jsou intenzity vzniku dány vztahem $\lambda_j = (N + j)\lambda$, kde N je dané přirozené číslo a $\lambda > 0$ je konstanta. Odvodte vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t} = e^{-N\lambda t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_j)} =$$

=

$$(-1)^j \lambda^j N(N+1) \cdots (N+j-1) \sum_{i=0}^j \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{((N+i)\lambda - N\lambda) \cdots ((N+i)\lambda - (N+i-1)\lambda)((N+i)\lambda - (N+i+1)\lambda) \cdots ((N+i)\lambda - (N+j)\lambda)} =$$

$$(-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{i\lambda(i-1)\lambda \cdots \lambda(-1)\lambda \cdots (i-j)\lambda} = (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} \frac{1}{\lambda^j} e^{-N\lambda t} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-i\lambda t}}{(-1)^j i!(j-i)!} =$$

$$= \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} e^{-N\lambda t} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (e^{-\lambda t})^i (-1)^{j-i} = \binom{N+j-1}{j} e^{-N\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^j$$

Znamená to, že $X_t \sim \text{Ps}(N, e^{-\lambda t})$.

18.16. Definice: Definice lineárního procesu vzniku

Nechť v procesu vzniku jsou intenzity vzniku úměrné rozsahu souboru, tj. $\lambda_j = j\lambda$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda > 0$. Předpokládejme, že na

začátku je v souboru jeden objekt. Matice intenzit přechodu má tedy tvar $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Tento proces se

nazývá **lineární proces vzniku** (Yuleův proces).

18.17. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v Yuleově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Yuleův proces s intenzitou vzniku $\lambda > 0$. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$$p_j(t) = (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t}, j = 1, 2, \dots$$

Znamená to, že rozsah souboru v čase t zmenšený o 1 se řídí rozložením $Ge(e^{-\lambda t})$.

Důkaz: Plyne z příkladu 18.15., kde položíme $N = 1$.

18.18. Věta: Střední hodnota a rozptyl v Yuleově procesu

V Yuleově procesu je střední hodnota rozsahu souboru v čase t rovna $e^{\lambda t}$ a rozptyl $e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$.

Důkaz: Plyne z vlastností geometrického rozložení.

(Proces vzniku i Yuleův proces mají v praxi jen malý význam, protože v reálném světě neexistují populace, jejichž jedinci nepodléhají zániku. Nicméně, uvedených procesů je možno použít např. k modelování krátkodobého růstu kolonie bakterií v prostředí s dostatkem živin.)

18.19. Příklad: Nechť je dán Yuleův proces s parametrem $\lambda = 2,34$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v čase $t = 0,6$ bude rozsah souboru nejvýše 5?

b) Vypočtěte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru v čase $t = 0,2$.

Řešení:

$$\text{Ad a) } p_j(t) = (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t}, j = 1, 2, \dots$$

$$P(X_{0,6} \leq 5) = \sum_{j=0}^5 p_j(0,6) = \sum_{j=0}^5 (1 - e^{-2,34 \cdot 0,6})^{j-1} e^{-2,34 \cdot 0,6} = 0,7557$$

$$\text{Ad b) } E(X_t) = e^{\lambda t}, D(X_t) = e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)$$

$$E(X_{0,2}) = e^{2,34 \cdot 0,2} = 1,5968, \sqrt{D(X_{0,2})} = \sqrt{e^{2,34 \cdot 0,2} (e^{2,34 \cdot 0,2} - 1)} = 0,9762$$

18.20. Definice: Definice procesu zániku

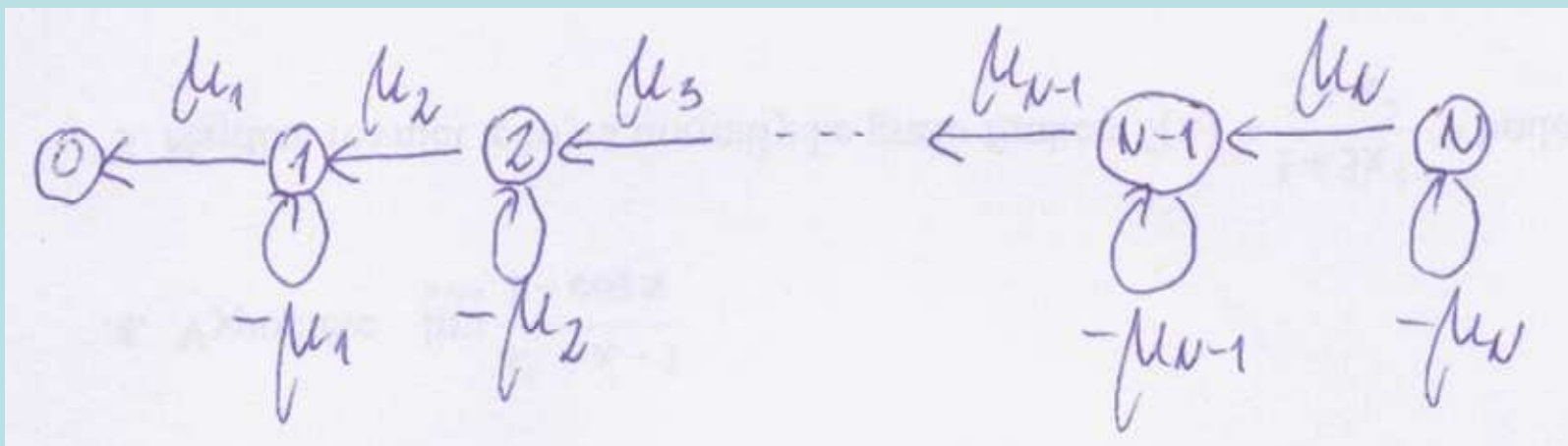
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, vektor počátečních

pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (0, 0, \dots, 1)$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix}$, kde

$\mu_j > 0, j = 1, 2, \dots, N$ jsou konstanty. Tento proces se nazývá **proces zániku**.

Vysvětlení: Na počátku má soubor N objektů. Objekty mohou ze souboru jenom vystupovat, přičemž intenzita výstupu ze souboru rozsahu j je $\mu_j, j = 1, 2, \dots, N$. Proces končí zánikem souboru.

Přechodový diagram:



18.21. Definice: Definice lineárního procesu zániku

Nechť v procesu zániku jsou intenzity zániku úměrné rozsahu souboru, tj. $\mu_j = j\mu$, $j = 0, 1, \dots, N$, $\mu > 0$. Matice intenzit

přechodu má tedy tvar: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}$. Tento proces se nazývá **lineární proces zániku**.

18.22. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v lineárním procesu zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces zániku s intenzitou zániku $\mu > 0$. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$$p_j(t) = \binom{N}{j} (e^{-\mu t})^j (1 - e^{-\mu t})^{N-j}, j = 0, 1, \dots, N. \text{ Znamená to, že rozsah souboru v čase } t \text{ se řídí rozložením } \text{Bi}(N, e^{-\mu t}).$$

Důkaz: Plyne z evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (0, 0, \dots, 1)$.

18.23. Věta: Střední hodnota a rozptyl v lineárním procesu zániku

V lineárním procesu zániku je střední hodnota rozsahu souboru v čase t rovna $Ne^{-\mu t}$ a rozptyl $Ne^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})$.

Důkaz: Plyne z vlastností binomického rozložení.

Seznam literatury

KEMENY, John G., Laurie J. SNELL a Gerald L. THOMPSON.
Úvod do finitní matematiky. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství
technické literatury, 1971. 469 s.

KOŘENÁŘ, Václav. Stochastické procesy. Vyd. 1. Praha: Vysoká
škola ekonomická v Praze, 2002. 227 s. ISBN 80-245-0311-5.

PRÁŠKOVÁ, Zuzana. Základy náhodných procesů. 1. vyd. Praha:
Karolinum, 2004. 151 s. ;. ISBN 80-246-0971-1.