Přednášky

předmětu M6130 Výpočetní statistika

Marie Budíková

2013

Poděkování

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

Průzkumová analýza jednorozměrných dat, diagnostické grafy

Motivace

Průzkumová analýza dat je odvětví statistiky, které pomocí různých postupů odhaluje zvláštnosti v datech. Při zpracování dat se často používají metody, které jsou založeny na předpokladu, že data pocházejí z nějakého konkrétního rozložení, nejčastěji normálního. Tento předpoklad nemusí být vždy splněn, protože data

- mohou pocházet z jiného rozložení
- mohou být zatížena hrubými chybami
- mohou pocházet ze směsi několika rozložení.

Proto je důležité provést průzkumovou analýzu dat, abychom se vyvarovali neadekvátního použití statistických metod.

Data zkoumáme pomocí funkcionálních a číselných charakteristik a pomocí diagnostických grafů.

Osnova:

- datový soubor
- bodové a intervalové rozložení četností
- typy znaků, číselné charakteristiky znaků
- krabicový diagram, N-P plot, P-P plot, Q-Q plot, histogram

Funkcionální charakteristiky datového souboru

Označení

Na množině objektů $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ zjišťujeme hodnoty znaku X (např. u 6 domácností zjišťujeme počet členů).
Hodnotu znaku X na objektu ε_i označíme x_i, i = 1, ..., n.

Tyto hodnoty zaznamenáme do jednorozměrného datového souboru $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (např. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$).

Uspořádané hodnoty $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ tvoří uspořádaný datový soubor $\begin{pmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{pmatrix}$, v našem případě $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vektor $\begin{pmatrix} x_{[1]} \\ \vdots \\ x_{[r]} \end{pmatrix}$, kde $x_{[1]} < \ldots < x_{[r]}$ jsou navzájem různé hodnoty znaku X, se nazývá vektor variant, v našem případě $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bodové rozložení četností

Je-li počet variant znaku X malý, přiřazujeme četnosti jednotlivým variantám a hovoříme o bodovém rozložení četností.

n_j – absolutní četnost varianty $x_{[j]}$

$p_j = \frac{n_j}{n}$ – relativní četnost varianty $x_{[j]}$

$N_j = n_1 + ... + n_j$ – absolutní kumulativní četnost prvních j variant

$F_j = \frac{N_j}{n} = p_1 + ... + p_j$ – relativní kumulativní četnost prvních j variant

Absolutní a relativní četnosti zapisujeme do tabulky rozložení četností nebo je znázorňujeme graficky např. pomocí sloupkového diagramu či polygonu četností.

Četnostní funkce: $p(x) = \begin{cases} p_j \text{ pro } x = x_{[j]},\ j = 1, ..., r \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

Empirická distribuční funkce: $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x < x_{[1]} \\ F_j \text{ pro } x_{[j]} \le x < x_{[j+1]},\ j = 1, ..., r-1 \\ 1 \text{ pro } x \ge x_{[r]} \end{cases}$

Příklad 1.: U 30 domácností byl zjišťován počet členů.

Počet členů	1	2	3	4	5	6
Počet domácností	2	6	4	10	5	3

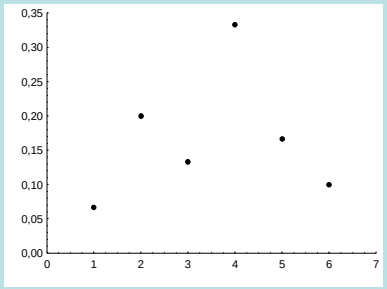
Vytvořte tabulku rozložení četností. Nakreslete grafy četnostní funkce a empirické distribuční funkce. Dále nakreslete sloupkový diagram a polygon četností počtu členů domácnosti.

Řešení:

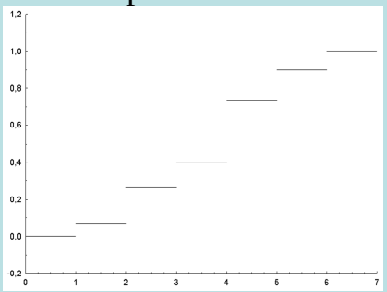
Tabulka rozložení četností

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
1	2	2/30	2	2/30
2	6	6/30	8	8/30
3	4	4/30	12	12/30
4	10	10/30	22	22/30
5	5	5/30	27	27/30
6	3	3/30	30	1

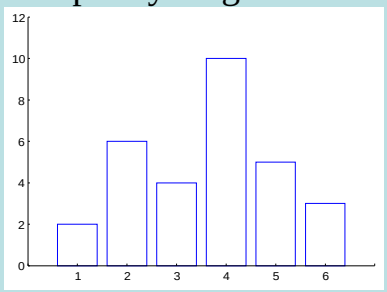
Graf četnostní funkce



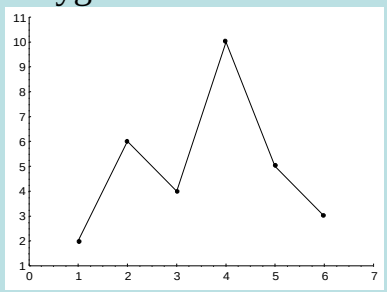
Graf empirické distribuční funkce



Sloupkový diagram



Polygon četností



Intervalové rozložení četností

Je-li počet variant znaku X velký, přiřazujeme četnosti nikoli jednotlivým variantám, ale třídicím intervalům $\langle u_1, u_2\rangle$, ..., $\langle u_r, u_{r+1}\rangle$ a hovoříme o intervalovém rozložení četností. Názvy četností jsou podobné jako u bodového rozložení četností, navíc zavádíme četnostní hustotu j-tého třídicího intervalu $f_j = \frac{p_j}{d_j}$, kde $d_j = u_{j+1} - u_j$. Stanovení počtu třídicích intervalů je dosti subjektivní záležitost. Často se doporučuje volit r blízké $\sqrt{n}$.

Hustota četnosti: $f(x) = \begin{cases} f_j \text{ pro } u_j < x \le u_{j+1},\ j=1,\cdots,r \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$ (grafem hustoty četnosti je histogram)

Intervalová empirická distribuční funkce: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Příklad 2.: U 70 domácností byly zjišťovány týdenní výdaje na nealkoholické nápoje (v Kč).

Výdaje	$\langle 35,65\rangle$	$\langle 65,95\rangle$	$\langle 95,125\rangle$	$\langle 125,155\rangle$	$\langle 155,185\rangle$	$\langle 185,215\rangle$
Počet dom.	7	16	27	14	4	2

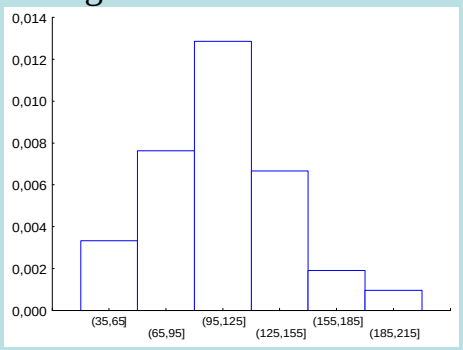
Sestavte tabulku rozložení četností, nakreslete histogram a graf intervalové empirické distribuční funkce.

Řešení:

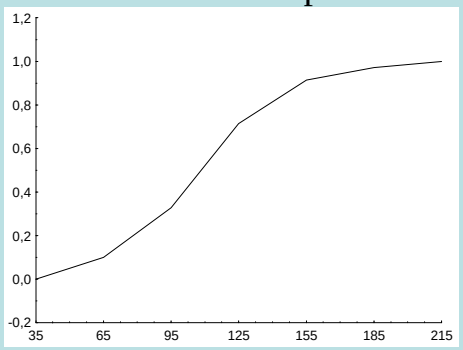
Tabulka rozložení četností

$(u_j,u_{j+1}]$	n_j	p_j	f_j	N_j	F_j
$\langle 35,65\rangle$	7	7/70	7/2100	7	7/70
$\langle 65,95\rangle$	16	16/70	16/2100	23	23/70
$\langle 95,125\rangle$	27	27/70	27/2100	50	50/70
$\langle 125,155\rangle$	14	14/70	14/2100	64	64/70
$\langle 155,185\rangle$	4	4/70	4/2100	68	68/70
$\langle 185,215\rangle$	2	2/70	2/2100	70	1

Histogram



Graf intervalové empirické distribuční funkce



Číselné charakteristiky datového souboru

Znaky nominálního typu

Tyto znaky umožňují obsahovou interpretaci pouze u relace rovnosti.
Příklady nominálních znaků: lékařská diagnóza, typ profese, barva očí, rodinný stav, národnost, …
Charakteristikou polohy je modus, tj. nejčetnější varianta či střed nejčetnějšího intervalu.

Znaky ordinálního typu

Lze u nich navíc obsahově interpretovat relaci uspořádání.
Příklad ordinálního znaku: školní klasifikace vyjadřuje menší nebo větší znalosti zkoušených žáků – jedničkář je lepší než dvojkař, ale intervaly mezi známkami nemají obsahovou interpretaci. Nelze tvrdit, že rozdíl ve znalostech mezi jedničkářem a dvojkařem je stejný jako mezi trojkařem a čtyřkařem.
Další příklady: Různá bodování ve sportovních a uměleckých soutěžích, posuzování různých rysů sociálního chování, posuzování stavu pacientů, hodnocení postojů respondentů k různým otázkám, …

Charakteristikou polohy je α-kvantil. Je-li $\alpha \in (0;1)$, pak α-kvantil x_α je číslo, které rozděluje uspořádaný datový soubor na dolní úsek, obsahující aspoň podíl α všech dat a na horní úsek obsahující aspoň podíl 1 – α všech dat. Pro výpočet α-kvantilu slouží algoritmus:

$$n\alpha = \begin{cases} \text{celé číslo } c \Rightarrow x_\alpha = \dfrac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2} \\ \text{necelé číslo} \Rightarrow \text{zaokrouhlíme nahoru na nejbližší celé číslo } c \Rightarrow x_\alpha = x_{(c)} \end{cases}$$

Pro speciálně zvolená α užíváme názvů:
$x_{0,50}$ – medián, $x_{0,25}$ – dolní kvartil, $x_{0,75}$ – horní kvartil, $x_{0,1}$, ..., $x_{0,9}$ – decily, $x_{0,01}$, ..., $x_{0,99}$ – percentily.
Jako charakteristika variability slouží kvartilová odchylka: $q = x_{0,75} - x_{0,25}$.

Příklad 3.: Během semestru se studenti podrobili písemnému testu z matematiky, v němž bylo možno získat 0 až 10 bodů. Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

Počet bodů	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet studentů	1	4	6	7	11	15	19	17	12	6	3

Zjistěte modus, medián, 1. decil, 9. decil a kvartilovou odchylku počtu bodů.

Řešení:

Modus je nejčetnější varianta znaku, v tomto případě tedy 6.

Pro výpočet kvantilů musíme znát rozsah datového souboru: n = 1 + 4 + ... + 3 = 101. Výpočty uspořádáme do tabulky.

α	$n\alpha$	c	$x_\alpha = x_{(c)}$
0,50	50,5	51	6
0,10	10,1	11	2
0,90	90,9	91	8
0,25	25,25	26	4
0,75	75,75	76	7

q = 7 – 4 = 3

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o 2 proměnných a 11 případech. První proměnnou nazveme X, druhou cetnost a zapíšeme do nich počet bodů a odpovídající absolutní četnosti.

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – zapneme proměnnou vah cetnost – OK – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – vybereme Medián, Dolní a horní kvartily, Kvantilové hranice – Výpočet – ve výstupní tabulce upravíme počet desetinných míst.

	Popisné statistiky (pocet bodu.sta)					
Proměnná	N platných	Medián	Spodní kvartil	Horní kvartil	Kvantil 10,00000	Kvantil 90,00000
X	101	6	4	7	2	8

Znaky intervalového a poměrového typu

U těchto znaků lze navíc obsahově interpretovat operaci rozdílu resp. podílu.

Příklad intervalového znaku: teplota měřená ve stupních Celsia. Např. naměříme-li ve čtyřech po sobě jdoucích dnech poslední teploty 0, 2, 4, 6 °C, znamená to, že každým dnem stouply teploty o 2 °C. Nelze však říci, že z druhého na třetí den vzrostla teplota dvojnásobně, kdežto ze třetího na čtvrtý den pouze jeden a půl krát.

Další příklady: kalendářní systémy, směr větru, inteligenční kvocient, …

Společný znak intervalových znaků: nula byla stanovena uměle, pouhou konvencí.

Příklad poměrového znaku: délka předmětu měřená v cm. Má-li jeden předmět délku 8 cm a druhý 16 cm, má smysl prohlásit, že druhý předmět je dvakrát delší než první předmět.

Další příklady: počet dětí v rodině, výška kapesného v Kč, hmotnost osoby, …

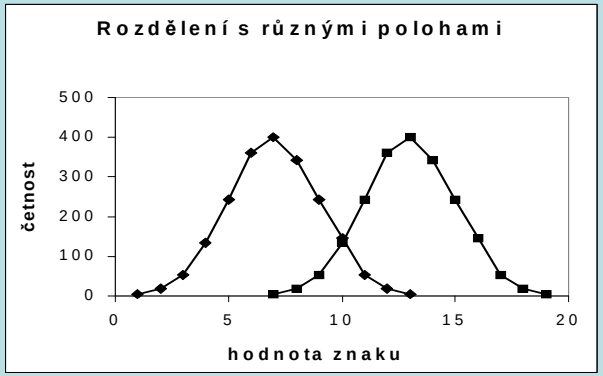
Společný znak poměrových znaků: poměrový znak má přirozený počátek, ke kterému jsou vztahovány všechny další hodnoty znaku.

Charakteristika polohy: aritmetický průměr $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

U poměrových znaků, které nabývají pouze kladných hodnot, lze použít geometrický průměr $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Pomocí průměru zavedeme i-tou centrovanou hodnotu $x_i - m$ (podle znaménka poznáme, zda i-tá hodnota je podprůměrná či nadprůměrná).

Znázornění rozložení četností dvou datových souborů, které se liší aritmetickým průměrem



Vlastnosti aritmetického průměru

- Aritmetický průměr si lze představit jako těžiště dat – součet podprůměrných hodnot je stejný jako součet nadprůměrných hodnot – oba součty jsou v rovnováze.

- Průměr centrovaných hodnot je nulový, protože $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m - \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = 0 = 0.$

- Výraz $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ (tzv. kvadratická odchylka) nabývá svého minima pro a = m. Uvedený výraz charakterizuje celkovou chybu, které se dopustíme, když datový soubor nahradíme jedinou hodnotou a. Tato chyba je tedy nejmenší, když datový soubor nahradíme aritmetickým průměrem, přičemž za míru chyby považujeme kvadratickou odchylku.

- Pokud každou hodnotu x_i podrobíme lineární transformaci $y_i = a + bx_i$, pak průměr transformovaných hodnot je roven lineární transformaci původního průměru, tj. $m_2 = a + bm_1$.

- Mají-li znaky X, Y průměry m_1, m_2, pak znak Z = X + Y má průměr $m_1 + m_2$.

- Aritmetický průměr je silně ovlivněn extrémními hodnotami.

- Aritmetický průměr je vhodné použít, pokud je rozložení dat přibližně symetrické.

Příklad na vlastnosti aritmetického průměru:

U skupiny 20 pracovníků v určité dílně byly zjišťovány měsíční mzdy. Průměr mezd činil 15 500 Kč. Určete průměr mezd, jestliže mzdy všech pracovníků se zvýší

a) o 300 Kč, b) 1,1 krát, c) o 20%.

Řešení:

Označme m_1 průměr hodnot $x_1, \ldots, x_n$ a m_2 průměr hodnot $y_1, \ldots, y_n$, přičemž $y_i = a + bx_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pak $m_2 = a + bm_1$.

ad a) $m_2 = 300 + m_1 = 15\,800$

Průměr se zvýšil o 300 Kč na 15 800 Kč.

ad b) $m_2 = 1{,}1.m_1 = 17\,050$

Průměr se zvýšil na 17 050 Kč.

ad c) $m_2 = 1{,}2.m_1 = 18\,600$

Průměr se zvýšil na 18 600 Kč.

Charakteristiky variability intervalových a poměrových znaků

Variační rozpětí $R = x_{(n)} - x_{(1)}$ (nevýhoda – bere v úvahu pouze nejmenší a největší hodnotu datového souboru),

průměrná odchylka $o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - m|$ (udává, o kolik jednotek se data liší od průměru)

rozptyl $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$ (nevýhoda – vychází ve druhých mocninách jednotek, v nichž byl měřen znak X)

směrodatná odchylka $s = \sqrt{s^2}$.

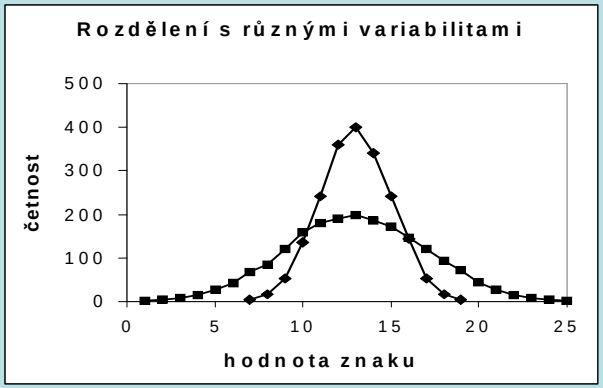
Pomocí směrodatné odchylky zavedeme i-tou standardizovanou hodnotu $\frac{x_i - m}{s}$ (vyjadřuje, o kolik směrodatných odchylek se i-tá hodnota odchýlila od průměru).

U poměrových znaků se jako charakteristika variability používá též:

koeficient variace $\frac{s}{m}$ (často se udává v procentech a udává, kolika procent průměru dosahuje směrodatná odchylka),

relativní průměrná odchylka $\frac{o}{m}$ (při vyjádření v procentech udává, kolika procent průměru dosahuje průměrná odchylka)

Znázornění rozložení četností dvou datových souborů, které se liší rozptylem:



Vlastnosti rozptylu:

- Rozptyl je nulový pouze tehdy, když jsou všechny hodnoty stejné, jinak je kladný.

- Rozptyl centrovaných hodnot je roven původnímu rozptylu, neboť $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - m) - 0]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = s^2$.

- Rozptyl standardizovaných hodnot je 1, protože $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{s} - 0\right)^2 = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{s^2}{s^2} = 1$.

- Rozptyl se zpravidla počítá podle vzorce $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} - m^2$.

- Pokud každou hodnotu x_i podrobíme lineární transformaci $y_i = a + bx_i$, pak rozptyl transformovaných hodnot je roven původnímu rozptylu vynásobenému b^2, tj. $s_2^{\,2} = b^2\, s_1^{\,2}$.

- Rozptyl je stejně jako průměr silně ovlivněn extrémními hodnotami.

- Rozptyl se nehodí jako charakteristika variability, je-li rozložení dat nesymetrické.

Příklad 4.: Kurzy akcií společnosti AAA Auto Group v průběhu 23 dní v měsíci srpnu 2010 byly následující: 17,75; 17,74; 17,85; 17,59; 17,92; 17,98; 18,39; 18,25; 18,30; 18,00; 18,15; 18,15; 18,22; 18,40; 18,25; 17,95; 18,25; 18,23; 17,95; 17,90; 17,80; 17,87; 17,87. Vypočtěte charakteristiky variability.

Řešení:

Nejprve vypočítáme variační rozpětí: $R = x_{(n)} - x_{(1)} = 18{,}4 - 17{,}59 = 0{,}81$.

Před výpočtem dalších charakteristik variability musíme získat aritmetický průměr: $m = \frac{1}{23}(17{,}75 + 17{,}74 + \ldots + 17{,}87) = 18{,}033$.

Průměrná odchylka: $o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - m| = \frac{1}{23}(|17{,}75 - 18{,}033| + |17{,}74 - 18{,}033| + \ldots + |17{,}87 - 18{,}033|) = 0{,}1965$

Relativní průměrná odchylka: $\frac{o}{m}100\% = \frac{0{,}1965}{18{,}033}100\% = 1{,}09\%$

Rozptyl: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} - m^2 = \frac{1}{23}(17{,}75^2 + 17{,}74^2 + \ldots + 17{,}87^2) - 18{,}033^2 = 0{,}049$

Směrodatná odchylka: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}049} = 0{,}2213$

Koeficient variace: $\frac{s}{m}100\% = \frac{0{,}2213}{18{,}033}100\% = 1{,}23\%$

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné X a 23 případech. Do proměnné X zapíšeme zjištěné kurzy akcií. Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – vybereme Průměr, Rozptyl, Rozpětí – Výpočet. Ve výstupní tabulce přidáme za proměnnou Rozptyl tři nové proměnné nazvané rozptyl, směr. odch. a koef. variace. Do Dlouhého jména proměnné rozptyl napíšeme =v3*22/23, Dlouhého jména proměnné směr. odch. napíšeme =sqrt(v4) a do Dlouhého jména proměnné koef. variace napíšeme =100*v5/v1.

Proměnná	Průměr	Rozpětí	Rozptyl	rozptyl =v3*22/2	směr. odch. =sqrt(v4)	koef. variace =100*v5/v1
x	18,03304	0,810000	0,051231	0,049004	0,221367976	1,22756858

Pro výpočet průměrné odchylky a relativní průměrné odchylky je zapotřebí přidat k původnímu datovému souboru dvě nové proměnné nazvané Průměr a Odchylka. Do Dlouhého jména proměnné Průměr napíšeme =18,033 a do Dlouhého jména proměnné Odchylka napíšeme =abs(v1-v2). Nyní spočteme průměr proměnné Odchylka: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné Odchylka – OK – Detailní výsledky – vybereme Průměr – Výpočet.
Ve výstupní tabulce přejmenujeme proměnnou Průměr na prům. odch. a za tuto proměnnou přidáme proměnnou rel. prům. odch. Do jejího Dlouhého jména napíšeme =100*v1/18,033.

Proměnná	odchylka	rel. prům. odch. =100*v1/18,033
Odchylka	0,196478	1,08954839

Vážené číselné charakteristiky

Známe-li absolutní četnosti $n_1, \ldots, n_r$ či relativní četnosti $p_1, \ldots, p_r$ variant $x_{[1]}, \ldots, x_{[r]}$, můžeme spočítat

vážený průměr $m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]} = \sum_{j=1}^{r} p_j x_{[j]}$,

vážený rozptyl $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j (x_{[j]} - m)^2 = \sum_{j=1}^{r} p_j (x_{[j]} - m)^2$ (výpočetní vzorec: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]}^2 - m^2 = \sum_{j=1}^{r} p_j x_{[j]}^2 - m^2$),

váženou průměrnou odchylku $o = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j |x_{[j]} - m| = \sum_{j=1}^{r} p_j |x_{[j]} - m|$.

Příklad 5.: U 35 zaměstnanců byl zjištěn počet odpracovaných hodin za měsíc.

Počet odpracovaných hodin	184	185	186	187	188	189
Počet zaměstnanců	4	6	7	6	7	5

Vypočtěte průměr, průměrnou odchylku, relativní průměrnou odchylku, směrodatnou odchylku a koeficient variace počtu odpracovaných hodin.

Řešení:

Vážený průměr: $m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]} = \frac{1}{35}\left(4\cdot 184 + 6\cdot 185 + 7\cdot 186 + 6\cdot 187 + 7\cdot 188 + 5\cdot 189\right) = 186{,}6$

Vážená průměrná odchylka:

$o = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j \left|x_{[j]} - m\right| = \frac{1}{35}\left(4\cdot\left|184-186{,}6\right| + 6\cdot\left|185-186{,}6\right| + 7\cdot\left|186-186{,}6\right| + 6\cdot\left|187-186{,}6\right| + 7\cdot\left|188-186{,}6\right| + 5\cdot\left|189-186{,}6\right|\right) = 1{,}38\,\text{h}$ = 1h 23 min

Vážený rozptyl: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]}^{\,2} - m^2 = \frac{1}{35}\left(4\cdot 184^2 + 6\cdot 185^2 + 7\cdot 186^2 + 6\cdot 187^2 + 7\cdot 188^2 + 5\cdot 189^2\right) - 186{,}6^2 = 2{,}5257$

Vážená směrodatná odchylka: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2{,}5257} = 1{,}59\,\text{h}$ = 1h 35 min

Relativní průměrná odchylka: $\frac{o}{m}100\% = \frac{1{,}38}{186{,}6}100\% = 0{,}74\%$

Koeficient variace: $\frac{s}{m}100\% = \frac{1{,}59}{186{,}6}100\% = 0{,}85\%$

Vidíme, že zaměstnanci odpracovali za měsíc v průměru 186,6 h, přičemž průměrná odchylka dosahuje 0,74 % průměrné odpracované doby a směrodatná odchylka dosahuje 0,85 % průměrné odpracované doby.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o 2 proměnných a 6 případech. První proměnnou nazveme X, druhou četnost a zapíšeme do nich počet odpracovaných hodin a odpovídající počty zaměstnanců.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – zapneme proměnnou vah četnost – OK – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – vybereme Průměr, Rozptyl – Výpočet. Ve výstupní tabulce přidáme za proměnnou Rozptyl dvě nové proměnné nazvané směr. odch. a koef. variace. Do Dlouhého jména proměnné směr. odch. napíšeme =sqrt(v2*34/35) a do Dlouhého jména proměnné koef. variace napíšeme =100*v3/v1.

Proměnná	Průměr	Rozptyl	směr.odch. =sqrt(v2*34/35)	koef. variace =100*v3/v1
X	186,6	2,6	1,5892496	0,851687888

Pro výpočet průměrné odchylky a relativní průměrné odchylky je zapotřebí přidat k původnímu datovému souboru dvě nové proměnné nazvané Průměr a Odchylka. Do Dlouhého jména proměnné Průměr napíšeme =186,6 a do Dlouhého jména proměnné Odchylka napíšeme =abs(v1-v3). Nyní spočteme průměr proměnné Odchylka: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – zapneme proměnnou vah četnost – OK – OK – Proměnné Odchylka – OK – Detailní výsledky – vybereme Průměr – Výpočet. Ve výstupní tabulce přejmenujeme proměnnou Průměr na prům. odch. a za tuto proměnnou přidáme proměnnou rel. prům. odch. Do jejího Dlouhého jména napíšeme =100*v1/186,6.

Proměnná	prům. odch.	rel. prům. odch. =100*v1/186,6
Odchylka	1,382857	0,741080998

Převod desetinných částí hodiny na minuty můžeme provést např. pomocí aplikace na adrese http://www.prevody-jednotek.cz/.

Počáteční a centrální momenty

Aritmetický průměr a rozptyl jsou speciální případy momentů. Zavedeme

k-tý počáteční moment $m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,k}$, k = 1, 2, ... ,

k-tý centrální moment

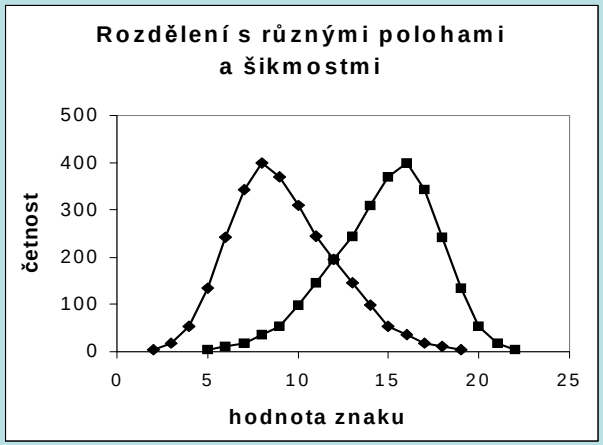
$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^k$, k = 1, 2, ...

Pomocí 3. a 4. početního momentu se definuje šikmost a špičatost.

Šikmost: $\alpha_3 = \frac{m_3}{s^3}$ - měří nesouměrnost rozložení četností kolem průměru.

Je-li rozložení dat symetrické kolem aritmetického průměru, pak $\alpha_3 = 0$.
Má-li rozložení dat prodloužený pravý konec, jde o kladně zešikmené rozložení, $\alpha_3 > 0$.
Má-li rozložení dar prodloužený levý konec, jde o záporně zešikmené rozložení, $\alpha_3 < 0$.

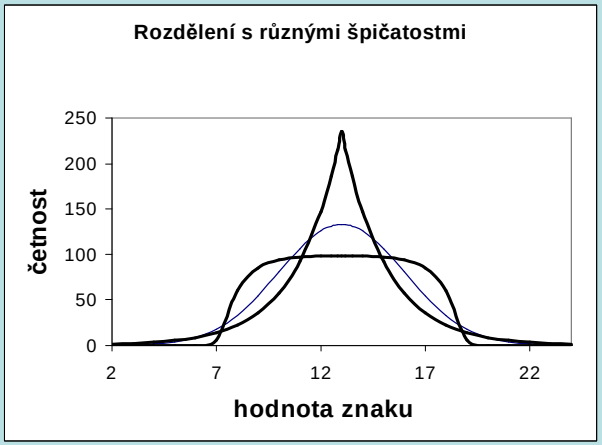
Znázornění rozložení četností dvou datových souborů, které se liší aritmetickým průměrem a šikmostí



Špičatost: $\alpha_4 = \frac{m_4}{s^4} - 3$ - měří koncentraci rozložení četností kolem průměru.

Je-li rozložení dat normální (Gaussovo), pak $\alpha_4 = 0$.
Je-li rozložení dat strmé, pak $\alpha_4 > 0$.
Je-li rozložení dat ploché, pak $\alpha_4 < 0$.

Znázornění rozložení četností dvou datových souborů, které se liší špičatostí

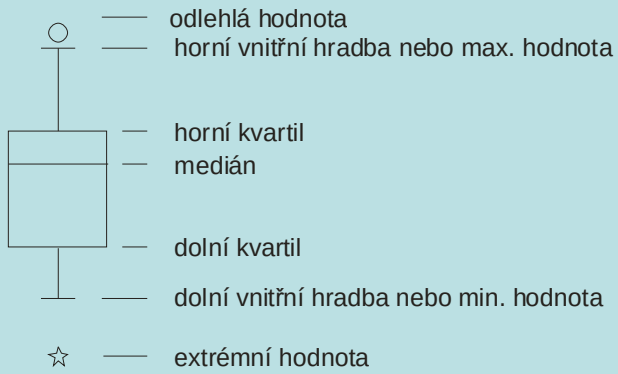


Diagnostické grafy

Krabicový diagram

Umožňuje posoudit symetrii a variabilitu datového souboru a existenci odlehlých či extrémních hodnot.

Způsob konstrukce



Odlehlá hodnota leží mezi vnějšími a vnitřními hradbami, tj. v intervalu

$(x_{0,75} + 1{,}5q,\ x_{0,75} + 3q)$ či v intervalu $(x_{0,25} - 3q,\ x_{0,25} - 1{,}5q)$.

Extrémní hodnota leží za vnějšími hradbami, tj. v intervalu $(x_{0,75} + 3q,\ \infty)$ či v intervalu $(-\infty,\ x_{0,25} - 3q)$.

Příklad 6.: Pro údaje z příkladu 1 sestrojte krabicový diagram.
Řešení:

Počet členů	1	2	3	4	5	6
Počet domácností	2	6	4	10	5	3

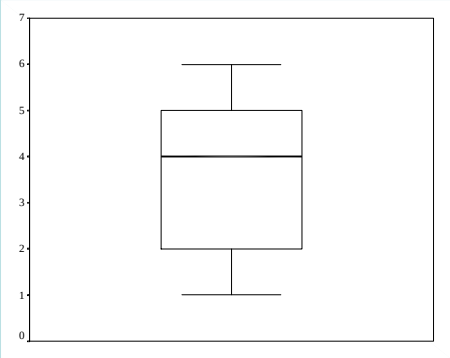
Rozsah souboru n = 30. Výpočty potřebných kvantilů uspořádáme do tabulky.

α	$n\alpha$	c		x_α
0,25	7,5	8	$x_{(c)}=x_{(8)}$	2
0,50	15	15	$\frac{x_{(15)}+x_{(16)})}{2}$	4
0,75	22,5	23	$x_{(c)}=x_{(23)}$	5

$q = 5 - 2 = 3$

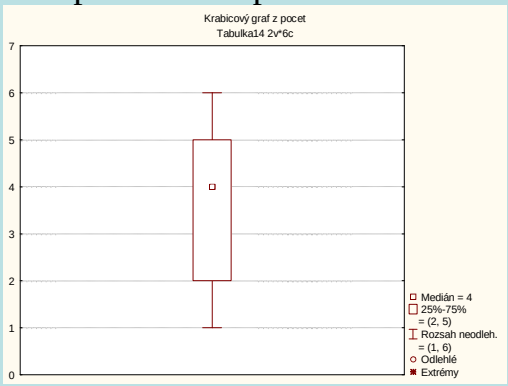
Dolní vnitřní hradba: $x_{0,25} - 1,5q = 2 - 1,5.3 = -2,5$

Horní vnitřní hradba: $x_{0,75} + 1,5q = 5 + 1,5.3 = 9,5$

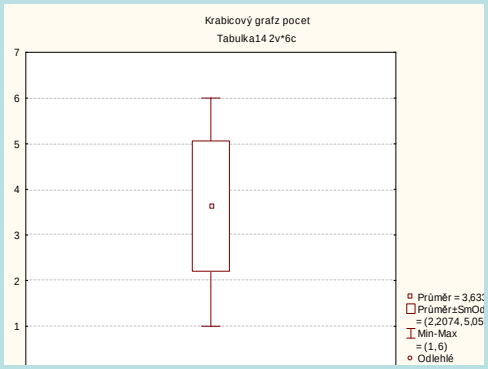


Vidíme, že datový soubor vykazuje určitou nesymetrii – medián je posunut směrem k hornímu kvartilu, soubor je tedy záporně sešikmen. V souboru se nevyskytují žádné odlehlé ani extrémní hodnoty.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Otevřeme nový datový soubor o 2 proměnných a 6 případech. První proměnnou nazveme počet, druhou cetnost a zapíšeme do nich počet členů domácnosti a odpovídající absolutní četnosti. Zvolíme Grafy – 2D Grafy – Krabicové grafy.
Zapneme proměnnou vah cetnost, zadáme závisle proměnnou pocet a dostaneme krabicový diagram:



Upozornění: Máme-li data intervalového či poměrového charakteru, o nichž lze předpokládat, že pocházejí z nějakého symetrického rozložení (například normálního), je možné použít jinou variantu krabicového diagramu: bod či čára uvnitř krabice reprezentuje průměr, vodorovné hrany krabice jsou ve výšce průměr ± směrodatná odchylka a svorky končí v minimu či maximu.
V našem případě dostaneme krabicový diagram:



Před uvedením dalších diagnostických grafů je nutné zavést pojem pořadí čísla v posloupnosti čísel.

Pojem pořadí

Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je posloupnost reálných čísel.
a) Jsou-li čísla navzájem různá, pak pořadím R_i čísla x_i rozumíme počet těch čísel $x_1, \ldots, x_n$, která jsou menší nebo rovna číslu x_i.
b) Vyskytují-li se mezi danými čísly skupinky stejných čísel, pak každé takové skupince přiřadíme průměrné pořadí.

Příklad na stanovení pořadí

a) Jsou dána čísla 9, 4, 5, 7, 3, 1. Stanovte pořadí těchto čísel.
b) Jsou dána čísla 6, 7, 7, 9, 6, 10, 8, 6, 6, 9.

Řešení

ad a)

usp. čísla	1	3	4	5	7	9
pořadí	1	2	3	4	5	6

ad b)

usp. čísla	6	6	6	6	7	7	8	9	9	10
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prům. pořadí	2,5	2,5	2,5	2,5	5,5	5,5	7	8,5	8,5	10

Normální pravděpodobnostní graf (N-P plot)

N- P plot umožňuje graficky posoudit, zda data pocházejí z normálního rozložení.

Způsob konstrukce:

Na vodorovnou osu vynášíme uspořádané hodnoty $x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$,

na svislou osu kvantily u_{α_j} standardizovaného normálního rozložení, kde $\alpha_j = \frac{3j-1}{3n+1}$, přičemž j je pořadí j-té uspořádané hodnoty (jsou-li některé hodnoty stejné, pak za j bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupince).

Pocházejí-li data z normálního rozložení, pak všechny dvojice $\left(x_{(j)}, u_{\alpha_j}\right)$ budou ležet na přímce.

Pro data z rozložení s kladnou šikmostí se dvojice $\left(x_{(j)}, u_{\alpha_j}\right)$ budou řadit do konkávní křivky,

pro data z rozložení se zápornou šikmostí se dvojice $\left(x_{(j)}, u_{\alpha_j}\right)$ budou řadit do konvexní křivky.

Příklad na konstrukci N – P plotu:
Desetkrát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta. Výsledky měření: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Pomocí normálního pravděpodobnostního grafu posuďte, zda se tato data řídí normálním rozložením.

Řešení:

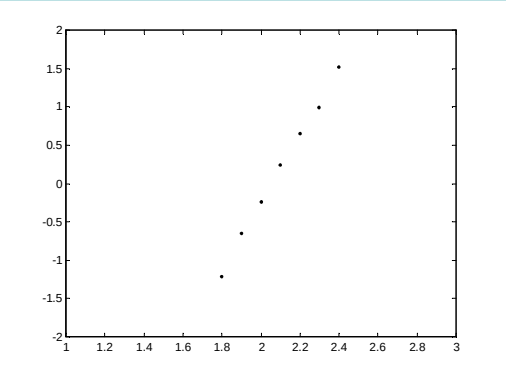
usp. hodnoty	1,8	1,8	1,9	2	2	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
průměrné pořadí	1,5	1,5	3	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9	10

Vektor hodnot průměrného pořadí: j = (1,5 3 4,5 6,5 8 9 10),

vektor hodnot $\alpha_j = \frac{3j-1}{3n+1} = (0{,}1129;0{,}2581;0{,}4032;0{,}5968;0{,}7419;0{,}8387;0{,}9355)$,

vektor kvantilů $u_{\alpha_j} = (-1{,}2112;-0{,}6493;-0{,}245;0{,}245;0{,}6493;0{,}9892;1{,}5179)$.

Normální pravděpodobnostní graf

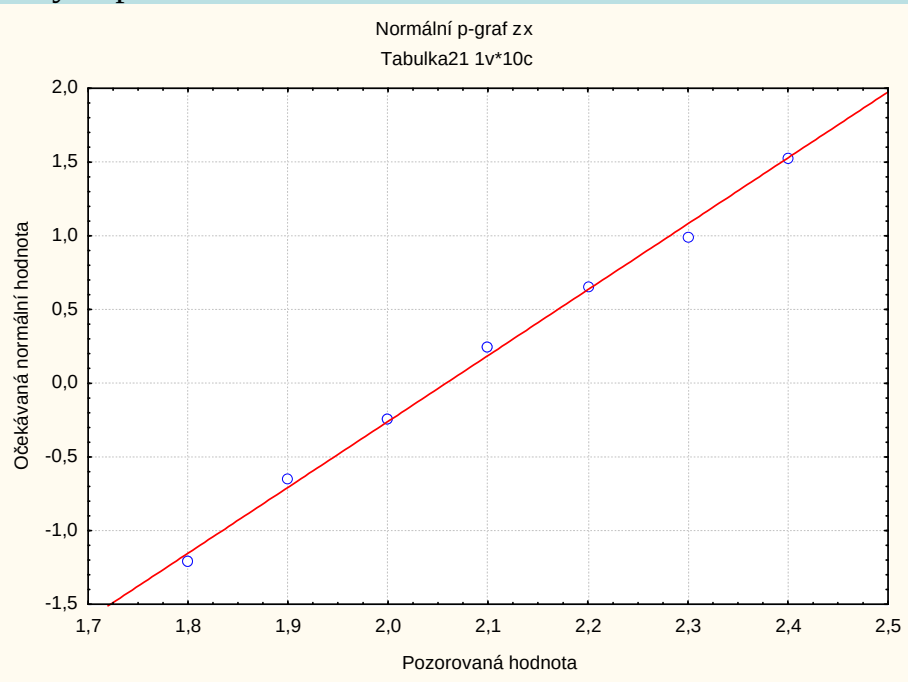


Protože dvojice $(x_{(j)}, u_{\alpha_j})$ téměř leží na přímce, lze usoudit, že data pocházejí z normálního rozložení.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a 10 případech. Zjištěné hodnoty zapíšeme do proměnné X.

Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – Proměnná X – OK - odškrtneme Neurčovat průměrnou pozici svázaných pozorování - OK.



Quantile - quantile plot (Q-Q plot)

Umožňuje graficky posoudit, zda data pocházejí z nějakého známého rozložení (např. STATISTICA nabízí 8 typů rozložení: beta, exponenciální, Gumbelovo, gamma, log-normální, normální, Rayleighovo a Weibulovo).

Způsob konstrukce:

na svislou osu vynášíme uspořádané hodnoty $x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$,

na vodorovnou osu kvantily $K_{\alpha_j}(X)$ vybraného rozložení, kde $\alpha_j = \frac{j - r_{adj}}{n + n_{adj}}$, přičemž r_{adj} a n_{adj} jsou korigující faktory $\leq 0{,}5$,

implicitně $r_{adj} = 0{,}375$ a $n_{adj} = 0{,}25$. (Jsou-li některé hodnoty $x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$ stejné, pak za j bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupince.)

Pokud vybrané rozložení závisí na nějakých parametrech, pak se tyto parametry odhadnou z dat nebo je může zadat uživatel.

Body $\left(K_{\alpha_j}(X), x_{(j)}\right)$ se metodou nejmenších čtverců proloží přímka. Čím méně se body odchylují od této přímky, tím je lepší soulad mezi empirickým a teoretickým rozložením.

Příklad na konstrukci Q-Q plotu: Desetkrát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta. Výsledky měření: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Pomocí Q-Q plotu ověřte, zda se tato data řídí normálním rozložením.

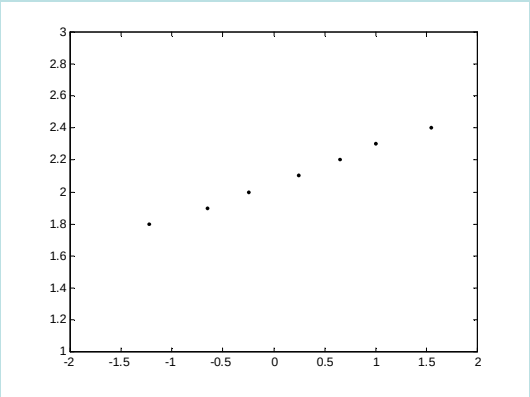
Řešení:

usp.hodnoty	1,8	1,8	1,9	2	2	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
průměrné pořadí	1,5	1,5	3	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9	10

Vektor hodnot průměrného pořadí: j = (1,5 3 4,5 6,5 8 9 10)

vektor hodnot $\alpha_j = \frac{j - 0{,}375}{n + 0{,}25} = (0{,}1098; 0{,}2561; 0{,}4024; 0{,}5976; 0{,}7439; 0{,}8415; 0{,}939)$

vektor kvantilů $u_{\alpha_j} = (-1{,}2278; -0{,}6554; -0{,}247; 0{,}247; 0{,}6554; 1{,}0005; 1{,}566)$

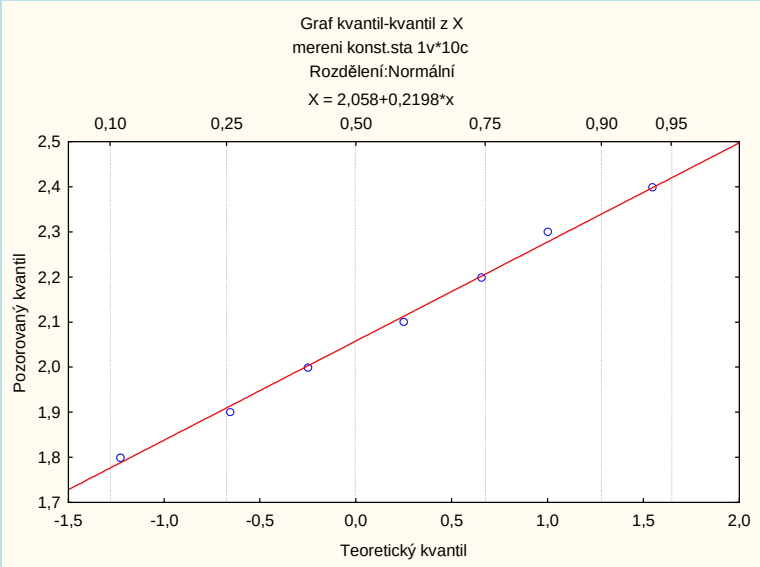


Vzhled grafu nasvědčuje tomu, že data pocházejí z normálního rozložení.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a 10 případech. Zjištěné hodnoty zapíšeme do proměnné X.

Grafy – 2D Grafy – Grafy typu Q-Q– Proměnná X – OK - odškrtneme Neurčovat průměrnou pozici svázaných pozorování - OK.



Probability - probability plot (P-P plot)

Používá se ke stejným účelům jako Q-Q plot, ale jinak se konstruuje.

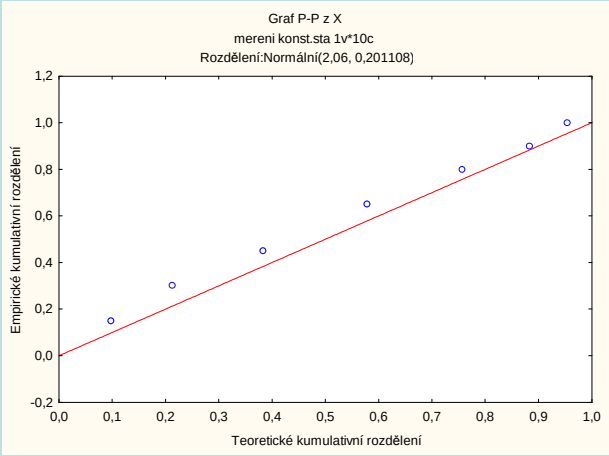
Způsob konstrukce: spočtou se standardizované hodnoty $z_{(j)} = \frac{x_{(j)} - m}{s}$, j = 1, ..., n. Na vodorovnou osu se vynesou hodnoty teoretické distribuční funkce $\Phi(z_{(j)})$ a na svislou osu hodnoty empirické distribuční funkce $F(z_{(j)}) = j/n$. (Jsou-li některé hodnoty $x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$ stejné, pak za j bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupince.)Pokud se body $(\Phi(z_{(j)}), F(z_{(j)}))$ řadí kolem hlavní diagonály čtverce [0,1] x [0,1], lze usuzovat na dobrou shodu empirického a teoretického rozložení.

Příklad na konstrukci P-P plotu pomocí systému STATISTICA: Desetkrát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta. Výsledky měření: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Pomocí P-P plotu ověřte, zda se tato data řídí normálním rozložením.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a 10 případech. Zjištěné hodnoty zapíšeme do proměnné X.

Grafy – 2D Grafy – Grafy typu P-P – Proměnná X – OK - odškrtneme Neurčovat průměrnou pozici svázaných pozorování - OK.



Histogram

Umožňuje porovnat tvar hustoty četnosti s tvarem hustoty pravděpodobnosti vybraného teoretického rozložení. (Ve STATISTICE je pojem histogramu širší, skrývá se za ním i sloupkový diagram.)

Způsob konstrukce: na vodorovnou osu vynášíme meze třídicích intervalů. Nad každým třídicím intervalem sestrojíme obdélník o ploše odpovídající relativní četnosti příslušného třídicího intervalu, tj. výška obdélníku je rovna četnostní hustotě třídicího intervalu (četnostní hustota je relativní četnost třídicího intervalu dělená délkou tohoto intervalu).

Způsob konstrukce ve STATISTICE: na vodorovnou osu se vynášejí třídicí intervaly (implicitně 10, jejich počet lze změnit, stejně tak i meze třídicích intervalů) či varianty znaku a na svislou osu absolutní nebo relativní četnosti třídicích intervalů či variant. Do histogramu se zakreslí tvar hustoty (či pravděpodobnostní funkce) vybraného teoretického rozložení.

Příklad na konstrukci histogramu:

U 70 domácností byly zjišťovány týdenní výdaje na nealkoholické nápoje (v Kč).

Výdaje	$\langle 35,65\rangle$	$\langle 65,95\rangle$	$\langle 95,125\rangle$	$\langle 125,155\rangle$	$\langle 155,185\rangle$	$\langle 185,215\rangle$
Počet dom.	7	16	27	14	4	2

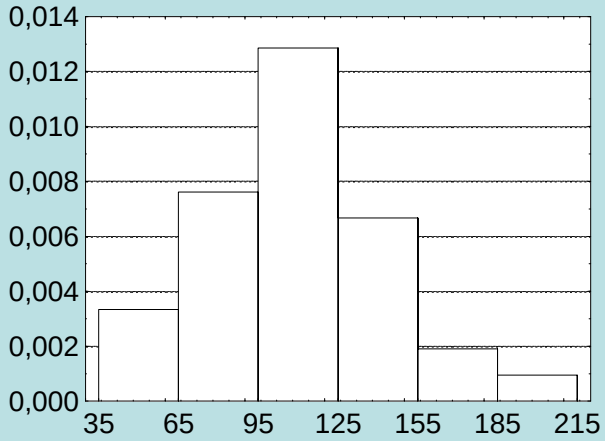
Nakreslete histogram.

Řešení:

Nejprve sestavíme tabulku rozložení četností:

$\langle u_j, u_{j+1}\rangle$	$x_{[j]}$	d_j	n_j	p_j	N_j	F_j	f_j
$\langle 35,65\rangle$	50	30	7	7/70=0,1	7	7/70=0,1	7/2100=0,0033
$\langle 65,95\rangle$	80	30	16	16/70=0,23	23	23/70=0,33	16/2100=0,0076
$\langle 95,125\rangle$	110	30	27	27/70=0,38	50	50/70=0,71	23/2100=0,0109
$\langle 125,155\rangle$	140	30	14	14/70=0,2	64	64/70=0,91	14/2100=0,0067
$\langle 155,185\rangle$	170	30	4	4/70=0,06	68	68/70=0,97	4/2100=0,0019
$\langle 185,215\rangle$	200	30	2	2/70=0,03	70	70/70=1	2/2100=0,00010

S pomocí této tabulky sestrojíme histogram:

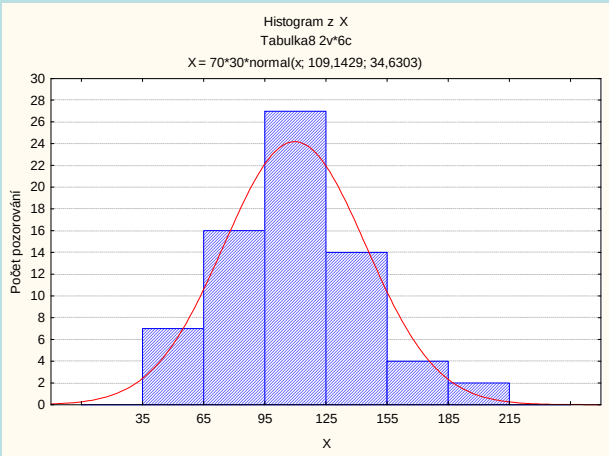


Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 6 případech. První proměnnou nazveme X, druhou cetnost. Do proměnné X napíšeme středy třídicích intervalů, do proměnné cetnost odpovídající absolutní četnosti:

	1 X	2 cetnost
1	50	7
2	80	16
3	110	27
4	140	14
5	170	4
6	200	2

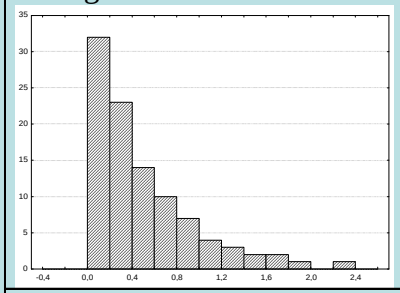
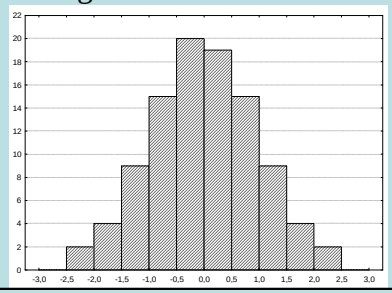
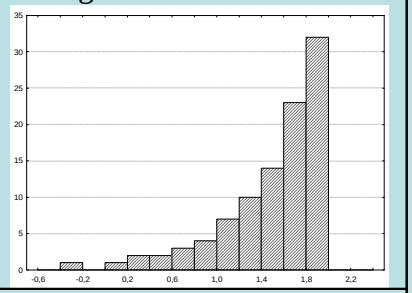
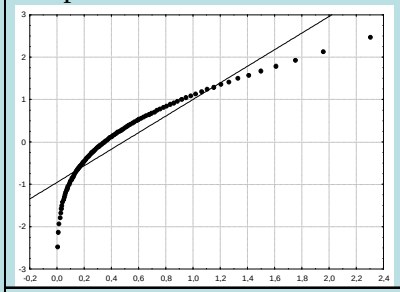
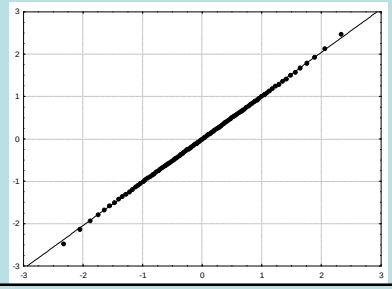
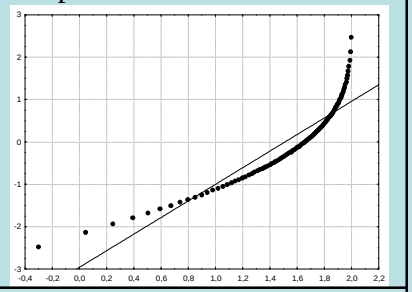
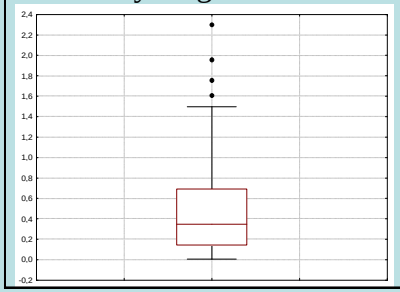
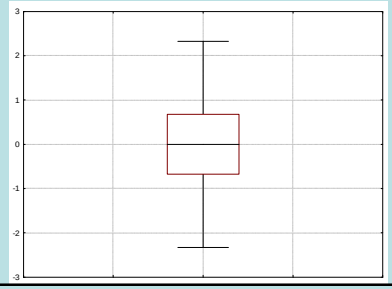
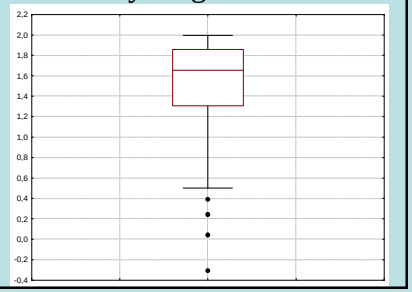
Grafy – Histogramy – zadáme proměnnou vah cetnost – Proměnná X - zaškrtneme Hranice – Určit hranice – zaškrtneme Zadejte hraniční rozmezí: Minimum 35, Krok 30, Maximum 215 – OK – OK. Dostaneme graf:



Na rozdíl od histogramu konstruovaného ručně jsou na svislé ose absolutní četnosti, nikoliv četnostní hustoty. V porovnání s grafem hustoty normálního rozložení je vidět, že naše rozložení četností je lehce kladně zešikmené. Naše data tedy nepocházejí z normálního rozložení.

Vzhled diagnostických grafů pro rozložení s různou šikmostí

Pro ilustraci se podívejme, jak se různá šikmost rozložení projeví na histogramu, N-P plotu a na krabicovém diagramu.

Rozložení s kladnou šikmostí	Normální rozložení	Rozložení se zápornou šikmostí
Histogram	Histogram	Histogram
		
NP plot	NP plot	NP plot
		
Krabicový diagram	Krabicový diagram	Krabicový diagram
		

Průzkumová analýza vícerozměrných dat

Osnova:

- vícerozměrný datový soubor
- vizualizace vícerozměrných dat
- snížení dimenze dat metodou hlavních komponent
- shluková analýza

Vícerozměrná data: vyskytují se v situacích, kdy u každého z n objektů zjišťujeme hodnoty p znaků $X_1, ..., X_p$.
p-rozměrný datový soubor: matice n x p:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Řádky charakterizují objekty, sloupce znaky.

Např. máme n sportovců, u každého sledujeme tyto znaky: pohlaví (0 – žena, 1 – muž), tělesná výška (v cm), tělesná hmotnost (v kg), nejlepší výkon ve skoku do dálky (v cm), nejlepší výkon ve skoku do výšky (v cm), nejlepší výkon v běhu na 100 m (v s).

Úkoly průzkumové analýzy vícerozměrných dat:

- odhalit vektory pozorování nebo jejich složky, které se jeví jako vybočující
- postihnout závislosti mezi sloupci datového souboru
- identifikovat shluky v datech, které svědčí o nehomogenitě daného výběru
- posoudit vícerozměrnou normalitu dat.

Omezíme se na dva problémy, a to na vizualizaci dat pomocí hlavních komponent a na shlukovou analýzu dat.

Vizualizace vícerozměrných dat

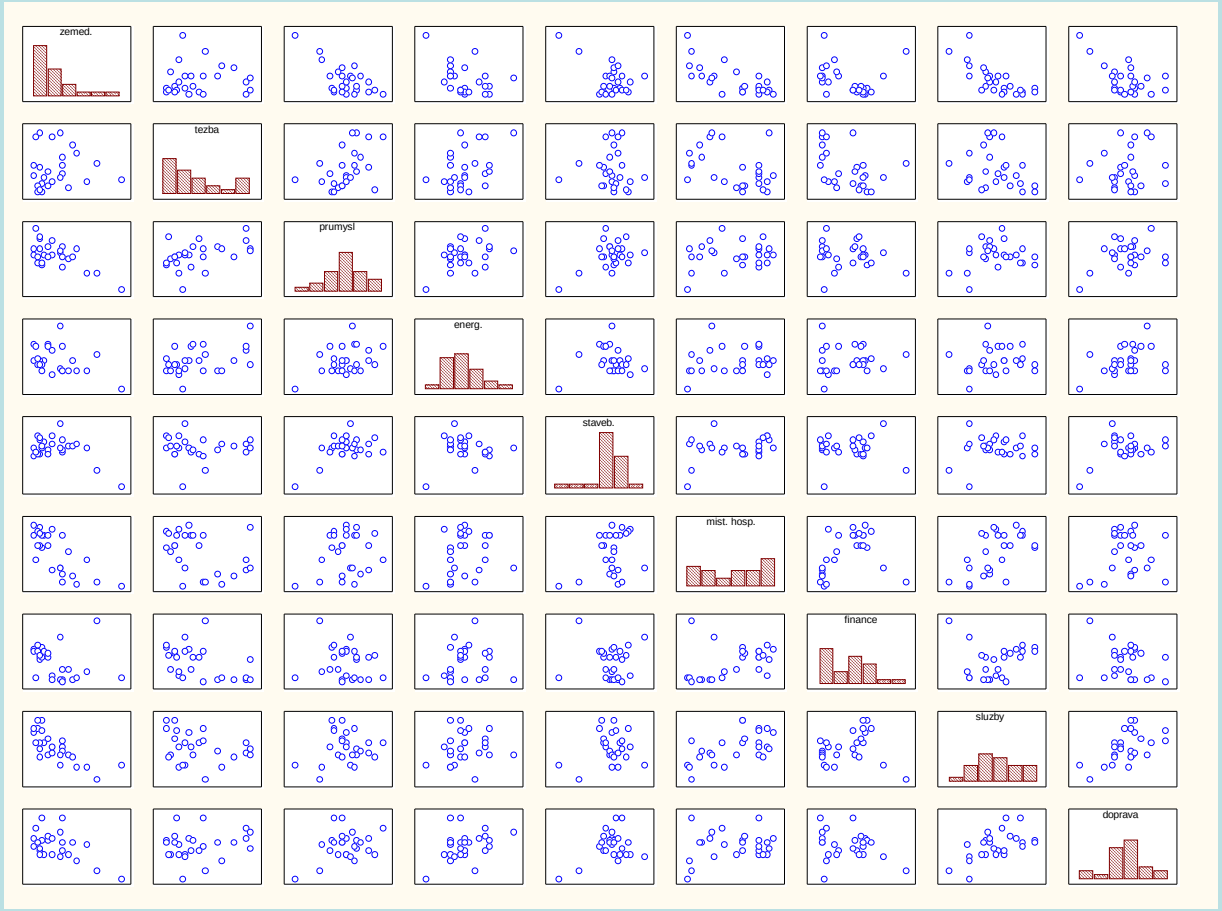
Je-li p = 2 nebo p = 3, můžeme hodnoty znaků chápat jako souřadnice v dvou či třírozměrném prostoru a získáme tak dvourozměrný či třírozměrný tečkový diagram. Ze vzhledu těchto tečkových diagramů lze poznat, zda se v datech vyskytují odlehlá pozorování, zda mezi znaky existuje nějaká závislost nebo zda se objekty sdružují do skupin.

Příklad: Máme k dispozici datový soubor z roku 1979 o 26 evropských zemích, který obsahuje údaje o procentuálním zastoupení ekonomicky činného obyvatelstva v různých odvětvích národního hospodářství:
zemědělství, těžba, průmyslová výroba, energetika, stavebnictví, místní hospodářství, finanční sektor, služby, doprava a komunikace.

	1 zemed.	2 tezba	3 prumysl	4 energ.	5 staveb.	6 mist. hosp.	7 finance	8 sluzby	9 doprava
Belgie	3,3	0,9	27,6	0,9	8,2	19,1	6,2	26,6	7,2
Dánsko	9,2	0,1	21,8	0,6	8,3	14,2	6,5	32,2	7,1
Francie	10,8	0,8	27,5	0,9	8,9	16,8	6	22,6	5,7
Záp. Německo	6,7	1,3	35,8	0,9	7,3	14,4	5	22,5	6,1
Irsko	23,2	1	20,7	1,3	7,5	16,8	2,8	20,6	6,1
Itálie	15,9	0,6	27,6	0,5	10	18,1	1,5	20,1	5,7
Lucembursko	7,7	3,1	30,8	0,8	9,2	18,5	4,5	19,2	6,2
Nizozemsko	6,3	0,1	22,5	1	9,9	18	6,9	28,5	6,8
Velká Británie	2,7	1,4	30,2	1,4	6,9	16,9	5,8	28,3	6,4
Rakousko	12,7	1,1	31,4	1,4	8	16,8	4,9	16,7	7
Finsko	13	0,4	25,9	1,3	7,4	14,7	5,5	24,2	7,6
Řecko	41,4	0,6	17,6	0,6	8,1	11,5	2,4	11,1	6,7
Norsko	9	0,5	22,4	0,8	8,6	16,9	4,7	27,7	9,4
Portugalsko	27,8	0,3	24,5	0,6	8,4	13,3	2,7	16,7	5,7
Španělsko	22,9	0,8	28,5	0,7	11,5	9,7	8,5	11,9	5,5
Švédsko	6,1	0,4	25,9	0,8	7,2	14,4	6	32,4	6,8
Švýcarsko	7,7	0,2	37,8	0,8	9,5	17,5	5,3	15,5	5,7
Turecko	66,8	0,7	7,9	0,1	2,8	5,5	1,1	11,9	3,2
Bulharsko	23,6	1,9	32,3	0,6	7,9	8	0,7	18,2	6,8
Československo	16,5	2,9	35,5	1,2	8,7	9,2	0,9	17,9	7,2
Vých. Německo	4,2	2,9	41,2	1,3	7,6	11,2	1,2	22,1	8,3
Maďarsko	21,7	3,1	29,6	1,9	8,2	9,4	0,9	17,2	8
Polsko	31,1	2,5	25,7	0,9	8,4	7,5	0,9	16,1	6,9
Rumunsko	34,7	2,1	30,1	0,6	8,7	5,9	1,3	11,6	5
Sovětský svaz	23,7	1,4	25,8	0,6	9,2	6,1	0,5	23,4	9,3
Jugoslávie	48,7	1,5	16,8	1,1	4,9	6,4	11,3	5,3	4

Vytvořte dvourozměrné tečkové diagramy pro všechny dvojice proměnných.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Grafy – Maticové grafy – Proměnné – Vybrat vše – OK.



Na hlavní diagonále maticového grafu jsou histogramy jednotlivých proměnných, mimo hlavní diagonálu jsou dvourozměrné tečkové diagramy odpovídajících dvojic proměnných. Vidíme např., že podíl obyvatel zaměstnaných v zemědělství záporně koreluje s podílem obyvatel zaměstnaných v průmyslu, službách či dopravě.

Je-li p > 3, použijeme k vizualizaci dat metodu hlavních komponent (principal component analysis), která umožňuje vyjádřit informace o variabilitě obsažené v datovém souboru pomocí několika málo nových znaků $Y_1, \ldots, Y_m$ získaných jako lineární kombinace znaků původních $X_1, \ldots, X_p$, $m < p$:

$Y_1 = v_{11}X_1 + ... + v_{1p}X_p,$
$Y_2 = v_{21}X_1 + ... + v_{2p}X_p.$
.
.
.
$Y_m = v_{m1}X_1 + ... + v_{mp}X_p.$

Tyto nové znaky, kterým se říká hlavní komponenty, jsou
- nekorelované,
- uspořádané podle svého klesajícího rozptylu.

Většina informace o variabilitě původních dat je tedy soustředěna v první hlavní komponentě a nejméně informace je obsaženo v poslední hlavní komponentě. Ukazuje se, že pouze několik prvních hlavních komponent má dostatečně velký rozptyl. Ostatní pak můžeme zanedbat, čímž docílíme snížení dimenze dat. V datovém souboru však musí existovat mezi znaky dostatečně silná korelace, aby bylo možno tuto redukci provést.

Analýza hlavních komponent může být chápána jako transformace z původního do nového souřadnicového systému, jehož osy jsou tvořeny hlavními komponentami. Osy procházejí směry maximálního rozptylu, protože podmínka nezávislosti komponent vede ke kolmosti os.
Data pak znázorníme v prostoru prvních dvou či tří hlavních komponent.

Metodu hlavních komponent (Principal Component Analysis – PCA) popsal v r. 1901 Karl Pearson a ve 30. letech 20. století ji dále rozvinul Harold Hotelling.

Harold Hotelling (1895 – 1973), americký matematik a statistik

Podstata metody hlavních komponent

Uvažme datový soubor, který vznikl tak, že 6 žáků absolvovalo 4 testy, které měří následující veličiny:
X_1 – přírodovědné znalosti,
X_2 – literární vědomosti,
X_3 – schopnost koncentrace,
X_4 – logické myšlení.
Testy se hodnotí na škále od 1 do 10 (1 = špatný výsledek, 10 = výborný výsledek)

	1 X1	2 X2	3 X3	4 X4
1	7	9	10	8
2	9	8	8	10
3	4	3	1	2
4	2	3	2	2
5	3	1	2	4
6	1	1	1	4

Označení

$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, ..., x_{ip})^T$ – vektor pozorování i-tého objektu, i = 1, 2, ..., n
Např. pro i = 3 máme $\mathbf{x}_3 = (4\ 3\ 1\ 2)^T$

$m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ - průměr j-tého znaku, j = 1, 2, ..., p. Např. pro j = 1 máme $m_1 = \frac{1}{6}(7+9+4+2+3+1) = 4,\overline{3}$

$s_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - m_j)^2$ - rozptyl j-tého znaku, j = 1, 2, ..., p. Např. pro j = 1 máme $s_j^2 = \frac{1}{5}\left[(7-4,\overline{3})^2 + \ldots + (1-4,\overline{3})^2\right] = 9,4\overline{6}$

Datový soubor s průměry, směrodatnými odchylkami a rozptyly:

	1 X1	2 X2	3 X3	4 X4
1	7	9	10	8
2	9	8	8	10
3	4	3	1	2
4	2	3	2	2
5	3	1	2	4
6	1	1	1	4
průměry	4,33	4,17	4,00	5,00
s.o.	3,08	3,49	3,95	3,29
rozptyly	9,47	12,17	15,60	10,80

$z_{ij} = \frac{x_{ij} - m_j}{s_j}$ - (i,j)-tá standardizovaná hodnota, i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., p

Např. pro i = 1, j = 1 máme $z_{11} = \frac{7 - 4,\overline{3}}{\sqrt{9,4\overline{6}}} = 0,8667$

Datový soubor standardizovaných hodnot

	1 X1	2 X2	3 X3	4 X4
1	0,866703	1,385674	1,519109	0,912871
2	1,51673	1,098983	1,012739	1,521452
3	-0,10834	-0,33447	-0,75955	-0,91287
4	-0,75836	-0,33447	-0,50637	-0,91287
5	-0,43335	-0,90786	-0,50637	-0,30429
6	-1,08338	-0,90786	-0,75955	-0,30429

$\mathbf{z}_i = (z_{i1}, ..., z_{ip})^T$ – vektor standardizovaných pozorování i-tého objektu, i = 1, 2, ..., n
$\mathbf{m} = (m_1, ..., m_p)^T$ – vektor průměrů

$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \mathbf{m})(\mathbf{x}_i - \mathbf{m})^T$ - výběrová varianční matice. V našem případě:

Proměnná	Kovariance (pca)			
	X1	X2	X3	X4
X1	9,46667	9,73333	10,60000	8,80000
X2	9,73333	12,16667	13,20000	9,40000
X3	10,60000	13,20000	15,60000	11,60000
X4	8,80000	9,40000	11,60000	10,80000

$\mathbf{R} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T$ - výběrová korelační matice. V našem případě:

Proměnná	Korelace (pca)			
	X1	X2	X3	X4
X1	1,000000	0,906937	0,872258	0,870307
X2	0,906937	1,000000	0,958133	0,820031
X3	0,872258	0,958133	1,000000	0,893684
X4	0,870307	0,820031	0,893684	1,000000

(**S** a **R** jsou čtvercové symetrické matice řádu p.)

Základní pojmy

A - čtvercová matice řádu p.
Vlastní číslo matice **A** – takové číslo λ, které pro libovolný nenulový vektor **v** typu p x 1 splňuje rovnici $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$.
Vlastní vektor matice **A** – vektor **v**.
Charakteristický polynom matice **A** - determinant $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$.
Stopa matice **A** - součet jejích diagonálních prvků (značí se Tr(**A**)).

Výpočet vlastních čísel matice A
Rovnici $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ upravíme na tvar $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{o}$. Tato soustava p rovnic má netriviální řešení, právě když charakteristický polynom matice **A** je roven 0. Dostaneme rovnici p-tého stupně. Jejím řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Vlastnosti vlastních čísel
Jejich součet je roven stopě matice **A**: $\lambda_1 + ... + \lambda_p = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$,
jejich součin je roven determinantu matice **A**: $\lambda_1 ... \lambda_p = \det(\mathbf{A})$,
jsou seřazena sestupně: $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_p$.

Vlastnosti vlastních vektorů
Mají jednotkovou délku: $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i = 1$, i = 1, …, p,
jsou vzájemně ortogonální: $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = 0$ pro všechna $i \neq j$

Získání hlavních komponent

Nechť výběrová varianční matice **S** má vlastní čísla $l_1, ..., l_p$ a vlastní vektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$,
přičemž $\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_j = 1$, j = 1, ..., p a $\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_k = 0$ pro $j \neq k$.
Znamená to, že vektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ jsou ortonormální.
Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $l_1 > l_2 > ... > l_p$.

1. hlavní komponenta vznikne jako lineární kombinace znaků $X_1, ..., X_p$, kde koeficienty této lineární kombinace jsou souřadnice vlastního vektoru $\mathbf{v}_1$, tedy

$$Y_1 = v_{11}X_1 + ... + v_{1p}X_p.$$

Její rozptyl je l_1.
Dosadíme-li za $X_1, ..., X_p$ vektory pozorování $\mathbf{x}_i$, i = 1, ..., n, dostaneme vektor souřadnic $\mathbf{y}_1 = (y_{11}, ..., y_{1n})^T$, kde $y_{1i} = \mathbf{v}_1^T\mathbf{x}_i$.

2. hlavní komponenta vznikne jako lineární kombinace znaků $X_1, ..., X_p$, kde koeficienty této lineární kombinace jsou souřadnice vlastního vektoru $\mathbf{v}_2$, tedy

$$Y_2 = v_{21}X_1 + ... + v_{2p}X_p.$$

Její rozptyl je l_2.
Přitom $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = 0$, tj. 1. a 2. hlavní komponenta jsou lineárně nezávislé.
Dosadíme-li za $X_1, ..., X_p$ vektory pozorování $\mathbf{x}_i$, i = 1, ..., n, dostaneme vektor souřadnic $\mathbf{y}_2 = (y_{21}, ..., y_{2n})^T$, kde $y_{2i} = \mathbf{v}_2^T\mathbf{x}_i$.

.....

j-tá hlavní komponenta vznikne jako lineární kombinace znaků $X_1, ..., X_p$, kde koeficienty této lineární kombinace jsou souřadnice vlastního vektoru $\mathbf{v}_j$, tedy

$$Y_j = v_{j1}X_1 + ... + v_{jp}X_p.$$

Její rozptyl je l_j. Přitom $\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_k = 0$, j = 1, ..., k-1, tj. j-tá hlavní komponenta je lineárně nezávislá se všemi ostatními hlavními komponentami.
Dosadíme-li za $X_1, ..., X_p$ vektory pozorování $\mathbf{x}_i$, i = 1, ..., n, dostaneme vektor souřadnic $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, ..., y_{jn})^T$, kde $y_{ji} = \mathbf{v}_j^T\mathbf{x}_i$.

Lze dokázat, že celková variabilita obsažená v datech je rovna stopě matice **S**, tj. součtu vlastních čísel $l_1 + ... + l_p$.

1. hlavní komponenta tedy vyčerpává $\frac{l_1}{l_1 + \ldots + l_p} 100\%$ celkové variability.

Pokud je číslo $\frac{l_1}{l_1 + \ldots + l_p}$ dostatečně blízké 1, znamená to, že 1. hlavní komponenta dobře nahrazuje celý datový soubor. Je-li toto číslo podstatně menší než 1, musíme vzít tolik hlavních komponent, aby jejich součet dělený stopou matice **S** byl dostatečně blízký 1.
(V mnoha aplikacích se stává, že i při velkém počtu znaků stačí poměrně malý počet hlavních komponent.)
Znázorníme-li rozmístění objektů na ploše prvních dvou hlavních komponent, můžeme poznat, které objekty se řadí do skupin neboli shluků.
(Před provedením metody hlavních komponent je třeba se rozhodnout, zda budeme pracovat s původními hodnotami znaků nebo standardizovanými hodnotami.)

Důležité upozornění: Proměnné $X_1, \ldots, X_p$ musí být mezi sebou dostatečně korelované, jinak metoda hlavních komponent nedá dobré výsledky.

Koeficient korelace i-tého znaku X_i s k-tou hlavní komponentou Y_k lze vyjádřit jako $R(X_i, Y_k) = \frac{v_{ki}\sqrt{l_k}}{s_i}$.

Reprodukce výchozí kovarianční matice: platí vzorec $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{p} l_i v_i \mathbf{v}_i^T$ (tzv. spektrální rozklad matice **S**).

Rozhodneme-li se uvažovat právě m hlavních komponent ($m \leq p$), pak pomocí tohoto vztahu můžeme posoudit, jak těchto m hlavních komponent reprodukuje rozptyly a kovariance původních proměnných. Lze posoudit i reziduální matici, tj. matici, kterou získáme jako rozdíl výchozí kovarianční matice a reprodukované kovarianční matice.

Doporučený postup při analýze hlavních komponent

a) Provedeme tabulkové a grafické zpracování datového souboru, abychom se blíže seznámili s daty.

b) Sestavíme korelační matici a prověříme, zda jsou korelace natolik silné, aby mělo smysl provádět analýzu hlavních komponent.

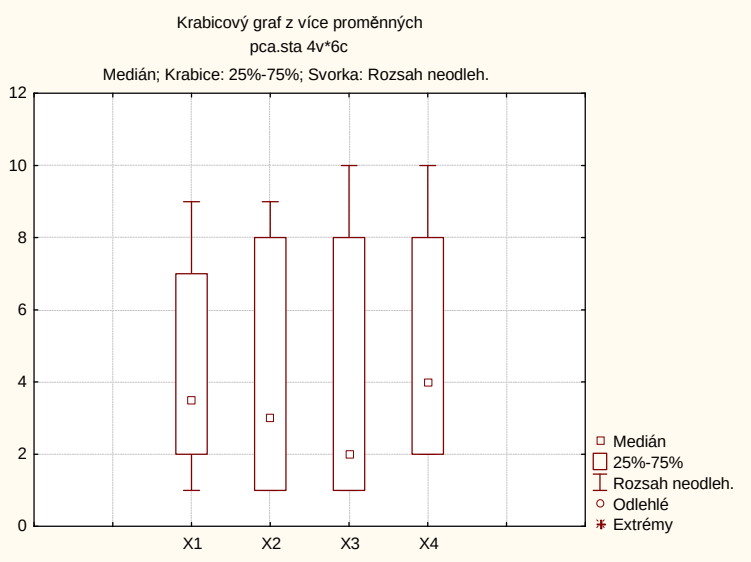
c) Rozhodneme, kolika hlavními komponentami lze popsat datový soubor bez podstatné ztráty informace. Označme tento vhodný počet jako m. Při stanovení m můžeme použít tato pomocná kritéria:

- Kaiserovo kritérium - za m volíme počet těch vlastních čísel matice **R**, která jsou větší než 1.
- Sutinový test (scree test) – grafická metoda, která spočívá v subjektivním posouzení vzhledu sutinového grafu (scree plot), tj. grafu znázorňujícího velikosti sestupně uspořádaných vlastních čísel matice **R**. Objeví-li se v grafu určité zploštění, pak za m vezmeme to pořadové číslo, kde se zploštění projevilo.
- Kritérium založené na kumulativním procentu vysvětleného rozptylu. Požadujeme, aby vybrané hlavní komponenty vysvětlily aspoň 70% celkového rozptylu.
- Kritérium založené na reziduální korelační či kovarianční matici. Požadujeme, aby prvky reziduální matice byly co možná nejmenší.

d) Pokusíme se o interpretaci prvních m hlavních komponent. Zkoumáme přitom, jak jsou jednotlivé vybrané hlavní komponenty utvořeny z původních znaků a jak s nimi korelují.

e) Vypočítáme vektory souřadnic a následně sestrojíme dvourozměrné tečkové diagramy.

Pro náš datový soubor obsahující výsledky 6 žáků ve 4 testech nejprve znázorníme data pomocí krabicových diagramů: Grafy – 2D Grafy – Krabicové grafy – zvolíme Vícenásobný – Proměnné - Závisle proměnné X1-X4 – OK – OK



Nyní vypočteme korelační matici: Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Hlavní komponenty & klasifikační analýza – Proměnné X1 až X4, OK – OK – Popisné statistiky – Korelační matice

	Korelace (pca.sta)			
Proměnná	X1	X2	X3	X4
X1	1,000000	0,906937	0,872258	0,870307
X2	0,906937	1,000000	0,958133	0,820031
X3	0,872258	0,958133	1,000000	0,893684
X4	0,870307	0,820031	0,893684	1,000000

Dále vypočteme vlastní čísla a procento vysvětleného rozptylu: na záložce Základní výsledky vybereme Vlastní čísla.

Pořadí vl.č.	Vlastní čísla korelační matice a související statistiky (pca Pouze aktiv. proměnné			
	vl. číslo	% celk. rozptylu	Kumulativ. vl. číslo	Kumulativ. %
1	3,661431	91,53577	3,661431	91,5358
2	0,188636	4,71589	3,850066	96,2517
3	0,134072	3,35181	3,984139	99,6035
4	0,015861	0,39653	4,000000	100,0000

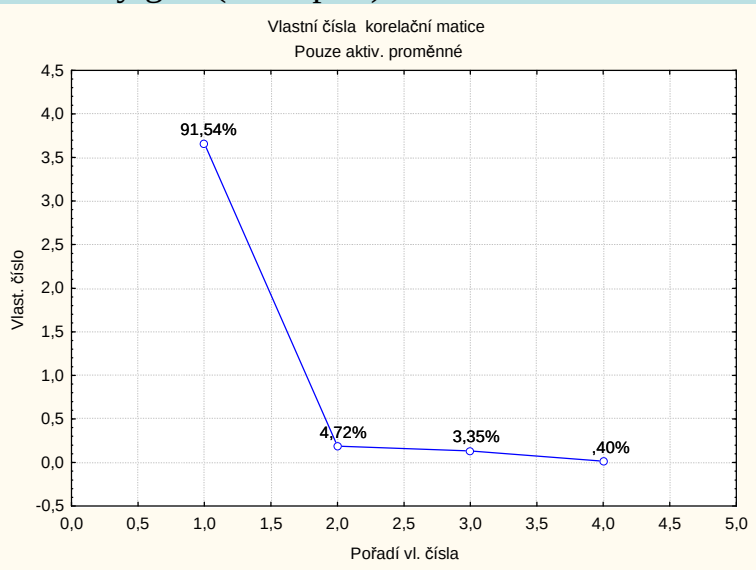
Vidíme, že 1. vlastní číslo $l_1 = 3,66$, tedy 1. hlavní komponenta vyčerpává 91,5% variability dat,
2. vlastní číslo $l_2 = 0,19$, 2. hlavní komponenta vyčerpává 4,7% variability dat atd.
Podle Kaiserova kritéria by stačilo uvažovat pouze 1. hlavní komponentu, protože pouze první vlastní číslo je větší než 1.
Kvůli znázornění objektů však budeme uvažovat první dvě hlavní komponenty.

Dále vypočítáme vlastní vektory: na záložce Proměnné vybereme Vlastní vektory

Proměnná	Vlastní vektory korelační matice (pca) Pouze aktiv. proměnné			
	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3	Faktor 4
X1	-0,498301	-0,000518	0,817131	-0,289816
X2	-0,503657	0,582217	-0,082290	0,632916
X3	-0,508833	0,185043	-0,539021	-0,645217
X4	-0,488994	-0,791696	-0,187036	0,314832

1. hlavní komponenta:
$Y_1 = -0,49X_1 - 0,5X_2 - 0,51X_3 - 0,49X_4$,
2. hlavní komponenta:
$Y_2 = -0,0005X_1 + 0,58X_2 + 0,19X_3 - 0,79X_4$ atd.

Sutinový graf (scree plot):



V sutinovém grafu nastává výrazné zploštění po 1. vlastním čísle.

Výpočet koeficientů korelace 1. a 2. hlavní komponenty a původních čtyř proměnných: na záložce Proměnné vybereme Korelace faktorů & proměnných

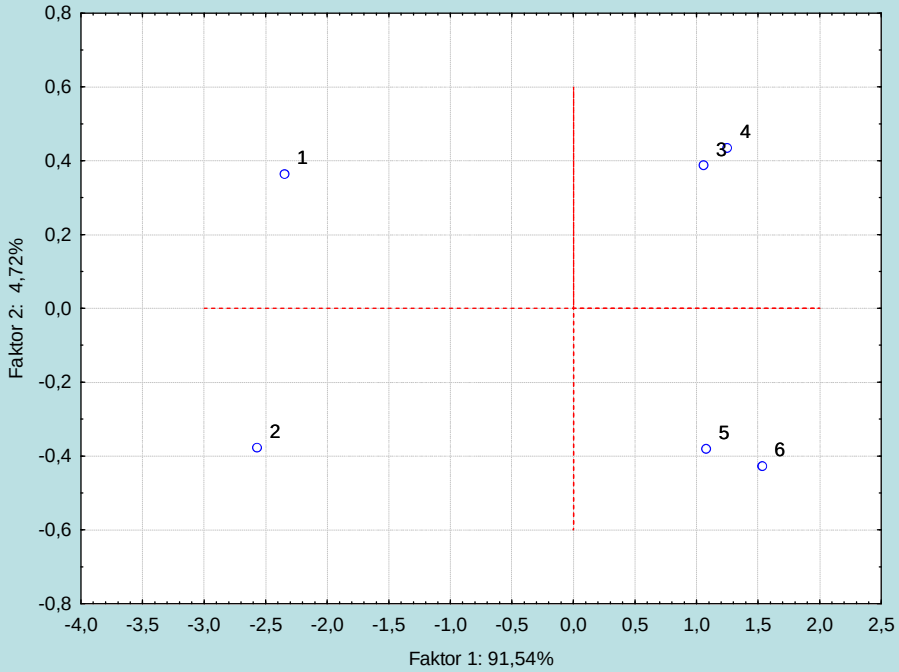
Proměnná	Faktor 1	Faktor 2
X1	-0,953492	-0,000225
X2	-0,963740	0,252869
X3	-0,973645	0,080368
X4	-0,935684	-0,343851

Vidíme, že 1. hlavní komponenta vysoce záporně koreluje se všemi proměnnými. 2. hlavní komponenta slabě kladně koreluje s druhou proměnnou a středně silně záporně koreluje s třetí proměnnou.

Podívejme se rovněž na vektory souřadnic (v systému STATISTICA se jim říká faktorové souřadnice případů): na záložce Případy vybereme Faktorové souřadnice případů.

Případ	Faktor 1	Faktor 2
1	-2,34914	0,364696
2	-2,56859	-0,378068
3	1,05532	0,387487
4	1,25040	0,434674
5	1,07964	-0,381138
6	1,53238	-0,427651

Znázornění objektů (žáků) na ploše prvních dvou hlavních komponent:



Shluková analýza

Cíl shlukové analýzy

Cílem shlukové analýzy je roztřídění n objektů, z nichž každý je popsán p znaky, do několika pokud možno stejnorodých (homogenních) skupin (shluků, clusterů). Požadujeme, aby objekty uvnitř shluků si byly podobné co nejvíce, zatímco objekty z různých shluků co nejméně. Přesný počet shluků většinou není přesně znám.

Shluková analýza nachází uplatnění v celé řadě oborů, např. v biologii. U n populací změříme p biometrických charakteristik a zjišťujeme, zda určité skupiny populací tvoří shluky.

Shluková analýza je ovšem průzkumovou metodou a měla by sloužit jako určité vodítko při dalším zpracování dat.

Podobnost objektů

Podobnost (či rozdílnost) objektů posuzujeme pomocí různých měr vzdálenosti. Pro znaky intervalového či poměrového typu nejčastěji používáme euklidovskou vzdálenost.

Nechť k-tý objekt je popsán vektorem pozorování $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, ..., x_{kp})^T$ a l-tý objekt vektorem $\mathbf{x}_l = (x_{l1}, ..., x_{lp})^T$.

Euklidovská vzdálenost k-tého a l-tého objektu:

$$d_{kl} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(x_{kj} - x_{lj}\right)^2} \ .$$

Vzdálenosti vypočtené pro všechny dvojice objektů se uspořádají do matice vzdáleností. Je zřejmé, že je to čtvercová symetrická matice, která má na hlavní diagonále nuly.

Matice euklidovských vzdáleností pro datový soubor s údaji o 6 žácích:

Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Shluková analýza – Spojování (hierarchické shlukování) – OK – Proměnné X1 – X4 – OK – na záložce Detaily vybereme Shlukovat Případy (řádky) – OK – na záložce Detaily vybereme Matice vzdáleností.

	Euklid. vzdálenosti (pca)					
Případ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0,0	3,6	12,7	12,7	12,6	14,0
P_2	3,6	0,0	12,8	13,2	12,5	14,1
P_3	12,7	12,8	0,0	2,2	3,2	4,1
P_4	12,7	13,2	2,2	0,0	3,0	3,2
P_5	12,6	12,5	3,2	3,0	0,0	2,2
P_6	14,0	14,1	4,1	3,2	2,2	0,0

Hierarchické shlukování

Při aplikacích shlukové analýzy se nejčastěji používá aglomerativní hierarchická procedura. Její princip spočívá v postupném slučování objektů, a to nejprve nejbližších a v dalších krocích pak stále vzdálenějších.

Algoritmus:

1. krok: Každý objekt považujeme za samostatný shluk.

2. krok: Najdeme dva shluky, jejichž vzdálenost je minimální.

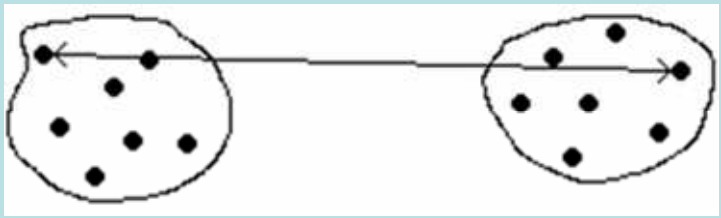
3. krok: Tyto dva shluky spojíme v nový, větší shluk a přepočítáme matici vzdáleností. Její řád se sníží o 1. Vrátíme se na 2. krok.

Funkce algoritmu končí, až jsou všechny objekty spojeny do jediného shluku.

Vzdálenost mezi shluky se počítá různými způsoby. Uvedeme tři z nich.

a) Metoda nejbližšího souseda: Vzdálenost mezi dvěma shluky je minimem ze všech vzdáleností mezi jejich objekty.

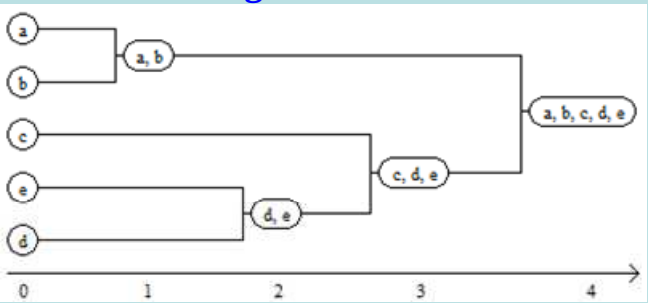
b) Metoda nejvzdálenějšího souseda: Vzdálenost mezi dvěma shluky je maximem ze všech vzdáleností mezi jejich objekty.



c) Metoda průměrné vazby: Vzdálenost mezi dvěma shluky je průměrem ze všech vzdáleností mezi jejich objekty.

Výsledky aglomerativní hierarchické procedury se zpravidla znázorňují pomocí dendrogramu. Je to graficky znázorněná posloupnost dvojic $\{(\nu_1, S^{(1)}), \ldots, (\nu_n, S^{(n)})\}$, kde $\{\nu_i\}_{i=1}^{n}$ je neklesající posloupnost úrovní spojování a $S^{(i)}$ je roztřídění objektů odpovídající úrovni ν_i, i = 1, ..., n.

Příklad dendrogramu:



V levém sloupci jsou jednotlivé objekty, další sloupce reprezentují shluky, do nichž byly objekty zařazeny a délky čar představují vzdálenosti mezi shluky.

Poznámka:
Hierarchická shluková analýza může být použita nejen na shlukování objektů, ale též na shlukování znaků.

Dendrogram podobnosti objektů je standardní výstup hierarchických shlukovacích metod, z něhož je zjevná struktura objektů ve shlucích.

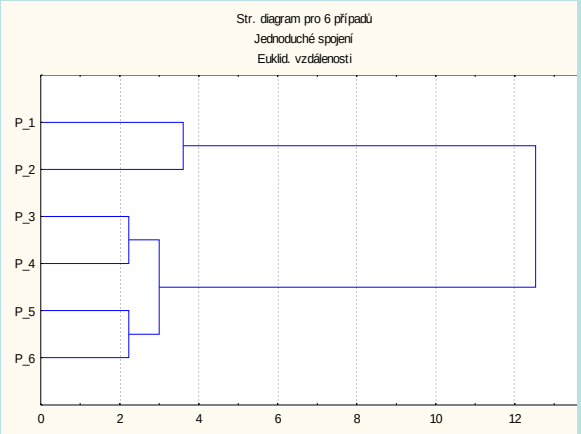
Dendrogram podobnosti znaků odhaluje nejčastěji dvojice či trojice (všeobecně m-tice) znaků, které si jsou velmi podobné a silně spolu korelují. Znaky, které jsou ve společném shluku, si jsou značne podobné a jsou tudíž vzájemně nahraditelné. To má značný význam pri plánování experimentu - některé vlastnosti či znaky není zapotřebí vůbec zjišťovat či měřit, protože jsou snadno nahraditelné jinými znaky a nemají velkou vypovídací hodnotu.

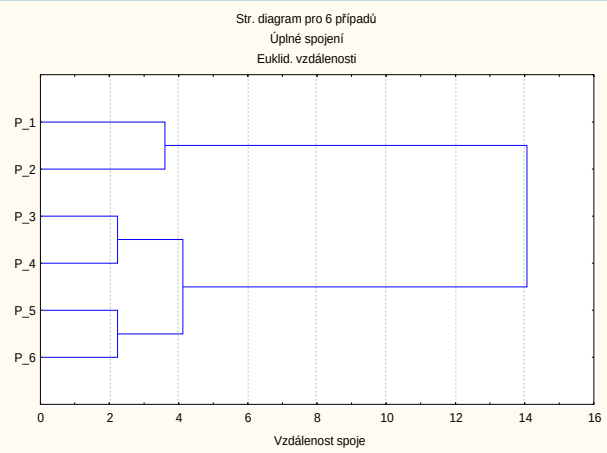
Vytvoření dendrogramu v systému STATSTICA:

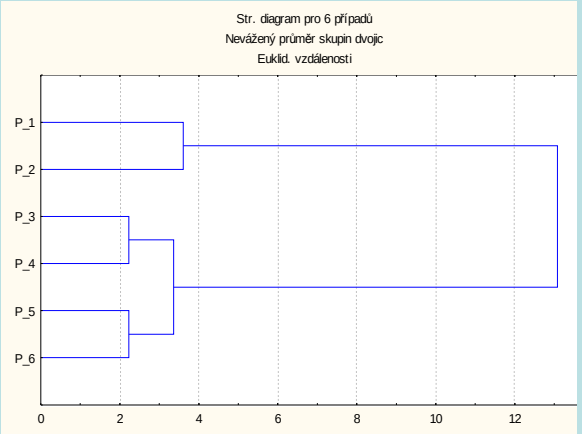
- pro metodu nejbližšího souseda:

Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Shluková analýza – Spojování (hierarchické shlukování) – OK – Proměnné X1 – X4 – OK – na záložce Detaily vybereme Shlukovat Případy (řádky), pravidlo slučování ponecháme Jednoduché spojení, míru vzdálenosti ponecháme Euklidovské vzd. – OK – Horizontální graf hierarch. stromu

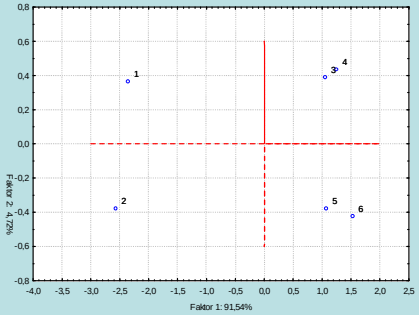
- pro metodu nejvzdálenějšího souseda: na záložce Detaily vybereme pravidlo slučování Úplné spojení,
- pro metodu úplné vazby: Na záložce Detaily vybereme pravidlo slučování Nevážený průměr skupin dvojic.







Vidíme, že výsledky všech tří metod jsou velmi podobné a odpovídají rozmístění objektů (žáků) na ploše prvních dvou hlavních komponent.



Příklad: Uvažme datový soubor s údaji o 26 evropských státech. Tento datový soubor budeme analyzovat metodou hlavních komponent a následně provedeme shlukovou analýzu.

Provedení PCA

Nejprve pomocí korelační matice posoudíme, zda má smysl aplikovat PCA.
Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Hlavní komponenty&klasifikační analýza – Proměnné X1 až X19, OK – OK – Popisné statistiky – Korelační matice.

	Korelace (staty1979.sta)								
Proměnná	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	1,00	0,04	-0,67	-0,40	-0,53	-0,73	-0,22	-0,75	-0,56
X2	0,04	1,00	0,44	0,41	-0,02	-0,40	-0,44	-0,28	0,16
X3	-0,67	0,44	1,00	0,39	0,48	0,21	-0,15	0,15	0,36
X4	-0,40	0,41	0,39	1,00	0,03	0,20	0,11	0,13	0,37
X5	-0,53	-0,02	0,48	0,03	1,00	0,33	0,01	0,17	0,38
X6	-0,73	-0,40	0,21	0,20	0,33	1,00	0,36	0,57	0,17
X7	-0,22	-0,44	-0,15	0,11	0,01	0,36	1,00	0,11	-0,25
X8	-0,75	-0,28	0,15	0,13	0,17	0,57	0,11	1,00	0,56
X9	-0,56	0,16	0,36	0,37	0,38	0,17	-0,25	0,56	1,00

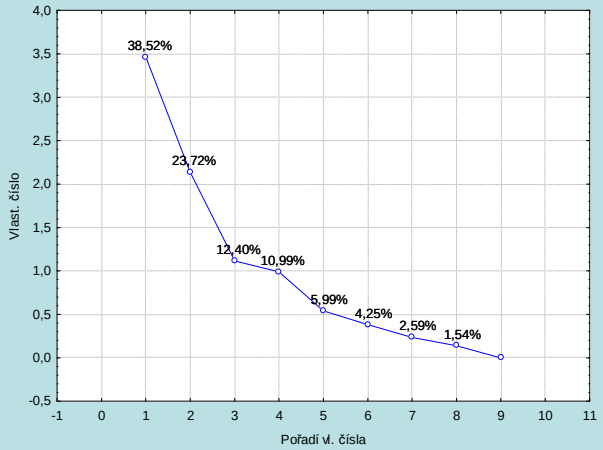
Některé korelační koeficienty jsou v absolutní hodnotě dostatečně velké a zřejmě tedy bude mít smysl provést analýzu hlavních komponent.

Nyní získáme vlastní čísla výběrové korelační matice a procento vysvětleného rozptylu: na záložce Základní výsledky vybereme Vlastní čísla.

Pořadí vl.č.	vl. číslo	% celk. rozptylu	Kumulativ. vl. číslo	Kumulativ. %
1	3,466490	38,51655	3,466490	38,5166
2	2,135004	23,72227	5,601494	62,2388
3	1,115581	12,39534	6,717075	74,6342
4	0,989394	10,99326	7,706468	85,6274
5	0,539211	5,99123	8,245679	91,6187
6	0,382111	4,24568	8,627790	95,8643
7	0,233226	2,59140	8,861015	98,4557
8	0,138985	1,54428	9,000000	100,0000

První hlavní komponenta tedy vysvětluje 38,52% variability obsažené v devíti sledovaných proměnných, druhá 23,72%, třetí 12,40% atd. Celkové procento variability vysvětlené prvními třemi hlavními komponentami je 74,63%.

Sestrojíme sutinový graf (scree plot): na záložce Základní výsledky vybereme Sutinový graf.

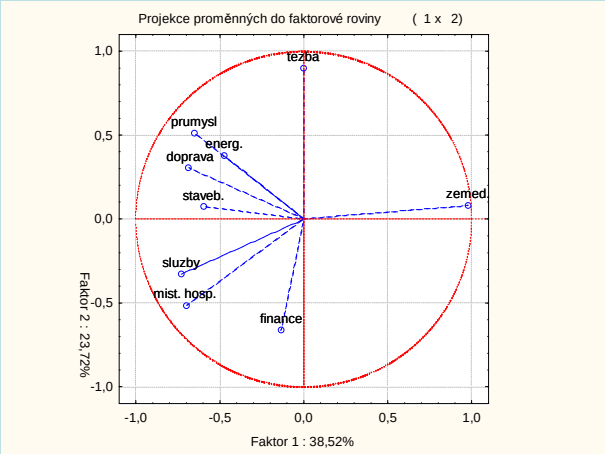


Počet m hlavních komponent zvolíme tři. V nabídce Výsledky hlavních komponent snížíme počet faktorů na 3.

Vypočteme korelační koeficienty prvních tří hlavních komponent a původních devíti proměnných: na záložce Proměnné vybereme Korelace faktorů & proměnných.

Proměnná	Korelace faktorů a proměnných (faktor. zátěže) podle korelací (staty1979.sta)		
	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
X1	0,978776	0,081725	-0,049455
X2	-0,000898	0,901105	0,216344
X3	-0,652174	0,513343	0,112868
X4	-0,474888	0,378598	0,649962
X5	-0,595263	0,073032	-0,304047
X6	-0,698213	-0,513734	0,119592
X7	-0,136193	-0,663299	0,589451
X8	-0,727506	-0,327637	-0,251642
X9	-0,684094	0,304809	-0,337074

Graficky lze znázornit souvislost mezi novými proměnnými (např. 1. a 2. HK) a původními proměnnými X1, …, X9 takto: na záložce Proměnné vybereme 2D graf fakt. souřadnic prom. - Osa x: Faktor I, Osa y: Faktor 2 - OK. Na ose x budou souřadnice vstupních proměnných vzhledem k první hlavní komponentě, na ose Y vzhledem ke druhé komponentě.



1. HK vysoce kladně koreluje s proměnnou X1, tj se zemědělstvím a negativně s proměnnou X8 – služby. Jelikož je podíl lidí v zemědělství a ve službách obecně považován za určité měřítko vyspělosti země, můžeme první komponentu interpretovat jako míru zaostalosti/vyspělosti.
2. HK výrazně pozitivně koreluje s těžebním průmyslem, energetikou a zpracovatelským průmyslem. Negativně koreluje se službami a finanční sférou. Budeme ji proto interpretovat jako míru toho, nakolik se země orientuje na průmyslovou výrobu. (Ne vždy mají komponenty takto jasnou interpretaci. Jsou jen jistou matematickou transformací vstupních proměnných, která může a nemusí odrážet nějakou reálnou vlastnost objektů!).

Podívejme se rovněž na vektory souřadnic (v systému STATISTICA se jim říká faktorové souřadnice případů): na záložce Případy vybereme Faktorové souřadnice případů.

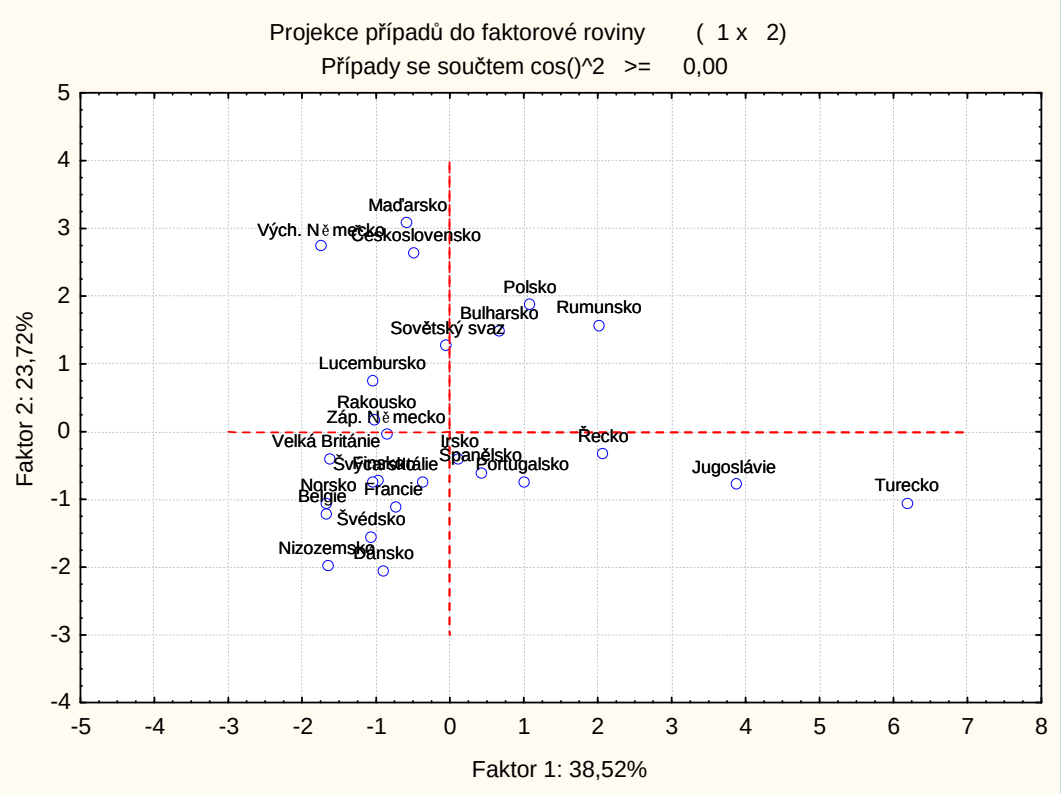
Případ	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Belgie	-1,68273	-1,20656	0,16668
Dánsko	-0,90831	-2,05598	-0,85147
Francie	-0,74050	-1,11048	0,38553
Záp. Německo	-0,85647	-0,03165	0,56466
Irsko	0,11153	-0,40400	0,53134
Itálie	-0,36366	-0,74902	-1,29050
Lucembursko	-1,04022	0,74294	0,46327
Nizozemsko	-1,65732	-1,98866	-0,08729
Velká Británie	-1,61201	-0,39776	1,35031
Rakousko	-1,01103	0,16508	1,16804
Finsko	-0,97223	-0,73166	0,54475
Řecko	2,07154	-0,33521	-0,92274
Norsko	-1,66538	-1,05092	-1,14341
Portugalsko	0,99709	-0,74259	-0,75474
Španělsko	0,43244	-0,60818	0,31825
Švédsko	-1,07387	-1,55390	-0,22815
Švýcarsko	-1,04031	-0,74707	0,28216
Turecko	6,19519	-1,04930	-0,64265
Bulharsko	0,67558	1,48159	-1,03101
Československo	-0,48005	2,63421	0,07902
Vých. Německo	-1,73669	2,73412	0,26970
Maďarsko	-0,57526	3,07981	1,09460
Polsko	1,08637	1,87264	-0,54684
Rumunsko	2,01536	1,57550	-0,48595
Sovětský svaz	-0,04779	1,26246	-2,30671
Jugoslávie	3,87872	-0,78542	3,07316

1. HK vysoce kladně koreluje s proměnnou X_1 (zemědělství) a záporně se všemi ostatními proměnnými. Tato hlavní komponenta tedy rozlišuje země na zemědělské a průmyslové. Povšimněte si, že souřadnice této hlavní komponenty jsou nejvyšší u Turecka (6,2) a Jugoslávie (3,9).

2. HK vysoce kladně koreluje s proměnnou X_2 (těžba) a podstatně slaběji s proměnnou X_3 (průmyslová výroba). Vysoké hodnoty souřadnic této hlavní komponenty najdeme u Maďarska, Východního Německa a Československa.

3. HK středně silně koreluje s proměnnou X_4 (energetika) a X_7 (finanční sektor). Nejvyšší hodnotu najdeme u Jugoslávie.

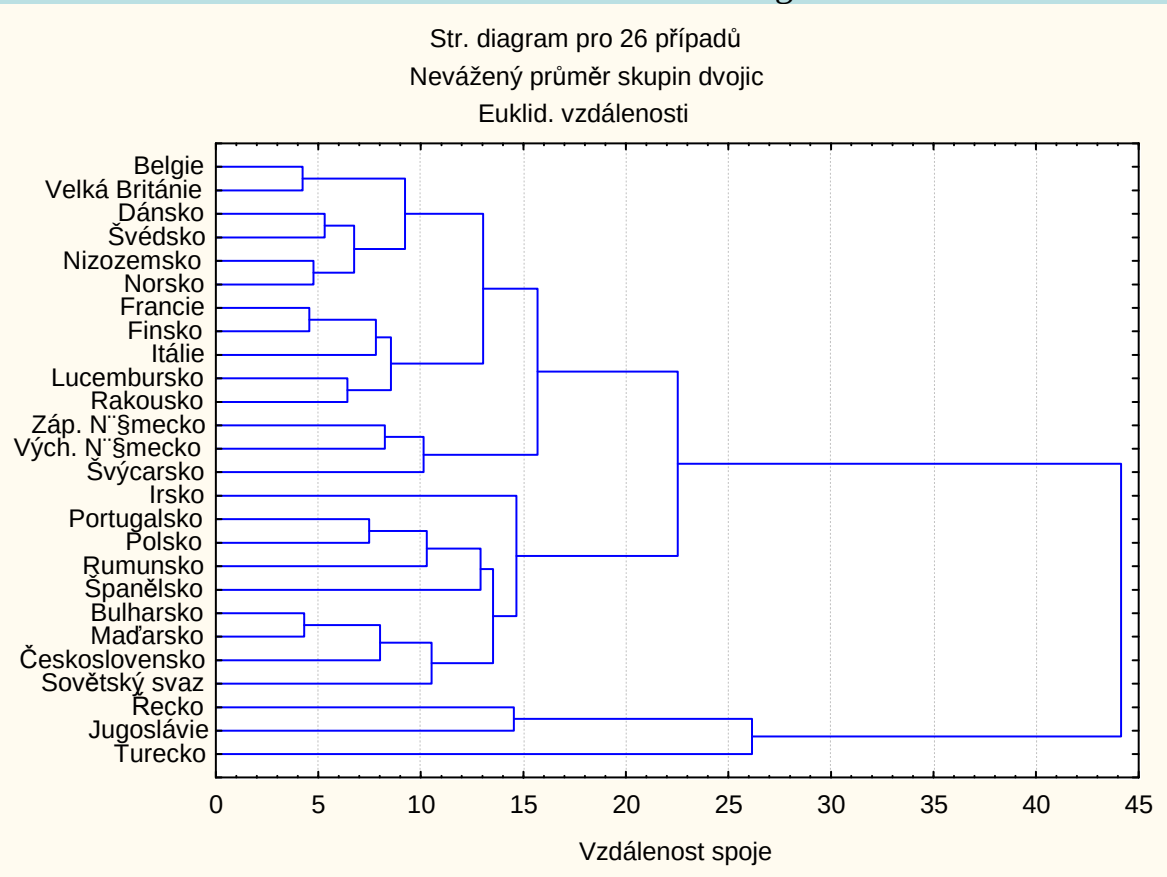
Nyní znázorníme rozmístění zemí na ploše prvních dvou hlavních komponent:
Na záložce Případy vybereme 2D graf fakt. Souřadnic příp.



Státy napravo jsou státy s vysokým podílem zemědělství. Vyniká zde zejména Turecko a Jugoslávie. Všechny státy obvykle považované za ekonomicky vyspělé jsou naopak na levé straně. Jsou to státy, kde je nižší podíl osob zaměstnaných v zemědělství, zato vyšší podíl osob pracujících ve službách. Je zde také hezky vidět zaměření zemí tehdejšího socialistického bloku na průmyslovou výrobu - horní část grafu. A naopak severské státy a státy Beneluxu orientované na finanční a další služby v dolní části.

Provedení shlukové analýzy

Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Shluková analýza - Spojování (hierarchické shlukování) – OK - Proměnné X1 až X4, OK, Detaily - Shlukovat případy (řádky) – Pravidlo slučování: Nevážený průměr skupin dvojic – Míry vzdálenosti: Euklidovské vzdálenosti - OK – Horizontální graf hierarch. stromu.



Ukazuje se, že země se dělí do tří skupin: první skupinu tvoří rozvinuté demokratické země společně s NDR, druhou skupinu socialistické země s Irskem, Portugalskem a Španělskem a třetí Řecko s Jugoslávií. Turecko se chová jako singulární entita.

Základní pojmy matematické statistiky I

Motivace:

Matematická statistika je věda, která analyzuje a interpretuje data především za účelem získání předpovědi a zlepšení rozhodování v různých oborech lidské činnosti. Přitom se řídí principem statistické indukce, tj. na základě znalostí o náhodném výběru z určitého rozložení pravděpodobností se snaží učinit závěry o vlastnostech tohoto rozložení.
Ústředním pojmem matematické statistiky je tedy pojem náhodného výběru.

Osnova:

- náhodný výběr z jednorozměrného a vícerozměrného rozložení
- statistika jako funkce náhodného výběru
- bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí

Definice náhodného výběru:

a) Nechť $X_1, ..., X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejné rozložení $L(\vartheta)$. Řekneme, že $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozložení $L(\vartheta)$. (Číselné realizace $x_1, ..., x_n$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ uspořádané do sloupcového vektoru odpovídají datovému souboru zavedenému v popisné statistice.)

b) Nechť $(X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n)$ jsou stochasticky nezávislé dvourozměrné náhodné vektory, které mají všechny stejné dvourozměrné rozložení $L_2(\vartheta)$. Řekneme, že $(X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n)$ je dvourozměrný náhodný výběr rozsahu n z dvourozměrného rozložení $L_2(\vartheta)$. (Číselné realizace $(x_1,y_1), ..., (x_n,y_n)$ náhodného výběru $(X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n)$ uspořádané do matice typu $2\times n$ odpovídají dvourozměrnému datovému souboru zavedenému v popisné statistice.)

c) Analogicky lze definovat p-rozměrný náhodný výběr rozsahu n z p-rozměrného rozložení $L_p(\vartheta)$.

Definice statistiky:

Libovolná funkce $T = T(X_1, ..., X_n)$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ (resp. $T = T(X_1,Y_1, ..., X_n,Y_n)$ náhodného výběru $(X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n)$) se nazývá (výběrová) statistika.

Definice důležitých statistik:

a) Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr, $n \geq 2$.

Označme $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ … výběrový průměr, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ … výběrový rozptyl, $S = \sqrt{S^2}$ … výběrová směrodatná odchylka

Pro libovolné, ale pevně dané reálné číslo x je statistikou též hodnota výběrové distribuční funkce $F_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i; X_i \leq x\}$

b) Nechť je dáno $r \geq 2$ stochasticky nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1 \geq 2, \ldots, n_r \geq 2$.

Celkový rozsah je $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$.

Označme $M_1, \ldots, M_r$ výběrové průměry a $S_1^2, \ldots, S_r^2$ výběrové rozptyly jednotlivých výběrů. Nechť $c_1, \ldots, c_r$ jsou reálné konstanty, aspoň jedna nenulová.

$\sum_{j=1}^{r} c_j M_j$ … lineární kombinace výběrových průměrů, $S_*^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r}(n_j - 1)S_j^2}{n - r}$ … vážený průměr výběrových rozptylů.

c) Nechť $(X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n)$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení o rozsahu n.

Označme $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ výběrové průměry, $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_1)^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - M_2)^2$ výběrové rozptyly.

$S_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_1)(Y_i - M_2)$… výběrová kovariance, $R_{12} = \begin{cases} \frac{S_{12}}{S_1 S_2} & \text{pro } S_1 S_2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ … výběrový koeficient korelace.

Pro libovolnou, ale pevně zvolenou dvojici reálných čísel x,y je statistikou též hodnota výběrové simultánní distribuční funkce $F_n(x,y) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i; X_i \leq x \wedge Y_i \leq y\}$.

Upozornění: Číselné realizace statistik M, S^2, S, S_{12}, R_{12} odpovídají číselným charakteristikám m, s^2, s, s_{12}, r_{12} zavedeným v popisné statistice, ale u rozptylu, směrodatné odchylky, kovariance a koeficientu korelace je multiplikativní konstanta $\frac{1}{n-1}$, nikoliv $\frac{1}{n}$, jak tomu bylo v popisné statistice. Jak uvidíme později, uvedené číselné realizace mohou být považovány za odhady číselných realizací náhodných veličin zavedených v počtu pravděpodobnosti.

Charakteristika vlastnosti	Počet pravděpodobnosti	Matematická statistika	Popisná statistika
poloha	$E(X) = \mu$	M	m
variabilita	$D(X) = \sigma^2$	S^2	$\frac{n-1}{n}s^2$
variabilita	$\sqrt{D(X)} = \sigma$	S	$\sqrt{\frac{n-1}{n}}s$
společná variabilita	$C(X_1, X_2) = \sigma_{12}$	S_{12}	$\frac{n-1}{n}s_{12}$
těsnost vztahu	$R(X_1, X_2) = \rho$	R_{12}	r_{12}
rozložení	$\Phi(x)$	$F_n(x)$	F(x)

Příklad (výpočet realizací výběrového průměru, výběrového rozptylu a hodnot výběrové distribuční funkce):
Desetkrát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru X_1, ..., X_{10}. Vypočtěte realizaci m výběrového průměru M, realizaci s^2 výběrového rozptylu S^2, realizaci s výběrové směrodatné odchylky S a hodnoty výběrové distribuční funkce $F_{10}(x)$.

Řešení:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(2 + 1{,}8 + \ldots + 2{,}2) = 2{,}06, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - nm^2\right) = \frac{1}{9}\left(2^2 + 1{,}8^2 + \ldots + 2{,}2^2 - 10 \cdot 2{,}06^2\right) = 0{,}0404$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}0404} = 0{,}2011$$

Pro usnadnění výpočtu hodnot výběrové distribuční funkce $F_{10}(x)$ uspořádáme měření podle velikosti:
1,8 1,8 1,9 2 2 2,1 2,1 2,2 2,3 2,4.

$$x < 1{,}8 : F_{10}(x) = 0$$

$$1{,}8 \le x < 1{,}9 : F_{10}(x) = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$1{,}9 \le x < 2 : F_{10}(x) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

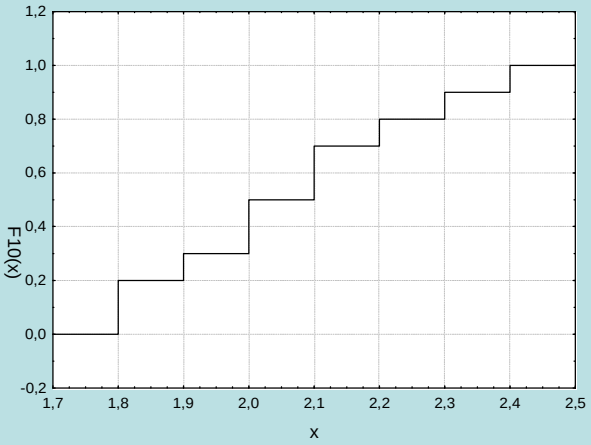
$$2 \le x < 2{,}1 : F_{10}(x) = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$2{,}1 \le x < 2{,}2 : F_{10}(x) = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$2{,}2 \le x < 2{,}3 : F_{10}(x) = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$2{,}3 \le x < 2{,}4 : F_{10}(x) = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

$$x \ge 2{,}4 : F_{10}(x) = 1$$



Příklad (výpočet realizace výběrového koeficientu korelace):
U 11 náhodně vybraných aut jisté značky bylo zjišťováno jejich stáří (náhodná veličina X – v letech) a cena (náhodná veličina Y – v tisících Kč). Výsledky:
(5, 85), (4, 103), (6, 70), (5, 82), (5, 89), (5, 98), (6, 66), (6, 95), (2, 169), (7, 70), (7, 48).
Vypočtěte a interpretujte číselnou realizaci r_{12} výběrového koeficientu korelace R_{12}.

Řešení:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{11}(5+4+\ldots+7) = 5{,}28$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{11}(85+103+\ldots+48) = 88{,}63$$

$$s_1^{\,2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n m_1^{\,2}\right) = \frac{1}{10}\left(5^2+4^2+\ldots+7^2-11\cdot 5{,}28^2\right) = 2{,}02$$

$$s_2^{\,2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - n m_2^{\,2}\right) = \frac{1}{10}\left(85^2+103^2+\ldots+48^2-11\cdot 88{,}63^2\right) = 970{,}85$$

$$s_{12} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n m_1 m_2\right) = \frac{1}{10}\left(5\cdot 85+4\cdot 103+\ldots+7\cdot 48-11\cdot 5{,}28\cdot 88{,}63\right) = -40{,}89$$

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 \cdot s_2} = \frac{-40{,}82}{\sqrt{2{,}02}\cdot\sqrt{970{,}85}} = -0{,}92$$

Mezi náhodnými veličinami X a Y existuje silná nepřímá lineární závislost. Čím starší auto, tím nižší cena.

Bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí

Vycházíme z náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ z rozložení $L(\vartheta)$, které závisí na parametru ϑ. Množinu všech přípustných hodnot tohoto parametru označíme Ξ. Tato množina se nazývá parametrický prostor.
Např. je-li $X_1, ..., X_n$ náhodný výběr z rozložení $N(\mu,\sigma^2)$, pak $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ a v tomto případě parametrický prostor $\Xi = (-\infty, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

Parametr ϑ neznáme a chceme ho odhadnout pomocí daného náhodného výběru (případně chceme odhadnout nějakou parametrickou funkci $h(\vartheta)$).

Bodovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$ je statistika $T_n = T(X_1, ..., X_n)$, která nabývá hodnot blízkých $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv. Existují různé metody, jak konstruovat bodové odhady (např. metoda momentů či metoda maximální věrohodnosti, ale těmi se zde zabývat nebudeme) a také různé typy bodových odhadů. Omezíme se na odhady nestranné, asymptoticky nestranné a konzistentní.

Intervalovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$ rozumíme interval (D, H), jehož meze jsou statistiky
$D = D(X_1, ..., X_n)$, $H = H(X_1, ..., X_n)$ a který s dostatečně velkou pravděpodobností pokrývá $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv.

Typy bodových odhadů

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$, $h(\vartheta)$ je parametrická funkce, T, T_1, T_2, ... jsou statistiky.

a) Řekneme, že statistika T je nestranným odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$, jestliže

$\forall \vartheta \in \Xi : E(T) = h(\vartheta)$.

(Význam nestrannosti spočívá v tom, že odhad T nesmí parametrickou funkci $h(\vartheta)$ systematicky nadhodnocovat ani podhodnocovat. Není-li tato podmínka splněna, jde o vychýlený odhad.)

b) Jsou-li T_1, T_2 nestranné odhady téže parametrické funkce $h(\vartheta)$, pak řekneme, že T_1 je lepší odhad než T_2, jestliže

$\forall \vartheta \in \Xi : D(T_1) < D(T_2)$.

c) Posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá posloupnost asymptoticky nestranných odhadů parametrické funkce $h(\vartheta)$, jestliže

$$\forall \vartheta \in \Xi : \lim_{n\to\infty} E(T_n) = h(\vartheta).$$

(Význam asymptotické nestrannosti spočívá v tom, že s rostoucím rozsahem výběru klesá vychýlení odhadu.)

d) Posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá posloupnost konzistentních odhadů parametrické funkce $h(\vartheta)$, jestliže

$$\forall \vartheta \in \Xi \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\left|T_n - h(\vartheta)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(Význam konzistence spočívá v tom, že s rostoucím rozsahem výběru klesá pravděpodobnost, že odhad se bude realizovat „daleko“ od parametrické funkce $h(\vartheta)$.)

Lze dokázat, že z nestrannosti odhadu vyplývá jeho asymptotická nestrannost a z asymptotické nestrannosti vyplývá konzistence, pokud posloupnost rozptylů odhadu konverguje k nule.

Vlastnosti důležitých statistik

a) Případ jednoho náhodného výběru: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou μ, rozptylem σ^2 a distribuční funkcí $\Phi(x)$. Nechť $n \geq 2$. Označme M_n výběrový průměr, S_n^2 výběrový rozptyl a pro libovolné, ale pevně dané $x \in R$ označme $F_n(x)$ hodnotu výběrové distribuční funkce. Pak pro libovolné hodnoty parametrů μ , σ^2 a libovolné, ale pevně dané reálné číslo x platí:

$E(M_n) = \mu$,

$D(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$,

$E(S_n^2) = \sigma^2$,

$D(S_n^2) = \frac{\gamma_4}{n} - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)}$, kde γ_4 je 4. centrální moment,

$E(F_n(x)) = \Phi(x)$,

$D(F_n(x)) = \frac{\Phi(x)[1-\Phi(x)]}{n}$

Znamená to, že M_n je nestranným odhadem μ, S_n^2 je nestranným odhadem σ^2, pro libovolné, ale pevně dané $x \in R$ je výběrová distribuční funkce $F_n(x)$ nestranným odhadem $\Phi(x)$.

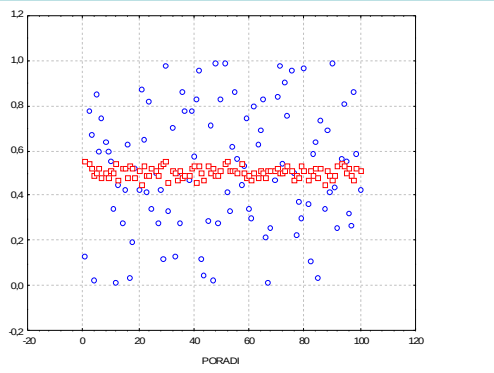
Posloupnost $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost konzistentních odhadů μ,

$\{S_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost konzistentních odhadů σ^2,

pro libovolné, ale pevně dané $x \in R$ je $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost konzistentních odhadů $\Phi(x)$.

Ilustrace:

Vlastnosti výběrového průměru a výběrového rozptylu budeme ilustrovat na náhodném výběru rozsahu 100 z rozložení Rs(0,1). V tomto případě $E(X_i) = 1/2$, $D(X_i) = 1/12$, $i = 1, \ldots, 100$. Pomocí systému STATISTICA vygenerujeme pro každou z náhodných veličin $X_1, \ldots, X_{100}$ 100 realizací a uložíme je do proměnných $v_1, \ldots, v_{100}$. Dále vypočítáme průměr a rozptyl těchto realizací, uložíme je do proměnných PRUMER a ROZPTYL. Graficky znázorníme hodnoty některé z proměnných $v_1, \ldots, v_{100}$ (např. v_1) a hodnoty proměnné PRUMER:



Vidíme, že hodnoty proměnné v_1 kolísají od 0 do 1, zatímco hodnoty proměnné PRUMER se nacházejí v úzkém pásu kolem 1/2.

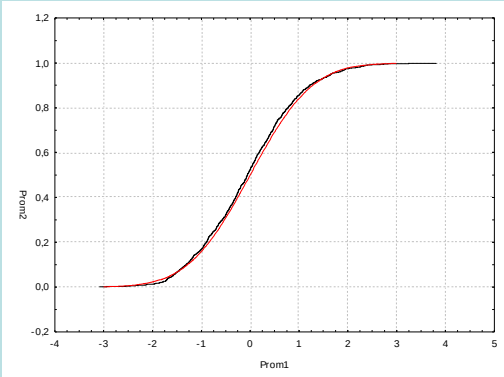
Dále vypočteme průměr a rozptyl např. proměnné v1 a proměnné PRUMER a dále vypočteme průměr proměnné ROZPTYL.

	Popisné statistiky (uniform)	
Proměnná	Průměr	Rozptyl
Prom1	0,536605	0,078676
PRUMER	0,503984	0,000783

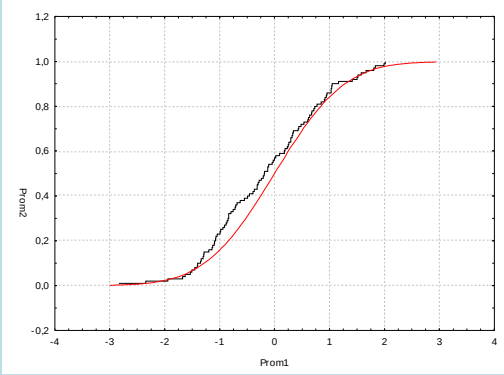
	Popisné statistiky (uniform)
Proměnná	Průměr
ROZPTYL	0,083143

Průměr proměnné v1 by měl být blízký 0,5, rozptyl 1/12 = 0,083. Průměr proměnné PRUMER by se měl blížit 0,5, zatímco rozptyl by měl být n = 100 x menší než 1/12, tj. 0,00083. Dále průměr proměnné ROZPTYL by se měl blížit 1/12 = 0,083.

Nestrannost výběrové distribuční funkce budeme ilustrovat na náhodném výběru rozsahu 1000 z rozložení N(0,1). Získáme výběrovou distribuční funkci tohoto výběru a její graf porovnáme s grafem distribuční funkce náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozložením. Graf výběrové distribuční funkce má černou barvu, graf distribuční funkce standardizovaného normálního rozložení má červenou barvu.



Průběh výběrové distribuční funkce $F_{1000}(x)$ je velmi podobný průběhu distribuční funkce $\Phi(x)$. Pokud bychom postup zopakovali s podstatně menším rozsahem náhodného výběru (např. n = 100), průběh obou funkcí by se lišil výrazněji:



b) Případ $r \geq 2$ stochasticky nezávislých náhodných výběrů: Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$, ..., $X_{r1},\ldots,X_{rn_r}$ je r stochasticky nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1 \geq 2$, ..., $n_r \geq 2$ z rozložení se středními hodnotami μ_1, ..., μ_r a rozptylem σ^2. Celkový rozsah je $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$. Nechť c_1, ..., c_r jsou reálné konstanty, aspoň jedna nenulová. Pak pro libovolné hodnoty parametrů μ_1, …, μ_r a σ^2 platí:

$$E\left(\sum_{j=1}^{r} c_j M_j\right) = \sum_{j=1}^{r} c_j \mu_j ,$$

$E(S_*^2) = \sigma^2$.

Znamená to, že lineární kombinace výběrových průměrů $\sum_{j=1}^{r} c_j M_j$ je nestranným odhadem lineární kombinace středních hodnot $\sum_{j=1}^{r} c_j \mu_j$ a vážený průměr výběrových rozptylů $S_*^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{r} (n_j - 1) S_j^2}{n - r}$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2.

c) Případ jednoho náhodného výběru z dvourozměrného rozložení: Nechť (X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n) je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s kovariancí σ_{12} a koeficientem korelace ρ. Pak pro libovolné hodnoty parametrů σ_{12} a ρ platí:
$E(S_{12}) = \sigma_{12}$,
$E(R_{12}) \approx \rho$ (shoda je vyhovující pro $n \geq 30$).

Znamená to, že výběrová kovariance S_{12} je nestranným odhadem kovariance σ_{12}, avšak výběrový koeficient korelace R_{12} je vychýleným odhadem koeficientu korelace ρ.

Pojem intervalu spolehlivosti

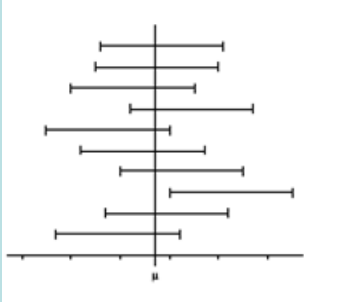
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$,
$h(\vartheta)$ je parametrická funkce,
$\alpha \in (0,1)$,
$D = D(X_1, ..., X_n)$, $H = H(X_1, ..., X_n)$ jsou statistiky.

a) Interval (D, H) se nazývá 100(1-α)% (oboustranný) interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$, jestliže: $\forall \vartheta \in \Xi : P(D < h(\vartheta) < H) \geq 1-\alpha$.
b) Interval (D, ∞) se nazývá 100(1-α)% levostranný interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$, jestliže: $\forall \vartheta \in \Xi : P(D < h(\vartheta)) \geq 1-\alpha$.
c) Interval (-∞, H) se nazývá 100(1-α)% pravostranný interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$, jestliže: $\forall \vartheta \in \Xi : P(h(\vartheta) < H) \geq 1-\alpha$.
Číslo α se nazývá riziko (zpravidla $\alpha = 0,05$, méně často 0,1 či 0,01), číslo $1 - \alpha$ se nazývá spolehlivost.

Postup při konstrukci intervalu spolehlivosti

a) Vyjdeme ze statistiky V, která je nestranným bodovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$.
b) Najdeme tzv. pivotovou statistiku W, která vznikne transformací statistiky V, je monotónní funkcí $h(\vartheta)$ a přitom její rozložení je známé a na $h(\vartheta)$ nezávisí. Pomocí známého rozložení pivotové statistiky W najdeme kvantily $w_{\alpha/2}$, $w_{1-\alpha/2}$, takže platí: $\forall\vartheta\in\Xi: P(w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha/2}) \geq 1 - \alpha$.
c) Nerovnost $w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $D < h(\vartheta) < H$.
d) Statistiky D, H nahradíme jejich číselnými realizacemi d, h a získáme tak 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti, o němž prohlásíme, že pokrývá $h(\vartheta)$ s pravděpodobností aspoň $1 - \alpha$. (Tvrzení, že (d,h) pokrývá $h(\vartheta)$ s pravděpodobností aspoň $1 - \alpha$ je třeba chápat takto: jestliže mnohonásobně nezávisle získáme realizace $x_1, ..., x_n$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ z rozložení $L(\vartheta)$ a pomocí každé této realizace sestrojíme 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro $h(\vartheta)$, pak podíl počtu těch intervalů, které pokrývají $h(\vartheta)$ k počtu všech sestrojených intervalů bude přibližně $1 - \alpha$.)

Ilustrace: Jestliže 100x nezávisle na sobě uskutečníme náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou μ a pokaždé sestrojíme 95% empirický interval spolehlivosti pro μ, pak přibližně v 95-ti případech bude ležet parametr μ v intervalech spolehlivosti a asi v 5-ti případech interval spolehlivosti μ nepokryje.



Volba oboustranného, levostranného, nebo pravostranného intervalu závisí na konkrétní situaci. Např. oboustranný interval spolehlivosti použije konstruktér, kterého zajímá dolní i horní hranice pro skutečnou délku μ nějaké součástky. Levostranný interval spolehlivosti použije výkupčí drahých kovů, který potřebuje znát dolní mez pro skutečný obsah zlata μ v kupovaném slitku. Pravostranný interval spolehlivosti použije chemik, který potřebuje znát horní mez pro obsah nečistot μ v analyzovaném vzorku.

Příklad: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu,\sigma^2)$, kde $n \geq 2$ a rozptyl σ^2 známe. Sestrojte $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ.

Řešení: V tomto případě parametrická funkce $h(\vartheta) = \mu$. Nestranným odhadem střední hodnoty je výběrový průměr $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Protože M je lineární kombinací normálně rozložených náhodných veličin, bude mít také normální rozložení se střední hodnotou $E(M) = \mu$ a rozptylem $D(M) = \frac{\sigma^2}{n}$. Pivotovou statistikou W bude standardizovaná náhodná veličina

$$U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1).$$

Kvantil $w_{\alpha/2} = u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, $w_{1-\alpha/2} = u_{1-\alpha/2}$.

$$\forall \vartheta \in \Xi : 1-\alpha \leq P(-u_{1-\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) = P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} < \mu < M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right).$$

Meze $100(1-\alpha)\%$ intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 tedy jsou:

$D = M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$, $H = M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$.

Při konstrukci jednostranných intervalů spolehlivosti se riziko nepůlí, tedy $100(1-\alpha)\%$ levostranný interval spolehlivosti pro μ je $\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}, \infty\right)$ a pravostranný je $\left(-\infty, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right)$.

Dosadíme-li do vzorců pro dolní a horní mez číselnou realizaci m výběrového průměru M, dostaneme $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti. Postup si ukážeme na následujícím numerickém příkladu.

Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly:
2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2.
Výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru $X_1, ..., X_{10}$ z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme a $\sigma^2 = 0,04$.
Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro μ, a to
a) oboustranný,
b) levostranný,
c) pravostranný.

Řešení:
Vypočteme realizaci výběrového průměru: $m = 2,06$. Riziko α je 0,05. V tabulkách najdeme kvantil $u_{0,975} = 1,96$ pro oboustranný interval spolehlivosti a kvantil $u_{0,95} = 1,64$ pro jednostranné intervaly spolehlivosti.

ad a) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2,06 - \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,96 = 1,94$

$h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2,06 + \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,96 = 2,18$

$1,94 < \mu < 2,18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2,06 - \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,64 = 1,96$

$1,96 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) $h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2,06 + \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,64 = 2,16$

$\mu < 2,16$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

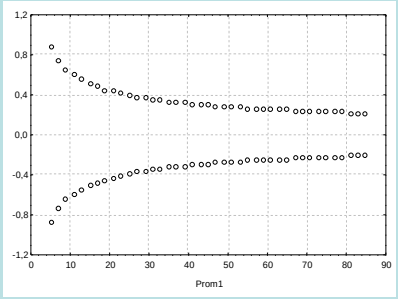
Šířka intervalu spolehlivosti

Nechť (d, h) je 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro $h(\vartheta)$ zkonstruovaný pomocí číselných realizací $x_1, ..., x_n$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ z rozložení $L(\vartheta)$.

a) Při konstantním riziku klesá šířka h-d s rostoucím rozsahem náhodného výběru.
b) Při konstantním rozsahu náhodného výběru klesá šířka h-d s rostoucím rizikem.

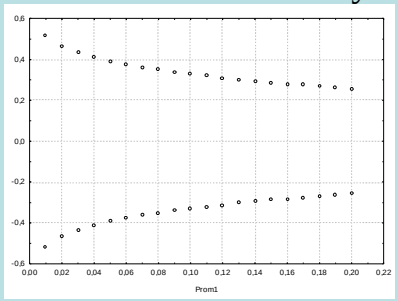
Ilustrace

ad a) Grafické znázornění závislosti dolních a horních meze 95% empirických intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozložení při známém rozptylu na rozsahu náhodného výběru:



Šířka intervalu spolehlivosti klesá se zvětšujícím se rozsahem náhodného výběru, zprvu rychle a pak stále pomaleji.

ad b) Grafické znázornění závislosti dolních a horních mezí 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozložení při známém rozptylu a konstantním rozsahu výběru na riziku:



Vidíme, že šířka intervalu spolehlivosti s rostoucím rizikem klesá.

Příklad: (stanovení minimálního rozsahu výběru z normálního rozložení)
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Jaký musí být minimální rozsah výběru n, aby šířka $100(1-\alpha)\%$ empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ nepřesáhla číslo Δ?

Řešení: Požadujeme, aby $\Delta \geq h - d = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} - (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$. Z této podmínky dostaneme, že $n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2}$. Za rozsah výběru zvolíme nejmenší přirozené číslo vyhovující této podmínce.

Příklad: Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozložení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Kolik měření je nutno provést, aby se hloubka stanovila s chybou nejvýše $\pm 0{,}25$ m při spolehlivosti 0,95?

Řešení: Hledáme rozsah výběru tak, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ nepřesáhla 0,5 m. Přitom σ známe. Z předešlého příkladu vyplývá, že $n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 1{,}96^2}{0{,}5^2} = 61{,}4656$. Nejmenší počet měření je tedy 62.

Základní pojmy matematické statistiky II

Osnova:

Základní typy uspořádání pokusů

- jednoduché pozorování
- dvojné pozorování
- mnohonásobné pozorování

Úvod do testování hypotéz

- nulová a alternativní hypotéza
- chyba 1. a 2. druhu
- testování pomocí kritického oboru
- testování pomocí intervalu spolehlivosti
- testování pomocí p-hodnoty

Testování normality

- Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsova varianta
- Shapirův – Wilkův test
- srovnání S-W testu a Lilieforsova testu pomocí simulačních studií

Základní typy uspořádání pokusů

Metody matematické statistiky často slouží k vyhodnocování výsledků pokusů. Aby mohl být pokus správně vyhodnocen, musí být dobře naplánován. Uvedeme zde nejjednodušší typy uspořádání pokusů.
Předpokládejme například, že sledujeme hmotnostní přírůstky selat téhož plemene při různých výkrmných dietách.

a) Jednoduché pozorování: Náhodná veličina X je pozorována za týchž podmínek. Situace je charakterizována jedním náhodným výběrem X_1, ..., X_n.
Náhodně vylosujeme n selat téhož plemene, podrobíme je jediné výkrmné dietě a zjistíme u každého selete hmotnostní přírůstek. Tím dostaneme realizaci jednoho náhodného výběru.

b) Dvojné pozorování: Náhodná veličina X je pozorována za dvojích různých podmínek. Existují dvě odlišná uspořádání tohoto pokusu.

Dvouvýběrové porovnávání: situace je charakterizována dvěma nezávislými náhodnými výběry $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$.

Náhodně vylosujeme n_1 a n_2 selat téhož plemene, náhodně je rozdělíme na dva soubory o n_1 a n_2 jedincích, první podrobíme výkrmné dietě č. 1 a druhý výkrmné dietě číslo 2. Tak dostaneme realizace dvou nezávislých náhodných výběrů.

Párové porovnávání: situace je charakterizována jedním náhodným výběrem $(X_{11},X_{12}),\ldots,(X_{n1},X_{n2})$ z dvourozměrného rozložení. Přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru $Z_i = X_{i1} - X_{i2}$, i = 1, …, n a tím dostaneme jednoduché pozorování.

Náhodně vylosujeme n vrhů stejně starých selat téhož plemene, z každého odebereme dva sourozence a náhodně jim přiřadíme první a druhou výkrmnou dietu. Tak dostaneme realizaci jednoho dvourozměrného náhodného výběru, kde první složka odpovídá první dietě a druhá složka druhé dietě.

(Párové porovnávání je efektivnější, protože skutečný rozdíl v účinnosti obou diet je překrýván pouze náhodnými vlivy při samotném krmení a trvání, kdežto vliv různých dědičných vloh, který byl losováním znáhodněn, je u sourozeneckého páru selat částečně vyloučen.)

c) Mnohonásobné pozorování: Náhodná veličina X je pozorována za $r \geq 3$ různých podmínek. Existují dvě odlišná uspořádání tohoto pokusu.

Mnohovýběrové porovnávání: situace je charakterizována r nezávislými náhodnými výběry $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ až $X_{r1},\ldots,X_{rn_r}$.

Náhodně vylosujeme n_1, n_2, …, n_r selat téhož plemene, náhodně je rozdělíme na r souborů o n_1, n_2, …, n_r jedincích, první podrobíme výkrmné dietě č. 1, druhý výkrmné dietě číslo 2 atd. až r-tý podrobíme výkrmné dietě číslo r. Tak dostaneme realizace r nezávislých náhodných výběrů.

Blokové porovnávání: situace je charakterizována jedním náhodným výběrem $(X_{11},\ldots,X_{1r}),\ldots,(X_{n1},\ldots,X_{nr})$ z r-rozměrného rozložení.

Náhodně vylosujeme n vrhů stejně starých selat téhož plemene, z každého odebereme r sourozenců a náhodně jim přiřadíme první až r-tou výkrmnou dietu. Tak dostaneme realizaci jednoho r-rozměrného náhodného výběru, kde první složka odpovídá první dietě , druhá složka druhé dietě atd. až r-tá složka odpovídá r-té dietě.

Úvod do testování hypotéz

Motivace: Častým úkolem statistika je na základě dat ověřit předpoklady o parametrech nebo typu rozložení, z něhož pochází náhodný výběr. Takovému předpokladu se říká nulová hypotéza. Nulová hypotéza vyjadřuje nějaký teoretický předpoklad, často skeptického rázu a uživatel ji musí stanovit předem, bez přihlédnutí k datovému souboru. Proti nulové hypotéze stavíme alternativní hypotézu, která říká, co platí, když neplatí nulová hypotéza. Alternativní hypotéza je formulována tak, aby mohla platit jenom jedna z těchto dvou hypotéz. Pravdivost alternativní hypotézy by znamenala objevení nějakých nových skutečností, nebo zásadnější změnu v dosavadních představách.

Např. výzkumník by chtěl na základě dat prověřit tezi (nový objev), že pasivní kouření škodí zdraví. Jako nulovou hypotézu tedy položí tvrzení, že pasivní kouření neškodí zdraví a proti nulové hypotéze postaví alternativní, že pasivní kouření škodí zdraví.

Testováním hypotéz se myslí rozhodovací postup, který je založen na daném náhodném výběru a s jehož pomocí rozhodneme o zamítnutí či nezamítnutí nulové hypotézy.

Nulová a alternativní hypotéza

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$, kde parametr $\vartheta \in \Xi$ neznáme. Nechť $h(\vartheta)$ je parametrická funkce a c daná reálná konstanta.

a) Oboustranná alternativa: Tvrzení H_0: $h(\vartheta) = c$ se nazývá jednoduchá nulová hypotéza. Proti nulové hypotéze postavíme složenou oboustrannou alternativní hypotézu H_1: $h(\vartheta) \neq c$.

b) Levostranná alternativa: Tvrzení H_0: $h(\vartheta) \geq c$ se nazývá složená pravostranná nulová hypotéza. Proti jednoduché nebo složené pravostranné nulové hypotéze postavíme složenou levostrannou alternativní hypotézu H_1: $h(\vartheta) < c$.

c) Pravostranná alternativa: Tvrzení H_0: $h(\vartheta) \leq c$ se nazývá složená levostranná nulová hypotéza. Proti jednoduché nebo složené levostranné nulové hypotéze postavíme složenou pravostrannou alternativní hypotézu H_1: $h(\vartheta) > c$.

Testováním H_0 proti H_1 rozumíme rozhodovací postup založený na náhodném výběru $X_1, ..., X_n$, s jehož pomocí zamítneme či nezamítneme platnost nulové hypotézy.

Chyba 1. a 2. druhu

Při testování H_0 proti H_1 se můžeme dopustit jedné ze dvou chyb: chyba 1. druhu spočívá v tom, že H_0 zamítneme, ač ve skutečnosti platí a chyba 2. druhu spočívá v tom, že H_0 nezamítneme, ač ve skutečnosti neplatí. Situaci přehledně znázorňuje tabulka:

skutečnost	rozhodnutí	
	H_0 nezamítáme	H_0 zamítáme
H_0 platí	správné rozhodnutí	chyba 1. druhu
H_0 neplatí	chyba 2. druhu	správné rozhodnutí

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se značí α a nazývá se hladina významnosti testu (většinou bývá $\alpha = 0{,}05$, méně často 0,1 či 0,01). Pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β. Číslo $1-\beta$ se nazývá síla testu a vyjadřuje pravděpodobnost, že bude H_0 zamítnuta za předpokladu, že neplatí. Obvykle se snažíme, aby síla testu byla aspoň 0,8. Obě hodnoty, α i $1-\beta$, závisí na velikosti efektu, který se snažíme detekovat. Čím drobnější efekt, tím musí být větší rozsah náhodného výběru.

skutečnost	rozhodnutí	
	zdravý	nemocný
jsem zdravý	zdravý a neléčený	zdravý a léčený
jsem nemocný	nemocný a neléčený	nemocný a léčený

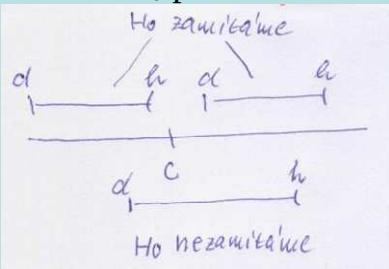
Testování pomocí kritického oboru

Najdeme statistiku $T_0 = T_0(X_1, ..., X_n)$, kterou nazveme testovým kritériem. Množina všech hodnot, jichž může testové kritérium nabýt, se rozpadá na obor nezamítnutí nulové hypotézy (značí se V) a obor zamítnutí nulové hypotézy (značí se W a nazývá se též kritický obor). Tyto dva obory jsou odděleny kritickými hodnotami (pro danou hladinu významnosti α je lze najít ve statistických tabulkách).
Jestliže číselná realizace t_0 testového kritéria T_0 padne do kritického oboru W, pak nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a znamená to skutečné vyvrácení testované hypotézy. Jestliže t_0 padne do oboru nezamítnutí V, pak jde o pouhé mlčení, které platnost nulové hypotézy jenom připouští.
Pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu nyní zapíšeme takto:
$P(T_0 \in W/H_0 \text{ platí}) = \alpha$, $P(T_0 \in V/H_1 \text{ platí}) = \beta$.

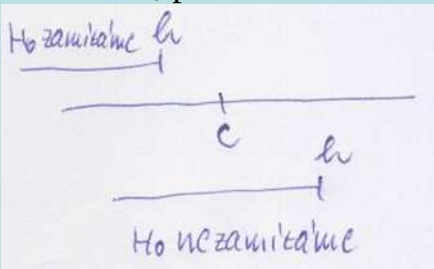
Stanovení kritického oboru pro danou hladinu významnosti α:
Označme t_{min} (resp. t_{max}) nejmenší (resp. největší) hodnotu testového kritéria.
Kritický obor v případě oboustranné alternativy má tvar
$W = \langle t_{min}, K_{\alpha/2}(T)\rangle \cup \langle K_{1-\alpha/2}(T), t_{max}\rangle$, kde $K_{\alpha/2}(T)$ a $K_{1-\alpha/2}(T)$ jsou kvantily rozložení, jímž se řídí testové kritérium T_0, je-li nulová hypotéza pravdivá.
Kritický obor v případě levostranné alternativy má tvar:
$W = \langle t_{min}, K_{\alpha}(T)\rangle$.
Kritický obor v případě pravostranné alternativy má tvar:
$W = \langle K_{1-\alpha}(T), t_{max}\rangle$.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti

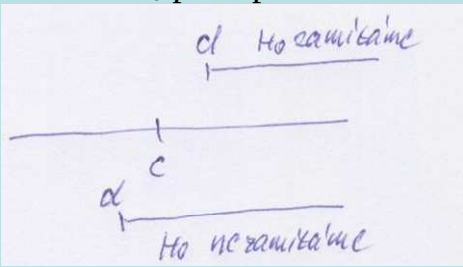
Sestrojíme 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$. Pokryje-li tento interval hodnotu c, pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α, v opačném případě H_0 zamítáme na hladině významnosti α.
Pro test H_0 proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti.



Pro test H_0 proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti.



Pro test H_0 proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti.



Testování pomocí p-hodnoty

p-hodnota udává nejnižší možnou hladinu významnosti pro zamítnutí nulové hypotézy. Je to riziko, že bude zamítnuta H_0 za předpokladu, že platí (riziko planého poplachu). Jestliže p-hodnota $\leq \alpha$, pak H_0 zamítáme na hladině významnosti α, je-li p-hodnota $> \alpha$, pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α.

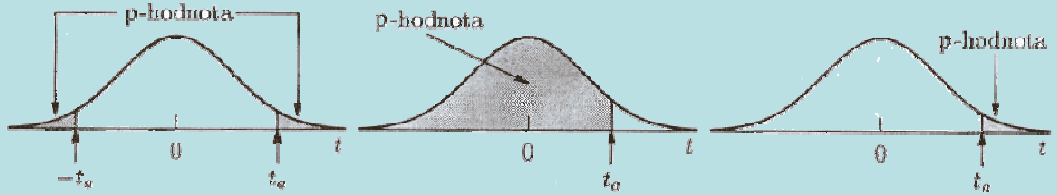
Způsob výpočtu p-hodnoty:

Pro oboustrannou alternativu $p = 2 \min\{P(T_0 \leq t_0), P(T_0 \geq t_0)\}$.

Pro levostrannou alternativu $p = P(T_0 \leq t_0)$.

Pro pravostrannou alternativu $p = P(T_0 \geq t_0)$.

Ilustrace významu p-hodnoty pro test nulové hypotézy proti oboustranné, levostranné a pravostranné alternativě:



(Zvonovitá křivka reprezentuje hustotu rozložení, kterým se řídí testové kritérium, je-li nulová hypotéza pravdivá.)

p-hodnota vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou číselné realizace $x_1, ..., x_n$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ podporují H_0, je-li pravdivá. Statistické programové systémy poskytují ve svých výstupech p-hodnotu. Její výpočet vyžaduje znalost distribuční funkce rozložení, kterým se řídí testové kritérium T_0, je-li H_0 pravdivá.

Doporučený postup při testování hypotéz

1. Stanovíme nulovou hypotézu a alternativní hypotézu. Přitom je vhodné zvolit jako alternativní hypotézu ten předpoklad, jehož přijetí znamená závažné opatření a mělo by k němu dojít jen s malým rizikem omylu.

2. Zvolíme hladinu významnosti α. Zpravidla volíme $\alpha = 0{,}05$, méně často 0,1 nebo 0,01.

3. Najdeme vhodné testové kritérium a na základě zjištěných dat vypočítáme jeho realizaci.

4.
a) Testujeme-li pomocí kritického oboru, pak ho stanovíme. Jestliže realizace testového kritéria padla do kritického oboru, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu. V opačném případě nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.
b) Testujeme-li pomocí intervalu spolehlivosti, vypočteme empirický $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$. Pokud číslo c padne do tohoto intervalu, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α. V opačném případě nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu.
c) Testujeme-li pomocí p-hodnoty, vypočteme ji a porovnáme ji s hladinou významnosti α. Jestliže $p \leq \alpha$, pak nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu. Je-li $p > \alpha$, pak nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

5. Na základě rozhodnutí, které jsme učinili o nulové hypotéze, provedeme nějaké konkrétní opatření, např. seřídíme obráběcí stroj.

(Při testování hypotéz musíme mít k dispozici odpovídající nástroje, nejlépe vhodný statistický software. Nemáme-li ho k dispozici, musíme znát příslušné vzorce. Dále potřebujeme statistické tabulky a kalkulačku.)

Příklad: 10 x nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru $X_1, ..., X_{10}$ z rozložení N(μ, 0,04). Nějaká teorie tvrdí, že μ = 1,95.

1. Oboustranná alternativa

Proti nulové hypotéze H_0: μ = 1,95 postavíme oboustrannou alternativu
H_1: μ ≠ 1,95. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1 všemi třemi popsanými způsoby.

Řešení:

$m = \frac{1}{10}(2 + ... + 2{,}2) = 2{,}06$, $\sigma^2 = 0{,}04$, $n = 10$, $\alpha = 0{,}05$, $c = 1{,}95$

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Pro úlohy o střední hodnotě normálního rozložení při známém rozptylu používáme pivotovou statistiku $U = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

Testové kritérium tedy bude

$T_0 = \frac{M - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ a bude mít rozložení N(0, 1), pokud je nulová hypotéza pravdivá. Vypočítáme realizaci testového kritéria:

$t_0 = \frac{2{,}06 - 1{,}95}{\frac{0{,}2}{\sqrt{10}}} = 1{,}74$. Stanovíme kritický obor:

$W = (t_{min}, K_{\alpha/2}(T)\rangle \cup \langle K_{1-\alpha/2}(T), t_{max}) = (-\infty, u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -u_{0.975}\rangle \cup \langle u_{0,975}, \infty) =$
$(-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$.

Protože $1{,}74 \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.

Meze $100(1-\alpha)\%$ empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou:

$$(d, h) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{1-\alpha/2},\ m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{1-\alpha/2}\right).$$

V našem případě dostáváme:

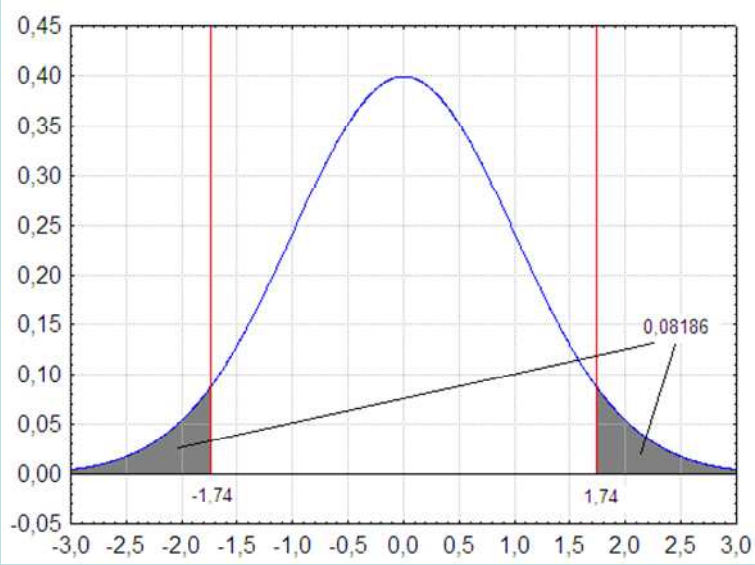
$$d = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}\, u_{0{,}975} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}.1{,}96 = 1{,}936,$$

$$h = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}\, u_{0{,}975} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}.1{,}96 = 2{,}184.$$

Protože $1{,}95 \in (1{,}936;\ 2{,}184)$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.
Protože proti nulové hypotéze stavíme oboustrannou alternativu, použijeme vzorec
$p = 2 \min\{P(T_0 \leq t_0), P(T_0 \geq t_0)\} = 2 \min \{P(T_0 \leq 1{,}74), P(T_0 \geq 1{,}74)\} =$
$= 2 \min \{ \Phi(1{,}74), 1 - \Phi(1{,}74) \} = 2 \min \{ 0{,}95907, 1 - 0{,}95907 \} = 0{,}08186.$
Jelikož 0,08186 > 0,05, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Ilustrace významu p-hodnoty pro oboustranný test



2. Levostranná alternativa

Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme levostrannou alternativu
H_1: $\mu < 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1 všemi třemi popsanými způsoby.

Řešení:

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Na rozdíl od oboustranné alternativy bude mít kritický obor tvar

$W = \langle -\infty, u_\alpha) = \langle -\infty, u_{0,05}) = \langle -\infty, -1{,}645)$.

Protože $1{,}74 \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.

Meze $100(1-\alpha)\%$ empirického pravostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou:

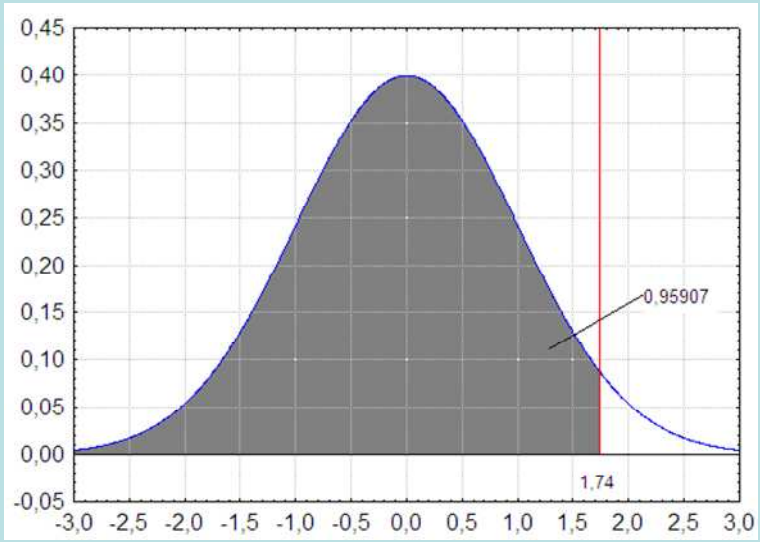
$(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{1-\alpha})$.

V našem případě dostáváme: $h = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}\, u_{0{,}95} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} .1{,}645 = 2{,}164$.

Protože $1{,}95 \in (-\infty; 2{,}164)$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.
Protože proti nulové hypotéze stavíme levostrannou alternativu, použijeme vzorec
$p = P(T_0 \leq t_0) = \Phi(1{,}74) = 0{,}95907$.
Jelikož 0,95907 > 0,05, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Ilustrace významu p-hodnoty pro levostranný test



3. Pravostranná alternativa

Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme pravostrannou alternativu
H_1: $\mu > 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1 všemi třemi popsanými způsoby.

Řešení:

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Na rozdíl od oboustranné alternativy bude mít kritický obor tvar

$W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1{,}645, \infty)$.

Protože $1{,}74 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.

Meze $100(1-\alpha)\%$ empirického levostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou:

$(d, \infty) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty)$.

V našem případě dostáváme: $d = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} u_{0,95} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} .1{,}645 = 1{,}956$.

Protože $1{,}95 \notin (1{,}956, \infty)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy.

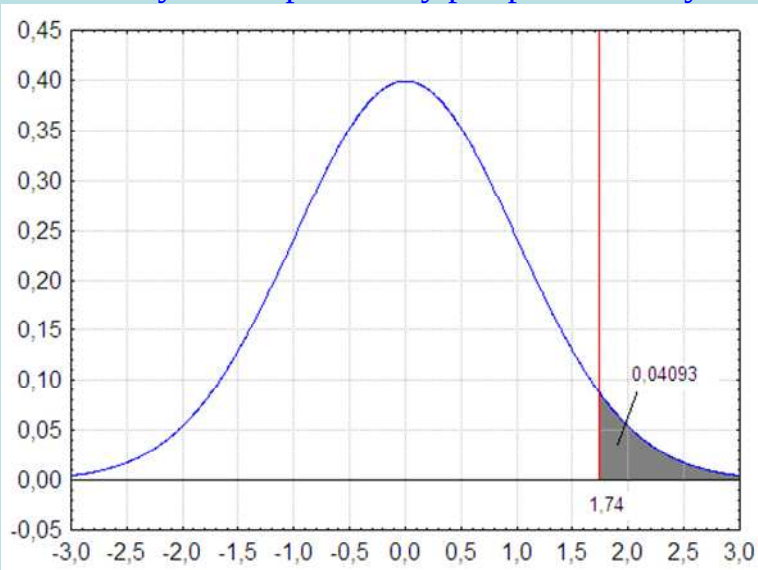
c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.

Protože proti nulové hypotéze stavíme pravostrannou alternativu, použijeme vzorec

$p = P(T_0 \geq t_0) = 1 - \Phi(1{,}74) = 1 - 0{,}95907 = 0{,}04093.$

Jelikož $0{,}04093 \leq 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy.

Ilustrace významu p-hodnoty pro pravostranný test



Testy normality dat

K ověřování normality dat slouží celá řada testů, které jsou podrobně popsány ve statistické literatuře. Zde se omezíme na dva testy, které jsou implementovány v systému STATISTICA, a to Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsovu variantu a Shapirův – Wilksův test. K závěrům těchto testů však přistupujeme s určitou opatrností. Máme-li k dispozici rozsáhlejší datový soubor (orientačně n > 30) a test zamítne na obvyklé hladině významnosti 0,01 nebo 0,05 hypotézu o normalitě, i když vzhled diagnostických grafů svědčí jenom o lehkém porušení normality, nedopustíme se závažné chyby, pokud použijeme statistickou metodu založenou na normalitě dat.

Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsova varianta

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z normálního rozložení s parametry μ a σ^2.
Distribuční funkci tohoto rozložení označme $\Phi_T(x)$.
Nechť $F_n(x)$ je výběrová distribuční funkce.
Testovou statistikou je statistika $D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi_T(x)|$.

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α, když $D_n \geq D_n(\alpha)$, kde $D_n(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota.

Pro $n \geq 30$ lze $D_n(\alpha)$ aproximovat výrazem $\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}}$.

V případě, že neznáme parametry μ a σ^2 normálního rozložení, musíme je odhadnout z dat (střední hodnotu odhadneme pomocí m a rozptyl pomocí s^2). Tím se změní rozložení testové statistiky D_n. Příslušné modifikované kvantily byly určeny pomocí simulačních studií. V této situaci používáme Lilieforsovu variantu Kolmogorovova – Smirnovova testu.

Shapirův – Wilksův test normality dat

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Testová statistika má tvar:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i^{(n)} \left[X_{(n-i+1)} - X_{(i)} \right]^2}{\sum_{i=1}^{m} (X_i - M)^2},$$

kde m = n/2 pro n sudé a m = (n-1)/2 pro n liché. Koeficienty $a_i^{(n)}$ jsou tabelovány.

Na testovou statistiku W lze pohlížet jako na korelační koeficient mezi uspořádanými pozorováními a jim odpovídajícími kvantily standardizovaného normálního rozložení. V případě, že data vykazují perfektní shodu s normálním rozložením, bude mít W hodnotu 1. Hypotézu o normalitě tedy zamítneme na hladině významnosti α, když se na této hladině neprokáže korelace mezi daty a jim odpovídajícími kvantily rozložení N(0,1).

Lze také říci, že S – W test je založen na zjištění, zda body v Q-Q grafu jsou významně odlišné od regresní přímky proložené těmito body.

(S-W test se používá především pro výběry menších rozsahů, n < 50, ale v systému STATISTICA je implementováno jeho rozšíření i na výběry velkých rozsahů, kolem 2000.)

Andersonův – Darlingův test

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Testová statistika má tvar:

$$AD = -\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left\{\ln\Phi\left(\frac{x_{(i)}-m}{s}\right)+\ln\left(1-\Phi\left(\frac{x_{n+1-(i)}-m}{s}\right)\right)\right\}\right]-n,$$

kde $x_{(i)}$ jsou vzestupně uspořádané realizace náhodného výběru, Φ je distribuční funkce rozložení $N(0,1)$.

Hypotéza H_0 se zamítá na hladině významnosti α, je-li vypočítaná hodnota testové statistiky AD větší než kritická hodnota $D_{1-\alpha}$. Pro velký rozsah výběru se přibližná 95% kritická hodnota počítá podle vzorce

$$D_{0,95} = 1{,}0348\left(1-\frac{1{,}013}{n}-\frac{0{,}93}{n^2}\right)$$

Příklad:
Jsou dány hodnoty 10, 12, 8, 9, 16. Pomocí Lilieforsova testu, S – W testu a A – D testu testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že tato data pocházejí z normálního rozložení.

Řešení:
Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné nazvané X a pěti případech. Do proměnné X zapíšeme uvedené hodnoty.
Provedení Lilieforsova a S-W testu:
V menu vybereme Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK, Proměnné X – OK. Na záložce zvolíme Normalita a zaškrtneme Lilieforsův test a Shapiro – Wilksův W test – Testy normality.

	Testy normality (Tabulka1)				
Proměnná	N	max D	Lilliefors p	W	p
X	5	0,224085	p > .20	0,912401	0,482151

Vidíme, že testová statistika K-S testu je d = 0,22409, odpovídající Lilieforsova p-hodnota je větší než 0,2, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Testová statistika S-W testu je W = 0,9124, odpovídající p-hodnota je 0,48215, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Provedení A - D testu:
Statistiky – Rozdělení & simulace – proložení dat rozděleními – OK – Proměnné Spojité: X – na záložce Spojité proměnné ponecháme zaškrtnuté pouze Normální, na záložce Možnosti vybereme Anderson – Darling – OK – Souhrnné statistiky rozdělení.

	Souhrn rozdělení for Proměnná: x (Tabulka4)							
	K-S d	K-S p-hodn.	AD stat.	AD p-hodn.	Chí-kvadrát	Chí-kvadr. p-hodn.	Chí-kvadr. SV	Posun (práh/poloha)
Normální (poloha,měřítko)	0,224085	0,915101	0,295219	0,940172				

Testová statistika A – D testu je 0,2952, odpovídající p-hodnota je 0,9402, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

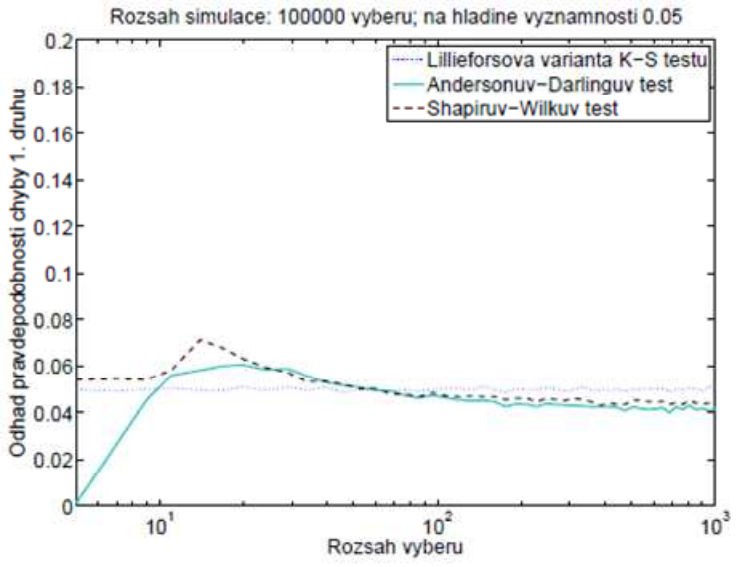
Srovnání S-W testu, Lilieforsovy varianty K-S testu a A-D testu pomocí simulačních studií

Simulační studie byly provedeny v bakalářské práci Marka Haičmana Simulace a testy normality.

Odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu

Bylo vygenerováno 100 000 náhodných výběrů z normálního rozložení, jejichž rozsahy se pohybovaly od 5 do 1000. Na tyto výběry byly aplikovány oba testy (s hladinou významnosti 0,05) a byla stanovena relativní četnost těch případů, kdy došlo k neoprávněnému zamítnutí pravdivé nulové hypotézy. Tato relativní četnost je považována za odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu.

Závislost odhadu pravděpodobnosti chyby 1. druhu na rozsahu výběru (hodnoty na vodorovné ose jsou logaritmovány)



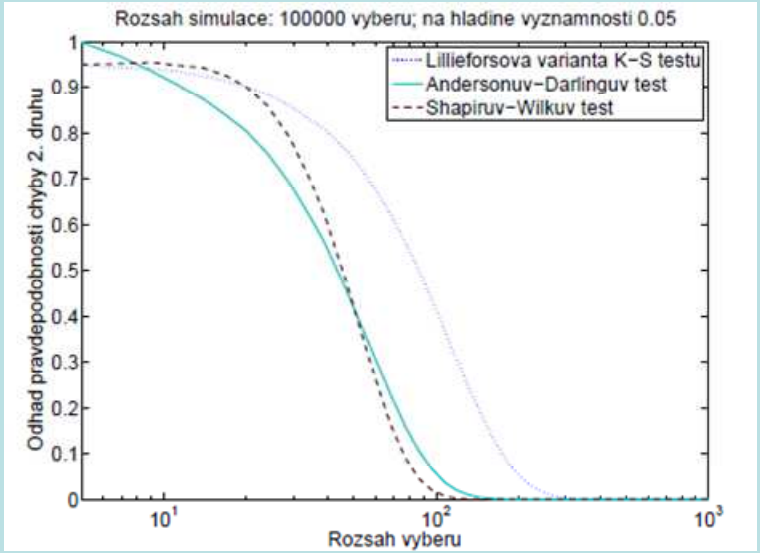
Výsledek:

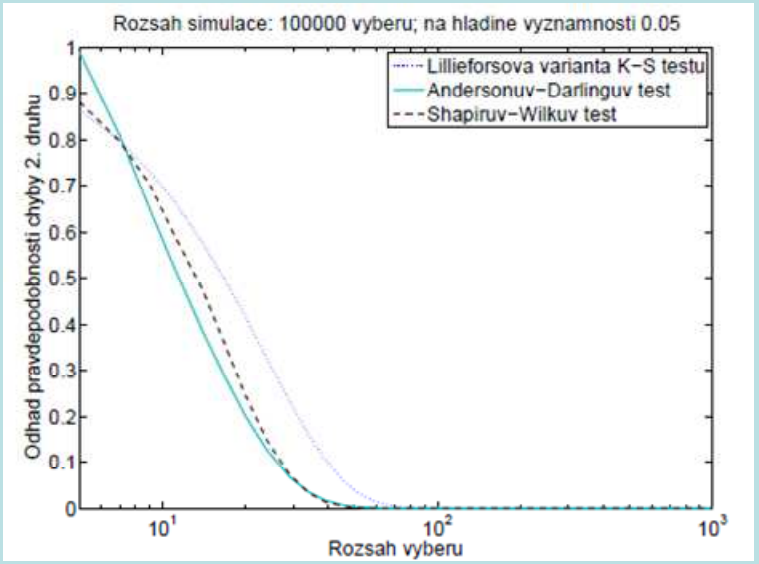
Lileforsův test má pravděpodobnost chyby 1. druhu nezávislou na rozsahu výběru, udržuje se na 5 %.
S-W test má do velikosti výběru 60 vyšší pravděpodobnost chyby 1. druhu, poté poklesne pod 5 % a již nevystoupí nad 5 %.

Odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu

Pro toto zkoumání byla vybrána následující rozložení: rovnoměrné spojité, exponenciální, logaritmicko – normální, Studentovo s jedním, třemi a pěti stupni volnosti. Pro každé z těchto rozložení bylo vygenerováno 100 000 náhodných výběrů o rozsazích 5 až 1 000. Při aplikaci všech tří testů byla zjišťována relativní četnost těch případů, kdy test nezamítl nepravdivou nulovou hypotézu. Tato relativní četnost je považována za odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu.

Ilustrace pro rovnoměrné spojité rozložení a exponenciální rozložení: závislost odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu na rozsahu výběru (hodnoty na vodorovné ose jsou logaritmovány)





Výsledek:

Lilieforsův test a A-D test nejméně chybují u velmi malých výběrů, orientačně do 10 prvků.

S-W test a A-D test se pro výběry větších rozsahů (nad 60) vesměs nedopouštějí chyby. K chybám však dochází i pro velmi rozsáhlé výběry ze Studentova rozložení.

Stanovení hranice 20 % odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu

Zde byl hledán rozsah výběru z rovnoměrného, exponenciálního, logaritmicko – normálního a Studentova rozložení tak, aby odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu byl nanejvýš 20 %.

Tabulka minimálních rozsahů výběrů, pro něž je odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu nejvýše 20 %:

Test normality	Norm	Rovno.	Expo.	Logn.	Stud(1)	Stud(3)	Stud(5)
Anderson-Darling	–	72	21	15	16	87	247
Lilliefors	–	143	32	21	18	121	377
Shapiro-Wilk	–	65	22	17	19	89	221

Výsledek:

S-W test a A-D test je možno použít na výběry menších rozsahů než Lilieforsův test.

U výběrů, jejichž rozsah je menší než 15, nemá příliš smysl testovat hypotézu o normalitě, neboť pravděpodobnost chyby 2. druhu je příliš vysoká (nad 70 %).

Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení

Motivace:
K nejčastěji používaným statistickým metodám patří konstrukce intervalů spolehlivosti pro parametry normálního rozložení či testování hypotéz o těchto parametrech. Normální rozložení je charakterizováno dvěma parametry – střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Budeme tedy řešit úlohy, které se týkají těchto dvou parametrů. K tomu slouží např. jednovýběrový z-test, t-test či test o rozptylu. Můžeme také mít k dispozici náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vektorem středních hodnot $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$ a naším úkolem bude posoudit rozdílnost středních hodnot μ_1, μ_2. K řešení tohoto problému slouží párový t-test.

Osnova:
- rozložení statistik odvozených z výběrového průměru a výběrového rozptylu
- vzorce pro meze intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl
- jednotlivé typy testů pro parametry normálního rozložení

  (z-test, jednovýběrový t-test, test o rozptylu, párový t-test)

Rozložení statistik odvozených z výběrového průměru a výběrového rozptylu

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Pak platí

a) $M \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, tedy $U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o μ, když σ^2 známe.)

b) $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o σ^2, když μ neznáme.)

c) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$.

(Tato pivotová statistika slouží k řešení úloh o σ^2, když μ známe.)

d) $T = \frac{M-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o μ, když σ^2 neznáme.)

Vysvětlení

ad a) Výběrový průměr M je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$. Statistika U se získá standardizací M.

ad b) Vhodnou úpravou výběrového rozptylu S^2, kde použijeme obrat $X_i - M = (X_i - \mu) - (M - \mu)$, lze statistiku K vyjádřit jako součet kvadrátů n - 1 stochasticky nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozložením. Tento součet se řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

ad c) Tato statistika je součet kvadrátů n stochasticky nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozložením, řídí se tedy rozložením $\chi^2(n)$.

ad d) $U \sim N(0, 1)$, $K \sim \chi^2(n-1)$ jsou stochasticky nezávislé, protože M a S^2 jsou stochasticky nezávislé, tudíž statistika

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n-1}}} = \frac{M-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1).$$

Příklad: Hmotnost balíčku krystalového cukru baleného na automatické lince se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 1002 g a směrodatnou odchylkou 8 g. Kontrolor náhodně vybírá 9 balíčků z jedné série a zjišťuje, zda jejich průměrná hmotnost je alespoň 999 g. Pokud ne, podnik musí zaplatit pokutu 20 000 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že podnik bude muset zaplatit pokutu?

Řešení:

$X \sim N(1002, 64)$, $M \sim N\left(1002, \frac{64}{9}\right)$

$$P(M \le 999) = P\left(\frac{M-1002}{\sqrt{\frac{64}{9}}} \le \frac{999-1002}{\sqrt{\frac{64}{9}}}\right) = P\left(U \le -\frac{9}{8}\right) = \Phi\left(\frac{-9}{8}\right) = 1-\Phi\left(\frac{9}{8}\right) = 1-\Phi(1{,}125) = 1-0{,}87076 = 0{,}12924$$

Pravděpodobnost, že podnik bude platit pokutu, je asi 12,9%.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Využijeme toho, že STATISTICA pomocí funkce INormal(x;mu;sigma) umí vypočítat hodnotu distribuční funkce normálního rozložení se střední hodnotou mu a směrodatnou odchylkou sigma. Tedy $P(M \le 999) = \Phi(999)$, kde Φ je distribuční funkce rozložení N(1002, 64/9).

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Dvakrát klikneme na název proměnné Prom1. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme = INormal(999;1002;8/3).

V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,130295.

Vzorce pro meze 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro μ a σ^2

a) Interval spolehlivosti pro μ, když σ^2 známe (využití pivotové statistiky U)

Oboustranný: $(d, h) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2})$

Levostranný: $(d, \infty) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha})$

b) Interval spolehlivosti pro μ, když σ^2 neznáme (využití pivotové statistiky T)

Oboustranný: $(d, h) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$

Levostranný: $(d, \infty) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1))$

c) Interval spolehlivosti pro σ^2, když μ neznáme (využití pivotové statistiky K)

Oboustranný: (d, h) = $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right)$

Levostranný: (d, ∞) = $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \infty \right)$

Pravostranný: (-∞, h) = $\left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} \right)$

d) Interval spolehlivosti pro σ^2, když μ známe (využití pivotové statistiky $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$)

Oboustranný: (d, h) = $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \right)$

Levostranný: (d, ∞) = $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}, \infty \right)$

Pravostranný: (-∞, h) = $\left(-\infty, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)} \right)$

Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru X_1, ..., X_{10} z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry μ, σ^2 neznáme. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti jak pro μ, tak pro σ^2 a to

a) oboustranný,
b) levostranný,
c) pravostranný.

Řešení: m = 2,06, s^2 = 0,0404, s = 0,2011, α = 0,05, $t_{0,975}(9)$ = 2,2622, $t_{0,95}(9)$ = 1,8331, $\chi^2_{0,975}(9)$ = 19,023, $\chi^2_{0,025}(9)$ = 2,7, $\chi^2_{0,95}(9)$ = 16,919, $\chi^2_{0,05}(9)$ = 3,325

ad a) Oboustranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2{,}06 - \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}}\, 2{,}2622 = 1{,}92$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2{,}06 + \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}}\, 2{,}2622 = 2{,}20$$

$1{,}92 < \mu < 2{,}20$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0{,}0404}{19{,}023} = 0{,}0191$$

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0{,}0404}{2{,}7} = 0{,}1347$$

$0{,}0191 < \sigma^2 < 0{,}1347$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) Levostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1) = 2{,}06 - \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}}\, 1{,}8331 = 1{,}94$$

$1{,}94 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Levostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0{,}0404}{16{,}919} = 0{,}0215$$

$\sigma^2 > 0{,}0215$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) Pravostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1) = 2{,}06 + \frac{0{,}2011}{\sqrt{10}}\, 1{,}8331 = 2{,}18$$

$\mu < 2{,}18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Pravostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0{,}0404}{3{,}325} = 0{,}1094$$

$\sigma^2 < 0{,}1094$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné X a 10 případech. Do proměnné X napíšeme dané hodnoty.
Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. a Meze sp. směr. odch. (ostatní volby zrušíme) – pro oboustranný 95% interval spolehlivosti ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00, pro jednostranné intervaly změníme hodnotu na 90,00.

Výsledky pro oboustranné 95% intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu μ, pro směrodatnou odchylku σ a rozptyl σ^2:

Proměnná	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. 95,000	Spolehlivost Sm.Odch. -95,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +95,000%	NProm1 =v3 ^2	NProm2 =v4 ^2
X	1,916136	2,203864	0,138329	0,367145	0,019135	0,134795

Vidíme, že
$1{,}92 < \mu < 2{,}20$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$0{,}1383 < \sigma < 0{,}3671$ s pravděpodobností aspoň 0,95.
$0{,}0191 < \sigma^2 < 0{,}1348$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výsledky pro jednostranné 95% intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu μ, pro směrodatnou odchylku σ a rozptyl σ^2:

Proměnná	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000	Spolehlivost Sm.Odch. -90,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +90,000%	NProm1 =v3^2	NProm2 =v4^2
X	1,943421	2,176579	0,146678	0,330862	0,021514	0,10947

Vidíme, že
$\mu > 1{,}94$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$\mu < 2{,}20$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$\sigma > 0{,}1467$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$\sigma < 0{,}3309$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$\sigma^2 > 0{,}0215$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$\sigma^2 < 0{,}1095$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

Jednotlivé typy testů pro parametry normálního rozložení

a) Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Nechť $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$ se nazývá jednovýběrový z-test.

b) Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 neznáme. Nechť $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$ se nazývá jednovýběrový t-test.

c) Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme. Nechť $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test H_0: $\sigma^2 = c$ proti H_1: $\sigma^2 \neq c$ se nazývá test o rozptylu.

Provedení testů o parametrech μ, σ^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení jednovýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$.

b) Provedení jednovýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.

c) Provedení testu o rozptylu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{(n-1)s^2}{c}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\sigma^2 = c$ proti H_1: $\sigma^2 \neq c$. Kritický obor má tvar:.
$W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$

Levostranný test: Testujeme H_0: $\sigma^2 = c$ proti H_1: $\sigma^2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha}(n-1)\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\sigma^2 = c$ proti H_1: $\sigma^2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.

Příklad: Podle údajů na obalu čokolády by její čistá hmotnost měla být 125 g. Výrobce dostal několik stížností od kupujících, ve kterých tvrdili, že hmotnost čokolád je nižší než deklarovaných 125 g. Z tohoto důvodu oddělení kontroly náhodně vybralo 50 čokolád a zjistilo, že jejich průměrná hmotnost je 122 g a směrodatná odchylka 8,6 g. Za předpokladu, že hmotnost čokolád se řídí normálním rozložením, můžeme na hladině významnosti 0,01 považovat stížnosti kupujících za oprávněné?

Řešení: $X_1, ..., X_{50}$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Testujeme hypotézu
H_0: $\mu = 125$ proti levostranné alternativě H_1: $\mu < 125$. Protože neznáme rozptyl σ^2, použijeme jednovýběrový t-test.

Testové kritérium $\frac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{122-125}{\frac{8,6}{\sqrt{50}}} = -2,4667$.

Kritický obor $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right\rangle = \left(-\infty, -t_{0,99}(49)\right\rangle = \left(-\infty, -2,4049\right\rangle$.

Jelikož testové kritérium se realizuje v kritickém oboru, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01. Stížnosti kupujících tedy lze považovat za oprávněné.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – zaškrtneme Výběrový průměr vs. Střední hodnota a zvolíme jednostr. – do políčka Pr1 napíšeme 122, do políčka SmOd1 napíšeme 8,6, do políčka N1 napíšeme 50, do políčka Pr2 napíšeme 125 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0086, tedy zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01

Náhodný výběr z dvourozměrného rozložení

Nechť $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení, přičemž $n \geq 2$. Označíme $\mu = \mu_1 - \mu_2$ a zavedeme rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \ldots, Z_n = X_n - Y_n$, o němž předpokládáme, že se řídí normálním rozložením.

Vypočteme $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - M)^2$.

Vzorec pro meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu rozdílového náhodného výběru

Oboustranný: $(d, h) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1),\ m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1))$

Levostranný: $(d, \infty) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1),\ \infty)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = (-\infty,\ m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1))$

Příklad: Dvěma rozdílnými laboratorními metodami se zjišťoval obsah chemické látky v roztoku (v procentech). Bylo vybráno 5 vzorků a proměřeno oběma metodami. Výsledky měření jsou obsaženy v tabulce:

číslo vzorku	1	2	3	4	5
1. metoda	2,3	1,9	2,1	2,4	2,6
2. metoda	2,4	2,0	2,0	2,3	2,5

Za předpokladu, že data mají normální rozložení, sestrojte 90% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot výsledků obou metod.

Řešení:

Přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru, jehož realizace jsou: -0,1 -0,1 0,1 0,1 0,1. Vypočteme m = 0,02, $s^2 = 0{,}012$, s = 0,109545. Předpokládáme, že tato data pocházejí z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Vypočteme meze 90% oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ při neznámém σ:

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 0{,}02 - \frac{0{,}109545}{\sqrt{5}} t_{0{,}95}(4) = 0{,}02 - \frac{0{,}109545}{\sqrt{5}} 2{,}1318 = -0{,}0844$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 0{,}02 + \frac{0{,}109545}{\sqrt{5}} t_{0{,}95}(4) = 0{,}02 + \frac{0{,}109545}{\sqrt{5}} 2{,}1318 = 0{,}1244$$

$-0{,}0844 < \mu < 0{,}1244$ s pravděpodobností aspoň 0,9.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o 3 proměnných a 5 případech. Do 1. proměnné X napíšeme hodnoty pro 1. metodu, do 2. proměnné Y hodnoty pro 2. metodu a do 3. proměnné Z rozdíly mezi X a Y.
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky, OK - Proměnné Z, Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. Prům. – Interval 90% - Výpočet. Dostaneme tabulku:

	Popisné statistiky (chemicka latka)	
Proměnná	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000
Z	-0,084439	0,124439

Vidíme tedy, že $-0{,}0844 < \mu < 0{,}1244$ s pravděpodobností aspoň 0,9.

Párový t-test

Nechť $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení, přičemž $n \geq 2$. Označíme $\mu = \mu_1 - \mu_2$ a zavedeme rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1,\ldots,Z_n = X_n - Y_n$, jehož výběrový průměr je $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ a výběrový rozptyl je $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - M)^2$. Předpokládáme, že tento náhodný výběr pochází z normálního rozložení. Test hypotézy o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ se nazývá párový t-test a provádí se stejně jako jednovýběrový t-test aplikovaný na rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1,\ldots,Z_n = X_n - Y_n$.

Provedení párového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in$ W, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu = c$ proti H_1: $\mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.

Příklad: V následující tabulce jsou údaje o výnosnosti dosažené 12 náhodně vybranými firmami při investování do mezinárodního podnikání (veličina X) a do domácího podnikání (veličina Y):

č.firmy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	10	12	14	12	12	17	9	15	9	11	7	15
Y	11	14	15	11	13	16	10	13	11	17	9	19

(Výnosnost je vyjádřena v procentech a představuje podíl na zisku vložených investic za rok.)
Za předpokladu, že data pocházejí z dvourozměrného rozložení a jejich rozdíl se řídí normálním rozložením, na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu, že neexistuje rozdíl mezi střední hodnotou výnosnosti investic do mezinárodního a domácího podnikání proti oboustranné alternativě.
Testování proveďte
a) pomocí intervalu spolehlivosti, b) pomocí kritického oboru.
(Pro úsporu času známe realizace výběrového průměru m = $-1,\overline{3}$ a výběrového rozptylu $s^2 = 4,\overline{78}$ rozdílového náhodného výběru $Z_i = X_i - Y_i$, i = 1, …, 12.)

Řešení:
Testujeme H_0: $\mu = 0$ proti H_1: $\mu \neq 0$
ad a) 90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu σ^2 má meze:

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,\overline{3} - \frac{\sqrt{4,\overline{78}}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -2,4677$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,\overline{3} + \frac{\sqrt{4,\overline{78}}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -0,1989$$

Protože číslo c = 0 neleží v intervalu (-2,4677; -0,1989), H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

ad b) Vypočítáme realizaci testové statistiky $t_0 = \frac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{-1,\overline{3}}{\frac{\sqrt{4,\overline{78}}}{\sqrt{12}}} = -2,11085$

Stanovíme kritický obor $W = (-\infty, -t_{0,95}(11)\rangle \cup \langle t_{0,95}(11), \infty) = (-\infty, -1,7959\rangle \cup \langle 1,7959, \infty)$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o 2 proměnných a 12 případech. Do 1. proměnné X napíšeme hodnoty pro mezinárodní podnikání, do 2. proměnné hodnoty pro domácí podnikání.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – t-test pro závislé vzorky, OK - Proměnné X, Y – OK – Výpočet. Dostaneme tabulku:

Proměnná	t-test pro závislé vzorky (investovani) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000							
	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p
X	11,91667	2,937480						
Y	13,25000	3,048845	12	-1,33333	2,188122	-2,11085	11	0,058490

Vypočtenou p-hodnotu 0,05849 porovnáme se zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0{,}1$. Protože $p \leq \alpha$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,1.

Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozložení

Motivace: Máme-li k dispozici dva nezávislé náhodné výběry z normálních rozložení, je naším úkolem porovnat střední hodnoty či rozptyly těchto rozložení. Zpravidla konstruujeme intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot respektive hodnotíme shodu středních hodnot pomocí dvouvýběrového t-testu či dvouvýběrového z-testu a shodu rozptylů pomocí F-testu.

Osnova:

- rozložení statistik odvozených ze dvou výběrových průměrů a rozptylů
- vzorce pro meze intervalů spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot a podíl rozptylů
- jednotlivé typy testů pro parametry dvou normálních rozložení
  (dvouvýběrový z-test, dvouvýběrový t-test, F-test)
- Cohenův koeficient věcného účinku

Rozložení statistik odvozených z výběrových průměrů a výběrových rozptylů normálních rozložení

Předpokládáme, že

$X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$,

$X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a oba výběry jsou stochasticky nezávislé.

Označme

M_1, M_2 výběrové průměry,

S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a

$S_*^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ vážený průměr výběrových rozptylů.

Pak platí:

a) Statistiky $M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé.

b) $U = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.)

c) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $K = \dfrac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2).$

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o neznámém společném rozptylu σ^2.)

d) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $T = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné.)

e) $F = \dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$

(Pivotová statistika F slouží k řešení úloh o σ_1^2 / σ_2^2.)

Vysvětlení:

ad a) Neuvádíme, viz např. J. Anděl: Matematická statistika.

ad b) $M_1 - M_2$ je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry

$E(M_1 - M_2) = \mu_1 - \mu_2$,

$D(M_1 - M_2) = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$.

U se získá standardizací $M_1 - M_2$.

ad c) $K_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$ a $K_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy

$K = K_1 + K_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.

ad d) $U = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$, $K = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ jsou stochasticky nezávislé, protože

$M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé. $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n_1 + n_2 - 2}}} = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

ad e) $K_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$ a $K_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy

$F = \frac{\frac{K_1}{n_1 - 1}}{\frac{K_2}{n_2 - 1}} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Příklad: Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení N(0,28; 0,09) a má rozsah 16, druhý pochází z rozložení N(0,25; 0,04) a má rozsah 25. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude větší než výběrový průměr 2. výběru?

Řešení:

$$P(M_1 > M_2) = P(M_1 - M_2 > 0) = 1 - P(M_1 - M_2 \le 0) = 1 - P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) =$$

$$= 1 - P\left(U \le \frac{-0,28 + 0,25}{\sqrt{\frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25}}} \right) = 1 - P(U \le -0,35294) = 1 - \Phi(-0,35) = \Phi(0,35) = 0,63683$$

S pravděpodobností přibližně 63,7% je výběrový průměr 1. výběru větší než výběrový průměr 2. výběru.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistika $M_1 - M_2$ se podle bodu (a) řídí rozložením $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$,

kde $\mu_1 - \mu_2 = 0,28 - 0,25 = 0,03$, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25} = 0,007225$, tj. statistika $M_1 - M_2 \sim N(0,03;0,007225)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme

= 1-INormal(0;0,03;sqrt(0,007225)). V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,637934:

	1 Prom1
1	0,637934

Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2

Uvedeme přehled vzorců pro meze 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2.

a) Interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 známe (využití pivotové statistiky U)

Oboustranný: $(d, h) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2},\ m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha},\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha}\right)$

b) Interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití pivotové statistiky T)

Oboustranný:

$(d, h) = \left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\ m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2),\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty,\ m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\right)$

c) Interval spolehlivosti pro společný neznámý rozptyl σ^2 (využití pivotové statistiky K)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)}, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)}, \infty \right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$

d) Interval spolehlivosti pro podíl rozptylů $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (využití pivotové statistiky F)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \infty \right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$

Upozornění: Není-li v bodě (b) splněn předpoklad o shodě rozptylů, lze sestrojit aspoň přibližný 100(1-α)% interval spolehlivosti pro μ_1-μ_2.

V tomto případě má statistika T přibližně rozložení $t(\nu)$, kde počet stupňů volnosti $\nu = \frac{\left(s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2 / n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2 / n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$. Není-li ν celé číslo, použijeme v tabulkách kvantilů Studentova rozložení lineární interpolaci.

Příklad: Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru (v g/l). Z první nádrže bylo odebráno 25 vzorků, z druhé nádrže 10 vzorků. Byly vypočteny realizace výběrových průměrů a rozptylů: $m_1 = 34{,}48$, $m_2 = 35{,}59$, $s_1^2 = 1{,}7482$, $s_2^2 = 1{,}7121$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$.

Řešení:

Úloha vede na vzorec (b) s využitím statistiky T. Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů a najdeme odpovídající kvantily Studentova rozložení:

$$s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{24\cdot 1{,}7482 + 9\cdot 1{,}7121}{33} = 1{,}7384\,,\ t_{0{,}975}(33) = 2{,}035$$

Dosadíme do vzorců pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti:

$$d = m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34{,}48 - 35{,}59 - \sqrt{1{,}7384}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{10}}\cdot 2{,}035 = -2{,}114$$

$$h = m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34{,}48 - 35{,}59 + \sqrt{1{,}7384}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{10}}\cdot 2{,}035 = -0{,}106$$

$-2{,}114$ g/l $< \mu_1 - \mu_2 < -0{,}106$ g/l s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

=34,48-35,59-sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

=34,48-35,59+

sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)

	1 d	2 h
1	-2,11368	-0,10632

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy $-2{,}114 \text{ g/l} < \mu_1 - \mu_2 < -0{,}106 \text{ g/l}$.

Příklad: V předešlém příkladě nyní předpokládáme, že dané dva náhodné výběry pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.

Řešení:

Úloha vede na vzorec (d) s využitím statistiky F.

$$d = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{F_{0{,}975}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{3{,}6142} = 0{,}28$$

$$h = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{F_{0{,}025}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{1/F_{0{,}975}(9{,}24)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{1/2{,}7027} = 2{,}76$$

$0{,}28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}76$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

=(1,7482/1,7121)/VF(0,975;24;9)

(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-kvantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

=(1,7482/1,7121)/VF(0,025;24;9)

	1 d	2 h
1	0,282521	2,759698

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí: $0{,}28 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 2{,}76$.

Jednotlivé typy testů o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2

a) Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2, σ_2^2 známe. Nechť c je konstanta.

Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový z-test.

b) Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový t-test.

c) Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Test H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ se nazývá F-test.

Provedení testů o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení dvouvýběrového z-testu

Vypočteme realizaci t_0 testového kritéria $T_0 = \frac{(M_1 - M_2) - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$.

b) Provedení dvouvýběrového t-testu

Vypočteme realizaci t_0 testového kritéria $T_0 = \frac{(M_1 - M_2) - c}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar:
$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$.

c) Provedení F-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Kritický obor má tvar:

$W = \left(0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle \cup \left\langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left(0, F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left\langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right)$.

Příklad: V restauraci "U bílého koníčka" měřili ve 20 případech čas obsluhy zákazníka. Výsledky v minutách: 6, 8, 11, 4, 7, 6, 10, 6, 9, 8, 5, 12, 13, 10, 9, 8, 7, 11, 10, 5. V restauraci "Zlatý lev" bylo dané pozorování uskutečněno v 15 případech s těmito výsledky: 9, 11, 10, 7, 6, 4, 8, 13, 5, 15, 8, 5, 6, 8 ,7. Za předpokladu, že uvedené hodnoty pocházejí ze dvou normálních rozložení, na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnoty doby obsluhy jsou v obou restauracích stejné.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Je to úloha na dvouvýběrový t-test. Před provedením tohoto testu je však nutné pomocí F-testu ověřit shodu rozptylů. Na hladině významnosti 0,05 tedy testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Nejprve vypočteme $m_1 = 8{,}25$, $m_2 = 8{,}13$, $s_1^2 = 6{,}307$, $s_2^2 = 9{,}41$, $s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{19 \cdot 6{,}307 + 14 \cdot 9{,}41}{33} = 7{,}623$. Podle vzorce (c) vypočteme realizaci testové statistiky:

$t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6{,}307}{9{,}41} = 0{,}6702$. Stanovíme kritický obor:

$$W = \langle 0, F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\rangle \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \infty) = \langle 0, F_{0{,}025}(19{,}14)\rangle \cup \langle F_{0{,}975}(19{,}14), \infty) =$$

$$= \langle 0{,}1/F_{0{,}975}(14{,}19)\rangle \cup \langle F_{0{,}975}(19{,}14), \infty) = \langle 0{,}1/2{,}649\rangle \cup \langle 2{,}8607, \infty) = \langle 0; 0{,}3778\rangle \cup \langle 2{,}8607, \infty)$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Rozptyly tedy můžeme považovat za shodné.

Nyní se vrátíme k dvouvýběrovému t-testu. Podle vzorce (b) vypočteme realizaci testové statistiky:

$t_0 = \frac{m_1 - m_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{8{,}25 - 8{,}13}{\sqrt{7{,}623}\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}}} = 0{,}124$. Stanovíme kritický obor:

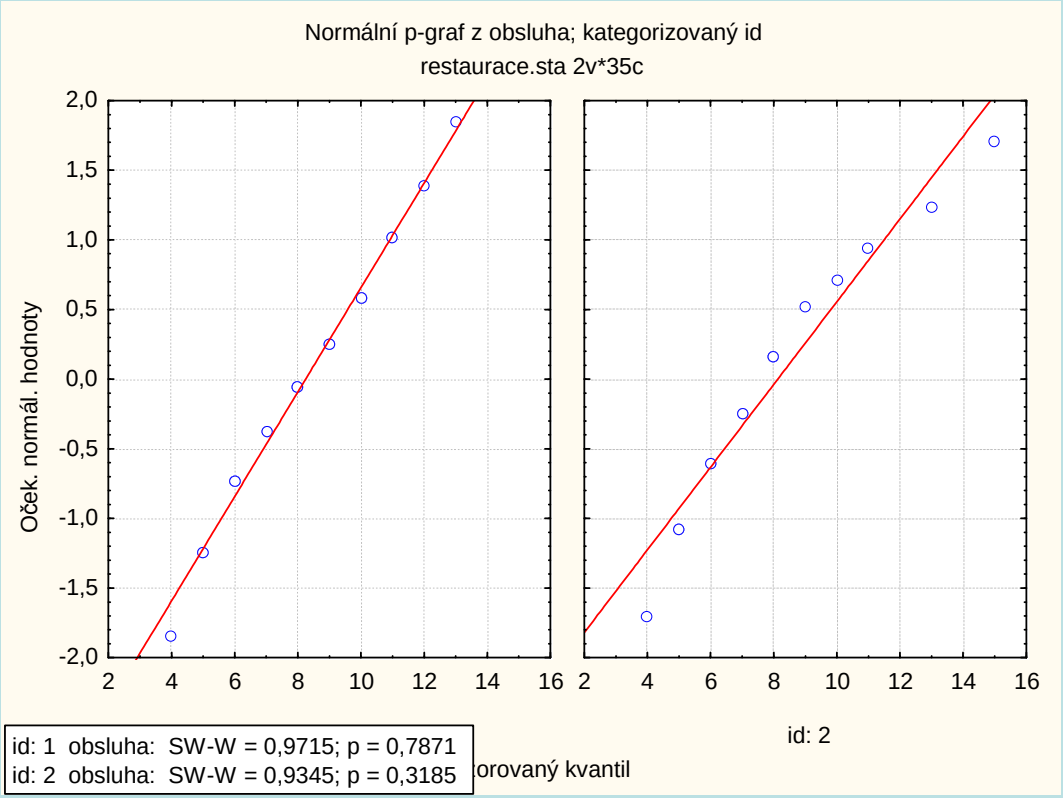
$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2), \infty) = (-\infty, -t_{0{,}975}(33)\rangle \cup \langle t_{0{,}975}(33), \infty) = (-\infty, -2{,}035\rangle \cup \langle 2{,}035, \infty)$$

Protože testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 35 případech. První proměnnou nazveme OBSLUHA, druhou ID. Do proměnné OBSLUHA napíšeme nejprve doby obsluhy v první restauraci a poté doby obsluhy ve druhé restauraci. Do proměnné ID, která slouží k rozlišení první a druhé restaurace, napíšeme 20 krát jedničku a 15 krát dvojku.

Pomocí NP-grafu ověříme normalitu dat v obou skupinách. Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – zaškrtneme S-W test - Proměnné OBSLUHA, OK, Kategorizovaný – Kategorie X, zaškrtneme Zapnuto, Změnit proměnnou – ID, OK. Dostaneme graf



V obou případech se tečky odchylují od přímky jenom málo a p-hodnoty S-W testu převyšují 0,05. Předpoklad o normálním rozložení dat v obou skupinách je oprávněný.

Nyní provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů:

Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné –Závislé proměnné OBSLUHA, Grupovací proměnná ID – OK.

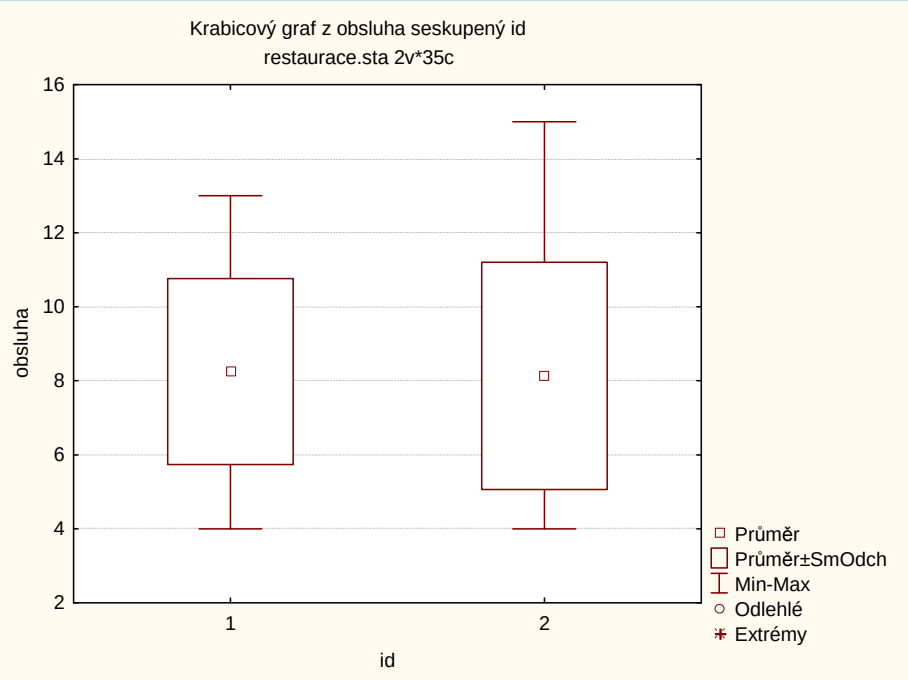
Po kliknutí na tlačítko Souhrn dostaneme tabulku

	t-testy; grupováno: ID (restaurace) Skup. 1: 1 Skup. 2: 2										
Proměnná	Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat. 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr rozptyly	p rozptyly
OBSLUHA	8,250000	8,133333	0,123730	33	0,902279	20	15	2,510504	3,067495	1,492952	0,410440

Vidíme, že testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,492952 (je to převrácená hodnota k číslu 0,6702, které jsme vypočítali při ručním postupu), odpovídající p-hodnota je 0,41044, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)

Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 0,12373, počet stupňů volnosti je 33, odpovídající p-hodnota 0,902279, tedy hypotézu o shodě středních hodnot nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neprokázal rozdíl ve středních hodnotách dob obsluhy v restauracích "U bílého koníčka" a „Zlatý lev“.

Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.

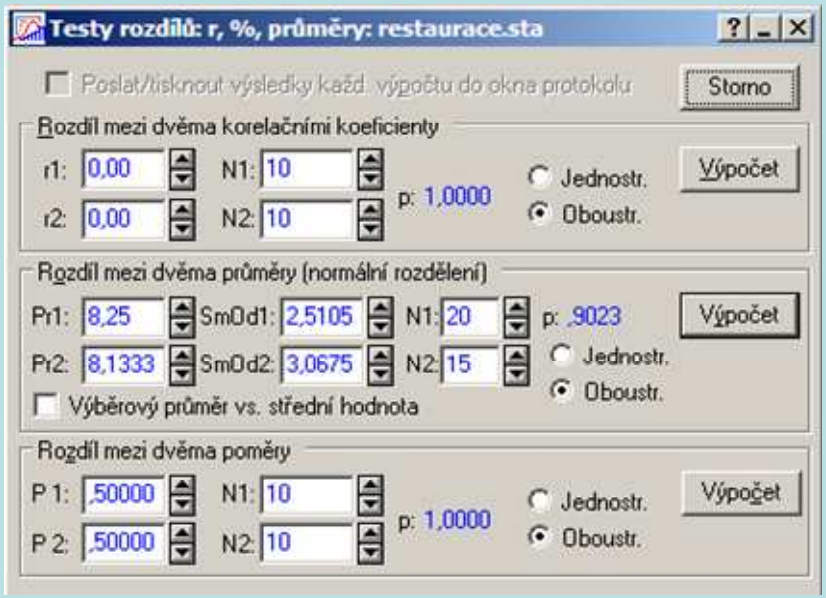


Z grafu je vidět, že průměrná doba obsluhy v první restauraci je nepatrně delší a má menší variabilitu než ve druhé restauraci. Extrémní ani odlehlé hodnoty se zde nevyskytují.

Upozornění:

V případě, že známe realizace obou výběrových průměrů a směrodatných odchylek, můžeme pro provedení dvouvýběrového t-testu v systému STATISTICA použít aplikaci Tesy rozdílů. Postup si ukážeme na příkaldě s dobou obsluhy ve dvou restauracích

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – do políčka Pr1 napíšeme 8,25, do políčka SmOd1 napíšeme 2,5105, do políčka N1 napíšeme 20, do políčka Pr1 napíšeme 8,25, do políčka SmOd1 napíšeme 3,0675, do políčka N1 napíšeme 15 – Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,9023, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Nepovinná část: Cohenův koeficient věcného účinku – doplnění významu dvouvýběrového t-testu:

Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Označme m_1, m_2 realizace výběrových průměrů hodnot dané veličiny v těchto dvou skupinách, s_1^2, s_2^2 realizace výběrových rozptylů a $s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$ realizaci váženého průměru výběrových rozptylů.

Cohenův koeficient d vypočteme podle vzorce: $d = \frac{|m_1 - m_2|}{s_*}$.

Tento koeficient slouží k posouzení velikosti rozdílu průměrů, který je standardizován pomocí odmocniny z váženého průměru výběrových rozptylů. Jedná se o tzv. věcnou významnost neboli velikost účinku skupiny na variabilitu hodnot sledované náhodné veličiny. Velikost účinku hodnotíme podle následující tabulky:

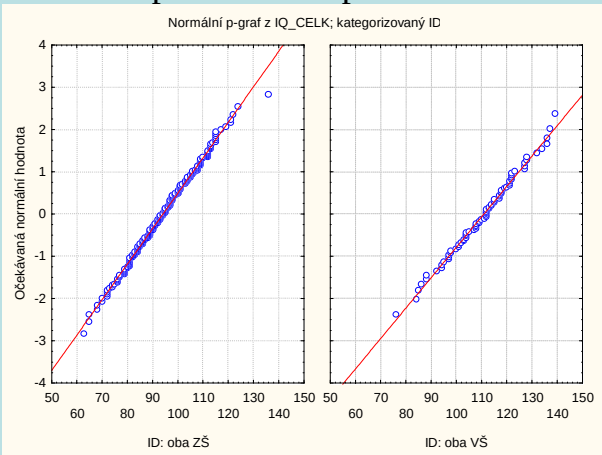
Hodnota d	účinek
aspoň 0,8	velký
mezi 0,5 až 0,8	střední
mezi 0,2 až 0,5	malý
pod 0,2	zanedbatelný

(Uvedené hodnoty nemají samozřejmě absolutní platnost, posouzení, jaký účinek považujeme za velký či malý, závisí na kontextu.)

Je zapotřebí si uvědomit, že při dostatečně velkých rozsazích náhodných výběrů i malý rozdíl ve výběrových průměrech způsobí zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α, i když z věcného hlediska tak malý rozdíl nemá význam. Naopak, máme-li výběry malých rozsahů, pak i značně velký rozdíl ve výběrových průměrech nemusí vést k zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α.

Příklad:
Máme k dispozici údaje o celkovém IQ 856 žáků ZŠ. Zajímáme se jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají pouze základní vzdělání (je jich 296) a jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají vysokoškolské vzdělání (těch je 75). Na hladině významnosti 0,05 budeme testovat hypotézu, že střední hodnota celkového IQ je v obou skupinách stejná a také vypočteme Cohenův koeficient věcného účinku.

Řešení: Normalitu dat v obou skupinách posoudíme pomocí N-P plotu:

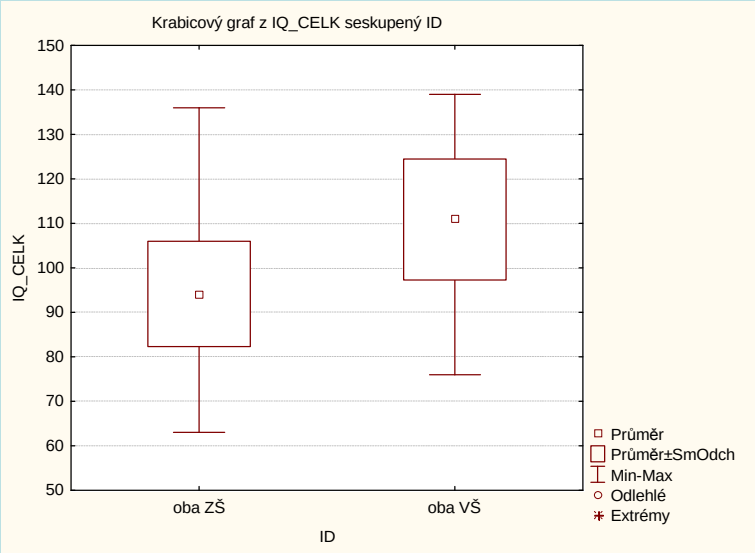


Vzhled N- P plotů v obou skupinách podporuje domněnku o normalitě dat.
Provedeme dvouvýběrový t-test:

Proměnná	t-testy; grupováno:ZŠ a VŠ (IQ) Skup. 1: oba ZŠ Skup. 2: oba VŠ Průměr oba ZŠ	Průměr oba VŠ	t	sv	p	Poč.plat oba ZŠ	Poč.plat. oba VŠ	Sm.odch. oba ZŠ	Sm.odch. oba VŠ	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
IQ_CELK	94,13851	110,9067	-10,6295	369	0,000000	296	75	11,82604	13,60164	1,322829	0,110124

Hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože odpovídající p-hodnota je velmi blízká 0 (hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05, p-hodnota F-testu je 0,110124, což je větší než 0,05).

Krabicový diagram:



Vidíme, že průměrné celkové IQ dětí v 1. skupině je 94,1, zatímco ve 2. skupině 110,9. Vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ posoudíme pomocí Cohenova koeficientu.

	1 n1	2 n2	3 m1	4 m2	5 s1	6 s2	7 d
1	296	75	94,13851	110,9067	11,82604	13,60164	1,374117

Cohenův koeficient nabývá hodnoty 1,37, tudíž vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ lze považovat za velký.

Parametrické úlohy o jednom a dvou výběrech z alternativního rozložení

Osnova:

Případ jednoho náhodného výběru

- asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru alternativního rozložení
- vzorec pro meze intervalu spolehlivosti pro parametr alternativního rozložení
- testování hypotézy o parametru alternativního rozložení

Případ dvou nezávislých náhodných výběrů

- asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrových průměrů dvou nezávislých alternativních rozložení
- vzorec pro meze intervalu spolehlivosti pro rozdíl parametrů dvou alternativních rouložení
- testování hypotézy o rozdílu parametrů dvou alternativních rozložení

Případ jednoho náhodného výběru: S náhodným výběrem rozsahu n z alternativního rozložení se setkáváme v situaci, kdy provádíme n opakovaných nezávislých pokusů a v každém z těchto pokusů sledujeme nastoupení úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná. Náhodná veličina X_i nabude hodnoty 1, pokud v i-tém pokusu nastal úspěch a hodnoty 0, pokud v i-tém pokusu úspěch nenastal, i = 1, 2, …, n. Realizací náhodného výběru X_1, …, X_n je tedy posloupnost 0 a 1.

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ. Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1-\vartheta \text{ pro } x=0 \\ \vartheta \text{ pro } x=1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x} \text{ pro } x=0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme $X \sim Bi(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \text{ pro } x=0,\ldots,n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$E(X) = n\vartheta$, $D(X) = n\vartheta\,(1-\vartheta)$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro n = 1.

Jsou-li X_1, ..., X_n stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, ..., n, pak $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, \vartheta)$.)

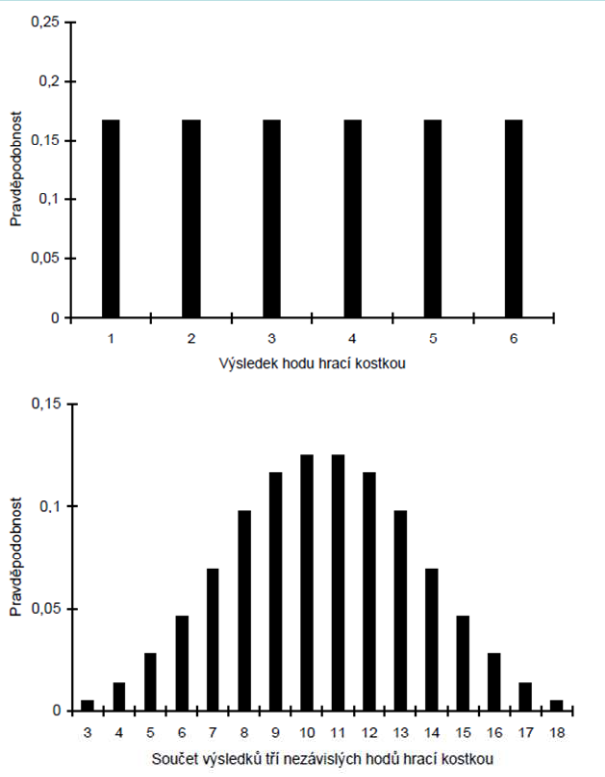
Centrální limitní věta:
Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$.

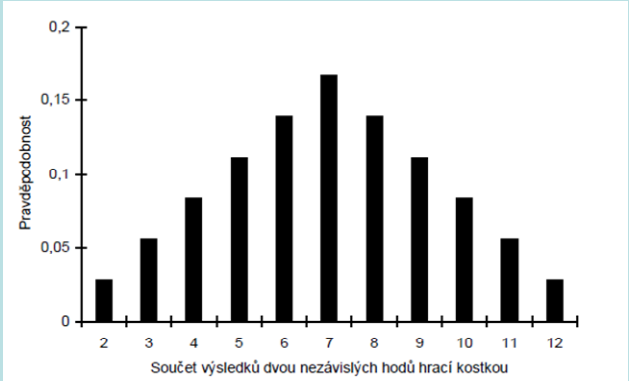
Zkráceně píšeme $\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

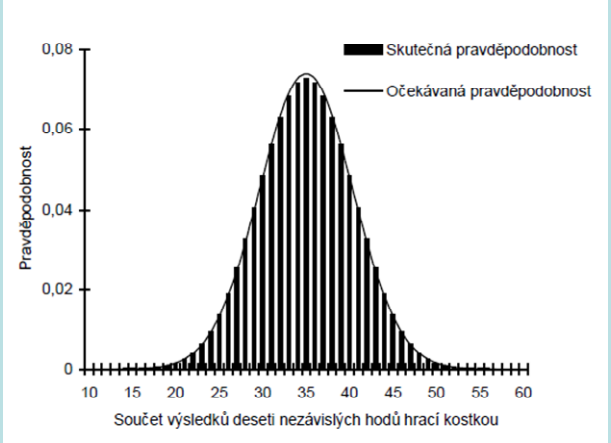
Pokud součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Normální rozložení je tedy rozložením limitním, k němuž se blíží všechna rozložení, proto hraje velmi důležitou roli v počtu pravděpodobnosti a matematické statistice.

Ilustrace centrální limitní věty – opakované hody kostkou







Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Pak statistika $U = \dfrac{M - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením.

(Říkáme, že U má asymptoticky rozložení N(0,1) a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$.

Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \dfrac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením N(0,1). Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n,

dostaneme vyjádření: $U = \dfrac{\dfrac{Y_n}{n} - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \dfrac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \dfrac{M - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta \in \Xi : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2} \right) =$$

$$= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right)$$

Příklad:

Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich nakupuje v internetových obchodech. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba nakupuje v internetových obchodech.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{100}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tá osoba nakupuje v internetových obchodech a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 100. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

n = 100, m = 34/100, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100.0,34.0,66 = 22,44 > 9$.

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}1,96 = 0,2472,\ h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}1,96 = 0,4328\,.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$. Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 95% je v uvažované populaci nejméně 24,7% a nejvíce 43,3% osob, které nakupují v internetových obchodech.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Použijeme modul Analýza síly testu

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,34, Velikost vzorku: 100, Spolehlivost: 0,95 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,3400
Velikost vz. ve skup. (N)	100,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,2482
Horní mez	0,4415
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,2501
Horní mez	0,4423
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,2472
Horní mez	0,4328

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.). Zjišťujeme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost nákupu v internetových obchodech bude pohybovat v mezích 0,2472 až 0,4328.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:

Šířka 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

$$h - d = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} - \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} \right) = 2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby $h - d \leq \Delta$, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \Delta$. Odtud vyjádříme $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m, aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. V tomto případě volíme relativní četnost m = 0,5.

ad a) $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot u_{0{,}95}^2}{0{,}06^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}645^2}{0{,}06^2} = 751{,}67$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

ad b) $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot u_{0{,}95}^2}{0{,}01^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}645^2}{0{,}01^2} = 27060{,}25$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost m = 0,3.

ad a) $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 631,41$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.
Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 22730,61$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

H_0: $\vartheta = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta < c$ resp. H_1: $\vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0{,}01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\vartheta = 0{,}01$ proti oboustranné alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 1000. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta = 0{,}01$ proti alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.
Známe: n = 1000, $m = \frac{16}{1000} = 0{,}016$, c = 0,01, α = 0,05, $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} = 1{,}96$
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 1000.0,01.0,99 = 9,9 > 9.

a) Testování pomocí kritického oboru:
Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m-c}{\sqrt{\frac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \frac{0{,}016-0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1000}}} = 1{,}907$.
Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0{,}975}\rangle \cup \langle u_{0{,}975}, \infty) = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$. Protože $1{,}907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

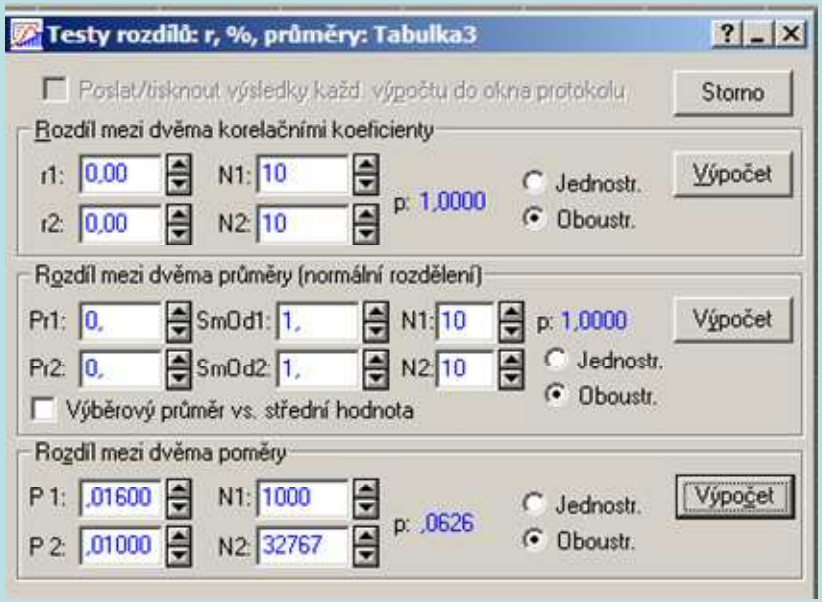
b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti
$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 - \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{1000}}1{,}96 = 0{,}0082$$
$$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 + \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{1000}}1{,}96 = 0{,}0238$$
Protože číslo c = 0,01 leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty
Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:
p = 2 min{ Φ(1,907), 1–Φ(1,907) } = 2 min { 0,97104, 1 – 0,97104 } = 0,05792.
Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

a) Využití aplikace Testy rozdílů

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



b) Využití modulu Analýza síly testu

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,016, Velikost vzorku: 1000, Spolehlivost: 0,95 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,0160
Velikost vz. ve skup. (N)	1000,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,0092
Horní mez	0,0259
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,0095
Horní mez	0,0264
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,0082
Horní mez	0,0238

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.). Zjišťujeme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost vyrobení zmetku bude pohybovat v mezích 0,00822 až 0,0238. Protože tento interval obsahuje číslo 0,01, nelze nulovou hypotézu zamítnout na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{40}$, přičemž
$X_i = 1$, když terapie u i-tého pacienta byl úspěšná a
$X_i = 0$ jinak,
$i = 1, ..., 40$.
Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta \leq 0{,}5$ proti pravostranné alternativě H_1: $\vartheta > 0{,}5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0{,}6$, $c = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}05$, $u_{1-\alpha} = u_{0{,}95} = 1{,}645$

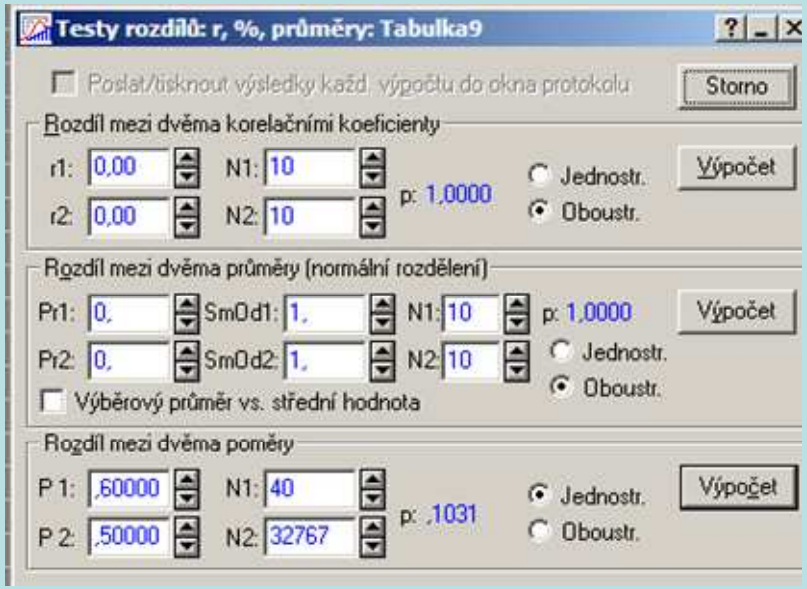
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $40.0{,}6.0{,}4 = 9{,}6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m-c}{\sqrt{\frac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \frac{0{,}6-0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{40}}} = 1{,}2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0{,}95}, \infty) = \langle 1{,}645, \infty)$.

Protože $1{,}2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:



Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Případ dvou nezávislých výběrů z alternativních rozložení: Provádíme opakovaně nezávisle n_1-krát jeden náhodný pokus a nezávisle na tom n_2-krát druhý náhodný pokus. V první sérii pokusů sledujeme nějaký jev, který v každém pokusu může nastat s pravděpodobností ϑ_1 a ve druhé sérii pokusů sledujeme nějaký jiný jev, jehož pravděpodobnost nastoupení je ϑ_2. Parametry ϑ_1, ϑ_2 neznáme. Naším úkolem bude konstruovat interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ nebo testovat hypotézu o této parametrické funkci, a to pomocí dvou nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení $A(\vartheta_1)$, $A(\vartheta_2)$.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů alternativních rozložení

Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika $U = \dfrac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\dfrac{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}{n_1} + \dfrac{\vartheta_2(1-\vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$.

Vysvětlení: Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}u_{1-\alpha/2},\ h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}u_{1-\alpha/2}$$

Vysvětlení: Pokud rozptyl $D(M_i) = \frac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\frac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, i = 1, 2, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \Xi : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2} \right) =$$

$$P(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 < M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}u_{1-\alpha/2})$$

Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 200. Náhodné veličiny $X_{1,1}$, …, $X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 300. Náhodné veličiny $X_{2,1}$, …, $X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200 = 0{,}485$, $m_2 = 162/300 = 0{,}54$.

Ověření podmínek $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2, tedy $97.(1-97/200) = 49{,}955 > 9$, $162.(1-162/300) = 74{,}52 > 9$.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}1{,}96 = -0{,}1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}1{,}96 = 0{,}0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0{,}1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0{,}0343$.

Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$

(resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 > c$).

Testovým kritériem je statistika

$T_0 = \dfrac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\dfrac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \dfrac{M_2(1-M_2)}{n_2}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$

(resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li c = 0, pak označme $M_* = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů. Jako testová statistika slouží

$T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_*.

Příklad: Pro údaje z příkladu o slevách v supermarketu testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200$, $m_2 = 162/300$, $m_* = (97 + 162)/500 = 0{,}518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v předešlém příkladu.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}\left(1-\frac{97}{200}\right)}{200} + \frac{\frac{162}{300}\left(1-\frac{162}{300}\right)}{300}}\,1{,}645 = 0{,}02$$

Protože číslo c = 0 je obsaženo v intervalu $\langle -\infty; 0{,}02\rangle$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0{,}518(1-0{,}518)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}} = -1{,}2058\,.$$

Kritický obor je $W = \langle -\infty, -u_{1-\alpha}\rangle = \langle -\infty, -u_{0{,}95}\rangle = \langle -\infty, -1{,}645\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

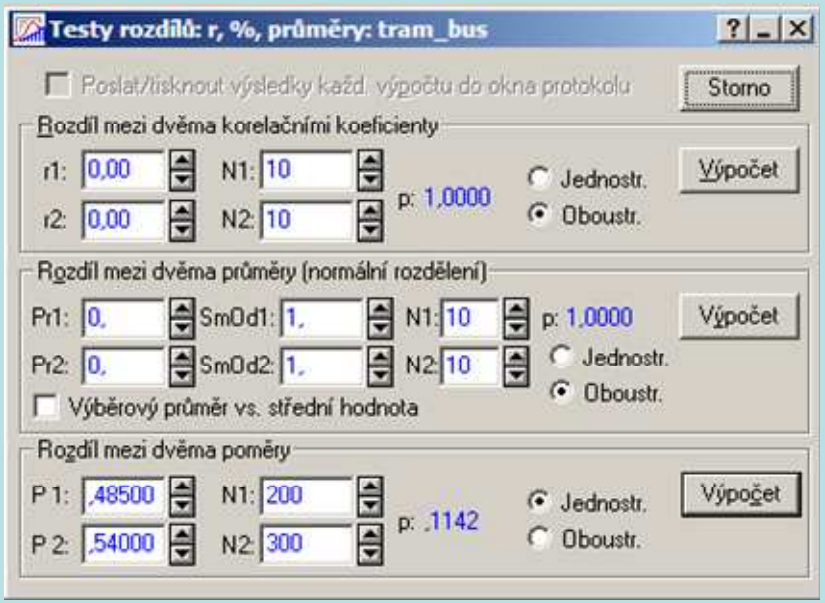
Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \le t_0)$:

$$p = P(T_0 \le -1{,}2058) = \Phi(-1{,}2058) = 1 - \Phi(1{,}2058) = 1 - 0{,}8861 = 0{,}1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Test hypotézy o shodě podílů ϑ_1 a ϑ_2:

Systém STATISTICA počítá jednostrannou p-hodnotu (ozn. *softw. p*) jako $P(T_0 > |t_0|)$, proto kromě typu alternativy záleží i na znaménku realizace testového kritéria. Skutečnou p-hodnotu (ozn. *skut. p*) tedy počítáme podle následující tabulky:

① $t_0 > 0$, levostranná alternativa $skut.\ p = softw.p$	③ $t_0 < 0$, levostranná alternativa $skut.\ p = 1 - softw.p$
② $t_0 > 0$, pravostranná alternativa $skut.\ p = 1 - softw.p$	④ $t_0 < 0$, pravostranná alternativa $skut.\ p = softw.p$

Parametrické úlohy o více nezávislých náhodných výběrech

Osnova:

Porovnání aspoň tří nezávislých náhodných výběrů z normálních rozložení (jednofaktorová analýza rozptylu)

- testování hypotézy o shodě středních hodnot
- testování hypotézy o shodě rozptylů (testy homogenity rozptylů)
- zkoumání vlastností testů homogenity pomocí simulačních studií
- post-hoc metody mnohonásobného porovnávání

Porovnání aspoň tří nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení

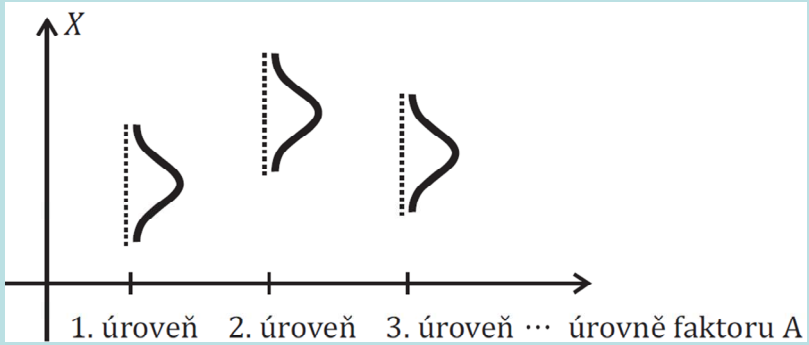
- test homogenity binomických rozložení
- mnohonásobné porovnávání

I. Případ $r \geq 3$ nezávislých náhodných výběrů z normálních rozložení (Analýza rozptylu jednoduchého třídění)

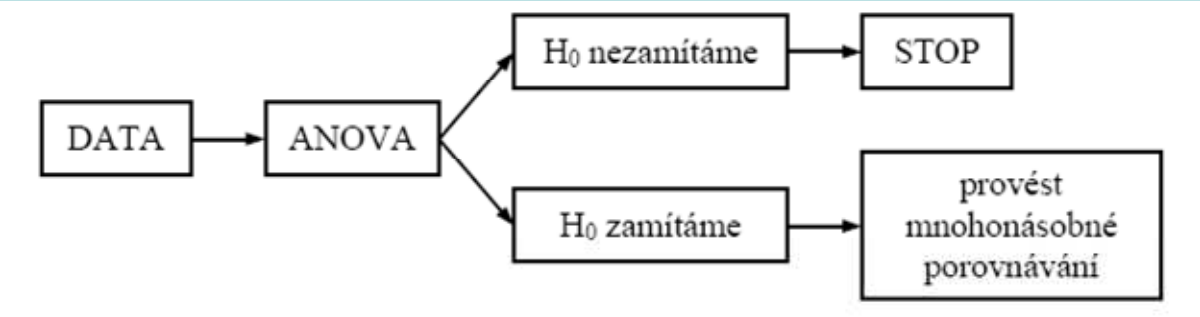
Motivace: Zajímáme se o problém, zda lze určitým faktorem (tj. nominální náhodnou veličinou A) vysvětlit variabilitu pozorovaných hodnot náhodné veličiny X, která je intervalového či poměrového typu. Např. zkoumáme, zda metoda výuky určitého předmětu (faktor A) ovlivňuje počet bodů dosažených studenty v závěrečném testu (náhodná veličina X).
Předpokládáme, že faktor A má $r \geq 3$ úrovní a přitom i-té úrovni odpovídá n_i pozorování $X_{i1},\ldots,X_{in_i}$, které tvoří náhodný výběr z rozložení $N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, ..., r$ a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé, tedy $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$, kde ε_{ij} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$.
Výsledky lze zapsat do tabulky

faktor A	výsledky
úroveň 1	$X_{11},\ldots,X_{1n_1}$
úroveň 2	$X_{21},\ldots,X_{2n_2}$
…	…
úroveň r	$X_{r1},\ldots,X_{rn_r}$

Ilustrace:



Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu, která tvrdí, že všechny střední hodnoty jsou stejné, tj.
H_0: $\mu_1 = \ldots = \mu_r$ proti alternativní hypotéze H_1, která tvrdí, že aspoň jedna dvojice středních hodnot se liší.
Jedná se tedy o zobecnění dvouvýběrového t-testu a na první pohled se zdá, že stačí utvořit $\binom{r}{2}$ dvojic náhodných výběrů a na každou dvojici aplikovat dvouvýběrový t-test. Hypotézu o shodě všech středních hodnot bychom pak zamítli, pokud aspoň v jednom případě z $\binom{r}{2}$ porovnávání se prokáže odlišnost středních hodnot. Odtud je vidět, že k neoprávněnému zamítnutí nulové hypotézy (tj. k chybě 1. druhu) může dojít s pravděpodobností větší než α. Proto ve 30. letech 20. století vytvořil R. A. Fisher metodu ANOVA (analýza rozptylu, v popsané situaci konkrétně analýza rozptylu jednoduchého třídění), která uvedenou podmínku splňuje.
Pokud na hladině významnosti α zamítneme nulovou hypotézu, zajímá nás, které dvojice středních hodnot se od sebe liší. K řešení tohoto problému slouží metody mnohonásobného porovnávání, např. Scheffého nebo Tukeyova metoda.



Označení:

V analýze rozptylu jednoduchého třídění se používá tzv. tečková notace.

$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ … celkový rozsah všech r výběrů

$X_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ … součet hodnot v i-tém výběru

$M_{i.} = \frac{1}{n_i} X_{i.}$ … výběrový průměr v i-tém výběru

$X_{..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ … součet hodnot všech výběrů

$M_{..} = \frac{1}{n} X_{..}$ … celkový průměr všech r výběrů

Zavedeme součty čtverců

$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - M_{..})^2$ … celkový součet čtverců (charakterizuje variabilitu jednotlivých pozorování kolem celkového průměru),

počet stupňů volnosti $f_T = n - 1$,

$S_A = \sum_{i=1}^{r} n_i (M_{i.} - M_{..})^2$ … skupinový součet čtverců (charakterizuje variabilitu mezi jednotlivými náhodnými výběry),

počet stupňů volnosti $f_A = r - 1$.

Sčítanec $(M_{i.} - M_{..})$ představuje bodový odhad efektu α_i.

$S_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - M_{i.})^2$ … reziduální součet čtverců (charakterizuje variabilitu uvnitř jednotlivých výběrů),

počet stupňů volnosti $f_E = n - r$.

Lze dokázat, že $S_T = S_A + S_E$.

(Důkaz je proveden např. ve skriptech Budíková, Mikoláš, Osecký: Popisná statistika v poznámce 5.20.)

Testování hypotézy o shodě středních hodnot

Náhodné veličiny X_{ij} se řídí modelem
M0: $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$
pro $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$, přičemž
ε_{ij} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$,
μ je společná část střední hodnoty závisle proměnné veličiny,
α_i je efekt faktoru A na úrovni i.
Parametry μ, α_i neznáme.

Požadujeme, aby platila tzv. reparametrizační rovnice: $\sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i = 0$.

(Pokud je třídění vyvážené, tj. pokud mají všechny výběry stejný rozsah: $n_1 = n_2 = \ldots = n_r$, pak lze použít zjednodušenou podmínku $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0$.)

Kdyby nezáleželo na faktoru A, platila by hypotéza $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ a dostali bychom model
M1: $X_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$.
Během analýzy rozptylu tedy zkoumáme, zda výběrové průměry $M_1, \ldots, M_r$ se od sebe liší pouze v mezích náhodného kolísání kolem celkového průměru M nebo zda se projevuje vliv faktoru A.

Rozdíl mezi modely M0 a M1 ověřujeme pomocí testové statistiky
$F_A = \frac{S_A / f_A}{S_E / f_E}$, která se řídí rozložením F(r-1,n-r), je-li model M1 správný. Hypotézu o nevýznamnosti faktoru A tedy zamítneme na hladině významnosti α, když platí: $F_A \geq F_{1-\alpha}(r-1,n-r)$.

Výsledky výpočtů zapisujeme do tabulky analýzy rozptylu jednoduchého třídění.

Zdroj variability	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	F_A
skupiny	S_A	$f_A = r - 1$	S_A/f_A	$\frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
reziduální	S_E	$f_E = n - r$	S_E/f_E	-
celkový	S_T	$f_T = n - 1$	-	-

Sílu závislosti náhodné veličiny X na faktoru A můžeme měřit pomocí poměru determinace: $P^2 = \frac{S_A}{S_T}$. Nabývá hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Testování hypotézy o shodě rozptylů

Před provedením analýzy rozptylu je zapotřebí ověřit předpoklad o shodě rozptylů v daných r výběrech.

a) Levenův test: Položme $Z_{ij} = \left|X_{ij} - M_{i.}\right|$. Označíme

$$M_{Zi} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij},$$

$$M_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij},$$

$$S_{ZE} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Z_{ij} - M_{Zi}\right)^2,$$

$$S_{ZA} = \sum_{i=1}^{r} n_i\left(M_{Zi} - M_Z\right)^2$$

Platí-li hypotéza o shodě rozptylů, pak statistika

$$F_{ZA} = \frac{S_{ZA}/(r-1)}{S_{ZE}/(n-r)} \approx F(r-1, n-r).$$

Hypotézu o shodě rozptylů tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $F_{ZA} \geq F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$.
(Levenův test je vlastně založen na analýze rozptylu absolutních hodnot centrovaných pozorování. Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny $X_{ij} - M_i$ nejsou stochasticky nezávislé a absolutní hodnoty těchto veličin nemají normální rozložení, je Levenův test pouze aproximativní.)

b) Brownův – Forsytheův test je modifikací Levenova testu. Modifikace spočívá v tom, že místo výběrového průměru i-tého výběru se při výpočtu veličiny z_{ij} používá medián i-tého výběru.

c) Bartlettův test: Platí-li hypotéza o shodě rozptylů a rozsahy všech výběrů jsou větší než 6, pak statistika $B = \frac{1}{C}\left[(n-r)\ln S_*^2 - \sum_{i=1}^{r}(n_i-1)\ln S_i^2\right]$ se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(r-1)$. Přitom konstanta $C = 1+\frac{1}{3(r-1)}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i-1}-\frac{1}{n-r}\right)$ a S_*^2 je vážený průměr výběrových rozptylů.
H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když B se realizuje v kritickém oboru $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty)$.

Zkoumání vlastností uvedených tří testů

Pro odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu bylo vždy vygenerováno 100 000 náhodných výběrů, a to postupně z těchto rozložení:

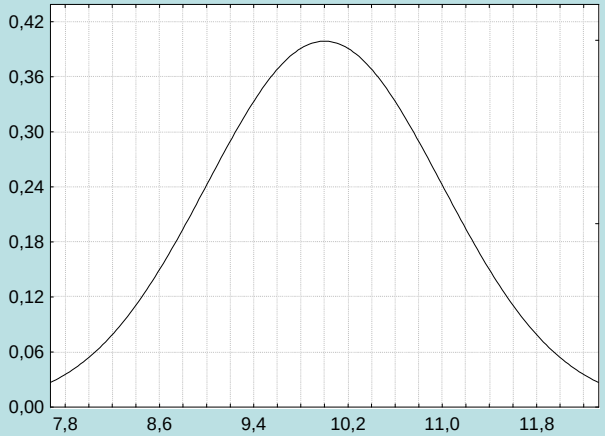
N(10; 1), t(10), LN(1; 0,4), Ex(0,85).

Všechny výběry měly stejný rozsah od 3 do 11 s krokem 2, počet výběrů byl od 2 do 10 s krokem 2.

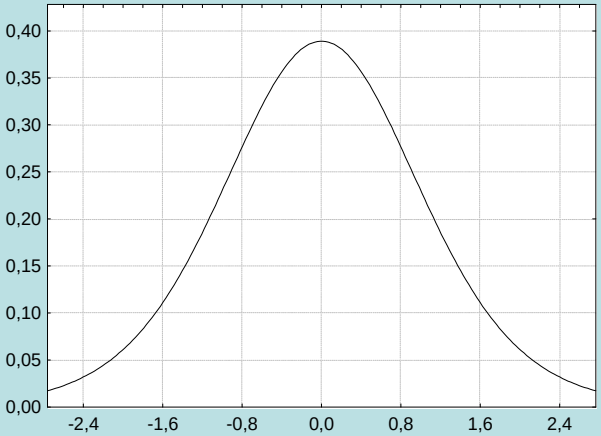
Jako odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu sloužila relativní četnost těch případů, kdy se na hladině významnosti 0,05 zamítla nulová hypotéza o shodě rozptylů. Simulace byly provedeny v programu MathCad.

Grafy hustot zkoumaných rozložení

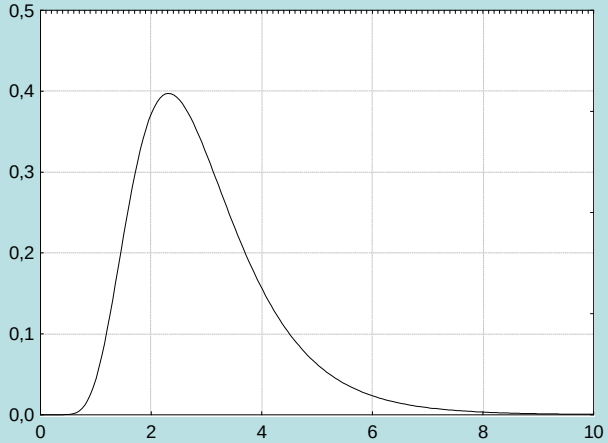
Normální rozložení N(10; 1)



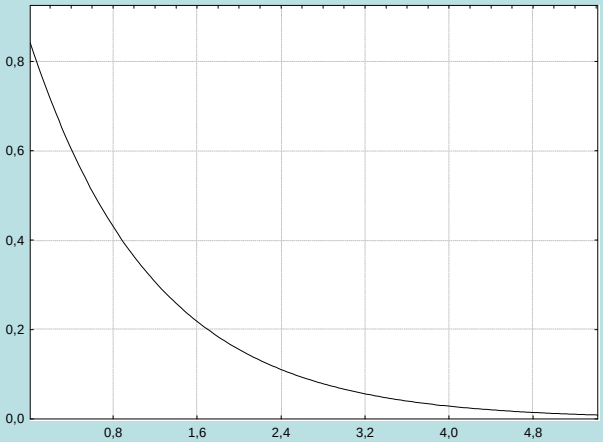
Studentovo rozložení t(10)



Log – normální rozložení LN(1; 0,4)



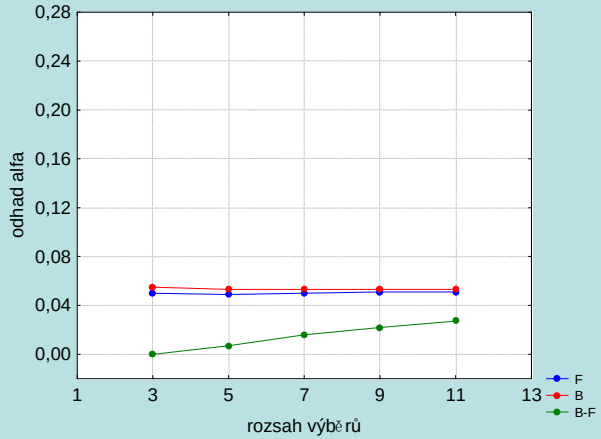
Exponenciální rozložení Ex(0,85)



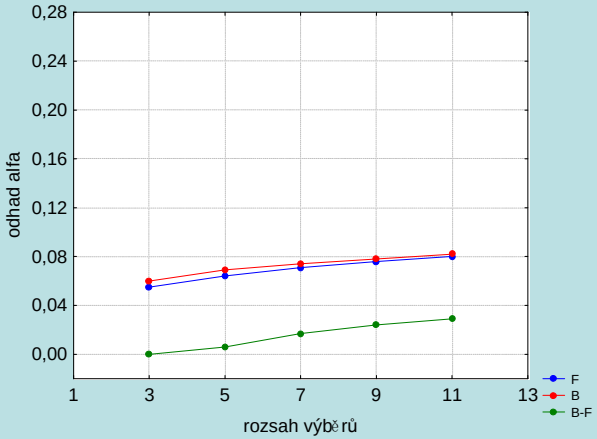
Případ dvou nezávislých náhodných výběrů

Nejprve bylo provedeno srovnání F-testu s Bartlettovým testem a Brownovým – Forsytheovým testem pro dva nezávislé náhodné výběry. V grafech se modrá barva vztahuje k F-testu, červená k Bartlettovu testu a zelená k Brownovu – Forsytheovu testu.

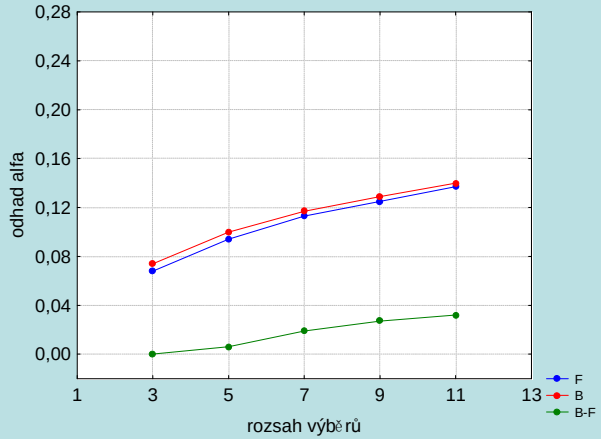
Normální rozložení N(10; 1)



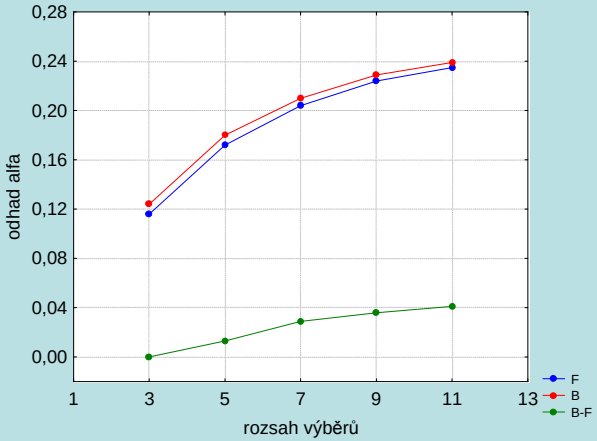
Studentovo rozložení t(10)



Log - normální rozložení LN(1; 0,4)



Exponenciální rozložení Ex(0,85)



Komentář: Podle očekávání je nejnižších odhadů pravděpodobnosti chyby 1. druhu dosahováno pro výběry z normálního rozložení, kdy všechny testy udrží odhad pod hladinou významnosti 0,05. S postupným „vzdalováním se“ od normality relativní četnost neoprávněného zamítnutí nulové hypotézy roste, nejvyšší je pro výběry z exponenciálního rozložení, kde se pro F-test a Bartlettův test blíží k 0,24.

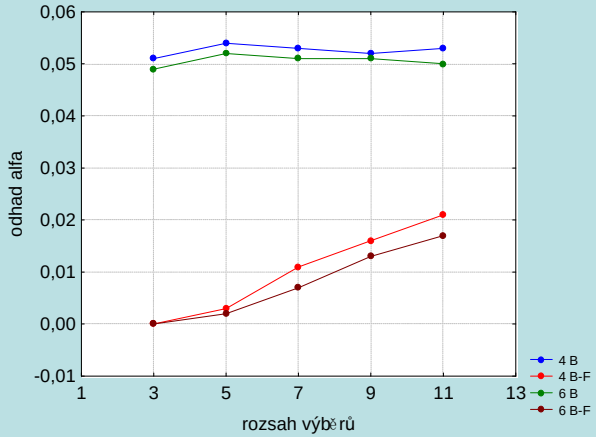
Pro všechna zkoumaná rozložení dávají F-test a Bartlettův test srovnatelné výsledky, u F-testu pozorujeme poněkud nižší odhad. Jednoznačně nejlepší výsledky jsou dosahovány při použití B-F testu, který i pro výběry z exponenciálního rozložení poskytuje odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu dostatečně hluboko pod 0,05.

Případ více než dvou nezávislých náhodných výběrů

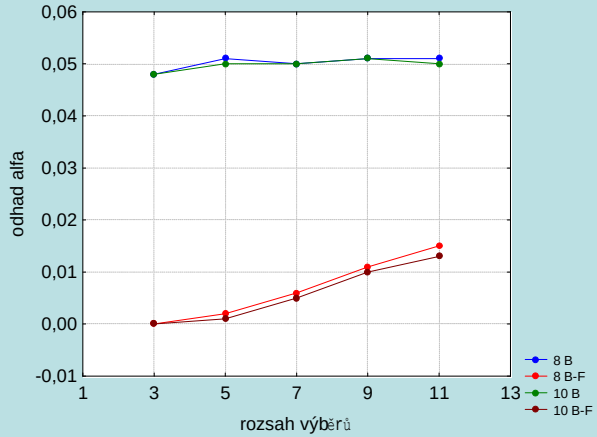
Dále jsme se zabývali srovnáním Bartlettova testu s Brownovým – Forsytheovým testem pro 4, 6, 8 a 10 nezávislých náhodných výběrů, jejichž rozsahy byly 3, 5, 7, 9, 11. Kvůli větší přehlednosti jsou grafy závislosti odhadu na rozsahu výběrů uvedeny zvlášť pro 4 a 6 výběrů a poté pro 8 a 10 výběrů. V grafech se modrá a zelená barva vztahuje k Bartlettovu testu, červená a hnědá pak k Brownovu – Forsytheovu testu.

a) Normální rozložení N(10; 1)

Počet výběrů 4 a 6



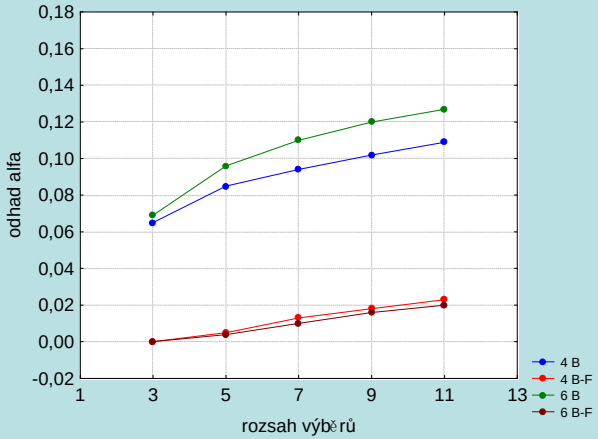
Počet výběrů 8 a 10



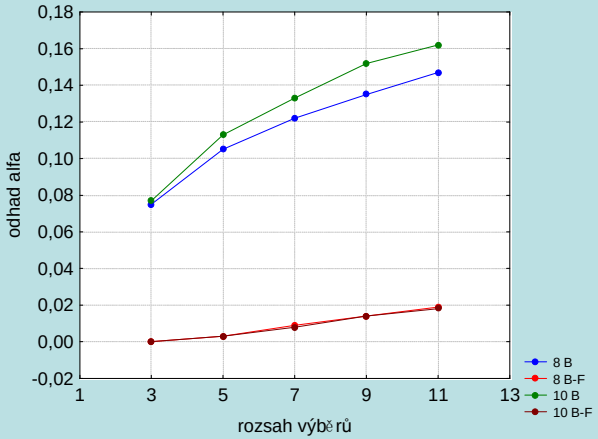
Pro výběry z normálního rozložení dává Bartlettův test odhady velmi blízké hladině významnosti 0,05. Není zde pozorovatelná závislost na rozsahu výběrů. Brownův – Forsytheův test neoprávněně zamítá nulovou hypotézu s podstatně menší relativní četností, která nepřesáhne 0,021.

b) Studentovo rozložení t(10)

Počet výběrů 4 a 6

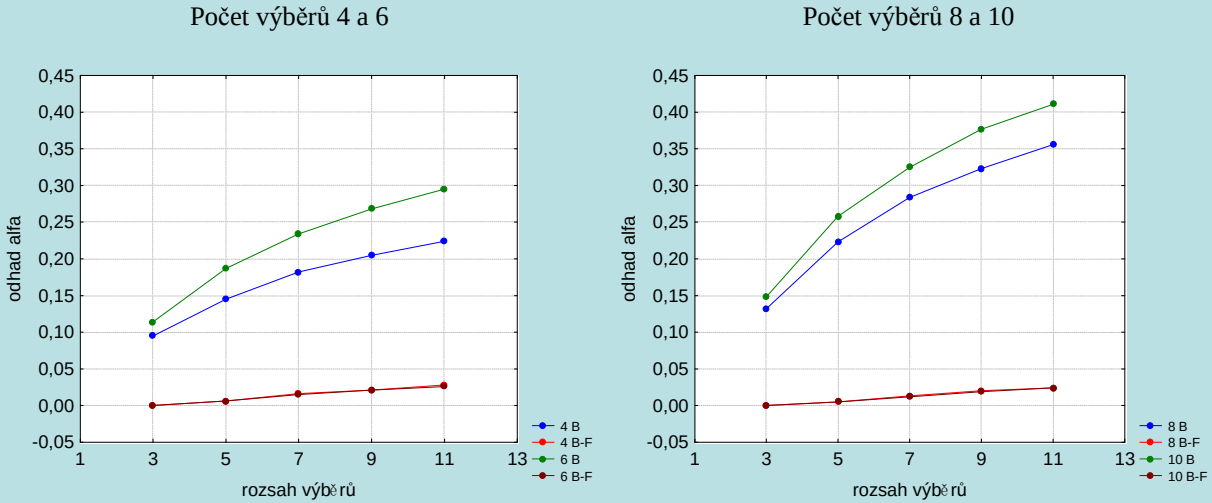


Počet výběrů 8 a 10



Pro výběry ze Studentova rozložení jsou výsledky Bartlettova testu již ovlivněny porušením předpokladu normality. Získané odhady narůstají se zvětšujícím se rozsahem výběrů a v nejméně příznivém případě, tj. pro 10 nezávislých náhodný výběrů o rozsahu 11, odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu převyšuje 0,16. Brownův – Forsytheův test neoprávněně zamítá nulovou hypotézu s relativní četností, která nepřesáhne 0,023. Rozdíly mezi odhady pro různé počty výběrů jsou u B-F testu zanedbatelně malé.

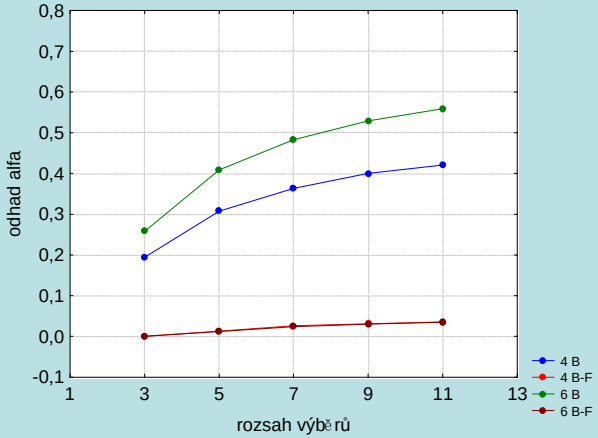
c) Logaritmicko – normální rozložení LN(1; 0,4)



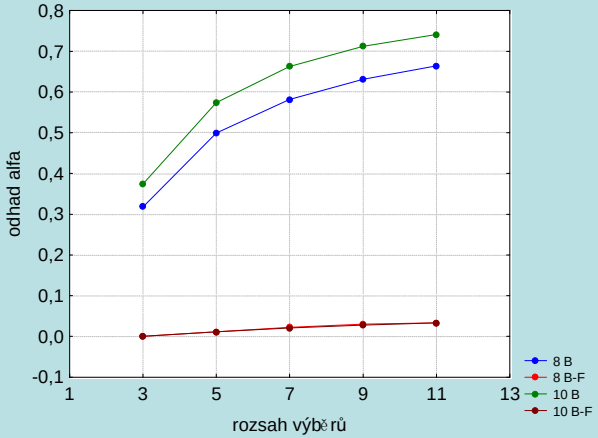
Pro výběry z logaritmicko - normálního rozložení odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu získaný Bartlettovým testem velmi výrazně narůstá, zvláště pro větší počet rozsáhlejších výběrů. Zde je dokonce o něco vyšší než 0,42, tudíž použití Bartlettova testu skutečně nelze doporučit. Daleko lepší výsledky poskytuje Brownův – Forsytheův test, kde odhady zůstávají pod 0,03.

d) Exponenciální rozložení Ex(0,85)

Počet výběrů 4 a 6



Počet výběrů 8 a 10



Vidíme, že použití Bartlettova testu pro výběry z exponenciálního rozložení nelze vůbec doporučit. Odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu je neúnosně velký, v nejméně příznivém případě – pro 10 nezávislých náhodných výběrů o rozsahu 11 - se tento odhad blíží 0,75. Naproti tomu odhady získané Brownovým – Forsytheovým testem jsou nanejvýš 0,035, což ještě zdaleka nedosahuje hladiny významnosti 0,05.

Komentář

Výsledky našich simulačních studií vedou k závěru, že pro testy homogenity rozptylů je vhodné používat Brownův – Forsytheův test, a to jak pro dva, tak pro více nezávislých náhodných výběrů. Ukazuje se, že tento test lze aplikovat i na výběry, které pocházejí z výrazně nenormálních rozložení. To lze vysvětlit tím, že při jeho konstrukci jsou použity výběrové mediány jednotlivých výběrů, přičemž medián – na rozdíl od průměru – je robustní vůči odlehlým či extrémním hodnotám.

U Brownova – Forsytheova testu odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu ve všech případech zůstal pod hladinou významnosti 0,05, nejhorší výsledek byl 0,036 pro 4 nezávislé výběry z exponenciálního rozložení. Bartlettův test zcela selhává pro výběry z nesymetrických rozložení. Např. pro 10 nezávislých výběrů z exponenciálního rozložení, jejichž rozsah byl 11, se odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu blížil číslu 0,8.

Výhodou Brownova – Forsytheova testu je rovněž skutečnost, že velikosti odhadů vykazují jen velmi nepatrnou závislost na počtu výběrů.

Brownův – Forsytheův test je implemenován např. v systémech STATISTICA či MINITAB, Bartlettův test najdeme v systému MINITAB, F-test pak v obou zmíněných systémech.

Post – hoc metody mnohonásobného porovnávání

Zamítneme-li na hladině významnosti α hypotézu o shodě středních hodnot, chceme zjistit, které dvojice středních hodnot se liší na dané hladině významnosti α, tj. na hladině významnosti α testujeme H_0: $\mu_l = \mu_k$ proti H_1: $\mu_l \neq \mu_k$ pro všechna l, k = 1, .., r, $l \neq k$.

a) Mají-li všechny výběry týž rozsah p (říkáme, že třídění je vyvážené), použijeme Tukeyovu metodu.

Testová statistika má tvar $\frac{|M_{k.} - M_{l.}|}{\frac{S_*}{\sqrt{p}}}$. Rovnost středních hodnot μ_k a μ_l zamítneme na hladině významnosti α, když

$\frac{|M_{k.} - M_{l.}|}{\frac{S_*}{\sqrt{p}}} \geq q_{1-\alpha}(r, n-r)$, kde hodnoty $q_{1-\alpha}(r, n-r)$ jsou kvantily studentizovaného rozpětí a najdeme je ve statistických tabulkách. (Studentizované rozpětí je náhodná veličina $Q = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{s}$.)

Existuje modifikace Tukeyovy metody pro nestejné rozsahy výběrů, nazývá se Tukeyova HSD metoda. V tomto případě má testová statistika tvar $\frac{|M_{k.} - M_{l.}|}{S_* \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)}}$. Rovnost středních hodnot μ_k a μ_l zamítneme na hladině významnosti α, když

$\frac{|M_{k.} - M_{l.}|}{S_* \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)}} \geq q_{1-\alpha}(r, n-r)$.

b) Nemají-li všechny výběry stejný rozsah, použijeme Scheffého metodu: rovnost středních hodnot μ_k a μ_l zamítneme na hladině významnosti α, když

$$|M_{k.} - M_{l.}| \geq S_* \sqrt{(r-1)\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right) F_{1-\alpha}(r-1, n-r)}\,.$$

Výhodou Scheffého testu je, že k jeho provedení nepotřebujeme speciální statistické tabulky s hodnotami kvantilů studentizovaného rozpětí, ale stačí běžné statistické tabulky s kvantily Fisherova – Snedecorova rozložení.

V případě vyváženého třídění, kdy lze aplikovat Tukeyovu i Scheffého metodu, použijeme tu, která je citlivější. Tukeyova metoda tedy bude výhodnější, když
$q_{1-\alpha}^2(r, n-r) < 2(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$.

Metody mnohonásobného porovnávání mají obecně menší sílu než ANOVA.
Může nastat situace, kdy při zamítnutí H_0 nenajdeme metodami mnohonásobného porovnávání významný rozdíl u žádné dvojice středních hodnot. K tomu dochází zvláště tehdy, když p-hodnota pro ANOVU je jen o málo nižší než zvolená hladina významnosti. Pak slabší test patřící do skupiny metod mnohonásobného porovnávání nemusí odhalit žádný rozdíl.

Doporučený postup při provádění analýzy rozptylu:

a) Ověření normality daných r náhodných výběrů (grafické metody - NP plot, Q-Q plot, histogram, testy hypotéz o normálním rozložení - Lilieforsova varianta Kolmogorovova – Smirnovova testu nebo Shapirův – Wilkův test).
Doporučuje se kombinace obou způsobů. Závěry učiníme až na základě posouzení obou výsledků.
Obecně lze říci, že analýza rozptylu není příliš citlivá na porušení předpokladu normality, zvláště při větších rozsazích výběrů (nad 20), což je důsledek působení centrální limitní věty. Mírné porušení normality tedy není na závadu, při větším porušení použijeme např. Kruskalův – Wallisův test jako neparametrickou obdobu analýzy rozptylu jednoduchého třídění.

b) Po ověření normality se testuje homogenitu rozptylů, tj. předpoklad, že všechny náhodné výběry pocházejí z normálních rozložení s týmž rozpylem. Graficky ověřujeme shodu rozptylů pomocí krabicových diagramů, kdy sledujeme, zda je šířka krabic stejná. Numericky testujeme homogenitu rozptylů pomocí Levenova testu, Brownova – Forsytheova testu (oba jsou implementovány ve STATISTICE, Brownův – Forsytheův test v MINITABu) či Bartlettova testu (je k dispozici v MINITABu).
Slabé porušení homogenity rozptylů nevadí, při větším se doporučuje mediánový test.

c) Pokud jsou splněny předpoklady normality a homogenity rozptylů, můžeme přistoupit k testování shody středních hodnot. Předtím je samozřejmě vhodné vypočítat průměry a směrodatné odchylky či rozptyly v jednotlivých skupinách.

d) Dojde-li na zvolené hladině významnosti k zamítnutí hypotézy o shodě středních hodnot, zajímá nás, které dvojice středních hodnot se od sebe liší. K řešení tohoto problému slouží post-hoc metody mnohonásobného porovnávání, např. Scheffého nebo Tukeyova metoda.

Příklad: U čtyř odrůd brambor (označených symboly A, B, C, D) se zjišťovala celková hmotnost brambor vyrostlých vždy z jednoho trsu. Výsledky (v kg):

odrůda	hmotnost
A	0,9 0,8 0,6 0,9
B	1,3 1,0 1,3
C	1,3 1,5 1,6 1,1 1,5
D	1,1 1,2 1,0

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnota hmotnosti trsu brambor nezávisí na odrůdě. Zamítnete-li nulovou hypotézu, zjistěte, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05.

Řešení:
Data považujeme za realizace čtyř nezávislých náhodných výběrů ze čtyř normálních rozložení se stejným rozptylem. Testujeme hypotézu, že všechny čtyři střední hodnoty jsou stejné.

Vypočítáme výběrové průměry v jednotlivých výběrech: $M_{1.} = 0{,}8$, $M_{2.} = 1{,}2$, $M_{3.} = 1{,}4$, $M_{4.} = 1{,}1$,
celkový průměr: $M_{..} = 1{,}14$,
výběrové rozptyly: $S_1^2 = 0{,}02$, $S_2^2 = 0{,}03$, $S_3^2 = 0{,}04$, $S_4^2 = 0{,}01$,

vážený průměr výběrových rozptylů: $S_*^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)S_i^2}{n - r} = \frac{3 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}03 + 4 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}01}{11} = \frac{3}{110} = 0{,}0\overline{27}$,

reziduální součet čtverců: $S_E = (n - r)S_*^2 = 11 \cdot \frac{3}{110} = 0{,}3$,

skupinový součet čtverců: $S_A = \sum_{i=1}^{r} n_i (M_{i.} - M_{..})^2 = 4 \cdot (0{,}8 - 1{,}14)^2 + 3 \cdot (1.2 - 1{,}14)^2 + 5 \cdot (1{,}4 - 1{,}14)^2 + 3 \cdot (1{,}1 - 1{,}14)^2 = 0{,}816$

celkový součet čtverců: $S_T = S_A + S_E = 0{,}816 + 0{,}3 = 1{,}116$,

testová statistika $F_A = \frac{S_A / f_A}{S_E / f_E} = \frac{0{,}816/3}{0{,}3/11} = 9{,}97$,

Kritický obor $W = \langle F_{0{,}95}(3{,}11), \infty) = \langle 3{,}59, \infty)$. Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Vypočteme poměr determinace: $P^2 = \frac{S_A}{S_T} = \frac{0{,}816}{1{,}116} = 0{,}7312$

Výsledky zapíšeme do tabulky ANOVA:

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	podíl	F_A
skupiny	$S_A = 0{,}816$	3	$S_A/3 = 0{,}272$	$\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)} = 9{,}97$
reziduální	$S_E = 0{,}3$	11	$S_E/11 = 0{,}02727$	-
celkový	$S_T = 1{,}116$	14	-	-

Nyní pomocí Scheffého metody zjistíme, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05.

Srovnávané odrůdy	Rozdíly $\lvert M_{k.} - M_{l.} \rvert$	Pravá strana vzorce
A, B	0,4	0,41
A, C	0,67	0,36
A, D	0,3	0,41
B, C	0,2	0,40
B, D	0,1	0,44
C, D	0,3	0,40

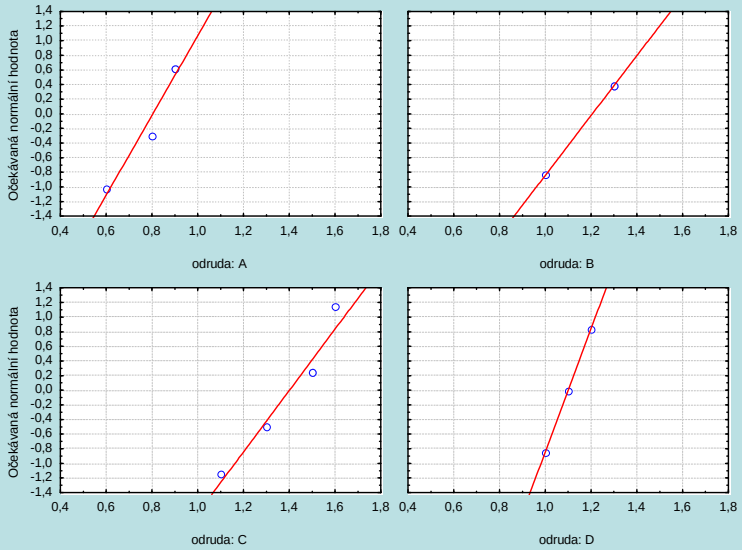
Na hladině významnosti 0,05 se liší odrůdy A a C.

Řešení pomocí systému STATISTICA

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných X a odrůda a 15 případech. Do proměnné X zapíšeme zjištěné hmotnosti, do proměnné odrůda kódy pro dané odrůdy (1 pro A, 2 pro B, 3 pro C a 4 pro D).

	1 X	2 odruda
1	0,9	A
2	0,8	A
3	0,6	A
4	0,9	A
5	1,3	B
6	1	B
7	1,3	B
8	1,3	C
9	1,5	C
10	1,6	C
11	1,1	C
12	1,5	C
13	1,1	D
14	1,2	D
15	1	D

Ověříme normalitu daných čtyř náhodných výběrů pomocí N-P plotu:



Odchylky od normality jsou jen nepatrné.

Vypočteme výběrové průměry a výběrové rozptyly:
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Rozklad & jednofakt. ANOVA – OK – Proměnné – Závislé – X, Grupovací - odrůda – OK – Skupiny tabulek - zaškrtneme Rozptyly - Výpočet.

Rozkladová tabulka popisných statistik (priklad8301)
N=15 (V seznamu záv. prom. nejsou ChD)

odruda	X průměr	X N	X Sm.odch.	X Rozptyl
A	0,800000	4	0,141421	0,020000
B	1,200000	3	0,173205	0,030000
C	1,400000	5	0,200000	0,040000
D	1,100000	3	0,100000	0,010000
Vš.skup.	1,140000	15	0,282337	0,079714

Nyní ověříme předpoklad shody rozptylů.
Na záložce Skupiny tabulek zaškrtneme Levenův test – Výpočet.

Leveneův test homogenity rozpylů (priklad8301)
Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000

Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,018667	3	0,006222	0,065333	11	0,005939	1,047619	0,410027

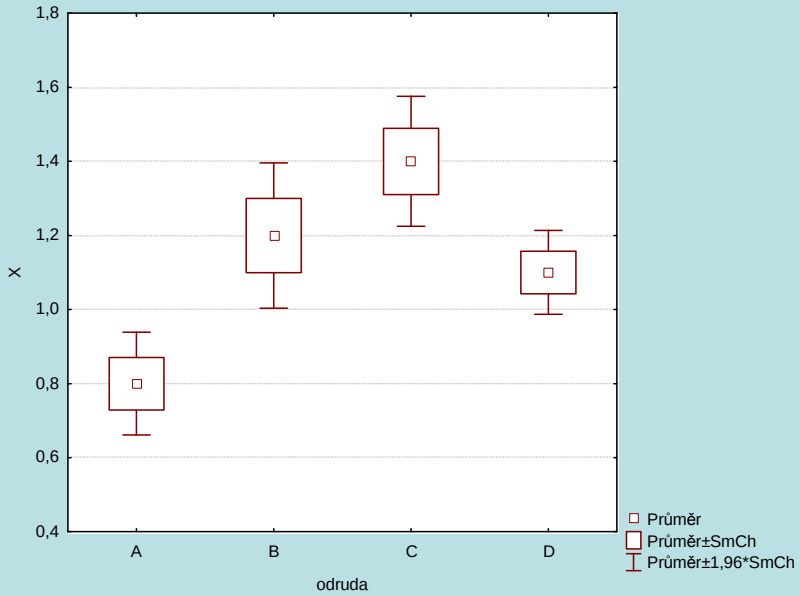
Vidíme, že p-hodnota Levenova testu je 0,41, tedy větší než hladina významnosti 0,05. Hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Přistoupíme k testu hypotézy o shodě středních hodnot.
Na záložce Skupiny tabulek zaškrtneme Analýza rozptylu – Výpočet.

Proměnná	Analýza rozptylu (priklad8301) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000 SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,816000	3	0,272000	0,300000	11	0,027273	9,973333	0,001805

Jelikož p-hodnota = 0,001805 je menší než hladina významnosti 0,05, hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet doplníme krabicovými diagramy:



Nyní aplikujeme Scheffého metodu mnohonásobného porovnávání, abychom zjistili, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05. Na záložce Post – hoc zvolíme Schefféův test.

odruda		Scheffeho test; proměn.:X (priklad8301) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000			
		{1} M=,80000	{2} M=1,2000	{3} M=1,4000	{4} M=1,1000
A	{1}		0,059165	0,001950	0,190463
B	{2}	0,059165		0,464537	0,905502
C	{3}	0,001950	0,464537		0,163499
D	{4}	0,190463	0,905502	0,163499	

Tabulka obsahuje p-hodnoty pro vzájemné porovnání středních hodnot hmotnosti všech čtyř odrůd. Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší odrůdy A, C.

Význam předpokladů v analýze rozptylu

a) Nezávislost jednotlivých náhodných výběrů – velmi důležitý předpoklad, musí být splněn, jinak dostaneme nesmyslné výsledky.

b) Normalita – ANOVA není příliš citlivá na porušení normality, zvlášť pokud mají všechny výběry rozsah nad 20 (důsledek centrální limitní věty). Při výraznějším porušení normality se doporučuje Kruskalův – Wallisův test.

c) Shoda rozptylů – mírné porušení nevadí, při větším se doporučuje Kruskalův – Wallisův test. Test shody rozptylů má smysl provádět až po ověření předpokladu normality.

II. Případ r ≥ 3 nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení

Test homogenity binomických rozložení

Nechť máme $r \geq 3$ nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, \ldots, n_r$, přičemž j-tý náhodný výběr pochází z alternativního rozložení $A(\vartheta_j)$, $j = 1, 2, ..., r$.

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_r$ proti alternativní hypotéze H_1: aspoň jedna dvojice parametrů je různá.

Označme

$n = \sum_{j=1}^{r} n_j$ celkový rozsah všech r výběrů,

$M_* = \frac{\sum_{j=1}^{r} n_j M_j}{n}$ vážený průměr výběrových průměrů.

Testové kritérium: $Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{r} n_j (M_j - M_*)^2 \approx \chi^2(r-1)$, když H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty)$

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \in W$.

Podmínka dobré aproximace: $n_j M_* > 5$ pro všechna $j = 1, ..., r$.

Brandtův – Snedecorův výpočetní tvar: $Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{r} n_j M_j^2 - n \frac{M_*}{1-M_*}$.

Test homogenity založený na arkussinusové transformaci

Není-li splněna podmínka $n_j M_* > 5$ pro všechna j = 1, ..., r, doporučuje se následující postup: označme

$$A_j = \arcsin\sqrt{M_j}\ , j = 1, ..., r,$$

$$B = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j A_j\ .$$

Pak statistika $Q = 4\sum_{j=1}^{r} n_j \left(A_j - B\right)^2 \approx \chi^2(r\text{-}1)$.

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \geq \chi^2_{1-\alpha}(r\text{-}1)$.

Mnohonásobné porovnávání

Zamítneme-li nulovou hypotézu na asymptotické hladině významnosti α, chceme zjistit, které dvojice parametrů ϑ_k, ϑ_l se liší. Platí-li nerovnost $\left|A_k - A_l\right| \geq \sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)} \cdot q_{1-\alpha}(r, \infty)$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu o shodě parametrů ϑ_k, ϑ_l. (Hodnoty $q_{1-\alpha}(r, \infty)$ najdeme v tabulkách.)

Příklad: Na gymnázium bylo přijato 142 studentů. Ti byli náhodně rozděleni do čtyř tříd A, B, C, D. V každé třídě byla matematika vyučována jinou metodou. Na konci školního roku psali všichni studenti stejnou písemnou práci a byl zaznamenán počet těch studentů, kteří vyřešili všechny zadané úkoly.

Třída	A	B	C	D
Počet studentů	35	36	37	34
Počet úspěšných studentů	5	8	17	15

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozdíly mezi třídami jsou způsobeny pouze náhodnými vlivy.

Řešení:

Máme čtyři nezávislé náhodné výběry, j-tý pochází z rozložení $A(\vartheta_j)$, j = 1, 2, 3, 4.

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta_4$.

$n_1 = 35$, $n_2 = 36$, $n_3 = 37$, $n_4 = 34$, $n = 142$

$m_1 = 5/35$, $m_2 = 8/36$, $m_3 = 17/37$, $m_4 = 15/34$, $m_* = (5+8+17+15)/142 = 45/142$.

Podmínky dobré aproximace:

$$35 \cdot \frac{45}{142} = 11{,}09\,,\ 36 \cdot \frac{45}{142} = 11{,}41\,,\ 37 \cdot \frac{45}{142} = 11{,}73\,,\ 34 \cdot \frac{45}{142} = 10{,}77$$

Testová statistika

$$Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{r} n_j M_j^{\,2} - n\frac{M_*}{1-M_*} = \frac{1}{\frac{45}{142}\left(1-\frac{45}{142}\right)}\left[35 \cdot \left(\frac{5}{35}\right)^2 + 36 \cdot \left(\frac{8}{36}\right)^2 + 37 \cdot \left(\frac{17}{37}\right)^2 + 34 \cdot \left(\frac{15}{34}\right)^2\right] - 142\frac{\frac{45}{142}}{1-\frac{45}{142}} = 12{,}288$$

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2{}_{0{,}95}(3), \infty \right) = \left\langle 7{,}81, \infty \right)$.

Protože testové kritérium se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Nyní metodou mnohonásobného porovnávání zjistíme, které dvojice parametrů se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.

Pomocí arkussinusové transformace vypočteme hodnoty $A_j = \arcsin\sqrt{M_j}$:

$A_1 = 0{,}3876$, $A_2 = 0{,}4909$, $A_3 = 0{,}7448$, $A_4 = 0{,}7264$

Platí-li nerovnost $|A_k - A_l| \geq \sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)} \cdot q_{1-\alpha}(r, \infty)$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu o shodě parametrů ϑ_k, ϑ_l.

Kvantil studentizovaného rozpětí najdeme v tabulkách: $q_{0,95}(4,\infty) = 3{,}63$

Srovnávané třídy	Rozdíly $\lvert A_k - A_l \rvert$	Pravá strana vzorce
A, B	0,1033	0,30
A, C	0,3572	0,30
A, D	0,3388	0,31
B, C	0,2539	0,30
B, D	0,2356	0,31
C, D	0,0184	0,30

Na hladině významnosti 0,05 se liší třídy A, C a A, D.

Řešení pomocí systému STATISTICA

Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 142 případy.
Proměnná USPECH obsahuje hodnotu 1, pokud student vyřešil všechny zadané úkoly, jinak obsahuje hodnotu 0.
Proměnná TRIDA má hodnotu 1, pokud student pochází z třídy A, hodnotu 2 pro třídu B, hodnotu 3 pro třídu C a hodnotu 4 pro třídu D.
Nejprve zjistíme podíly úspěšných studentů v jednotlivých třídách.
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Rozklad – OK – Proměnné – Závislé – USPECH, Grupovací - TRIDA – OK – Skupiny tabulek - odškrtneme Směrovat. odchylka - Výpočet.

TRIDA	USPECH Průměry	USPECH N
A	0,142857	35
B	0,222222	36
C	0,459459	37
D	0,441176	34
Vš.skup.	0,316901	142

Vidíme, že nejslabší výkony podávali studenti ze třídy A, úspěšných bylo pouze 14,3% studentů, ve třídě B 22,2%, ve třídě C 45,9% a ve třídě D 44,1%. Třídy C a D se z hlediska úspěchu v písemce z matematiky liší jen nepatrně

Dále provedeme testování hypotézy o shodě parametrů čtyř alternativních rozložení. Nejprve ověříme splnění podmínek dobré aproximace: $n_j m_* > 5$ pro všechna j = 1, ..., r. Vážený průměr m_* se nachází v posledním řádku výstupní tabulky procedury Rozklad. Jeho hodnotu okopírujeme do políček pro průměry tříd A, B, C, D, poslední řádek odstraníme a k tabulce přidáme jednu novou proměnnou, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =v2*v3.

TRIDA	JSPECH Průměry	JSPECH N	NProm =v2*v3
A	0,316901	35	11,09155
B	0,316901	36	11,40845
C	0,316901	37	11,72535
D	0,316901	34	10,77465

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Kontingenční tabulky - OK - Specif. tabulky – List 1 USPECH, List 2 TRIDA, OK– Možnosti – Statistiky dvourozměrných tabulek - zaškrtněte Pearson & M-L Chi –square – Detailní výsledky - Detailní 2-rozm. tabulky.

Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	12,28760	df=3	p=,00646
M-V chí-kvadr.	12,80263	df=3	p=,00509

Testová statistika Q se realizuje hodnotou 12,2876, počet stupňů volnosti je 3, odpovídající p-hodnota = 0,00646, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 zamítáme. S rizikem omylu nejvýše 0,05 jsme tedy prokázali, že rozdíly v podílech úspěšných studentů v jednotlivých třídách nelze vysvětlit náhodnými vlivy.

Upozornění: Systém STATISTICA neumožňuje provedení metody mnohonásobného porovnávání pro náhodné výběry z alternativního rozložení. Pro orientaci lze použít Scheffého metodu. V našem případě:

TRIDA		{1} M=,14286	{2} M=,22222	{3} M=,45946	{4} M=,44118
A	{1}		0,907720	0,034818	0,060978
B	{2}	0,907720		0,173652	0,253566
C	{3}	0,034818	0,173652		0,998684
D	{4}	0,060978	0,253566	0,998684	

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 se liší třídy A a C.

Neparametrické testy o mediánech

Osnova:
- jednovýběrové a párové testy

- dvouvýběrové testy

- neparametrické obdoby jednofaktorové analýzy rozptylu

Motivace: Při aplikaci t-testů či analýzy rozptylu by měly být splněny určité předpoklady:
- normalita dat (pro výběry větších rozsahů ($n \geq 30$) nemá mírné porušení normality závažný dopad na výsledky)
- homogenita rozptylů
- intervalový či poměrový charakter dat

Pokud nejsou tyto předpoklady splněny, použijeme tzv. neparametrické testy, které nevyžadují předpoklad o konkrétním typu rozložení (např. normálním), stačí např. předpokládat, že distribuční funkce rozložení, z něhož náhodný výběr pochází, je spojitá.
Nevýhoda - ve srovnání s klasickými parametrickými testy jsou neparametrické testy slabší, tzn., že nepravdivou hypotézu zamítají s menší pravděpodobností než testy parametrické.
V této kapitole se omezíme na ty neparametrické testy, které se týkají mediánů.

Jednovýběrové testy (Jde o neparametrické obdoby jednovýběrového t-testu a párového t-testu.)

Znaménkový test a jeho asymptotická varianta

Nechť $X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení. Nechť $x_{0,50}$ je mediánem tohoto rozložení a c je reálná konstanta. Testujeme hypotézu $H_0 : x_{0,50} = c$ proti oboustranné alternativě $H_1 : x_{0,50} \neq c$ (resp. proti levostranné alternativě $H_1 : x_{0,50} < c$ resp. proti pravostranné alternativě $H_1 : x_{0,50} > c$).

Znaménkový test se nejčastěji používá jako párový test, kdy máme náhodný výběr ze spojitého dvourozměrného rozložení $\binom{X_1}{Y_1},\dots,\binom{X_n}{Y_n}$ a testujeme hypotézu o rozdílu mediánů, tj. $H_0 : x_{0,50} - y_{0,50} = c$ proti $H_1 : x_{0,50} - y_{0,50} \neq c$ (resp. proti jednostranným alternativám). Přejdeme k rozdílům $Z_1 = X_1 - Y_1,\dots,Z_n = X_n - Y_n$ a testujeme hypotézu o mediánu těchto rozdílů, tj. $H_0 : z_{0,50} = c$.

a) Utvoříme rozdíly $D_i = X_i - c$ pro jednovýběrový test resp. $D_i = Z_i - c$ pro párový test, $i = 1,\dots,n$. (Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot.)

b) Zavedeme statistiku S_Z^+, která udává počet těch rozdílů D_i, které jsou kladné. S_Z^+ je součtem náhodných veličin s alternativním rozložením (i-tá veličina nabývá hodnoty 1, když i-tý rozdíl je kladný a hodnoty 0, když je záporný). Platí-li H_0, pak pravděpodobnost kladného i záporného rozdílu je stejná, tedy $S_Z^+ \sim \mathrm{Bi}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Z vlastností binomického rozložení plyne, že $E\left(S_Z^+\right) = \frac{n}{2}$, $D\left(S_Z^+\right) = \frac{n}{4}$.

c) Stanovíme kritický obor.

Pro oboustrannou alternativu: $W = \langle 0, k_1 \rangle \cup \langle k_2, n \rangle$, pro levostrannou alternativu: $W = \langle 0, k_1 \rangle$, pro pravostrannou alternativu: $W = \langle k_2, n \rangle$.

(Nezáporná celá čísla k_1, k_2 pro oboustranný test i pro jednostranné testy lze najít v tabulkové příloze. Pozor – čísla k_1, k_2 pro oboustrannou alternativu jsou jiná než pro jednostranné alternativy!)

d) H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $S_Z^+ \in W$.

Asymptotická varianta testu

Pro velká n (prakticky $n > 20$) lze využít asymptotické normality statistiky S_Z^+.

Testová statistika $U_0 = \frac{S_Z^+ - E(S_Z^+)}{\sqrt{D(S_Z^+)}} = \frac{S_Z^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$ má za platnosti H_0 asymptoticky rozložení $N(0,1)$.

Kritický obor pro oboustranný test: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Kritický obor pro levostranný test: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$.

Kritický obor pro pravostranný test: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$.

Aproximace rozložením $N(0,1)$ se zlepší, když použijeme tzv. korekci na nespojitost. Testová statistika pak má tvar $U_0 = \frac{S_Z^+ - \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$, přičemž $\frac{1}{2}$ přičteme, když $S_Z^+ < \frac{n}{2}$ a odečteme v opačném případě.

Příklad na jednovýběrový znaménkový test:
U 10 náhodně vybraných vzorků benzínu byly zjištěny následující hodnoty oktanového čísla:
98,2 96,8 96,3 99,8 96,9 98,6 95,6 97,1 97,7 98,0.
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že medián oktanového čísla je 98 proti oboustranné alternativě.

Řešení:
rozdíly $x_i - 98$: 0,2 -1,2 -1,7 1,8 -1,1 0,6 -2,4 -0,9 -0,3 0,0
$S_Z^+ = 3$, nenulových rozdílů je 9. Ve statistických tabulkách najdeme pro $n = 9$ a $\alpha = 0,05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$.
Protože kritický obor $W = \langle 0,1\rangle \cup \langle 8,9\rangle$ neobsahuje hodnotu 3, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 10 případy. Do proměnné X napíšeme hodnoty oktanového čísla a do proměnné konst uložíme číslo 98.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných konst – OK – Znaménkový test.

	Znaménkový test (oktanove cislo) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet různých	procent v < V	Z	Úroveň p
X & konst	9	66,66667	0,666667	0,504985

Vidíme, že nenulových hodnot n = 9. Z nich záporných je 66,7%, tj. 6. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 9 - 6 = 3$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 0,6667. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,505, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že medián oktanového čísla je 98.

Upozornění: V tomto případě není splněna podmínka pro využití asymptotické normality statistiky S_Z^+, tj. n > 20. Je tedy vhodnější najít v tabulkách kritické hodnoty pro znaménkový test. Pro n = 9 a $\alpha = 0,05$ jsou kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0,1 \rangle \cup \langle 8,9 \rangle$ neobsahuje hodnotu 3, nezamítáme H_0 na hladině významnosti 0,05. Dostáváme týž výsledek jako při použití asymptotického testu.

Příklad na párový znaménkový test

U 9 náhodně vybraných manželských párů byl zjištěn průměrný roční příjem (v tisících Kč).

číslo páru	1	2	3	4	5	6	7	8	9
příjem manžela	216	336	384	432	456	528	552	600	1872
příjem manželky	336	240	192	336	384	288	960	312	576

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že mediány příjmů manželů a manželek jsou stejné.

Řešení:

Jedná se o párový test. Vypočteme rozdíly mezi příjmy manželů a manželek, čímž úlohu převedeme na jednovýběrový test.

Testujeme $H_0 : z_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě $H_1 : z_{0,50} \neq 0$, kde $z_{0,50}$ je medián rozložení, z něhož pochází rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \ldots, Z_9 = X_9 - Y_9$.

Vypočtené rozdíly $x_i - y_i$: -120 96 192 96 72 240 -408 288 1296

Testová statistika $S_Z^+ = 7$.

Ve statistických tabulkách najdeme pro $n = 9$ a $\alpha = 0{,}05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$.

Protože kritický obor $W = \langle 0,1 \rangle \cup \langle 8,9 \rangle$ neobsahuje hodnotu 7, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05.

Neprokázaly se tedy významné rozdíly v mediánech příjmů manželů a manželek.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 9 případy. Do proměnné X napíšeme příjmy manželů, do proměnné Y příjmy manželek.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných Y – OK – Znaménkový test.

Dvojice proměnných	Počet různých	procent v < V	Z	Úroveň p
X & Y	9	22,22222	1,333333	0,182422

Vidíme, že nenulových hodnot n = 9. Z nich záporných je $22,\overline{2}\,\%$, tj. 2. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 9 - 2 = 7$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou $1,\overline{3}$. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,1824, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že mediány příjmů manželů a manželek jsou stejné.

Upozornění: V tomto případě není splněna podmínka pro využití asymptotické normality statistiky S_Z^+, tj. $n > 20$. Je tedy vhodnější najít v tabulkách kritické hodnoty pro znaménkový test. Pro n = 9 a $\alpha = 0,05$ jsou kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0,1\rangle \cup \langle 8,9\rangle$ neobsahuje hodnotu 7, nezamítáme H_0 na hladině významnosti 0,05. Dostáváme týž výsledek jako při použití asymptotického testu.

Jednovýběrový Wilcoxonův test a jeho asymptotická varianta

Frank Wilcoxon (1892 – 1965): Americký statistik a chemik

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení s hustotou $\varphi(x)$, která je symetrická kolem mediánu $x_{0,50}$, tj. $\varphi(x_{0,50} + x) = \varphi(x_{0,50} - x)$. Nechť c je reálná konstanta.
Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = c$
proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq c$ nebo
proti levostranné alternativě H_1: $x_{0,50} < c$ nebo
proti pravostranné alternativě H_1: $x_{0,50} > c$.

Postup provedení testu:

a) Utvoříme rozdíly $D_i = X_i - c$, $i = 1, ..., n$. (Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot.)

b) Absolutní hodnoty $|D_i|$ uspořádáme vzestupně podle velikosti a spočteme pořadí R_i.

c) Zavedeme statistiky

$S_W^+ = \sum_{D_i>0} R_i^+$, což je součet pořadí přes kladné hodnoty D_i,

$S_W^- = \sum_{D_i<0} R_i^-$, což je součet pořadí přes záporné hodnoty D_i.

Přitom platí, že součet $S_W^+ + S_W^- = n(n+1)/2$.

Je-li H_0 pravdivá, pak $E(S_W^+) = n(n+1)/4$ a $D(S_W^+) = n(n+1)(2n+1)/24$.

d) Testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-)$ pro oboustrannou alternativu,
= S_W^+ pro levostrannou alternativu,
= S_W^- pro pravostrannou alternativu.

e) H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když testová statistika je menší nebo rovna tabelované kritické hodnotě.

Asymptotická varianta jednovýběrového Wilcoxonova testu:

Pro $n \geq 30$ lze využít asymptotické normality statistiky S_W^+.

Platí-li H_0, pak $U_0 = \frac{S_W^+ - E(S_W^+)}{\sqrt{D(S_W^+)}} = \frac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \approx N(0,1)$.

Kritický obor:

pro oboustrannou alternativu $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$,

pro levostrannou alternativu $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$,

pro pravostrannou alternativu $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Předpoklady použití jednovýběrového Wilcoxonova testu:

- rozložení, z něhož daný náhodný výběr pochází, je spojité
- hustota tohoto rozložení je symetrická kolem mediánu
- sledovaná veličina X má aspoň ordinální charakter

(Není-li splněn předpoklad o symetrii hustoty kolem mediánu, lze použít např. znaménkový test.)

Příklad: U 12 náhodně vybraných zemí bylo zjištěno procento populace starší 60 let:

4,9 6,0 6,9 17,6 4,5 12,3 5,7 5,3 9,6 13,5 15,7 7,7.

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že medián procenta populace starší 60 let je 12 proti oboustranné alternativě.

Řešení:

Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = 12$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq 12$.

Vypočteme rozdíly pozorovaných hodnot od čísla 12: -7,1 -6,0 -5,1 5,6 -7,5 0,3 -6,3 -6,7 -2,4 1,5 3,7 -4,3.

Absolutní hodnoty těchto rozdílů uspořádáme vzestupně podle velikosti. Kladné rozdíly přitom označíme červeně:

usp. $\lvert x_i - 12 \rvert$	0,3	1,5	2,4	3,7	4,3	5,1	5,6	6	6,3	6,7	7,1	7,5
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$S_W^+ = 1 + 2 + 4 + 7 = 14$,
$S_W^- = 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 64$,
$n = 12$, $\alpha = 0,05$, tabelovaná kritická hodnota pro $n = 12$ a $\alpha = 0,05$ je 13,
testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(14,64) = 14$.
Protože $14 > 13$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že na hladině významnosti 0,05 se nepodařilo prokázat, že aspoň v polovině zemí by se podíl populace nad 60 let odlišoval od 12 %.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 12 případy. Do proměnné procento napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné konst uložíme číslo 12.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných rozdil, Druhý seznam proměnných konst – OK – Wilcoxonův párový test.

	Wilcoxonův párový test (populace_nad_60) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
procento & konst	12	14,00000	1,961161	0,049861

Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky SW^+ (zde označena T), hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 a p-hodnotu pro U_0. V tomto případě je p-hodnota 0,049861, tedy nulová hypotéza se zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05. Tento výsledek je v rozporu s výsledkem, ke kterému jsme dospěli při přesném výpočtu. Je to způsobeno tím, že není splněna podmínka pro využití asymptotické normality statistiky SW^+, tj. $n \geq 30$.

Párový Wilcoxonův test

Nechť $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ je náhodný výběr ze spojitého dvourozměrného rozložení.

Testujeme $H_0: x_{0,50} - y_{0,50} = c$ proti $H_1: x_{0,50} - y_{0,50} \neq c$ (resp. proti jednostranným alternativám).

Utvoříme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, ..., n$ a testujeme hypotézu o mediánu $z_{0,50}$, tj. $H_0: z_{0,50} = c$ proti $H_1: z_{0,50} \neq c$.

Příklad: K zjištění cenových rozdílů mezi určitými dvěma druhy zboží bylo náhodně vybráno 15 prodejen a byly zjištěny ceny zboží A a ceny zboží B: (11,10), (14,11), (11,9), (13,9), (11,9), (10,9), (12,10), (10,8), (12,11), (11,9), (13,10), (14,10), (14,12), (19,15), (14,12). Na hladině významnosti 0,05 je třeba testovat hypotézu, že medián cenových rozdílů činí 3 Kč.

Řešení:Testujeme H_0: $z_{0,50} = 3$ proti oboustranné alternativě H_1: $z_{0,50} \neq 3$, kde $z_{0,50}$ je medián rozložení, z něhož pochází rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1$, … $Z_{15} = X_{15} - Y_{15}$.Vypočteme rozdíly mezi cenou zboží A a cenou zboží B, čímž úlohu převedeme na jednovýběrový test. Výpočty uspořádáme do tabulky:

č. prodejny	cena zboží A	cena zboží B	rozdíl	|rozdíl-medián|	pořadí
1	11	10	1	2	12
2	14	11	3	0	-
3	11	9	2	1	5,5
4	13	9	4	1	**5,5**
5	11	9	2	1	5,5
6	10	9	1	2	12
7	12	10	2	1	5,5
8	10	8	2	1	5,5
9	12	11	1	2	12
10	11	9	2	1	5,5
11	13	10	3	0	-
12	14	10	4	1	**5,5**
13	14	12	2	1	5,5
14	19	15	4	1	**5,5**
15	14	12	2	1	5,5

(Tučně jsou vytištěna pořadí pro kladné hodnoty rozdíl - medián.)
$S_W^+ = 5,5 + 5,5 + 5,5 = 16,5$,
$S_W^- = 12 + 5,5 + 5,5 + 12 + 5,5 + 5,5 + 12 + 5,5 + 5,5 + 5,5 = 74,5$,
$n = 13$, $\alpha = 0,05$, tabelovaná kritická hodnota = 17, testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(16,5; 74,5) = 16,5$. Protože $16,5 \leq 17$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor se čtyřmi proměnnými A, B, rozdíl, konst a 15 případy. Do proměnných A, B napíšeme ceny zboží A a B, do proměnné rozdíl uložíme rozdíl cen A a B a do proměnné konst uložíme číslo 3.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných rozdil, 2. seznam proměnných konst – OK – Wilcoxonův párový test.

	Wilcoxonův párový test (ceny zbozi) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
rozdil & konst	15	16,50000	2,026684	0,042696

Testová statistika (zde označená jako T) nabývá hodnoty 16,5, asymptotická testová statistika (označená jako Z) nabývá hodnoty 2,026684, odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,042696, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu zamítáme.

Příklad (na asymptotickou variantu Wilcoxonova testu):
30 náhodně vybraných osob mělo nezávisle na sobě bez předchozího nácviku odhadnout, kdy od daného signálu uplyne právě 1 minuta. Byly získány následující výsledky (v sekundách):
53 48 45 55 63 51 66 56 50 58 61 51 64 63 59 47 46 58 52 56 61 57 48 62 54 49 51 46 53 58.
Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že medián rozložení, z něhož daný náhodný výběr pochází, je 60 sekund proti oboustranné alternativě (nulová hypotéza vlastně tvrdí, že polovina osob délku jedné minuty podhodnotí a druhá nadhodnotí).

Řešení:
Testujeme H_0: $x_{0,50} = 60$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq 60$.
Obvyklým způsobem stanovíme statistiku $S_W^+ = 55$.
Asymptotická testová statistika:

$$U_0 = \frac{S_W^+ - E\left(S_W^+\right)}{\sqrt{D\left(S_W^+\right)}} = \frac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} = \frac{55 - \frac{30(30+1)}{4}}{\sqrt{\frac{30(30+1)(2.30+1)}{24}}} = -3{,}65$$

Kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right) = \left(-\infty, -u_{0,975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right).$$

Testová statistika se realizuje v kritickém oboru, tedy H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme tedy prokázali, že pravděpodobnost nadhodnocení jedné minuty není stejná jako pravděpodobnost podhodnocení.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 30 případy. Do proměnné odhad napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné konst uložíme číslo 60.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných odhad, 2. seznam proměnných konst – OK – Wilcoxonův párový test.

	Wilcoxonův párový test (odhad minuty) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
odhad & konst	30	55,00000	3,650880	0,000261

Testová statistika (zde označená jako T) nabývá hodnoty 55, asymptotická testová statistika (označená jako Z) nabývá hodnoty 3,65088, odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,000261, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu zamítáme.

Dvouvýběrové testy (Jedná se o neparametrickou obdobu dvouvýběrového t-testu)

Dvouvýběrový Wilcoxonův test a jeho asymptotická varianta

Nechť $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení, jejichž distribuční funkce se mohou lišit pouze posunutím. Označme $x_{0,50}$ medián prvního rozložení a $y_{0,50}$ medián druhého rozložení. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu, že distribuční funkce těchto rozložení jsou shodné neboli mediány jsou shodné proti alternativě, že jsou rozdílné, tj.

$H_0: x_{0,50} - y_{0,50} = 0$ proti $H_1: x_{0,50} - y_{0,50} \neq 0$.

Postup provedení testu:

a) Všech n + m hodnot $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ uspořádáme vzestupně podle velikosti.
b) Zjistíme součet pořadí hodnot $X_1, ..., X_n$ a označíme ho T_1.
   Součet pořadí hodnot $Y_1, ..., Y_m$ označíme T_2.
c) Vypočteme statistiky $U_1 = mn + n(n+1)/2 - T_1$, $U_2 = mn + m(m+1)/2 - T_2$.
   Přitom platí $U_1 + U_2 = mn$.
d) Pokud $\min(U_1,U_2) \leq$ tabelovaná kritická hodnota (pro dané rozsahy výběrů m, n a dané α), pak nulovou hypotézu o totožnosti obou distribučních funkcí zamítáme na hladině významnosti α. V tabulkách: $n = \min\{m,n\}$ a $m = \max\{m,n\}$.

Asymptotická varianta dvouvýběrového Wilcoxonova testu:

Pro velká n, m (n, m > 30) lze využít asymptotické normality statistiky U_1.

Platí-li H_0, pak $U_0 = \frac{U_1 - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \approx N(0,1)$, kde $U_1 = \min(U_1, U_2)$.

Kritický obor:

pro oboustrannou alternativu $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$,

pro levostrannou alternativu $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$,

pro pravostrannou alternativu $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Předpoklady použití dvouvýběrového Wilcoxonova testu:

- dané dva náhodné výběry jsou nezávislé
- rozložení, z nichž dané dva náhodné výběry pocházejí, jsou spojitá
- distribuční funkce těchto rozložení se mohou lišit pouze posunutím
- sledovaná veličina má aspoň ordinální charakter

(Není-li splněn předpoklad, že distribuční funkce se mohou lišit pouze posunutím, lze použít např. dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test.)

Příklad:
Bylo vybráno 10 polí stejné kvality. Na čtyřech z nich se zkoušel nový způsob hnojení, zbylých šest bylo ošetřeno starým způsobem. Pole byla oseta pšenicí a sledoval se její hektarový výnos. Je třeba zjistit, zda nový způsob hnojení má týž vliv na průměrné hektarové výnosy pšenice jako starý způsob hnojení.
hektarové výnosy při novém způsobu: 51 52 49 55
hektarové výnosy při starém způsobu: 45 54 48 44 53 50
Test proveďte na hladině významnosti 0,05.

Řešení:
Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: $x_{0,50} - y_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq 0$.

usp. hodnoty	44	45	48	**49**	50	**51**	**52**	53	54	**55**
pořadí x-ových hodnot				4		6	7			10
pořadí y-ových hodnot	1	2	3		5			8	9	

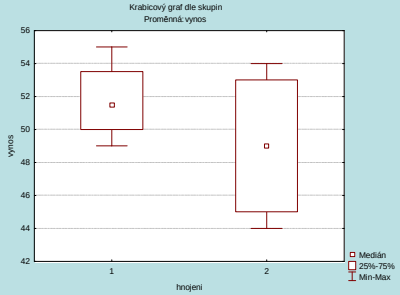
$T_1 = 4 + 6 + 7 + 10 = 27$, $T_2 = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 = 28$
$U_1 = 4.6 + 4.5/2 - 27 = 7$, $U_2 = 4.6 + 6.7/2 - 28 = 17$
Kritická hodnota pro $\alpha = 0,05$, $\min(4,6) = 4$, $\max(4,6) = 6$ je 2. Protože $\min(7,17) = 7 > 2$, nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že nový způsob hnojení má na hektarové výnosy pšenice stejný vliv jako starý způsob.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 10 případy. Do proměnné vynos napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné hnojeni napíšeme 4x číslo 1 pro nový způsob hnojení a 6x číslo 2 pro starý způsob hnojení.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných vynos, Nezáv. (grupov.) proměnná hnojeni – OK – M-W U test.
Upozornění: Ve STATISTICE je dvouvýběrový Wilcoxonův test uveden pod názvem Mannův – Whitneyův test.

	Mann-Whitneyův U test (vynos) Dle proměn. hnojeni Označené testy jsou významné na hladině p <,05000									
Proměnná	Sčt poř. skup. 1	Sčt poř. skup. 2	U	Z	Úroveň p	Z upravené	Úroveň p	N platn. skup. 1	N platn. skup. 2	2*1str. přesné p
vynos	27,00000	28,00000	7,000000	1,066004	0,286423	1,066004	0,286423	4	6	0,352381

Ve výstupní tabulce jsou součty pořadí T_1, T_2, hodnota testové statistiky
$\min(U_1, U_2)$ označená U, hodnota asymptotické testové statistiky U_0 (označená Z), asymptotická p-hodnota pro U_0 a přesná p-hodnota (ozn. 2*1str. přesné p – ta se používá pro rozsahy výběrů pod 30). V našem případě přesná p-hodnota = 0,352381, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Výpočet je vhodné doplnit krabicovým diagramem.



Je zřejmé, že výnosy při novém způsobu hnojení jsou vesměs nižší než při starém způsobu a také vykazují mnohem větší variabilitu.

Dvouvýběrový Kolmogorovův - Smirnovův test

Nechť $X_1,\ldots,X_n$ a $Y_1,\ldots,Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení, jejichž distribuční funkce se mohou lišit nejenom posunutím, ale také tvarem.

Testujeme hypotézu H_0: distribuční funkce těchto rozložení jsou shodné (tj. všech n + m veličin pochází z téhož rozložení) proti alternativě H_1: distribuční funkce jsou rozdílné.

Nechť $F_1(x)$ je výběrová distribuční funkce 1. výběru a $F_2(y)$ je výběrová distribuční funkce 2. výběru.

Testová statistika $D = \max_{-\infty<x<\infty} |F_1(x) - F_2(x)|$.

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $D \geq D_{n,m}(\alpha)$, kde $D_{n,m}(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota.

Pro větší rozsahy n,m lze kritickou hodnotu aproximovat vzorcem $\sqrt{\frac{n+m}{2nm}\ln\frac{2}{\alpha}}$.

Příklad: Výrobce určitého výrobku se má rozhodnout mezi dvěma dodavateli polotovarů vyrábějících je různými technologiemi. Rozhodující je procentní obsah určité látky.
1. technologie: 1,52 1,57 1,71 1,34 1,68
2. technologie: 1,75 1,67 1,56 1,66 1,72 1,79 1,64 1,55
Na hladině významnosti 0,05 posuďte pomocí dvouvýběrového K-S testu, zda je oprávněný předpoklad, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 13 případy. Do proměnné X napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné ID napíšeme 5x číslo 1 pro první technologii a 8x číslo 2 pro starý druhou technologii.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupov.) proměnná ID – OK – Kolmogorov-Smirnovův 2-výběrový test.

Proměnná	Max záp rozdíl	Max klad rozdíl	Úroveň p	Průměr skup. 1	Průměr skup. 2	Sm.odch. skup. 1	Sm.odch. skup. 2	N platn. skup. 1	N platn. skup. 2
obsah	-0,400000	0,025000	p > .10	1,564000	1,667500	0,147411	0,085147	5	8

Ve výstupní tabulce pro dvouvýběrový K-S test dostaneme maximální záporný a maximální kladný rozdíl mezi hodnotami obou výběrových distribučních funkcí, dolní omezení pro p-hodnotu ($p > 0,1$), průměry, směrodatné odchylky a rozsahy obou výběrů. Jelikož p-hodnota převyšuje hladinu významnosti 0,05, na této hladině nelze nulovou hypotézu zamítnout.

Kruskalův - Wallisův test

William Kruskal (1919 – 2005):
Americký matematik

Wilson Allen Wallis (1912 – 1988):
Americký matematik

Nechť je dáno $r \geq 3$ nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, \ldots, n_r$. Předpokládáme, že tyto výběry pocházejí ze spojitých rozložení. Označme $n = n_1 + \ldots + n_r$. Na asymptotické hladině významnosti α chceme testovat hypotézu, že všechny tyto výběry pocházejí z téhož rozložení.

Postup testu:

a) Všech n hodnot seřadíme do rostoucí posloupnosti.
b) Určíme pořadí každé hodnoty v tomto sdruženém výběru.
c) Označme T_j součet pořadí těch hodnot, které patří do j-tého výběru, j = 1, ..., r (kontrola: musí platit $T_1 + ... + T_r = n(n+1)/2$).
d) Testová statistika má tvar: $Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1)$. Platí-li H_0, má statistika Q asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$.
e) Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty)$.
f) H_0 zamítneme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$.

Příklad: V roce 1980 byly získány tři nezávislé výběry obsahující údaje o průměrných ročních příjmech (v tisících dolarů) čtyř sociálních skupin ve třech různých oblastech USA.
jižní oblast: 6 10 15 29
pacifická oblast: 11 13 17 131
severovýchodní oblast: 7 14 28 25
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že příjmy v těchto oblastech se neliší.
Řešení:
Výpočty uspořádáme do tabulky

Usp. hodnoty	6	7	10	11	13	14	15	17	25	28	29	131
Pořadí 1.výběru	1		3				7				11	
Pořadí 2.výběru				4	5			8				12
Pořadí 3.výběru		2				6			9	10		

$T_1 = 1 + 3 + 7 + 11 = 22,$
$T_2 = 4 + 5 + 8 + 12 = 29,$
$T_3 = 2 + 6 + 9 + 10 = 27\ ,$

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^{\,2}}{n_j} - 3(n+1) = \frac{12}{12 \cdot 13}\left(\frac{22^2}{4} + \frac{29^2}{4} + \frac{27^2}{4} \right) - 3 \cdot 13 = 0{,}5,$$

$$W = \left\langle \chi^2{}_{1-\alpha}(r-1), \infty \right) = \left\langle \chi^2{}_{0{,}95}(2), \infty \right) = \left\langle 5{,}991, \infty \right)$$

Protože $Q < 5{,}991$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.
Rozdíly mezi průměrnými ročními příjmy v uvedených třech oblastech se neprokázaly.

Mediánový test

Výchozí situace je stejná jako u K-W testu

Postup testu:

a) Všech n hodnot uspořádáme do rostoucí posloupnosti.

b) Najdeme medián $x_{0,50}$ těchto n hodnot.

c) Označme P_j počet hodnot v j-tém výběru, které jsou větší nebo rovny mediánu $x_{0,50}$.

d) Testová statistika má tvar $Q_M = 4\sum_{j=1}^{r}\frac{P_j^{\,2}}{n_j} - n$. Platí-li H_0, má statistika Q_M asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$.

d) Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty \right)$.

e) H_0 zamítneme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q_M \geq \chi_{1-\alpha}{}^2(r-1)$.

Příklad:
Pro data o průměrných ročních příjmech proveďte mediánový test. Hladinu významnosti volte 0,05.

Řešení:
Usp. hodnoty 6 7 10 11 13 14 15 17 25 28 29 131

Medián je průměr 6. a 7. uspořádané hodnoty: $x_{0,50} = \frac{14+15}{2} = 14{,}5$.

V prvním výběru existují 2 hodnoty, které jsou větší nebo rovny 14,5, stejně tak i ve druhém a třetím výběru, tedy $P_1 = P_2 = P_3 = 2$.

Testová statistika: $Q_M = 4\sum_{j=1}^{r} \frac{P_j^{\,2}}{n_j} - n = 4\left[\frac{1}{4}\left(2^2 + 2^2 + 2^2\right)\right] - 12 = 0$

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty \right) = \left\langle \chi^2_{0,95}(2), \infty \right) = \left\langle 5{,}991, \infty \right)$

Protože $Q_M < 5{,}991$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Metody mnohonásobného porovnávání

Zamítneme-li hypotézu, že všechny náhodné výběry pocházejí z téhož rozložení, zajímá nás, které dvojice náhodných výběrů se liší na zvolené hladině významnosti. Testujeme H_0: k-tý a l-tý náhodný výběr pocházejí z téhož rozložení, k, l = 1, .., r, $k \neq l$ proti H_1: aspoň jedna dvojice výběrů pochází z různých rozložení.

a) Neményiho metoda (Peter Neményi 1927 – 2002: Americký matematik maďarského původu)

- Všechny výběry mají týž rozsah p (třídění je vyvážené).
- Vypočteme $|T_l - T_k|$.
- V tabulkách najdeme kritickou hodnotu (pro dané p, r, α).
- Pokud $|T_l - T_k| \geq$ tabelovaná kritická hodnota, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

b) Obecná metoda mnohonásobného porovnávání

- Vypočteme $\left|\frac{T_l}{n_l} - \frac{T_k}{n_k}\right|$.
- Ve speciálních statistických tabulkách najdeme kritickou hodnotu $h_{KW}(\alpha)$. Při větších rozsazích výběrů je možno ji nahradit kvantilem $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$.

- Jestliže $\left|\frac{T_l}{n_l} - \frac{T_k}{n_k}\right| \geq \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n_l} + \frac{1}{n_k}\right) n(n+1) h_{KW}(\alpha)}$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

Příklad:
Čtyři laboranti provedli analytické stanovení procenta niklu v oceli. Každý hodnotil pět vzorků.
Laborant A: 4,15 4,26 4,10 4,30 4,25
Laborant B: 4,38 4,40 4,29 4,39 4,45
Laborant C: 4,23 4,16 4,20 4,24 4,27
Laborant D: 4,41 4,31 4,42 4,37 4,43
Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že všechny čtyři náhodné výběry pocházejí ze stejného rozložení. Pokud nulovou hypotézu zamítnete, zjistěte, které dvojice výběrů se liší.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme nový datový soubor o dvou proměnných a 20 případech. Do proměnné nikl napíšeme změřené hodnoty, do proměnné laborant napíšeme 5x1 pro 1. laboranta atd. až 5x4 pro 4. laboranta.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání více nezávislých vzorků - OK – Seznam závislých proměnných nikl, Nezáv. (grupovací) proměnná laborant – OK – Summary: Kruskal-Wallis ANOVA & Median test. Ve dvou výstupních tabulkách se objeví výsledky K-W testu a mediánového testu.

Závislá: nikl	Kruskal-Wallisova ANOVA založ. na poř.; nikl (nikl v oceli) Nezávislá (grupovací) proměnná laborant Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 20) =13,77714 p =,0032		
	Kód	Počet platných	Součet pořadí
1	1	5	29,00000
2	2	5	75,00000
3	3	5	27,00000
4	4	5	79,00000

Závislá: nikl	Mediánový test, celk. medián = 4,29500; nikl (nikl v oceli Nezávislá (grupovací) proměnná : laborant Chi-Kvadr. = 13,60000 sv = 3 p = ,0035				
	1	2	3	4	Celkem
<= Medián: pozorov.	4,00000	1,00000	5,00000	0,00000	10,00000
očekáv.	2,50000	2,50000	2,50000	2,50000	
poz.-oč.	1,50000	-1,50000	2,50000	-2,50000	
> Medián: pozorov.	1,00000	4,00000	0,00000	5,00000	10,00000
očekáv.	2,50000	2,50000	2,50000	2,50000	
poz.-oč.	-1,50000	1,50000	-2,50000	2,50000	
Celkem: oček.	5,00000	5,00000	5,00000	5,00000	20,00000

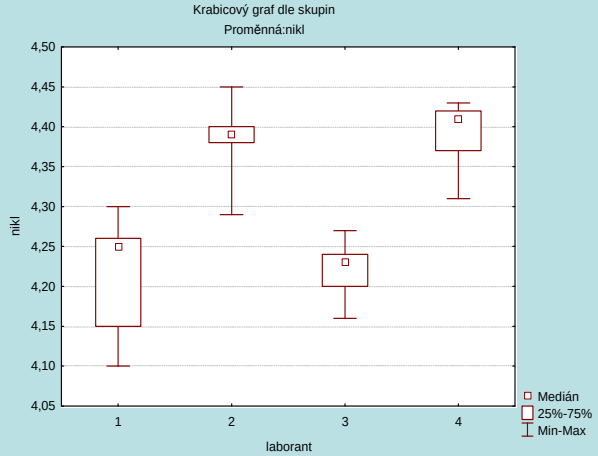
Oba testy zamítají hypotézu o shodě mediánů v daných čtyřech skupinách na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Nyní provedeme mnohonásobné porovnávání, abychom zjistili, které dvojice laborantů se liší. Zvolíme Vícenás. porovnání průměrného pořadí pro vš. skupiny.

Závislá: nikl	Vícenásobné porovnání p hodnot (oboustr.); nikl (nikl v oceli Nezávislá (grupovací) proměnná: laborant Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 20) =13,77714 p =,0032			
	1 R:5,8000	2 R:15,000	3 R:5,4000	4 R:15,800
1		0,083641	1,000000	0,045158
2	0,083641		0,061779	1,000000
3	1,000000	0,061779		0,032664
4	0,045158	1,000000	0,032664	

Tabulka obsahuje p-hodnoty pro porovnání dvojic skupin. Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší laboranti A, D a laboranti C, D.

Grafické znázornění výsledků



Porovnání empirického a teoretického rozložení

Osnova:

- testy dobré shody pro diskrétní a spojité rozložení při úplně i neúplně specifikovaném problému
- jednoduchý test pro exponenciální a Poissonovo rozložení

Motivace

Možnost použití statistických testů je podmíněna nějakými předpoklady o datech. Velmi často je to předpoklad o typu rozložení, z něhož získaná data pocházejí. Mnoho testů je založeno na předpokladu normality.
Opomíjení předpokladů o typu rozložení může v praxi vést i ke zcela zavádějícím výsledkům, proto je nutné věnovat tomuto problému patřičnou pozornost.

Testy dobré shody pro diskrétní a spojité rozložení

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z rozložení s distribuční funkcí $\Phi(x)$.

a) Je-li distribuční funkce spojitá, pak data rozdělíme do r třídicích intervalů $\langle u_j, u_{j+1} \rangle$, j = 1, ..., r. Zjistíme absolutní četnost n_j j-tého třídicího intervalu a vypočteme pravděpodobnost p_j, že náhodná veličina X s distribuční funkcí $\Phi(x)$ se bude realizovat v j-tém třídicím intervalu. Platí-li nulová hypotéza, pak $p_j = P(u_j < X \leq u_{j+1}) = \Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j)$.

b) Má-li distribuční funkce nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti, pak místo třídicích intervalů použijeme varianty $x_{[j]}$, j = 1, …, r. Pro variantu $x_{[j]}$ zjistíme absolutní četnost n_j a vypočteme pravděpodobnost p_j, že náhodná veličina X s distribuční funkcí $\Phi(x)$ se bude realizovat variantou $x_{[j]}$. Platí-li nulová hypotéza, pak $p_j = \Phi(x_{[j]}) - \lim_{x \to x_{[j]}-} \Phi(x) = P(X = x_{[j]})$.

Testová statistika: $K = \sum_{j=1}^{r} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$. Platí-li nulová hypotéza, pak $K \approx \chi^2(r-1-p)$, kde p je počet odhadovaných parametrů daného rozložení. (Např. pro normální rozložení p = 2, protože z dat odhadujeme střední hodnotu a rozptyl.) Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když testová statistika $K \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1-p)$. Aproximace se považuje za vyhovující, když teoretické četnosti $np_j \geq 5$, j = 1, ..., r.

Upozornění: Hodnota testové statistiky K je silně závislá na volbě třídicích intervalů. Navíc při nesplnění podmínky $np_j \geq 5$, j = 1, ..., r je třeba některé intervaly resp. varianty slučovat, což vede ke ztrátě informace.

Příklad: Testování shody empirického a teoretického rozložení při úplně specifikovaném problému

Byl zjišťován počet poruch určitého zařízení za 100 hodin provozu ve 150 disjunktních 100 h intervalech. Výsledky měření:

Počet poruch za 100 hodin provozu	0	1	2	3	4 a víc
Absolutní četnost	52	48	36	10	4

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že náhodný výběr $X_1, ..., X_{150}$ pochází z rozložení Po(1,2).

Řešení:
Pravděpodobnost, že náhodná veličina s rozložením Po(λ), kde λ = 1,2 bude nabývat hodnot 0, 1, ..., 4 a víc je

$$p_j = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \frac{1{,}2^j}{j!} e^{-1{,}2},\ j = 0,1,2,3,\ p_4 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3).$$

Výpočty potřebné pro stanovení testové statistiky K uspořádáme do tabulky.

j	n_j	p_j	np_j	$(n_j - np_j)^2 / np_j$
0	52	0,301	150.0,301=45,15	1,039
1	48	0,361	150.0,361=54,15	0,698
2	36	0,217	150.0,217=32,55	0,366
3	10	0,087	150.0,087=13,05	0,713
4	4	0,034	150.0,034=5,1	0,237

Podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti jsou větší než 5.
K = 1,039 + 0,698 + 0,713 + 0,237 = 3,053, r = 5, $\chi^2_{0,95}(4)$ = 9,488. Protože 3,053 < 9,488, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor poruchy.sta. Proměnná POCET obsahuje počet poruch, proměnná CETNOST pak absolutní četnosti zjištěného počtu poruch.

Statistiky – Prokládání rozdělení – Diskrétní rozdělení – Poissonovo – OK – Proměnná POCET – klikneme na ikonu se závažím – Proměnná vah CETNOST – Stav Zapnuto – OK – záložka Parametry - Lambda 1,2 - Výpočet.

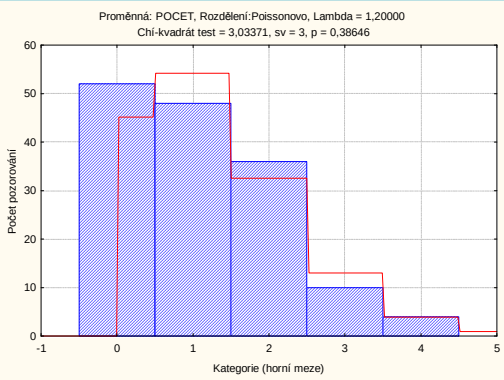
	Proměnná: POCET, Rozdělení:Poissonovo, Lambda = 1,200 (poruchy.sta) Chí-kvadrát = 3,03371, sv = 3, p = 0,38646							
Kategorie	Pozorované Četnosti	Kumulativ. Pozorované	Procent Pozorované	Kumul. % Pozorované	Očekáv. Četnosti	Kumulativ. Očekáv.	Procent Očekáv.	Kumul. % Očekáv.
<= 0,00000	52	52	34,66667	34,6667	45,17914	45,1791	30,11943	30,1194
1,00000	48	100	32,00000	66,6667	54,21495	99,3941	36,14330	66,2627
2,00000	36	136	24,00000	90,6667	32,52897	131,9231	21,68598	87,9487
3,00000	10	146	6,66667	97,3333	13,01159	144,9347	8,67439	96,6231
< Nekonečno	4	150	2,66667	100,0000	5,06535	150,0000	3,37690	100,0000

V záhlaví výstupní tabulky je uvedena hodnota testového kritéria (3,03371), počet stupňů volnosti = 3 a p-hodnota (0,38646). Nulová hypotéza se tedy nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Počet stupňů volnosti 3 však neodpovídá tomu, že známe parametr λ, ve skutečnosti je počet stupňů volnosti 4. Proto pro výpočet p-hodnoty otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu.

Do Dlouhého jména napíšeme =1-IChi2(3,03371;4). Dostaneme p-hodnotu 0,5522.

Pro vytvoření grafu se vrátíme do Proložení diskrétních rozložení – Základní výsledky – Graf pozorovaného a očekávaného rozdělení



V grafu jsou patrné určité rozdíly mezi hodnotami pravděpodobnostní a četnostní funkce, ale tyto rozdíly nejsou příliš velké.

Příklad: Testování shody empirického a teoretického rozložení při neúplně specifikovaném problému

V tabulce jsou roztříděny fotbalové zápasy určité soutěže podle počtu vstřelených branek.

Počet branek	0	1	2	3	4 a víc
Počet zápasů	19	30	17	10	8

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že jde o výběr z Poissonova rozložení.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor branky.sta. Proměnná POCET obsahuje počet vstřelených branek, proměnná CETNOST pak počet zápasů, v nichž bylo dosaženo zjištěného počtu branek.

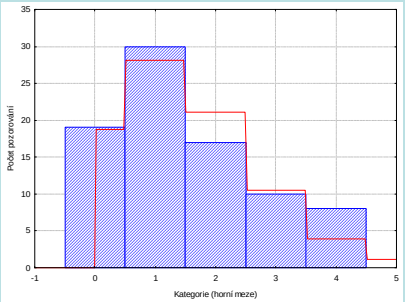
Statistiky – Prokládání rozdělení – Diskrétní rozdělení – Poissonovo – OK – Proměnná POCET – klikneme na ikonu se závažím – Proměnná vah CETNOST – Stav Zapnuto – OK – Výpočet.

	Proměnná: POCET, Rozdělení:Poissonovo, Lambda = 1,500 (branky.sta) Chí-kvadrát = 2,07051, sv = 3, p = 0,55790							
Kategorie	Pozorované Četnosti	Kumulativ. Pozorované	Procent Pozorované	Kumul. % Pozorované	Očekáv. Četnosti	Kumulativ. Očekáv.	Procent Očekáv.	Kumul. % Očekáv.
<= 0,00000	19	19	22,61905	22,6190	18,74294	18,74294	22,31302	22,3130
1,00000	30	49	35,71429	58,3333	28,11440	46,85733	33,46952	55,7825
2,00000	17	66	20,23810	78,5714	21,08580	67,94313	25,10214	80,8847
3,00000	10	76	11,90476	90,4762	10,54290	78,48603	12,55107	93,4358
< Nekonečno	8	84	9,52381	100,0000	5,51397	84,00000	6,56424	100,0000

V tomto případě je parametr λ Poissonova rozložení neznámý, je odhadnut pomocí výběrového průměru a odhad činí 1,5.

Dále je v záhlaví výstupní tabulky uvedena hodnota testového kritéria (Chí kvadrát = 2,07051), počet stupňů volnosti r – p – 1 = 5 – 1 – 1 = 3 a p-hodnota (0,5578). Nulová hypotéza se tedy nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Pro vytvoření grafu se vrátíme do Proložení diskrétních rozložení – Základní výsledky – Graf pozorovaného a očekávaného rozdělení.



Poznámka k testu dobré shody: Tento test může být použit i v těch případech, kdy rozložení, z něhož daný náhodný výběr pochází, neodpovídá nějakému známému rozložení (např. exponenciálnímu, normálnímu, Poissonovu, ...), ale je určeno intuitivně nebo na základě zkušenosti.

Příklad: Ve svých pokusech pozoroval J.G. Mendel 10 rostlin hrachu a na každé z nich počet žlutých a zelených semen. Výsledky pokusu:

číslo rostliny	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet žlutých semen	25	32	14	70	24	20	32	44	50	44
počet zelených semen	11	7	5	27	13	6	13	9	14	18
celkem	36	39	19	97	37	26	45	53	64	62

Z genetických modelů vyplývá, že pravděpodobnost výskytu žlutého semene by měla být 0,75 a zeleného 0,25. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výsledky Mendelových pokusů se shodují s modelem.

Řešení:
Výpočty potřebné pro stanovení testové statistiky K uspořádáme do tabulky.

j	n_j	p_j	np_j	$(n_j - np_j)^2/ np_j$
1	25	0,75	36.0,75=27	0,148148
2	32	0,75	39.0,75=29,25	0,258547
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	44	0,75	62.0,75=46,5	0,134409

K = 0,148148 + 0,258547 + ... + 0,134409 = 1,797495, r = 10, $\chi^2_{0,95}(9) = 16,9$.
Protože 1,797495 < 16,9, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor Mendel hrach.sta. Proměnná celkem obsahuje celkový počet semen, X obsahuje pozorovaný počet žlutých semen a Y vypočítané teoretické četnosti žlutých semen (v našem případě X*0,75).
Statistiky – Neparametrická statistika – Pozorované versus očekávané χ^2 – OK - Pozorované četnosti X, Očekávané četnosti Y - OK – Výpočet. Dostaneme tabulku:

Pozorované vs. očekávané četnosti (Mendel hrach.sta)
Chi-Kvadr. = 1,797495 sv = 9 p = ,994280
POZN.: Nestejné součty pozor. a oček. četností

Případ	pozorov. X	očekáv. Y	P - O	(P-O)^2 /O
C: 1	25,0000	27,0000	-2,00000	0,148148
C: 2	32,0000	29,2500	2,75000	0,258547
C: 3	14,0000	14,2500	-0,25000	0,004386
C: 4	70,0000	72,7500	-2,75000	0,103952
C: 5	24,0000	27,7500	-3,75000	0,506757
C: 6	20,0000	19,5000	0,50000	0,012821
C: 7	32,0000	33,7500	-1,75000	0,090741
C: 8	44,0000	39,7500	4,25000	0,454403
C: 9	50,0000	48,0000	2,00000	0,083333
C: 10	44,0000	46,5000	-2,50000	0,134409
Sčt	355,0000	358,5000	-3,50000	1,797495

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu testové statistiky (Chi-Kvadr = 1,797495), počet stupňů volnosti (sv = 9) a odpovídající p-hodnotu, kterou porovnáme se zvolenou hladinou významnosti. V našem případě je p-hodnota 0,99428, takže nulová hypotéza se nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad: Při 60 hodech kostkou jsme dosáhli těchto výsledků: 9 x jednička, 11 x dvojka, 10 x trojka, 13 x čtyřka, 11 x pětka a 6 x šestka. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že kostka je homogenní.

Řešení: n = 60

j	n_j	p_j	np_j	$(n_j - np_j)^2$	$(n_j - np_j)^2/ np_j$
1	9	1/6	10	1	1/10
2	11	1/6	10	1	1/10
3	10	1/6	10	0	0
4	13	1/6	10	9	9/10
5	11	1/6	10	1	1/10
6	6	1/6	10	16	16/10

K = 2,8, r = 6, p = 0, $\chi^2_{0,95}(5) = 11,07$. Protože K < 11,07, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor kostka.sta. Proměnná X obsahuje pozorované četnosti jednotlivých čísel 1, …, 6 a proměnná Y obsahuje teoretické četnosti (v našem případě 10).

Statistiky – Neparametrická statistika – Pozorované versus očekávané χ^2 – OK - Pozorované četnosti X, Očekávané četnosti Y - OK – Výpočet. Dostaneme tabulku:

	Pozorované vs. očekávané četnosti (kostka.sta) Chi-Kvadr. = 2,800000 sv = 5 p = ,730786			
Případ	pozorov. X	očekáv. Y	P - O	(P-O)^2 /O
C: 1	9,00000	10,00000	-1,00000	0,100000
C: 2	11,00000	10,00000	1,00000	0,100000
C: 3	10,00000	10,00000	0,00000	0,000000
C: 4	13,00000	10,00000	3,00000	0,900000
C: 5	11,00000	10,00000	1,00000	0,100000
C: 6	6,00000	10,00000	-4,00000	1,600000
Sčt	60,00000	60,00000	0,00000	2,800000

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu testové statistiky (Chi-Kvadr = 2,8), počet stupňů volnosti (sv = 5) a odpovídající p-hodnotu, kterou porovnáme se zvolenou hladinou významnosti. V našem případě je p-hodnota 0,730786, takže nulová hypotéza se nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad: Ze záznamů autosalónu byl ve 100 náhodně vybraných dnech zjištěn počet prodaných aut.

Počet prodaných aut za den	0	1	2	3	4	5 a víc
Počet dnů	9	43	29	11	5	3

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že počet prodaných aut za den se řídí Poissonovým rozložením.

Řešení:

Parametr λ Poissonova rozložení neznáme, odhadneme ho pomocí výběrového průměru.

$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]} = \frac{1}{100}(0\cdot 9 + 1\cdot 43 + 2\cdot 29 + 3\cdot 11 + 4\cdot 5 + 5\cdot 3) = 1{,}7 = \hat{\lambda}$. Pravděpodobnost, že náhodná veličina X ~ Po(1,7) bude nabývat hodnot p_j, j = 0,1,2,3,4,5 a víc, je $p_j = \frac{1{,}7^j}{j!}e^{-1{,}7}$, $j = 0,1,2,3,4, p_5 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$

j	n_j	p_j	np_j	$(n_j - np_j)^2$	$(n_j - np_j)^2 / np_j$
0	9	0,1827	18,27	85,9329	4,7035
1	43	0,3106	31,06	142,5636	4,5899
2	29	0,264	26,4	6,76	0,2561
3	11	0,1496	14,96	15,6816	1,0482
4	5	0,0636	6,36	1,8496	0,2908
5 a víc	3	0,0296	2,96	0,0016	0,0005

Vidíme, že není splněna podmínka dobré aproximace. Sloučíme proto varianty 4 a 5.

j	n_j	p_j	np_j	$(n_j - np_j)^2$	$(n_j - np_j)^2 / np_j$
0	9	0,1827	18,27	85,9329	4,7035
1	43	0,3106	31,06	142,5636	4,5899
2	29	0,264	26,4	6,76	0,2561
3	11	0,1496	14,96	15,6816	1,0482
4 a víc	8	0,0932	9,32	1,7424	0,1869

K = 10,7846, r = 5, p = 1, $\chi^2_{0,95}(3) = 7{,}815$. Protože $K \geq 7{,}815$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor autosalon.sta. Proměnná POCET obsahuje počet prodaných aut, proměnná CETNOST pak počet dnů, v nichž byl prodán zjištěný počet aut.

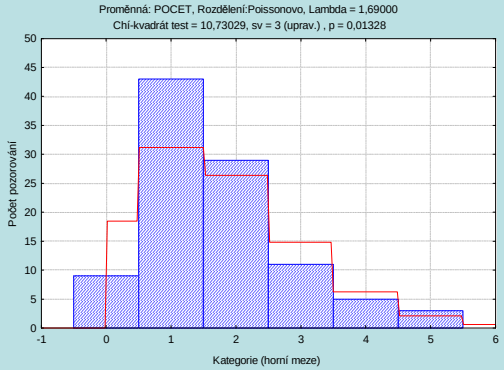
Statistiky – Prokládání rozdělení – Diskrétní rozdělení – Poissonovo – OK – Proměnná POCET – klikneme na ikonu se závažím – Proměnná vah CETNOST – Stav Zapnuto – OK – Výpočet.

	Proměnná: POCET, Rozdělení:Poissonovo, Lambda = 1,69000 (autosalon.sta) Chí-kvadrát = 10,73029, sv = 3 (uprav.) , p = 0,01328							
Kategorie	Pozorované Četnosti	Kumulativ. Pozorované	Procent Pozorované	Kumul. % Pozorované	Očekáv. Četnosti	Kumulativ. Očekáv.	Procent Očekáv.	Kumul. % Očekáv.
<= 0,00000	9	9	9,00000	9,0000	18,45196	18,4520	18,45196	18,4520
1,00000	43	52	43,00000	52,0000	31,18380	49,6358	31,18380	49,6358
2,00000	29	81	29,00000	81,0000	26,35031	75,9861	26,35031	75,9861
3,00000	11	92	11,00000	92,0000	14,84401	90,8301	14,84401	90,8301
4,00000	5	97	5,00000	97,0000	6,27159	97,1017	6,27159	97,1017
< Nekonečno	3	100	3,00000	100,0000	2,89834	100,0000	2,89834	100,0000

V záhlaví výstupní tabulky uvedena hodnota testového kritéria (10,73029), počet stupňů volnosti 3 a p-hodnota (0,01328). Nulová hypotéza se tedy zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vidíme, že nesouhlasí počet stupňů volnosti, měl by být 4. Proto p-hodnotu vypočteme zvlášť. Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do Dlouhého jména napíšeme =1-IChi2(10,73029;4). Dostaneme p-hodnotu 0,0298.

Pro vytvoření grafu se vrátíme do Proložení diskrétních rozložení – Základní výsledky – Graf pozorovaného a očekávaného rozdělení.



V tomto případě jsou patrné značné rozdíly mezi pozorovanými a teoretickými četnostmi.

Jednoduchý test exponenciálního rozložení

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z exponenciálního rozložení. Označme M výběrový průměr a S^2 výběrový rozptyl tohoto náhodného výběru. Víme, že střední hodnota náhodné veličiny $X \sim Ex(\lambda)$ je $E(X) = 1/\lambda$ a rozptyl je $D(X) = 1/\lambda^2$.

Test založíme na statistice $K = \frac{(n-1)S^2}{M^2}$, která se v případě platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$.

Jestliže $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α.

Příklad: Byla zkoumána doba životnosti 45 součástek (v hodinách). Zjistili jsme, že průměrná doba životnosti činila m = 99,93 h a rozptyl s^2 = 7328,91 h^2. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že daný náhodný výběr pochází z exponenciálního rozložení.

Řešení:

Testová statistika: $K = \frac{(n-1)S^2}{M^2} = \frac{44 \cdot 7328{,}91}{99{,}93^2} = 32{,}2924$

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty) = \langle 0, \chi^2_{0{,}025}(44)\rangle \cup \langle \chi^2_{0{,}975}(44), \infty) = \langle 0{,}27{,}575\rangle \cup \langle 64{,}202, \infty)$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, hypotézu o exponenciálním rozložení nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Jednoduchý test Poissonova rozložení

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z Poissonova rozložení. Označme M výběrový průměr a S^2 výběrový rozptyl tohoto náhodného výběru. Víme, že střední hodnota náhodné veličiny $X \sim Po(\lambda)$ je $E(X) = \lambda$ a rozptyl je $D(X) = \lambda$.

Test založíme na statistice $K = \frac{(n-1)S^2}{M}$, která se v případě platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$.

Příklad: Studujeme rozložení počtu pacientů, kteří během 75 dnů přijdou na pohotovost. Osmihodinovou pracovní dobu rozdělíme do půlhodinových intervalů a v každém intervalu zjistíme počet příchozích pacientů:

Počet pacientů	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pozorovaná četnost	79	188	282	275	196	114	45	10	7	3	1

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že daný náhodný výběr pochází z Poissonova rozložení.

Řešení:

Nejprve musíme vypočítat realizaci výběrového průměru a výběrového rozptylu:

$$m = \frac{1}{1200}(0\cdot 79 + 1\cdot 188 + \ldots + 10\cdot 1) = 2{,}80\overline{3}$$

$$s^2 = \frac{1}{1199}\left[79\cdot\left(0-2{,}80\overline{3}\right)^2 + 188\cdot\left(1-2{,}80\overline{3}\right)^2 + \ldots + 1\cdot\left(10-2{,}80\overline{3}\right)^2\right] = 2{,}708579$$

$$K = \frac{(n-1)S^2}{M} = \frac{1199\cdot 2{,}708579}{2{,}80\overline{3}} = 1158{,}579,$$

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty) = \langle 0;1104{,}93\rangle \cup \langle 1296{,}86;\infty),$

H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad: V systému hromadné obsluhy byla sledována doba obsluhy 70 zákazníků (v min). Výsledky jsou uvedeny v tabulce rozložení četností:

Doba obsluhy	Počet zákazníků
(0, 3]	14
(3,6]	16
(6,9]	10
(9,12]	9
(12,15]	8
(15,18]	5
(18,21]	3
(21,24]	5

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že daný náhodný výběr pochází z exponenciálního rozložení. Použijte:
a) test dobré shody,
b) jednoduchý test exponenciálního rozložení

Řešení:
Testujeme H_0: náhodný výběr $X_1, \ldots, X_{70}$ pochází z Ex(λ) proti H_1: non H_0.

Ad a) Nejprve odhadneme parametr λ exponenciálního rozložení: $\hat{\lambda} = \frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{r} n_j x_{[j]}} = \frac{1}{70}(14 \cdot 1{,}5 + 16 \cdot 4{,}5 + \ldots + 5 \cdot 22{,}5) = 0{,}1122$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina s rozložením Ex(λ), kde λ = 0,1122 se bude realizovat v intervalu $\langle u_j, u_{j+1} \rangle$ je $p_j = \Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j)$, j = 1, …, r, kde $\Phi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
Výpočty potřebné pro stanovení testové statistiky K uspořádáme do tabulky.

$\langle u_j, u_{j+1} \rangle$	$x_{[j]}$	n_j	p_j	np_j
(0, 3]	1,5	14	0,2858	20,0033
(3,6]	4,5	16	0,2041	14,2871
(6,9]	7,5	10	0,1458	10,2044
(9,12]	10,5	9	0,1041	7,2884
(12,15]	13,5	8	0,0744	5,2056
(15,18]	16,5	5	0,0531	3,7181
(18,21]	19,5	3	0,0378	2,6556
(21,24]	22,5	5	0,0271	1,8967

Podmínky dobré aproximace nejsou splněny, sloučíme tedy intervaly (15,18], (18,21] a (21,24].

$\langle u_j, u_{j+1} \rangle$	$x_{[j]}$	n_j	p_j	np_j	$(n_j - np_j)^2 / np_j$
(0, 3]	1,5	14	0,2858	20,0033	1,8017
(3,6]	4,5	16	0,2041	14,2871	0,2054
(6,9]	7,5	10	0,1458	10,2044	0,0041
(9,12]	10,5	9	0,1041	7,2884	0,4020
(12,15]	13,5	8	0,0744	5,2056	1,5000
(15,24]	19,5	13	0,1181	8,2704	2,7047

Testová statistika K = 1,8017 + … + 2,7047 = 6,6178, r = 6, p = 1, r – p – 1 = 4, $\chi^2_{0,95}(4) = 9,4877$.
Testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru $W = \langle 9,4877, \infty)$, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu, že doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením.

Ad b) Jednoduchý test exponenciálního rozložení je založen na statistice $K = \frac{(n-1)S^2}{M^2}$, která se v případě platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$.

Nejprve musíme vypočítat realizaci výběrového průměru a výběrového rozptylu:

$$m = \frac{1}{70}(14 \cdot 1{,}5 + 16 \cdot 4{,}5 + \ldots + 5 \cdot 22{,}5) = 8{,}9143$$

$$s^2 = \frac{1}{69}\left[19 \cdot (1{,}5 - 8{,}9143)^2 + 16 \cdot (4{,}5 - 8{,}9143)^2 + \ldots + 5 \cdot (22{,}5 - 8{,}9143)^2\right] = 41{,}1447$$

$$K = \frac{(n-1)S^2}{M^2} = \frac{69 \cdot 41{,}1447}{8{,}9143^2} = 35{,}7265.$$

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty) = \langle 0, \chi^2_{0{,}025}(69) \rangle \cup \langle \chi^2_{0{,}975}(69), \infty) = \langle 0; 47{,}9242 \rangle \cup \langle 93{,}8565, \infty)$.

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Hodnocení kontingenčních tabulek

Osnova:

- zavedení kontingenční tabulky
- testování hypotézy o nezávislosti a měření síly závislosti
- test homogenity
- analýza čtyřpolních tabulek

Motivace

Při zpracování dat se velmi často setkáme s úkolem zjistit, zda dvě náhodné veličiny nominálního typu jsou stochasticky nezávislé. Např. nás může zajímat, zda ve sledované populaci je barva očí a barva vlasů nezávislá.

Zpravidla chceme také zjistit intenzitu případné závislosti sledovaných dvou veličin. K tomuto účelu byly zkonstruovány různé koeficienty, které nabývají hodnot od 0 do 1. Čím je takový koeficient bližší 1, tím je závislost mezi danými dvěma veličinami silnější a čím je bližší 0, tím je slabší.

Kontingenční tabulky

Nechť X,Y jsou dvě nominální náhodné veličiny (tj. obsahová interpretace je možná jenom u relace rovnosti). Nechť X nabývá variant $x_{[1]}, ..., x_{[r]}$ a Y nabývá variant $y_{[1]}, ..., y_{[s]}$.

Označme:

$\pi_{jk} = P(X = x_{[j]} \wedge Y = y_{[k]})$ … simultánní pravděpodobnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$

$\pi_{j.} = P(X = x_{[j]})$ … marginální pravděpodobnost varianty $x_{[j]}$

$\pi_{.k} = P(Y = y_{[k]})$ … marginální pravděpodobnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní a marginální pravděpodobnosti zapíšeme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	…	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		π_{11}	…	π_{1s}	$\pi_{1.}$
…		…	…	…	…
$x_{[r]}$		π_{r1}	…	π_{rs}	$\pi_{r.}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$	…	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	n_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
...		...	...	...	...
$x_{[r]}$		n_{r1}	...	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

$n_{j.} = n_{j1} + ... + n_{js}$ je marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$
$n_{.k} = n_{1k} + ... + n_{rk}$ je marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní pravděpodobnost π_{jk} odhadneme pomocí simultánní relativní četnosti $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$, marginální pravděpodobnosti $\pi_{j.}$ a $\pi_{.k}$ odhadneme pomocí marginálních relativních četností $p_{j.} = \frac{n_{j.}}{n}$ a $p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n}$.

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	n_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
...		...	...	...	...
$x_{[r]}$		n_{r1}	...	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

$n_{j.} = n_{j1} + ... + n_{js}$ je marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$
$n_{.k} = n_{1k} + ... + n_{rk}$ je marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní pravděpodobnost π_{jk} odhadneme pomocí simultánní relativní četnosti $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$, marginální pravděpodobnosti $\pi_{j.}$ a $\pi_{.k}$ odhadneme pomocí marginálních relativních četností $p_{j.} = \frac{n_{j.}}{n}$ a $p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n}$.

Testování hypotézy o nezávislosti

Testujeme nulovou hypotézu H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny proti alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

Kdyby náhodné veličiny X, Y byly stochasticky nezávislé, pak by platil multiplikativní vztah

$\forall j = 1,\ldots,r,\ \forall k = 1,\ldots,s: \pi_{jk} = \pi_{j.}\,\pi_{.k}$ neboli $\frac{n_{jk}}{n} = \frac{n_{j.}}{n} \cdot \frac{n_{.k}}{n}$, tj. $n_{jk} = \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$. Číslo $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ se nazývá teoretická četnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$.

Testová statistika: $K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} n_{.k}}{n} \right)^2}{\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}}$.

Platí-li H_0, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)), \infty)$.

Hypotézu o nezávislosti veličin X, Y tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$.

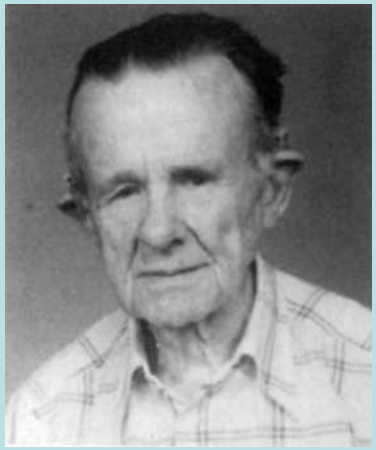
Podmínky dobré aproximace

Rozložení statistiky K lze aproximovat rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$, pokud teoretické četnosti $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ aspoň v 80% případů nabývají hodnoty větší nebo rovné 5 a ve zbylých 20% neklesnou pod 2. Není-li splněna podmínka dobré aproximace, doporučuje se slučování některých variant.

Měření síly závislosti

Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}$, kde m = min{r,s}. Tento koeficient nabývá hodnot mezi 0 a 1. Čím blíže je k 1, tím je závislost mezi X a Y těsnější, čím blíže je k 0, tím je tato závislost volnější.

Význam hodnot Cramérova koeficientu:
mezi 0 až 0,1 … zanedbatelná závislost,
mezi 0,1 až 0,3 … slabá závislost,
mezi 0,3 až 0,7 … střední závislost,
mezi 0,7 až 1 … silná závislost.



Carl Harald Cramér (1893 – 1985): Švédský matematik

Příklad

V sociologickém průzkumu byl z uchazečů o studium na vysokých školách pořízen náhodný výběr rozsahu 360. Mimo jiné se zjišťovala sociální skupina, ze které uchazeč pochází (veličina X) a typ školy, na kterou se hlásí (veličina Y). Výsledky jsou zaznamenány v kontingenční tabulce:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny. Vypočtěte Cramérův koeficient.

Řešení:

Nejprve vypočteme všech 12 teoretických četností:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n}=\frac{90\cdot 140}{360}=35,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n}=\frac{90\cdot 110}{360}=27{,}5,\ \frac{n_{1.}n_{.3}}{n}=\frac{90\cdot 110}{360}=27{,}5,$$
$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n}=\frac{100\cdot 140}{360}=38{,}9,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n}=\frac{100\cdot 110}{360}=30{,}6,\ \frac{n_{2.}n_{.3}}{n}=\frac{100\cdot 110}{360}=30{,}6,$$
$$\frac{n_{3.}n_{.1}}{n}=\frac{60\cdot 140}{360}=23{,}3,\ \frac{n_{3.}n_{.2}}{n}=\frac{60\cdot 110}{360}=18{,}3,\ \frac{n_{3.}n_{.3}}{n}=\frac{60\cdot 110}{360}=18{,}3,$$
$$\frac{n_{4.}n_{.1}}{n}=\frac{110\cdot 140}{360}=42{,}8,\ \frac{n_{4.}n_{.2}}{n}=\frac{110\cdot 110}{360}=33{,}6,\ \frac{n_{4.}n_{.3}}{n}=\frac{110\cdot 110}{360}=33{,}6$$

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti převyšují číslo 5.

Dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K=\frac{(50-35)^2}{35}+\frac{(30-27{,}5)^2}{27{,}5}+\ldots+\frac{(50-33{,}6)^2}{33{,}6}=76{,}84.$$

Dále stanovíme kritický obor:

$$W=\langle\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)),\infty)=\langle\chi^2_{0,95}((4-1)(3-1)),\infty)=\langle\chi^2_{0,95}(6),\infty)=\langle 12{,}6,\infty)$$

Protože $K \in W$, hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme Cramérův koeficient: $V=\sqrt{\frac{76{,}4}{360\cdot 2}}=0{,}3267$.

Hodnota Cramérova koeficientu svědčí o tom, že mezi veličinami X a Y existuje středně silná závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - sociální skupina, Y – typ školy, četnost) a 12 případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	I	univerzitní	50
2	I	technický	30
3	I	ekonomický	10
4	II	univerzitní	30
5	II	technický	50
6	II	ekonomický	20
7	III	univerzitní	10
8	III	technický	20
9	III	ekonomický	30
10	IV	univerzitní	50
11	IV	technický	10
12	IV	ekonomický	50

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Očekávané četnosti. Dostaneme kontingenční tabulku teoretických četností:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (typ skoly)
Četnost označených buněk > 10
Pearsonův chí-kv. : 76,8359, sv=6, p=,000000

X	Y univerzitní	Y technický	Y ekonomický	Řádk. součty
I	35,0000	27,5000	27,5000	90,0000
II	38,8889	30,5556	30,5556	100,0000
III	23,3333	18,3333	18,3333	60,0000
IV	42,7778	33,6111	33,6111	110,0000
Vš.skup.	140,0000	110,0000	110,0000	360,0000

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny. V záhlaví tabulky je uvedena hodnota testové statistiky K = 76,8359, počet stupňů volnosti 6 a odpovídající p-hodnota. Je velmi blízká 0, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny.
Hodnotu testové statistiky a Cramérův koeficient dostaneme také tak, že na na záložce Možnosti zaškrtneme Pearsonův & M-V chí kvadrát a Cramérovo V, na záložce Detailní výsledky vybereme Detailní 2 rozm. tabulky.

Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	76,83589	df=6	p=,00000
M-V chí-kvadr.	84,53528	df=6	p=,00000
Fí	,4619881		
Kontingenční koeficient	,4193947		
Cramér. V	,3266749		

Test homogenity v tabulce typu 2 x s

Máme kontingenční tabulku, v níž veličina X má jen dvě varianty a veličina Y s variant:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		π_{11}	...	π_{1s}	$\pi_{1.}$
$x_{[2]}$		π_{21}	...	π_{2s}	$\pi_{2.}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$	...	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n) rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
$x_{[2]}$		n_{21}	...	n_{2s}	$n_{2.}$
$\pi_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\pi_{1k} = \pi_{2k}$, k = 1, 2, …, s proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší.
Na problém lze pohlížet tak, že máme s nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení, přičemž první má rozsah $n_1 = n_{11} + n_{21}$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_1)$, …. , s-tý má rozsah $n_s = n_{1s} + n_{2s}$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_s)$. Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_s$ proti alternativě H_1: non H_0.

V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení jsme použili testovou statistiku:

$Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{s} n_j (M_j - M_*)^2 \approx \chi^2(s-1)$, když H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty)$

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \in W$. Přitom $M_* = \frac{\sum_{j=1}^{s} n_j M_j}{n}$ je vážený průměr výběrových průměrů.

Nyní použijeme testovou statistiku $K = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} n_{.k}}{n} \right)^2}{\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}}$, stejně jako u testu nezávislosti. Lze dokázat, že při výše uvedeném označení jsou statistiky Q a K totožné. Tedy test homogenity lze provést stejně jako test nezávislosti.
Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(s-1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty)$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Příklad: 104 náhodně vybraných matek bylo dotázáno, zda jejich kojenec dostává dudlík. Zjišťoval se též nejvyšší stupeň dosaženého vzdělání matky.

Vzdělání matky	Počet matek	Počet dětí s dudlíkem
ZŠ	39	27
SŠ	47	34
VŠ	18	15

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že používání dudlíku nezávisí na vzdělání matky.
(Jedná se o příklad 8.6.2. ze skript Základní statistické metody. Zde je uvedeno, že testová statistika Q se realizuje hodnotou 1,267, kritický obor je $W = \langle 5{,}992, \infty)$, tedy nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.)

Řešení: Data zapíšeme do kontingenční tabulky 2 x 3.

	Matka ZŠ	Matka SŠ	Matka VŠ	$n_{j.}$
Dudlík ano	27	34	15	76
Dudlík ne	12	13	3	28
$n_{.k}$	39	47	18	104

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{76\cdot 39}{104} = 28{,}5,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{76\cdot 47}{104} = 12{,}65,\ \frac{n_{1.}n_{.3}}{n} = \frac{76\cdot 18}{104} = 4{,}85,\ \frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{28\cdot 39}{104} = 28{,}5,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{28\cdot 47}{104} = 39{,}35,\ \frac{n_{2.}n_{.3}}{n} = \frac{28\cdot 18}{104} = 13{,}15$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny, pouze v 1 případě ze 6 je teoretická četnost menší než 5.
Dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{(27-28{,}5)^2}{28{,}5} + \frac{(34-12{,}65)^2}{12{,}65} + \ldots + \frac{(3-13{,}15)^2}{13{,}15} = 1{,}2686$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty) = \langle \chi^2_{0{,}95}(2), \infty) = \langle 5{,}992, \infty)$

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 se tedy neprokázalo, že používání dudlíku závisí na vzdělání matky.

Čtyřpolní tabulky

Nechť r = s = 2. Pak hovoříme o čtyřpolní kontingenční tabulce a používáme označení: $n_{11} = a$, $n_{12} = b$, $n_{21} = c$, $n_{22} = d$.

X	Y		$n_{j.}$
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	
$x_{[1]}$	a	b	a+b
$x_{[2]}$	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Test nezávislosti ve čtyřpolní tabulce

Testovou statistiku pro čtyřpolní kontingenční tabulku lze zjednodušit do tvaru:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

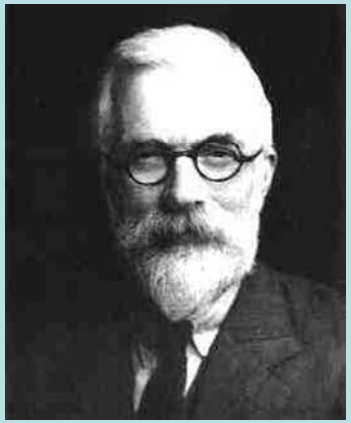
Platí-li hypotéza o nezávislosti veličin X, Y, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty)$

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Povšimněte si, že za platnosti hypotézy o nezávislosti ad = bc.

Pro čtyřpolní tabulku navrhl R. A. Fisher přesný (exaktní) test nezávislosti známý jako Fisherův faktoriálový test.



Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962): Britský statistik a genetik.
(Fisherův přesný test je popsán např. v knize K. Zvára: Biostatistika, Karolinum, Praha 1998. Princip spočívá v tom, že pomocí kombinatorických úvah se vypočítají pravděpodobnosti toho, že při daných marginálních četnostech dostaneme tabulky, které se od nulové hypotézy odchylují aspoň tak, jako daná tabulka.)

Upozornění: STATISTICA poskytuje p-hodnotu pro Fisherův přesný test. Jestliže vyjde $p \leq \alpha$, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α.

Příklad: V náhodném výběru 50 obézních dětí ve věku 6 – 14 let byla zjišťována obezita rodičů. Veličina X – obezita matky, veličina Y – obezita otce. Výsledky průzkumu jsou uvedeny v kontingenční tabulce:

X	Y		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	15	9	24
ne	7	19	26
$n_{.k}$	22	28	50

Pomocí Fisherova exaktního testu ověřte, zda lze na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X, Y (varianty 0 – neobézní, 1 – obézní) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	obézní	obézní	15
2	obézní	neobézní	9
3	neobézní	obézní	7
4	neobézní	neobézní	19

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

	Statist. : X(2) x Y(2) (obezita rodicu)		
Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	6,410777	df=1	p=,01134
M-V chí-kvadr.	6,548348	df=1	p=,01050
Yatesův chí-kv.	5,048207	df=1	p=,02465
Fisherův přesný, 1-str.			p=,01188
2-stranný			p=,02163
McNemarův chí-kv. (A/D)	,2647059	df=1	p=,60691
(B/C)	,0625000	df=1	p=,80259

Vidíme, že p-hodnota pro Fisherův exaktní oboustranný test je 0,02163, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že obezita matky a otce spolu nesouvisí.

Test homogenity ve čtyřpolní tabulce

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\pi_{1k} = \pi_{2k}$, k = 1, 2 proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší. Na problém lze pohlížet tak, že máme dva nezávislé výběry z alternativních rozložení, první má rozsah $n_1 = a+c$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_1)$, druhý má rozsah $n_2 = b+d$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_2)$. Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti oboustranné alternativě.

V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení jsme použili testovou statistiku

$T_0 = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$, která se za platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením N(0,1). (M_* je vážený prů-

měr výběrových průměrů.)

Nyní použijeme testovou statistiku $K = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, stejně jako u testu nezávislosti. Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty)$. Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Příklad: Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou. 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Na asymptotické hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině je shodný.

Řešení:

Údaje uspořádáme do čtyřpolní kontingenční tabulky, kde roli veličiny X hraje onemocnění chřipkou a roli veličiny Y existence očkování.

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
$n_{.k}$	240	220	460

Vypočteme sloupcově podmíněné relativní četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování	
	ano	ne
ano	8,3%	36,4%
ne	91,7%	63,6%

Vidíme, že v očkované skupině onemocnělo chřipkou 8,3% lidí, v kontrolní skupině však 36,4%. Zjistíme, zda takto velký rozdíl je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace, tedy nejprve vypočteme teoretické četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
$n_{.k}$	240	220	460

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n}=\frac{100\cdot 240}{460}=52{,}17,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n}=\frac{100\cdot 220}{460}=47{,}83,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n}=\frac{360\cdot 240}{460}=187{,}83,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n}=\frac{360\cdot 220}{460}=172{,}17$$

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny.
Realizace testové statistiky:

$$K=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{460(20\cdot 140-80\cdot 220)^2}{240\cdot 220\cdot 100\cdot 360}=53{,}01.$$

Kritický obor: $W=\langle \chi^2_{1-\alpha}(1),\infty)=\langle \chi^2_{0,99}(1),\infty)=\langle 6{,}635,\infty)$.

Protože $K\in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 0,01 jsme tedy prokázali, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině se liší.

Nyní provedeme výpočet pomocí statistiky $T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$, která se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením N(0,1).

Přitom očkovaných bylo 240, z nich onemocnělo 20, neočkovaných bylo 220, z nich onemocnělo 80.

V našem případě tedy $n_1 = 240$, $n_2 = 220$, $m_1 = \frac{20}{240}, m_2 = \frac{80}{220}, m_* = \frac{20+80}{460} = \frac{5}{23}$

Ověření podmínek $n_1 \vartheta_1 (1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2, tedy

$20.(1-20/240) = 18{,}333 > 9$, $80.(1-80/220) = 50{,}909 > 9$.

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{20}{240} - \frac{80}{220}}{\sqrt{\frac{5}{23}\left(1-\frac{5}{23}\right)\left(\frac{1}{240}+\frac{1}{220}\right)}} = -7{,}2807.$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -u_{10,995}\rangle \cup \langle u_{0,995}, \infty) = (-\infty, -2{,}5758\rangle \cup \langle 2{,}5758, \infty)$. Protože testové kritérium patří do kritického oboru, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Podíl šancí ve čtyřpolní kontingenční tabulce

Ve čtyřpolních tabulkách používáme charakteristiku $OR = \frac{ad}{bc}$, která se nazývá výběrový podíl šancí (odds ratio). Považujeme ho za odhad neznámého teoretického podílu šancí $o\rho = \frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}\pi_{12}}$. Můžeme si představit, že pokus se provádí za dvojích různých okolností a může skončit buď úspěchem nebo neúspěchem.

Výsledek pokusu	okolnosti		$n_{j.}$
	I	II	
úspěch	a	b	a+b
neúspěch	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Poměr počtu úspěchů k počtu neúspěchů (tzv. šance) za 1. okolností je $\frac{a}{c}$, za druhých okolností je $\frac{b}{d}$. Podíl šancí je tedy $OR = \frac{ad}{bc}$.

Jsou-li veličiny X, Y nezávislé, pak $\pi_{jk} = \pi_{j.}\pi_{.k}$, tudíž teoretický podíl šancí $o\rho = 1$. Závislost veličin X, Y bude tím silnější, čím více se $o\rho$ bude lišit od 1. Avšak $o\rho \in \langle 0, \infty)$, tedy hodnoty $o\rho$ jsou kolem 1 rozmístěny nesymetricky. Z tohoto důvodu raději používáme logaritmus teoretického či výběrového podílu šancí.

Testování nezávislosti ve čtyřpolních tabulkách pomocí podílu šancí

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\ln o\rho = 0$) proti alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\ln o\rho \neq 0$).

Testová statistika $T_0 = \dfrac{\ln OR}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}}$ se asymptoticky řídí rozložením $N(0,1)$, když nulová hypotéza platí.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Nulovou hypotézu tedy zamítáme na asymtotické hladině významnosti α, když se testová statistika realizuje v kritickém oboru W.

Testování nezávislosti lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro logaritmus podílu šancí $o\rho$, který je dán vzorcem:

$$(d, h) = \left(\ln OR - \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2}, \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2} \right)$$

Jestliže interval spolehlivosti neobsahuje 0, pak hypotézu o nezávislosti zamítneme na asymptotické hladině významnosti α.

Příklad (testování nezávislosti pomocí podílu šancí a pomocí statistiky K):
U 135 uchazečů o studium na jistou fakultu byl hodnocen dojem, jakým zapůsobili na komisi u ústní přijímací zkoušky. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že přijetí na fakultu nezávisí na dojmu u přijímací zkoušky.

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Řešení:
a) Testování pomocí podílu šancí:
$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{17 \cdot 58}{11 \cdot 39} = 2{,}298$. Podíl šancí nám říká, že uchazeč, který zapůsobil na komisi dobrým dojmem, má asi 2,3 x větší šanci na přijetí než uchazeč, který zapůsobil špatným dojmem.

Provedeme další pomocné výpočty:
$\ln OR = 0{,}832,$

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{11}+\frac{1}{39}+\frac{1}{58}} = 0{,}439,\ u_{0{,}975} = 1{,}96$$

Dosadíme do vzorců pro meze asymptotického intervalu spolehlivosti pro podíl šancí:

$$\ln d = \ln OR - \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}832 - 0{,}439 \cdot 1{,}96 = -0{,}028,\ \ln h = \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}832 + 0{,}439 \cdot 1{,}96 = 1{,}692$$

Protože interval (-0,028; 1,692) obsahuje číslo 0, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti dojmu u přijímací zkoušky a přijetí na fakultu.

b) Testování pomocí statistiky K:

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n}=\frac{28\cdot 56}{125}=12{,}544,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n}=\frac{28\cdot 69}{125}=15{,}456,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n}=\frac{97\cdot 56}{125}=43{,}456,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n}=\frac{97\cdot 69}{125}=53{,}544$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dosadíme do zjednodušeného vzorce pro testovou statistiku K:

$$K=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{125\cdot(17\cdot 58-11\cdot 39)^2}{28\cdot 97\cdot 56\cdot 69}=3{,}6953$$

Kritický obor: $W=\langle\chi^2_{0,95}(1),\infty)=\langle 3{,}841,\infty)$.

Protože testová statistika se nerealizuje k kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme ještě Cramérův koeficient: $V=\sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}=\sqrt{\frac{3{,}6953}{125(2-1)}}=0{,}1719$

Vidíme, že mezi dojmem u přijímací zkoušky a přijetím na fakultu je pouze slabá závislost.

Poznámka k jednostranným alternativám:
Nulová hypotéza tvrdí, že podíl šancí je roven 1, tj. H_0: $o\rho = 1$.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch vyšší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme pravostrannou alternativu
H_1: $o\rho > 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch pravostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický levostranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch nižší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme levostrannou alternativu
H_1: $o\rho < 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch levostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický pravostranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Pokud jsou šance na úspěch stejné za prvních i druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme oboustrannou alternativu
H_1: $o\rho \neq 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch oboustranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Příklad: U 24 žáků 6. třídy základní školy bylo zjišťováno, zda jsou úspěšní v matematice (tj. mají na posledním vysvědčení známku 1 nebo 2 z matematiky) a zda hrají na nějaký hudební nástroj. Z 10 úspěšných matematiků 6 hrálo na nějaký hudební nástroj, kdežto ve skupině neúspěšných matematiků hrál pouze 1 žák na hudební nástroj. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že úspěch v matematice a hra na hudební nástroj jsou nezávislé veličiny. Proti nulové hypotéze postavte

a) oboustrannou alternativu, tj. tvrzení, úspěch v matematice a hra na hudební nástroj spolu souvisí,
b) pravostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou vyšší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj,
c) levostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou nižší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj.

Řešení:

Máme kontingenční tabulku

úspěch v M	hra na hudební nástroj		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	6	4	10
ne	1	13	14
$n_{.k}$	7	17	24

Vypočteme podíl šancí: $\mathrm{OR} = \frac{ac}{bd} = \frac{6 \cdot 13}{4 \cdot 1} = \frac{39}{2} = 19{,}5$. Podíl šancí nám říká, že žák, který hraje na nějaký hudební nástroj, má 19,5 x větší šanci na úspěch v matematice než žák, který nehraje na žádný hudební nástroj.

Ad a)
Pro testování nulové hypotézy proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti:
Dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro oρ zjistíme pomocí STATISTIKY. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných DM a HM a jednom případu. Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)-sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,975;0;1)
a analogicky do Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro horní mez:
=log(19,5)+sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,975;0;1)

	1 DM	2 HM
1	0,575093	5,365736

Vidíme, že 0,575093 < ln oρ < 5,365736 s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch oboustranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že úspěch v matematice souvisí s hrou na hudební nástroj.

Ad b)
Pro testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti:
Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)-sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,95;0;1)

	1 DM
1	0,960198

Protože interval (0,960198; ∞) neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají vyšší šance na úspěch v matematice.

Ad c)
Pro testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti:
Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)+sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,95;0;1)

	1 HM
1	4,980631

Protože interval (-∞; 4,980631) obsahuje 0, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch levostranné alternativy. Neprokázalo se tedy, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají nižší šance na úspěch v matematice.

Jednoduchá korelační analýza

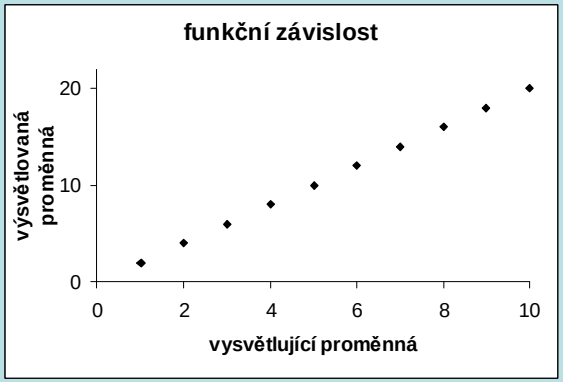
Osnova:

- Spearmanův koeficient pořadové korelace
- testování pořadové nezávislosti
- Pearsonův koeficient korelace a výběrový koeficient korelace
- testování nezávislosti
- porovnání koeficientu korelace s danou konstantou
- porovnání dvou koeficientů korelace

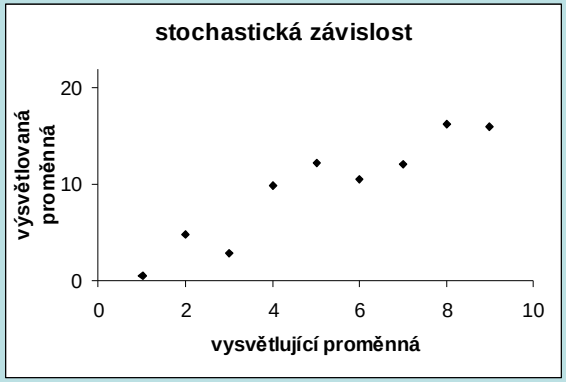
Motivace

Uvažme náhodné veličiny X, Y, které jsou aspoň ordinálního typu. Tyto náhodné veličiny mohou mít různý vztah:

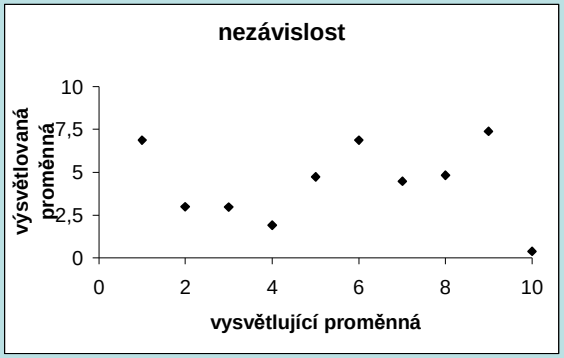
- Deterministická (funkční) závislost: jedna náhodná veličina je spjata s druhou náhodnou veličinou funkční závislostí vyjádřenou předpisem Y = g(X), např. X – poloměr náhodně vybrané sériově vyráběné kuličky do kuličkových ložisek, Y = $\frac{4}{3}\pi X^3$ - objem této kuličky. Každé realizaci náhodné veličiny X (vysvětlující proměnná) je přiřazena právě jedna realizace náhodné veličiny Y (vysvětlovaná proměnná).



- Stochastická závislost: jedna náhodná veličina ovlivňuje v různé míře druhou náhodnou veličinu, např. X – věk pracovníka v letech, Y – počet dnů absence za rok. Každé realizaci náhodné veličiny X může být přiřazeno více realizací náhodné veličiny Y. Závislost může být jednostranná i oboustranná.



- Stochastická nezávislost: náhodné veličiny se navzájem neovlivňují, např. házíme-li naráz dvěma kostkami a označíme X – počet ok padlých na jedné kostce, Y – počet ok padlých na druhé kostce, pak náhodné veličiny X, Y jsou stochasticky nezávislé.



X a Y jsou stochasticky nezávislé, když platí: $\forall(x,y)\in R^2 : \Phi(x,y) = \Phi_1(x)\Phi_2(y)$

X a Y jsou nekorelované, když platí C(X, Y) = 0 (tj. mezi X a Y není žádný lineární vztah).

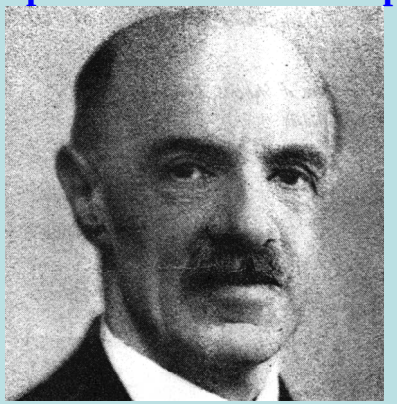
Ze stochastické nezávislosti vyplývá nekorelovanost, avšak z nekorelovanosti nevyplývá stochastická nezávislost.

Korelační analýza:

- zkoumá, zda existuje závislost mezi dvěma náhodnými veličinami X, Y, které jsou buď ordinálního nebo intervalového či poměrového typu. Důležité – nelze se spokojit s formálním matematickým popisem závislosti, závislost musí být logicky zdůvodnitelná!
- pomocí Pearsonova či Spearmanova koeficientu korelace měří těsnost této závislosti
- pro náhodné veličiny intervalového a poměrového typu je založena na předpokladu, že dvourozměrný náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ se řídí dvourozměrným normálním rozložením $N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$, kde

  $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$, $\sigma_1^2 = D(X)$, $\sigma_2^2 = D(Y)$, $\rho = R(X,Y)$
- při výraznějším porušení předpokladu dvourozměrné normality doporučuje použití metod, které jsou určeny pro náhodné veličiny ordinálního typu

Spearmanův koeficient pořadové korelace



Charles Edward Spearman (1863 – 1945): Britský psycholog a statistik, zakladatel faktorové analýzy

Nechť X,Y jsou náhodné veličiny ordinálního typu (tj. obsahová interpretace je možná jenom u relace rovnosti a relace uspořádání).
Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ z rozložení, jímž se řídí náhodný vektor (X, Y). Označíme R_i pořadí náhodné veličiny X_i a Q_i pořadí náhodné veličiny Y_i, i = 1, ..., n.

Spearmanův koeficient pořadové korelace: $r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (R_i - Q_i)^2$.

Tento koeficient nabývá hodnot mezi –1 a 1. Čím je bližší 1, tím je silnější přímá pořadová závislost mezi veličinami X a Y, čím je bližší –1, tím je silnější nepřímá pořadová závislost mezi veličinami X a Y. Teoretická hodnota Spearmanova koeficientu se značí ρ_S.

Vlastnosti Spearmanova koeficientu pořadové korelace

Pro Spearmanův koeficient pořadové korelace platí $-1 \le r_S \le 1$. Čím je bližší 1, tím je silnější přímá pořadová závislost mezi veličinami X a Y, čím je bližší –1, tím je silnější nepřímá pořadová závislost mezi veličinami X a Y.

Je-li $r_S = 1$ resp. $r_S = -1$, pak realizace $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ daného náhodného výběru leží na nějaké rostoucí resp. klesající funkci.

Hodnoty r_S se nezmění, když provedeme vzestupnou transformaci původních dat.

Hodnoty r_S se vynásobí -1, když provedeme sestupnou transformaci původních dat.

Koeficient je symetrický.

Koeficient je rezistentní vůči odlehlým hodnotám.

Význam absolutní hodnoty Spearmanova koeficientu:
mezi 0 až 0,1 … zanedbatelná pořadová závislost,
mezi 0,1 až 0,3 … slabá pořadová závislost,
mezi 0,3 až 0,7 … střední pořadová závislost,
mezi 0,7 až 1 … silná pořadová závislost.

Spearmanův koeficient pořadové korelace se používá v situacích, kdy
- zkoumaná data mají ordinální charakter
- nelze předpokládat, že vztah mezi veličinami X, Y je lineární
- náhodný výběr nepochází z dvourozměrného normálního rozložení

Testování nezávislosti ordinálních veličin

Na hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: X, Y jsou pořadově nezávislé náhodné veličiny proti

- oboustranné alternativě H_1: X, Y jsou pořadově závislé náhodné veličiny
- levostranné alternativě H_1: mezi X a Y existuje nepřímá pořadová závislost
- pravostranné alternativě H_1: mezi X a Y existuje přímá pořadová závislost).

Jako testová statistika slouží Spearmanův koeficient pořadové korelace r_S.

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α ve prospěch

- oboustranné alternativy, když $|r_S| \geq r_{S,1-\alpha/2}(n)$
- levostranné alternativy, když $r_S \leq - r_{S,1-\alpha}(n)$
- pravostranné alternativy, když $r_S \geq r_{S,1-\alpha}(n)$,

kde $r_{S,1-\alpha}(n)$ je kritická hodnota, kterou pro $\alpha = 0{,}05$ nebo $0{,}01$ a $n \leq 30$ najdeme v tabulkách.

Asymptotické varianty testu

Pro n > 20 lze použít testovou statistiku $T_0 = \frac{r_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_S^2}}$, která se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením t(n-2).

Kritický obor pro oboustrannou alternativu: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-2), \infty\right)$

Kritický obor pro levostrannou alternativu:
$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-2)\right\rangle$

Kritický obor pro pravostrannou alternativu:
$W = \left\langle t_{1-\alpha}(n-2), \infty\right)$.

Hypotézu o pořadové nezávislosti náhodných veličin X, Y zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.
Upozornění: Systém STATISTICA používá tuto variantu testu pořadové nezávislosti bez ohledu na rozsah náhodného výběru.

Pro n > 30 lze použít testovou statistiku $r_s\sqrt{n-1}$. Platí-li H_0, pak $r_s\sqrt{n-1} \approx N(0, 1)$. Nulovou hypotézu tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch
oboustranné alternativy, když $r_S\sqrt{n-1} \in \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$,
levostranné alternativy, když $r_S\sqrt{n-1} \in \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$,
pravostranné alternativy, když $r_S\sqrt{n-1} \in \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$

Příklad na testování pořadové nezávislosti (jsou známa pořadí):
Dva lékaři hodnotili stav sedmi pacientů po témž chirurgickém zákroku. Postupovali tak, že nejvyšší pořadí dostal nejtěžší případ.

Číslo pacienta	1	2	3	4	5	6	7
Hodnocení 1. lékaře	4	1	6	5	3	2	7
Hodnocení 2. lékaře	4	2	5	6	1	3	7

Vypočtěte Spearmanův koeficient a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že hodnocení obou lékařů jsou pořadově nezávislá.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: X, Y jsou pořadově nezávislé náhodné veličiny proti oboustranné alternativě H_1: X, Y jsou pořadově závislé náhodné veličiny. V tomto příkladě přímo známe pořadí R_i (tj. hodnocení 1. lékaře) a pořadí Q_i (tj. hodnocení 2. lékaře). Vypočteme

$$r_S = 1 - \frac{6}{7\left(7^2 - 1\right)}\left[(4-4)^2 + (1-2)^2 + (6-5)^2 + (5-6)^2 + (3-1)^2 + (2-3)^2 + (7-7)^2\right] = 0{,}857.$$

Kritická hodnota: $r_{S,0,975}(7) = 0{,}745$. Protože $0{,}857 \geq 0{,}745$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných X (hodnocení 1. lékaře), Y (hodnocení 2. lékaře) a sedmi případech. Do proměnných X a Y zapíšeme zjištěná hodnocení.

	1 X	2 Y
1	4	4
2	1	2
3	6	5
4	5	6
5	3	1
6	2	3
7	7	7

Statistiky – Neparametrické statistiky – Korelace – OK – vybereme Vytvořit detailní report - Proměnné X, Y – OK – Spearmanův koef. R. Dostaneme tabulku

	Spearmanovy korelace (dva lekari.sta) ChD vynechány párově Označ. korelace jsou významné na hl. p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet plat.	Spearman R	t(N-2)	Úroveň p
X & Y	7	0,857143	3,721042	0,013697

Spearmanův koeficient pořadové korelace nabývá hodnoty 0,857, testová statistika se realizuje hodnotou 3,721, odpovídající p-hodnota je 0,0137, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o pořadové nezávislosti hodnocení dvou lékařů ve prospěch oboustranné alternativy.

Příklad na testování pořadové nezávislosti (pořadí musíme stanovit):
Jsou dány realizace náhodného výběru z dvourozměrného rozložení, kterým se řídí náhodný vektor (X,Y): (2,5 13,4), (3,4 15,2), (1,3 11,8), (5,8 13,1), (3,6 14,5). Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že náhodné veličiny jsou pořadově nezávislé proti oboustranné alternativě.

Řešení:

x_i	2,5	3,4	1,3	5,8	3,6
y_i	13,4	15,2	11,8	13,1	14,5
R_i	2	3	1	5	4
Q_i	3	5	1	2	4
$(R_i-Q_i)^2$	1	4	0	9	0

Testová statistika: $r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (R_i - Q_i)^2 = 1 - \frac{6}{5 \cdot 24} 14 = 0{,}3$

Kritická hodnota: pro n = 5 a α = 0,05 je kritická hodnota 0,9. Protože testová statistika se realizuje hodnotou 0,3, hypotézu o pořadové nezávislosti veličin X a Y nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA
Postupujeme úplně stejně jako v předešlém případě. Výstupní tabulka má tvar:

	Spearmanovy korelace (poradova korelace.sta) ChD vynechány párově Označ. korelace jsou významné na hl. p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet plat.	Spearman R	t(N-2)	Úroveň p
X & Y	5	0,300000	0,544705	0,623838

Spearmanův koeficient pořadové korelace nabývá hodnoty 0,3, testová statistika se realizuje hodnotou 0,5447, odpovídající p-hodnota je 0,6238, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o pořadové nezávislosti veličin X, Y.

Pearsonův koeficient korelace

Karl Pearson (1857 – 1936): Britský statistik

Číslo

$$R(X,Y)=\begin{cases} E\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} & \text{pro } \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}>0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

se nazývá Pearsonův koeficient korelace.
(Pro výpočet Pearsonova koeficentu korelace musíme znát simultánní distribuční funkci $\Phi(x,y)$ v obecném případě resp. simultánní hustotu pravděpodobnosti $\varphi(x,y)$ ve spojitém případě resp. simultánní pravděpodobnostní funkci $\pi(x,y)$ v diskrétním případě.)

Vlastnosti Pearsonova koeficientu korelace

a) $R(a_1, Y) = R(X, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$

b) $R(a_1 + b_1X, a_2 + b_2Y) = \mathrm{sgn}(b_1b_2)\, R(X, Y) = \begin{cases} R(X,Y) \text{ pro } b_1b_2 > 0 \\ -R(X,Y) \text{ pro } b_1b_2 < 0 \end{cases}$

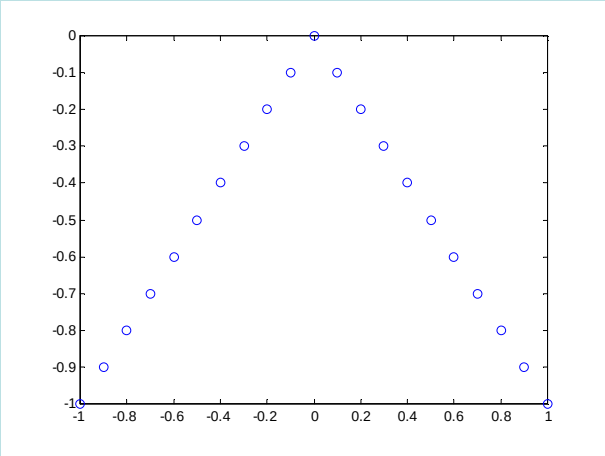
c) $R(X, X) = 1$ pro $D(X) \neq 0$, $R(X, X) = 0$ jinak

d) $R(X, Y) = R(Y, X)$

e) $|R(X,Y)| \leq 1$ a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když mezi veličinami X, Y existuje s pravděpodobností 1 úplná lineární závislost, tj. existují konstanty a, b tak, že pravděpodobnost $P(Y = a + bX) = 1$. Přitom $R(X, Y) = 1$, když $b > 0$ a $R(X, Y) = -1$, když $b < 0$. (Uvedená nerovnost se nazývá Cauchyova – Schwarzova – Buňakovského nerovnost.)

Z vlastností Pearsonova koeficientu korelace vyplývá, že se hodí pouze k měření těsnosti lineárního vztahu veličin X a Y. Při složitějších závislostech může dojít k paradoxní situaci, že Pearsonův koeficient korelace je nulový.

Ilustrace:



Definice nekorelovanosti

Je-li $R(X, Y) = 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny jsou nekorelované. (Znamená to, že mezi X a Y neexistuje žádná lineární závislost. Jsou-li náhodné veličiny X,Y stochasticky nezávislé, pak jsou samozřejmě i nekorelované.)

Je-li $R(X, Y) > 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny jsou kladně korelované. (Znamená to, že s růstem hodnot veličiny X rostou hodnoty veličiny Y a s poklesem hodnot veličiny X klesají hodnoty veličiny Y.)

Je-li $R(X, Y) < 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny jsou záporně korelované. (Znamená to, že s růstem hodnot veličiny X klesají hodnoty veličiny Y a s poklesem hodnot veličiny X rostou hodnoty veličiny Y.)

Výběrový koeficient korelace

Nechť $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ náhodný výběr rozsahu n z dvourozměrného rozložení daného distribuční funkcí $\Phi(x,y)$.
Z tohoto dvourozměrného náhodného výběru můžeme stanovit:

výběrové průměry $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$,

výběrové rozptyly $S_1^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_1)^2$, $S_2^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - M_2)^2$,

výběrovou kovarianci $S_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_1)(Y_i - M_2)$ a s jejich pomocí zavedeme

výběrový koeficient korelace $R_{12} = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{X - M_1}{S_1}\cdot\frac{Y - M_2}{S_2} = \frac{S_{12}}{S_1 S_2} & \text{pro } S_1 S_2 > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$. Vlastnosti Pearsonova koeficientu korelace se přenášejí i na výběrový koeficient korelace.
(Spearmanův koeficient pořadové korelace odpovídá Pearsonovu koeficientu korelace aplikovanému na pořadí.)

Příklad: Výpočet realizace výběrového koeficientu korelace

U 65 zaměstnanců jisté firmy byla zjišťována délka praxe v letech (veličina X) a výška prémií v Kč (veličina Y). Dvourozměrné rozložení četností je dáno kontingenční tabulkou:

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	5	3	0	0	0	0	0
17,5	2	4	4	0	0	0	0
22,5	0	1	6	7	4	0	0
27,5	0	0	1	3	7	1	0
32,5	0	0	0	1	10	5	1

Vypočtěte realizaci r_{12} výběrového koeficientu korelace R_{12} a interpretujte jeho hodnotu. Pro úsporu času máte uvedeny následující součty:

$$\sum_{j=1}^{5} n_{j.} x_{[j]} = 1562{,}5, \sum_{k=1}^{7} n_{.k} y_{[k]} = 172750, \sum_{j=1}^{5} n_{j.} x_{[j]}^{2} = 40456, \sum_{k=1}^{7} n_{.k} y_{[k]}^{2} = 498562500,$$

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{7} n_{jk} x_{[j]} y_{[k]} = 4446875$$

Řešení:

Známe tyto součty: $\sum_{j=1}^{5} n_{j.} x_{[j]} = 1562{,}5, \sum_{k=1}^{7} n_{.k} y_{[k]} = 172750, \sum_{j=1}^{5} n_{j.} x_{[j]}^{\ 2} = 40456, \sum_{k=1}^{7} n_{.k} y_{[k]}^{\ 2} = 498562500, \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{7} n_{jk} x_{[j]} y_{[k]} = 4446875$

Vypočteme

průměrnou délku praxe: $m_1 = \frac{1562{,}5}{65} = 24{,}038,$

průměrnou výšku prémií: $m_2 = \frac{172750}{65} = 2657{,}692$

rozptyl délky praxe: $s_1^{\ 2} = \frac{1}{64}\left(40456 - 65 \cdot \left(\frac{1562{,}5}{65}\right)^2\right) = 45{,}25$

rozptyl výše prémií: $s_2^{\ 2} = \frac{1}{64}\left(498562500 - 65 \cdot \left(\frac{172750}{65}\right)^2\right) = 616346$

kovariance délky praxe a výše prémií: $s_{12} = \frac{1}{64}\left(4446875 - 65 \cdot \frac{1562{,}5}{65} \cdot \frac{172750}{65}\right) = 4597{,}4$

koeficient korelace délky praxe a výše prémií: $r_{12} = \frac{4597{,}4}{\sqrt{45{,}25}\sqrt{616346}} = 0{,}8705$

Hodnota koeficientu korelace svědčí o tom, že mezi délkou praxe a výškou prémií existuje dosti silná přímá lineární závislost – čím delší praxe, tím vyšší prémie.

Pearsonův koeficient korelace dvourozměrného normálního rozložení

Jak bylo uvedeno v motivaci, korelační analýza předpokládá, že daný náhodný výběr pochází z dvourozměrného normálního rozložení. Proč je tento předpoklad tak důležitý? Odpověď poskytne následující věta.

Nechť náhodný vektor (X, Y) má dvourozměrné normální rozložení s hustotou

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

, přičemž $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$, $\sigma_1^2 = D(X)$, $\sigma_2^2 = D(Y)$, $\rho = R(X,Y)$.

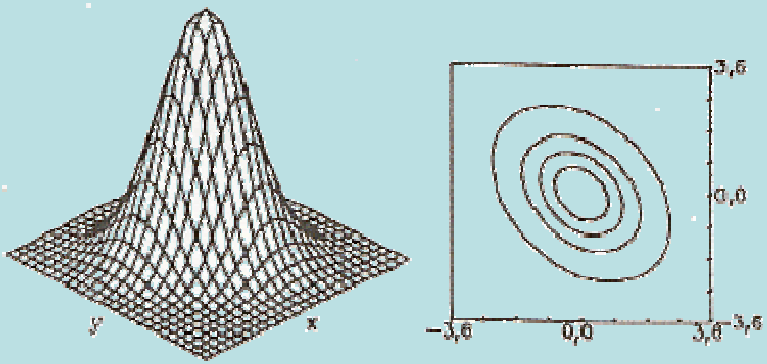
Marginální hustoty jsou: $\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)dy=\ldots=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, $\varphi_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)dx=\ldots=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$.

Je-li $\rho = 0$, pak pro $\forall(x,y)\in R^2 : \varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, tedy náhodné veličiny X, Y jsou stochasticky nezávislé. Jinými slovy: stochastická nezávislost složek X, Y normálně rozloženého náhodného vektoru je ekvivalentní jejich nekorelovanosti. Pro jiná dvourozměrná rozložení to neplatí!

Upozornění: nadále budeme předpokládat, že $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ je náhodný výběr rozsahu n z dvourozměrného normálního rozložení $N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$.

Předpoklad dvourozměrné normality lze orientačně ověřit pomocí dvourozměrného tečkového diagramu: tečky by měly zhruba rovnoměrně vyplnit vnitřek elipsovitého obrazce. Vrstevnice hustoty dvourozměrného normálního rozložení jsou totiž elipsy:

Graf hustoty a vrstevnice dvourozměrného normálního rozložení s parametry $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$, $\rho = -0{,}75$:



Do dvourozměrného tečkového diagramu můžeme ještě zakreslit 100(1-α)% elipsu konstantní hustoty pravděpodobnosti. Bude-li více než 100α% teček ležet vně této elipsy, svědčí to o porušení dvourozměrné normality. Bude-li mít hlavní osa elipsy kladnou resp. zápornou směrnici, znamená to, že mezi veličinami X a Y existuje určitý stupeň přímé resp. nepřímé lineární závislosti.

Testování hypotézy o nezávislosti

Na hladině významnosti α testujeme H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\rho = 0$) proti

- oboustranné alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\rho \neq 0$)
- levostranné alternativě H_1: X, Y jsou záporně korelované náhodné veličiny (tj. $\rho < 0$)
- pravostranné alternativě H_1: X, Y jsou kladně korelované náhodné veličiny (tj. $\rho > 0$).

Testová statistika má tvar: $T_0 = \frac{R_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{12}^{\ 2}}}$.

Platí-li nulová hypotéza, pak $T_0 \sim t(n-2)$.

Kritický obor pro test H_0 proti

- oboustranné alternativě: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-2), \infty\right)$,
- levostranné alternativě: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-2)\right\rangle$,
- pravostranné alternativě: $W = \left\langle t_{1-\alpha}(n-2), \infty\right)$.

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.

Příklad: Testování hypotézy o nezávislosti proti oboustranné alternativě

V dílně pracuje 15 dělníků. Byl u nich zjištěn počet směn odpracovaných za měsíc (náhodná veličina X) a počet zhotovených výrobků (náhodná veličina Y):

X 20 21 18 17 20 18 19 21 20 14 16 19 21 15 15
Y 92 93 83 80 91 85 82 98 90 60 73 86 96 64 81.

Předpokládejte, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení. Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y a na hladině 0,01 testujte hypotézu o nezávislosti X a Y proti oboustranné alternativě.

Řešení:

Vypočteme realizace

výběrových průměrů: $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 18{,}267$, $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 83{,}6$,

výběrových rozptylů: $s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2 = 5{,}6381$, $s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m_2)^2 = 121{,}4$,

výběrové kovariance: $s_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)(y_i - m_2) = 24{,}2571$,

výběrového koeficientu korelace: $r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = 0{,}927$.

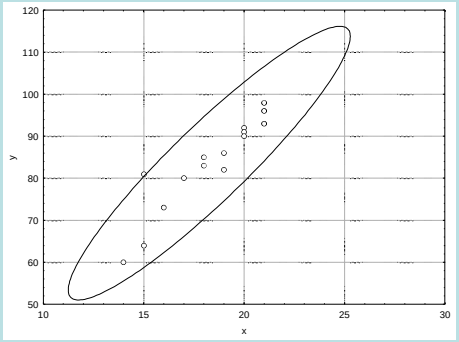
Realizace testové statistiky: $t_0 = \frac{r_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} = 8{,}912$,

kritický obor $W = \left(-\infty, -t_{0,995}(13)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,995}(13), \infty\right) = \left(-\infty, -3{,}012\right\rangle \cup \left\langle 3{,}012, \infty\right)$.

Protože $t_0 \in W$, hypotézu o nezávislosti veličin X a Y zamítáme na hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 1% jsme tedy prokázali, že mezi počtem směn odpracovaných za měsíc a počtem zhotovených výrobků existuje závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných X, Y a 15 případech. Dvourozměrnou normalitu dat ověříme pomocí dvourozměrného tečkového diagramu: Grafy – Bodové grafy – Proměnné X, Y – OK – odškrtneme Typ proložení Lineární – na záložce Detaily zaškrtneme Elipsa Normální - OK.



Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – 1 seznam proměn. – X, Y – OK – na záložce Možnosti vybereme Zobrazit detailní tabulku výsledků – Výpočet.

Prom. X & prom. Y	Korelace (smeny a vyrobky.sta) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 (Celé případy vynechány u ChD) Průměr	Sm.Odch.	r(X,Y)	r2	t	p	N	Konst. záv.: Y	Směr. záv: Y	Konst. záv.: X	Směrnic záv.: X
X	18,26667	2,37447									
X	18,26667	2,37447	1,000000	1,000000			15	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000
X	18,26667	2,37447									
Y	83,60000	11,01817	0,927180	0,859663	8,923795	0,000001	15	5,010135	4,302365	1,562407	0,199812
Y	83,60000	11,01817									
X	18,26667	2,37447	0,927180	0,859663	8,923795	0,000001	15	1,562407	0,199812	5,010135	4,302365
Y	83,60000	11,01817									
Y	83,60000	11,01817	1,000000	1,000000			15	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000

Výběrový koeficient korelace se realizoval hodnotou 0,92718, testová statistika nabyla hodnoty 8,924, odpovídající p-hodnota je 0,000001, tedy na hladině významnosti 0,01 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X, Y.

Příklad: **Testování hypotézy o nezávislosti proti levostranné alternativě**

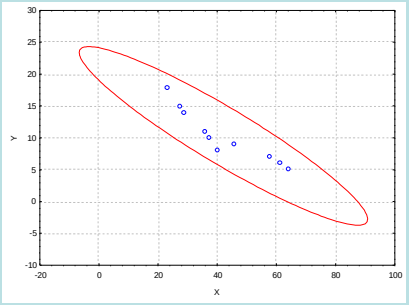
Pracovník personálního oddělení určité firmy zkoumá, zda existuje vztah mezi věkem zaměstnance (náhodná veličina X) a počtem dní absence za rok (náhodná veličina Y). Proto náhodně vybral údaje o 10 zaměstnancích:

X	27	61	37	23	46	58	29	36	64	40
Y	15	6	10	18	9	7	14	11	5	8

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny proti alternativě, že X, Y jsou záporně korelované náhodné veličiny.

Řešení:

Předpoklad o dvourozměrné normalitě dat ověříme orientačně pomocí dvourozměrného tečkového diagramu.



Vzhled diagramu svědčí o tom, že předpoklad je oprávněný.

Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: $\rho = 0$ proti H_1: $\rho < 0$. Vypočítáme $r_{12} = -0{,}9325$, tedy mezi věkem pracovníka a počtem dnů pracovní neschopnosti existuje silná nepřímá lineární závislost.

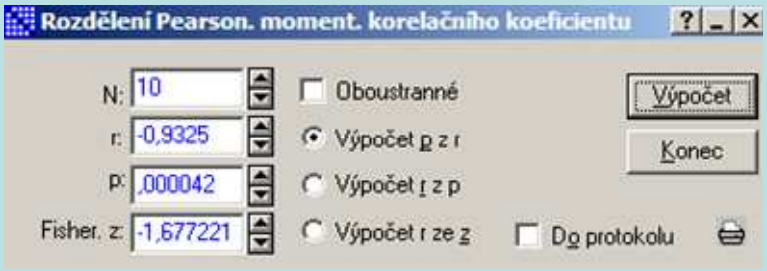
Realizace testové statistiky: $t_0 = \dfrac{r_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{12}^{\ 2}}} = -7{,}3053$,

kritický obor $W = \left(-\infty, -t_{0,95}(8)\right\rangle = \left(-\infty, -1{,}8595\right\rangle$.

Jelikož $t_0 \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nezávislosti veličin X a Y ve prospěch levostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme prokázali, že mezi věkem pracovníka a počtem dnů absence za rok existuje nepřímá lineární závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Můžeme využít toho, že již známe r_{12}. Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Korelace – vyplníme n = 10, r = -0,9325, odškrtneme Dvojité, zaškrtneme Výpočet p z r – Výpočet. V okénku p se objeví hodnota 0,000041, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X a Y ve prospěch levostranné alternativy.



Příklad: **Testování hypotézy o nezávislosti proti pravostranné alternativě**

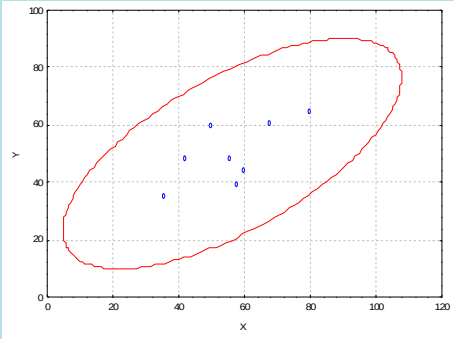
Máme k dispozici výsledky testů ze dvou předmětů zjištěné u osmi náhodně vybraných studentů určitého oboru.

Číslo studenta	1	2	3	4	5	6	7	8
Počet bodů v 1. testu	80	50	36	58	42	60	56	68
Počet bodů ve 2. testu	65	60	35	39	48	44	48	61

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výsledky obou testů nejsou kladně korelované.

Řešení:

Nejprve se musíme přesvědčit, že uvedené výsledky lze považovat za realizace náhodného výběru z dvourozměrného normálního rozložení. Lze tak učinit orientačně pomocí dvourozměrného tečkového diagramu. Tečky by měly vytvořit elipsovitý obrazec.



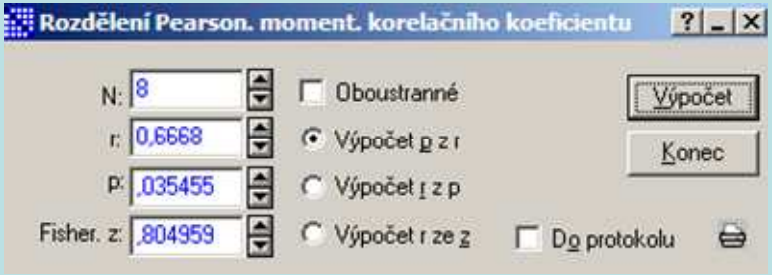
Obrázek svědčí o tom, že předpoklad dvourozměrné normality je oprávněný a že mezi počty bodů z 1. a 2. testu bude existovat určitý stupeň přímé lineární závislosti.

Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: $\rho = 0$ proti pravostranné alternativě H_1: $\rho > 0$.

Výpočtem zjistíme: $r_{12} = 0{,}6668$, $t_0 = 2{,}1917$. Stanovíme kritický obor: $W = \langle t_{0,95}(6); \infty) = \langle 1{,}9432; \infty)$. Jelikož $t_0 \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nezávislosti veličin X a Y ve prospěch pravostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme prokázali, že mezi výsledky 1. a 2. testu existuje přímá lineární závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Můžeme využít toho, že již známe r_{12}. Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Korelace – vyplníme n = 8, r = 0,6668, odškrtneme Dvojité, zaškrtneme Výpočet p z r – Výpočet. V okénku p se objeví hodnota 0,035455, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X a Y ve prospěch pravostranné alternativy.



Postup při nesplnění předpokladu dvourozměrné normality

Máme k dispozici realizace náhodného výběru rozsahu 12 z dvourozměrného rozložení:

X	1	3	4	5	6	8	10	11	13	14	16	17
Y	13	15	18	16	23	31	39	56	45	43	37	0

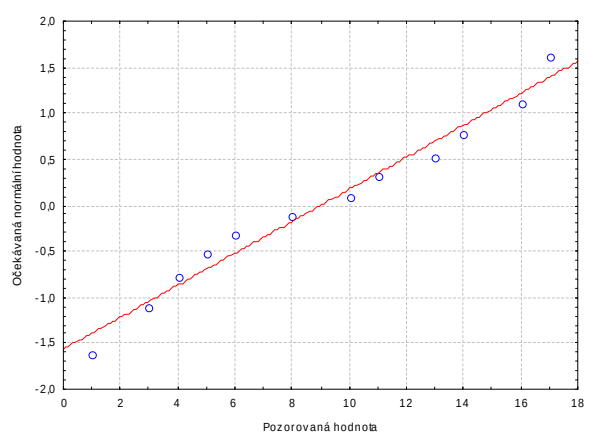
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé proti oboustranné alternativě.

Řešení:

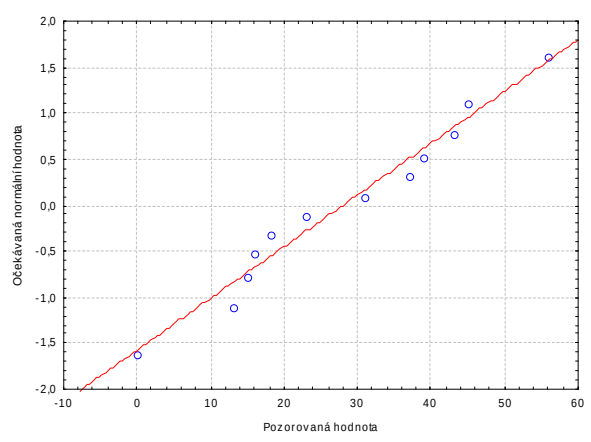
Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: $\rho = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\rho \neq 0$. Pokud neověříme předpoklad dvourozměrné normality, obvyklým způsobem vypočteme realizaci výběrového koeficientu korelace $r_{12} = 0{,}3729$ a realizaci testové statistiky $t_0 = 1{,}271$. Stanovíme kritický obor: $W = \left(-\infty, -t_{0,975}(10)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(10), \infty\right) = \left(-\infty, -2{,}2281\right\rangle \cup \left\langle 2{,}2281, \infty\right)$. Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

Nyní budeme testovat hypotézu o normalitě náhodné veličiny X a náhodné veličiny Y. Grafické ověření pomocí N-P grafů:

N-P graf pro veličinu X



N-P graf pro veličinu Y

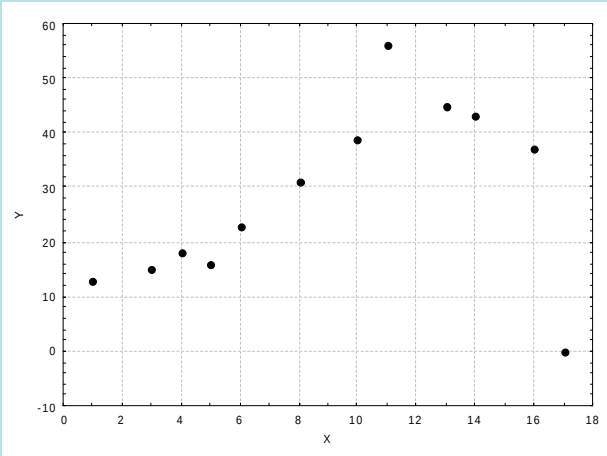


Vzhled grafů svědčí ve prospěch normality.

Testování pomocí Lilieforsovy varianty K - S testu a S – W testu:

Proměnná	Testy normality				
	N	max D	Lilliefors p	W	p
X	12	0,130669	p > .20	0,956714	0,736098
Y	12	0,145742	p > .20	0,968954	0,899540

V obou případech hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Ověření dvourozměrné normality pomocí dvourozměrného tečkového diagramu:



Dvourozměrná normalita je silně porušena, tečky nevyplňují vnitřek elipsovitého obrazce.
Přejdeme tedy k testování hypotézy o pořadové nezávislosti.

Testujeme hypotézu H_0: X, Y jsou pořadově nezávislé náhodné veličiny proti oboustranné alternativě H_1: X, Y jsou pořadově závislé náhodné veličiny.

Vypočítáme Spearmanův koeficient pořadové korelace.

X	1	3	4	5	6	8	10	11	13	14	16	17
Y	13	15	18	16	23	31	39	56	45	43	37	0
R_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_i	2	3	5	4	6	7	9	12	11	10	8	1

$$r_S = 1 - \frac{6}{12\left(12^2-1\right)}\left[\begin{array}{l}(1-2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2+(4-4)^2+(5-6)^2+(6-7)^2+(7-9)^2+\\ +(8-12)^2+(9-11)^2+(10-10)^2+(11-8)^2+(12-1)^2\end{array}\right] =$$

$$= 1 - \frac{6}{12\cdot 143}\left(1+1+4+0+1+1+4+16+4+0+9+121\right) = 1 - \frac{1}{286}\cdot 162 = 0{,}4336$$

Stanovíme kritický obor: $W = \left\langle -1, -r_{S,1-\alpha/2}(n)\right\rangle \cup \left\langle r_{S,1-\alpha/2}(n), 1\right\rangle = \left\langle -1, -r_{S,0{,}975}(12)\right\rangle \cup \left\langle r_{S,0{,}975}(12), 1\right\rangle = \left\langle -1, -0{,}5804\right\rangle \cup \left\langle 0{,}5804, 1\right\rangle$.

Testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Porovnání koeficientu korelace s danou konstantou

Nechť c je reálná konstanta. Testujeme H_0: $\rho = c$ proti H_1: $\rho \neq c$. (Tento test se provádí např. tehdy, když experimentátor porovnává vlastnosti svých dat s vlastnostmi uváděnými v literatuře.) Test je založen na statistice

$U = \left(Z - \frac{1}{2} \ln \frac{1+c}{1-c} - \frac{c}{2(n-1)} \right) \sqrt{n-3}$, která má za platnosti H_0 pro $n \geq 10$ asymptoticky rozložení N(0,1), přičemž $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{12}}{1-R_{12}}$

je tzv. Fisherova Z-transformace. Kritický obor pro test H_0 proti oboustranné alternativě tedy je

$W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$. H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U \in W$.

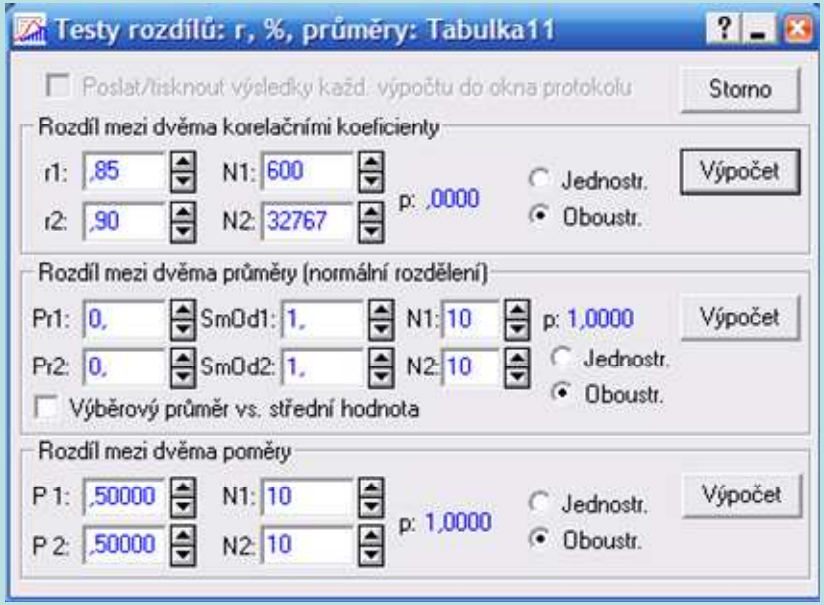
Příklad: U 600 vzorků rudy byl stanoven obsah železa dvěma analytickými metodami s výběrovým koeficientem korelace 0,85. V literatuře se uvádí, že koeficient korelace těchto dvou metod má být 0,9. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu

H_0: $\rho = 0{,}9$ proti H_1: $\rho \neq 0{,}9$.

Řešení: $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0{,}85}{1-0{,}85} = 1{,}2562$, $U = \left(1{,}2562 - \frac{1}{2} \ln \frac{1+0{,}9}{1-0{,}9} - \frac{0{,}9}{2(600-1)} \right) \sqrt{600-3} = -5{,}2976$, $u_{0{,}975} = 1{,}96$, $W = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$.

Protože $U \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty. Do políčka r1 napíšeme 0,85, do políčka N1 napíšeme 600, do políčka r2 napíšeme 0,9, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0000, tedy zamítáme nulovou hypotézu na asymptotické hladině významnosti 0,05.



Upozornění: Pokud bychom chtěli pomocí systému STATISTICA provést přesnější test s využitím statistiky U, můžeme vypočítat Fisherovu Z- transformaci pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru – Korelace, kde zadáme realizaci výběrového koeficientu korelace, rozsah výběru. Zajímá nás Fisher z.

Porovnání dvou korelačních koeficientů

Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry o rozsazích n a n^* z dvourozměrných normálních rozložení s korelačními koeficienty ρ a ρ^*. Testujeme H_0: $\rho = \rho^*$ proti H_1: $\rho \neq \rho^*$.

Označme R_{12} výběrový korelační koeficient 1. výběru a R_{12}^* výběrový korelační koeficient 2. výběru.

Položme $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_{12}}{1-R_{12}}$ a $Z^* = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_{12}^*}{1-R_{12}^*}$.

Platí-li H_0, pak testová statistika $U = \frac{Z - Z^*}{\sqrt{\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n^*-3}}}$ má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor pro test H_0 proti oboustranné alternativě tedy je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U \in W$.

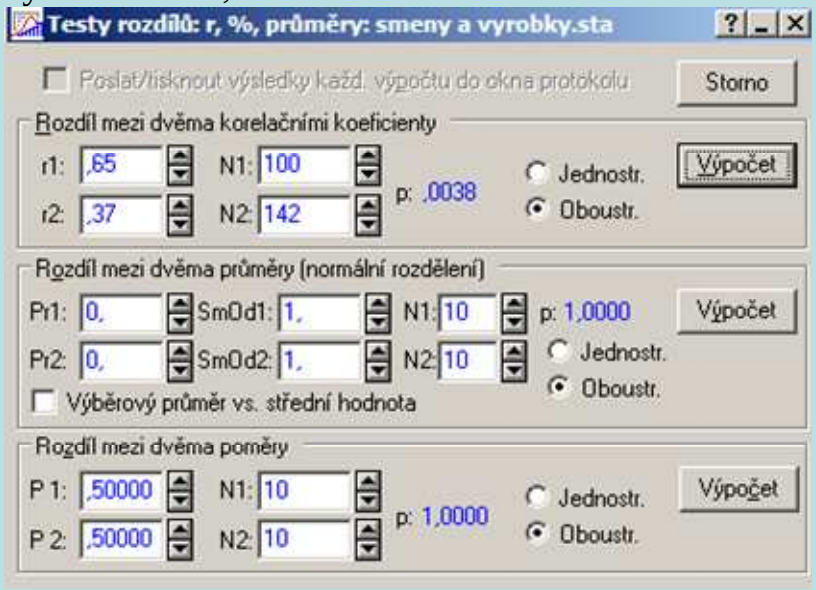
Příklad: Lékařský výzkum se zabýval sledováním koncentrací látek A a B v moči pacientů trpících určitou ledvinovou chorobou. U 100 zdravých jedinců činil výběrový korelační koeficient mezi koncentracemi obou látek 0,65 a u 142 osob trpících zmíněnou chorobou byl 0,37. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že korelační koeficienty v obou skupinách se neliší.

Řešení: $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}65}{1-0{,}65} = 0{,}7753$, $Z^* = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}37}{1-0{,}37} = 0{,}3884$, $U = \frac{0{,}7753 - 0{,}3884}{\sqrt{\frac{1}{100-3}+\frac{1}{142-3}}} = 2{,}9242$, $u_{0{,}975} = 1{,}96$, $W = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$.

Protože $U \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty. Do políčka r1 napíšeme 0,65, do políčka N1 napíšeme 100, do políčka r2 napíšeme 0,37, do políčka N2 napíšeme 142 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0038, tedy zamítáme nulovou hypotézu na asymptotické hladině významnosti 0,05.



Interval spolehlivosti pro korelační koeficient

Jestliže dvourozměrný náhodný výběr rozsahu n pochází z dvourozměrného normálního rozložení, jehož korelační koeficient se příliš neliší od nuly (je splněna podmínka $|\rho| < 0{,}5$) a rozsah výběru je dostatečně velký ($n \geq 100$), lze odvodit, že 100(1-α)% interval spolehlivosti pro ρ má meze $R_{12} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{1-R_{12}^2}{\sqrt{n-3}}$.

Nejsou-li uvedené podmínky splněny, pak nelze tento vzorec použít, protože rozložení výběrového korelačního koeficientu je příliš zešikmené. V takovém případě využijeme toho, že náhodná veličina $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_{12}}{1-R_{12}}$ má i při malém rozsahu výběru přibližně normální rozložení se střední hodnotou $E(Z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$ (2. sčítanec lze při větším n zanedbat) a rozptylem $D(Z) = \frac{1}{n-3}$. Standardizací veličiny Z dostaneme veličinu $U = \frac{Z-E(Z)}{\sqrt{D(Z)}}$, která má asymptoticky rozložení N(0,1). Tudíž 100(1-α)% asymptotický interval spolehlivosti pro $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}$ bude mít meze $Z \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$. Interval spolehlivosti pro ρ pak dostaneme zpětnou transformací.

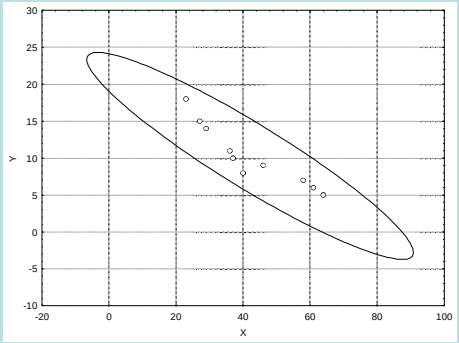
Poznámka: Jelikož Z = arctgh R_{12}, dostáváme R_{12} = tgh Z a meze intervalu spolehlivosti pro ρ můžeme psát ve tvaru $\mathrm{tgh}\left(Z \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)$, přičemž $\mathrm{tgh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Příklad: Pracovník personálního oddělení určité firmy zkoumá, zda existuje vztah mezi počtem dní absence za rok (veličina Y) a věkem pracovníka (veličina X). Proto náhodně vybral údaje o 10 pracovnících.

Č.prac.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	27	61	37	23	46	58	29	36	64	40
Y	15	6	10	18	9	7	14	11	5	8

Za předpokladu, že uvedené údaje tvoří číselné realizace náhodného výběru rozsahu 10 z dvourozměrného normálního rozložení, vypočtěte výběrový korelační koeficient a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro skutečný korelační koeficient ρ.

Řešení: Předpoklad o dvourozměrné normalitě dat ověříme orientačně pomocí dvourozměrného tečkového diagramu.



Vzhled diagramu svědčí o tom, že předpoklad je oprávněný.
Testujeme H_0: $\rho = 0$ proti H_1: $\rho \neq 0$. Vypočítáme $R_{12} = -0{,}9325$, tedy mezi věkem pracovníka a počtem dnů pracovní neschopnosti existuje silná nepřímá lineární závislost. Testová statistika: $T = -7{,}3053$, kvantil $t_{0,975}(8) = 2{,}306$, kritický obor $W = (-\infty, -2{,}306\rangle \cup \langle 2{,}306, \infty)$. Jelikož $T \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nezávislosti veličin X a Y.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Ve STATISTICE vypočteme meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro koeficient korelace ρ tak, že otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými (pojmenujeme je DM a HM) a jedním případem.

Do Dlouhého jména proměnné DM zapíšeme příkaz

= TanH(0,5*log((1-0,9325)/(1+0,9325))-VNormal(0,975;0;1)/sqrt(7))

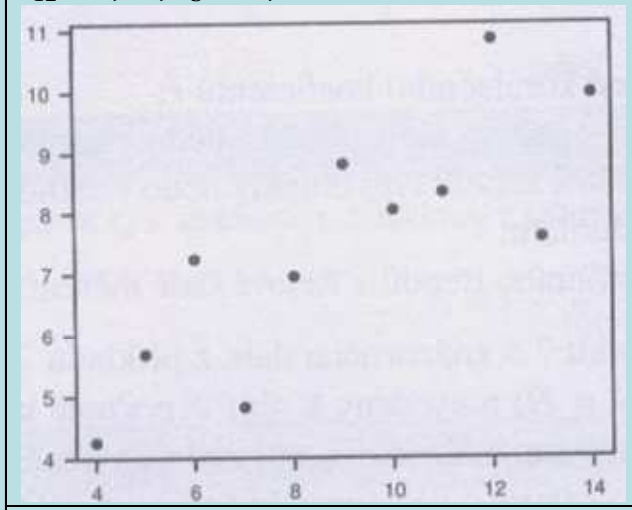
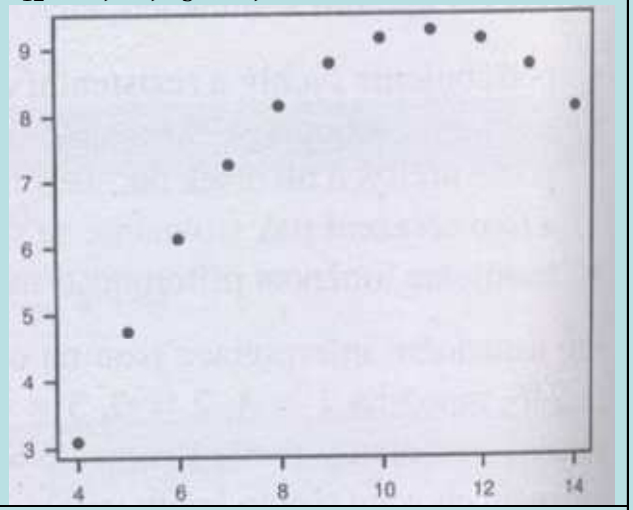
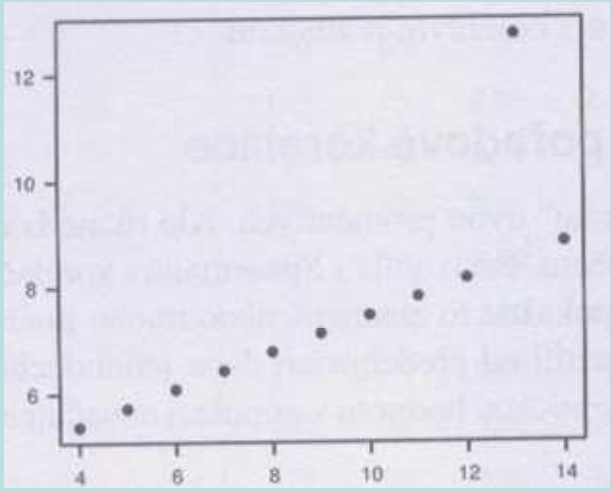
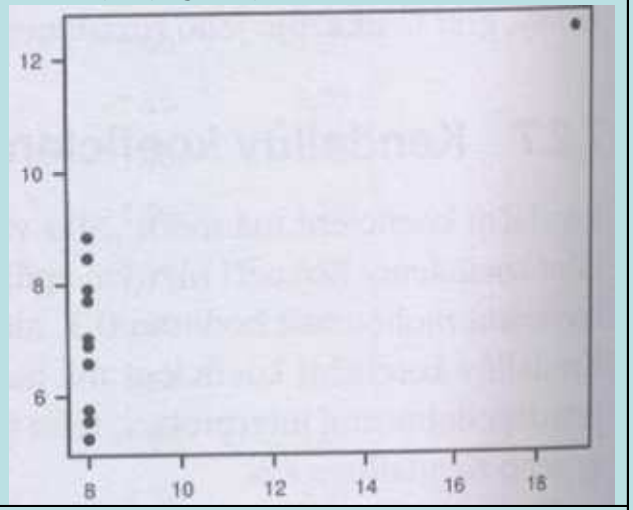
a do Dlouhého jména proměnné HM zapíšeme příkaz

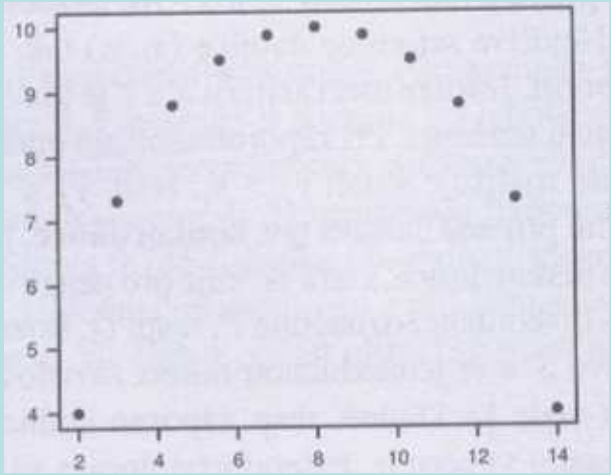
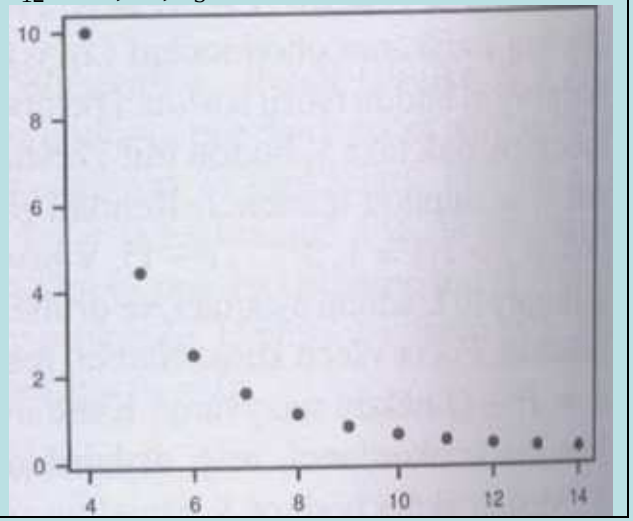
= TanH(0,5*log((1-0,9325)/(1+0,9325))+VNormal(0,975;0;1)/sqrt(7))

	1 DM	2 HM
1	-0,98425	-0,73358

95% asymptotický interval spolehlivosti pro koeficient korelace ρ má tedy meze –0,98425 a -0,73358. (Protože nepokrývá hodnotu 0, zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X, Y na asymptotické hladině významnosti 0,05.)

Ilustrace vlastností Pearsonova a Spearmanova koeficientu korelace

$r_{12} = 0{,}82$, $r_S = 0{,}82$ 	$r_{12} = 0{,}82$, $r_S = 0{,}69$ 
$r_{12} = 0{,}82$, $r_S = 0{,}99$ 	$r_{12} = 0{,}82$, $r_S = 0{,}5$ 
$r_{12} = 0$, $r_S = 0$	$r_{12} = -0{,}77$, $r_S = -1$

$r_{12} = 0, r_S = 0$	$r_{12} = -0{,}77, r_S = -1$
	

3. obrázek ukazuje odolnost Spearmanova koeficientu vůči odlehlým hodnotám.
6. obrázek dokumentuje schopnost Spearmanova koeficientu měřit monotónní vztahy.

Využití modulu „Analýza síly testu“ v systému STATISTICA

Testujeme-li na hladině významnosti α nulovou hypotézu (v našem případě H_0: $\rho = 0$) proti alternativní hypotéze (v našem případě H_1: $\rho \neq 0$), můžeme se dopustit jedné ze dvou chyb: chyba 1. druhu spočívá v tom, že H_0 zamítneme, ač ve skutečnosti platí a chyba 2. druhu spočívá v tom, že H_0 nezamítneme, ač ve skutečnosti neplatí.

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se značí α a nazývá se hladina významnosti testu.

Pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β.

Číslo $1 - \beta$ se nazývá síla testu a vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou test vypoví, že H_0 neplatí.

Modul „Analýza síly testu“ nám umožní vyřešit tři úkoly:

a) pro daný korelační koeficient ρ a danou hladinu významnosti α stanovit, jaký musí být rozsah výběru n, aby síla testu byla aspoň rovna danému číslu $1 - \beta$

b) pro dané ρ, α, n vypočítat sílu testu $1 - \beta$

c) pro daný výběrový koeficient korelace r a dané α určit meze $100(1- \alpha)\%$ intervalu spolehlivosti pro ρ.

Ad a) Stanovení rozsahu výběru

Předpokládáme, že náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ pochází z dvourozměrného normálního rozložení rozložení s koeficientem korelace $\rho = 0{,}3$. Jak velký musí být rozsah tohoto výběru, aby test $H_0: \rho = 0$ proti $H_1: \rho \neq 0$ měl sílu 0,8, je-li hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$?

Statistiky – Analýza síly testu – Výpočet velikosti vzorku – Jedna korelace, t-test – OK – Ró: 0,3, Alfa: 0,05, Požadovaná síla: 0,8 – OK – Vypočítat N.
Zjistíme, že minimální velikost výběru je 84.

Ad b) Výpočet síly testu

Předpokládáme, že náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_{25}, Y_{25})$ pochází z dvourozměrného normálního rozložení s koeficientem korelace ρ, který je neznámý. Výběrový koeficient korelace nabyl hodnoty -0,56. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujeme $H_0: \rho = 0$ proti $H_1: \rho \neq 0$. Jaká je síla testu?

Statistiky – Analýza síly testu – Výpočet síly testu - Jedna korelace, t-test – OK – Ró: -0,56, N: 25, Alfa: 0,05 – OK – Výpočetní algoritmus: zaškrtneme t-statistika – Vypočítat sílu.
Zjistíme, že síla testu je 0,8582.

Ad c) Nalezení intervalu spolehlivosti

Předpokládáme, že náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_{25}, Y_{25})$ pochází z dvourozměrného normálního rozložení s koeficientem korelace ρ, který je neznámý. Výběrový koeficient korelace nabyl hodnoty -0,56. Najděte 95% interval spolehlivosti pro ρ.

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu - Jedna korelace, t-test – OK – Pozorované R: -0,56, N: 25, Spolehlivost: 0,95 – Výpočetní algoritmus: zaškrtneme Fisherovo Z (původní) – Vypočítat.
Zjistíme, že Dolní mez = -0,7821, Horní mez = -0,2117.

Jednoduchá lineární regrese

Osnova:

- specifikace klasického modelu lineární regrese a jeho maticový zápis
- intervaly spolehlivosti pro regresní parametry
- celkový F-test
- dílčí t-testy
- kritéria pro posouzení vhodnosti zvolené regresní funkce
- detailní rozbor modelu regresní přímky

Motivace: Cíl regresní analýzy - popsat závislost hodnot veličiny Y na hodnotách veličiny X.
Nutnost vyřešení dvou problémů:

a) jaký typ funkce se použije k popisu dané závislosti;
b) jak se stanoví konkrétní parametry daného typu funkce?

ad a) Při určení typu funkce je třeba provést teoretický rozbor zkoumané závislosti. Teoretická analýza může upozornit například na to, že
s růstem hodnot veličiny X budou mít hodnoty veličiny Y tendenci monotónně růst či klesat,
tato tendence má charakter zrychlujícího se či zpomalujícího se růstu či poklesu,
jde o závislost, kdy s růstem hodnot veličiny X dochází zpočátku k růstu hodnot veličiny Y, který je po dosažení určitého maxima vystřídán poklesem,
apod.
Můžeme např. zkoumat závislost ceny ojetého auta (veličina Y) na jeho stáří (veličina X). Je zřejmé, že s rostoucím stářím bude klesat cena, ale není jasné, zda lineárně, kvadraticky či dokonce exponenciálně.
Vždy se snažíme o to aby regresní model byl jednoduchý, tj. aby neobsahoval příliš mnoho parametrů. Připadá-li v úvahu více funkcí, posuzujeme jejich vhodnost pomocí různých kritérií – viz dále.
Často však nemáme dostatek informací k provedení teoretického rozboru. Pak se snažíme odhadnout typ funkce pomocí dvourozměrného tečkového diagramu.
Zde se omezíme na funkce, které závisejí lineárně na parametrech $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$.

ad b) Odhady $b_0, b_1, \ldots, b_p$ neznámých parametrů $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ získáme na základě dvourozměrného datového souboru $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$ metodou nejmenších čtverců, tj. z podmínky, aby součet čtverců odchylek zjištěných a odhadnutých hodnot byl minimální.

Specifikace klasického modelu lineární regrese

$Y = m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)+\varepsilon$, kde

$m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$ - teoretická regresní funkce, která lineárně závisí na neznámých regresních parametrech $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ a známých funkcích $f_1(x),\ldots,f_p(x)$, které již neobsahují neznámé parametry, tj. $m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)=\sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x)$, přičemž $f_0(x)\equiv 1$.

Jde o deterministickou složku modelu.

Složka ε - náhodná složka modelu. Je to náhodná odchylka od deterministické závislosti Y na X. Popisuje závislost vysvětlované proměnné na neznámých nebo nepozorovaných proměnných a popisuje i vliv náhody. Nelze ji funkčně vyjádřit.

Veličina Y - závisle proměnná (též vysvětlovaná) veličina.

Veličina X - nezávisle proměnná (též vysvětlující) veličina.

Pořídíme n dvojic pozorování $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, tj. dvourozměrný datový soubor $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$.

Pro i = 1, ..., n platí: $y_i = m(x_i;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)+\varepsilon_i$.

O náhodných odchylkách $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ předpokládáme, že

a) $E(\varepsilon_i)=0$ (odchylky nejsou systematické)
b) $D(\varepsilon_i)=\sigma^2>0$ (všechna pozorování jsou prováděna s touž přesností)
c) $C(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$ pro $i\neq j$ (mezi náhodnými odchylkami neexistuje žádný lineární vztah)
d) $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$.

V tomto případě hovoříme o klasickém modelu lineární regrese.

Označení

$b_0, b_1, \ldots, b_p$ - odhady regresních parametrů $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ (nejčastěji je získáme metodou nejmenších čtverců, tj. z podmínky, že výraz

$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x_i)\right)^2$ nabývá svého minima pro $\beta_j = b_j$, $j = 0, 1, \ldots, p$)

$\hat{m}(x; b_0, \ldots, b_p)$ - empirická regresní funkce

$\hat{y}_i = \hat{m}(x_i; b_0, \ldots, b_p) = \sum_{j=0}^{p} b_j f_j(x_i)$ - regresní odhad i-té hodnoty veličiny Y (i-tá predikovaná hodnota veličiny Y)

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ - i-té reziduum

$S_E = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ - reziduální součet čtverců

$s^2 = \frac{S_E}{n - p - 1}$ - odhad rozptylu σ^2

$S_R = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - m_2)^2$ - regresní součet čtverců $\left(m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$

$S_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - m_2)^2$ - celkový součet čtverců $(S_T = S_R + S_E)$

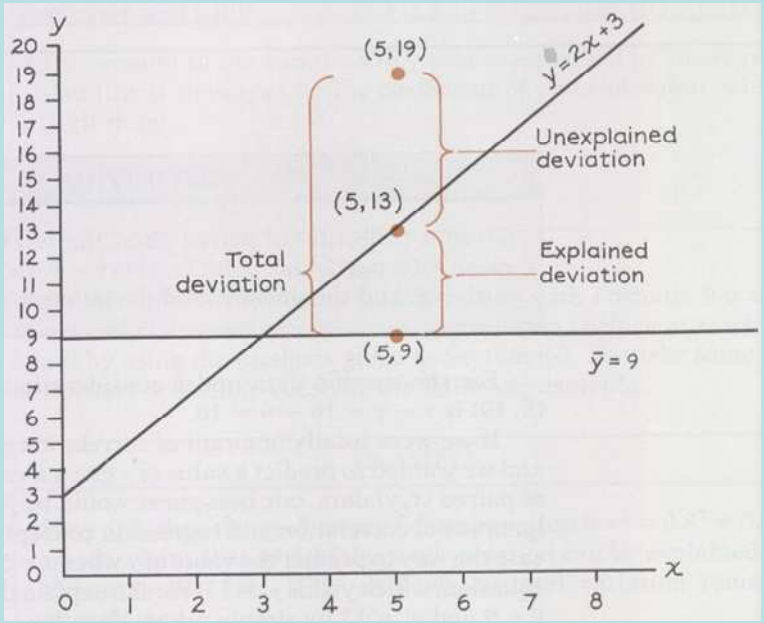
Význam jednotlivých typů součtů čtverců

Předpokládejme, že máme dvourozměrný datový soubor, v němž průměr hodnot závisle proměnné veličiny Y je 9 a závislost veličiny Y na veličině X je popsána regresní přímkou y = 2x + 3. Dvourozměrný tečkový diagram obsahuje bod o souřadnicích (5, 19), který pochází z datového souboru. Na regresní přímce leží bod o souřadnicích (5, 13).

Odchylka zjištěné hodnoty 19 od průměru 9 je v obrázku označena „Total deviation“ a po umocnění je to jedna ze složek celkového součtu čtverců S_T, tj. složka $y_i - m_2$.

Odchylka zjištěné hodnoty 19 od hodnoty 13 na regresní přímce je v obrázku označena „Unexplained deviation“ a po umocnění je to jedna ze složek reziduálního součtu čtverců S_E, tj. složka $y_i - \hat{y}_i$.

Odchylka hodnoty 13 na regresní přímce od průměru 9 je v obrázku označena „Explained deviation“ a po umocnění je to jedna ze složek regresního součtu čtverců S_R, tj. složka $\hat{y}_i - m_2$.



Maticový zápis klasického modelu lineární regrese

$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde

$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ - vektor pozorování závisle proměnné veličiny Y,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \ldots & f_p(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f_1(x_n) & \ldots & f_p(x_n) \end{pmatrix}$ - regresní matice

(předpokládáme, že h(**X**) = p+1 < n)

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$ - vektor regresních parametrů,

$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$ - vektor náhodných odchylek.

Podmínky (a) až (d) lze zkráceně zapsat ve tvaru $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

Maticově zapsaná metoda nejmenších čtverců vede na rovnice

$\mathbf{X'X\beta} = \mathbf{X'y}$ - systém normálních rovnic

$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1} \mathbf{X'y}$ – odhad vektoru **β** získaný metodou nejmenších čtverců

$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb}$ – vektor regresních odhadů (vektor predikce)

$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ - vektor reziduí

Vlastnosti odhadu **b**:

- odhad **b** je lineární, neboť je vytvořen lineární kombinací pozorování $y_1, \ldots, y_n$ s maticí vah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$;
- odhad **b** je nestranný, neboť $E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$;
- odhad **b** má varianční matici $\text{var}\,\mathbf{b} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$;
- odhad $\mathbf{b} \sim N_{p+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$ vzhledem k platnosti podmínky (d);
- pro odhad **b** platí Gaussova - Markovova věta: Odhad $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$ je nejlepší nestranný lineární odhad vektoru **β**.

Příklad

Sestrojte regresní matici **X** pro lineární regresní model

a) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, provedeme-li 4 měření,

b) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1}^2 + \beta_3 \ln x_{i2} + \varepsilon_i$, provedeme-li 5 měření.

Řešení:

ad a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}$, ad b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{11}^2 & \ln x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{21}^2 & \ln x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{31}^2 & \ln x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{41}^2 & \ln x_{42} \\ 1 & x_{51} & x_{51}^2 & \ln x_{52} \end{pmatrix}$

Intervaly spolehlivosti pro regresní parametry

$s_{b_j} = s\sqrt{v_{jj}}$ - směrodatná chyba odhadu b_j, kde v_{jj} je j-tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Pro j = 0, 1, ..., p statistika $T_j = \dfrac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \sim t(n-p-1)$, tedy 100(1- α)% interval spolehlivosti pro β_j má meze:

$b_j \pm t_{1-\alpha/2}(n-p-1)s_{b_j}$.

(S intervaly spolehlivosti souvisí relativní chyby odhadů regresních parametrů. Získají se tak, že se vypočítá absolutní hodnota podílu poloviční šířky intervalu spolehlivosti a hodnoty odhadu. Relativní chyba odhadu by neměla přesáhnout 10 %.)

Příklad:
V tabulce jsou výnosy technické cukrovky v tunách na ha od roku 2000 do roku 2007.

i	rok	cukrovka technická
1	2000	45,83
2	2001	45,41
3	2002	49,45
4	2003	45,20
5	2004	50,34
6	2005	53,31
7	2006	51,48
8	2007	53,25

Předpokládejte, že závislost výnosu cukrovky na roku lze vyjádřit regresní přímkou $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$.

a) MNČ najděte odhady neznámých regresních parametrů β_0, β_1.
b) Sestrojte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry β_0, β_1.
c) Najděte relativní chyby odhadů regresních parametrů β_0, β_1.

Řešení:

Vytvoříme datový soubor se dvěma proměnnými rok, Y a osmi případy.

Získání odhadů b_0, b_1:

Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná rok, nezávisle proměnné Y - OK – OK – Výpočet: Výsledky regrese.

	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (cukrovka_technicka.sta) R= ,84604287 R2= ,71578853 Upravené R2= ,66841995 F(1,6)=15,111 p<,00810 Směrod. chyba odhadu : 1,9651					
N=8	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(6)	p-hodn.
Abs.člen			-2312,22	607,4943	-3,80616	0,008903
rok	0,846043	0,217643	1,18	0,3032	3,88729	0,008102

Výpočet mezí intervalu spolehlivosti a relativních chyb odhadů:

K výstupní tabulce přidáme tři nové proměnné DM, HM a chyba.

Do Dlouhého jméne proměnné DM napíšeme

=v3-v4*VStudent(0,975;6)

Do Dlouhého jméne proměnné HM napíšeme

=v3+v4*VStudent(0,975;6)

Do Dlouhého jména proměnné chyba napíšeme

=100*abs(0,5*(v8-v7)/v3)

	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (cukrovka_technicka.sta) R= ,84604287 R2= ,71578853 Upravené R2= ,66841995 F(1,6)=15,111 p<,00810 Směrod. chyba odhadu : 1,9651								
N=8	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(6)	p-hodn.	DM =v3-v4*V	HM =v3+v4*V	chyba =100*abs
Abs.člen			-2312,22	607,4943	-3,80616	0,008903	-3798,71	-825,738	64,28814
rok	0,846043	0,217643	1,18	0,3032	3,88729	0,008102	0,436747	1,920634	62,94643

S pravděpodobností 95% se bude úsek β_0 regresní přímky nacházet v intervalu (-3798,71; -825,738). Odhad b_0 úseku β_0 je zatížen relativní chybou 64,3%.

S pravděpodobností 95% se bude směrnice β_1 regresní přímky nacházet v intervalu (-3798,71; -825,738). Odhad b_1 úseku β_1 je zatížen relativní chybou 62,9%.

Testování významnosti modelu jako celku (celkový F-test)

Na hladině významnosti α testujeme

H_0: $(\beta_1,\ldots,\beta_p)' = (0,\ldots,0)'$ proti H_1: $(\beta_1,\ldots,\beta_p)' \neq (0,\ldots,0)'$.

(Nulová hypotéza říká, že dostačující je model konstanty.)

Testová statistika: $F = \dfrac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$ má rozložení F(p, n-p-1), pokud H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty)$.

$F \in W \Rightarrow$ H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

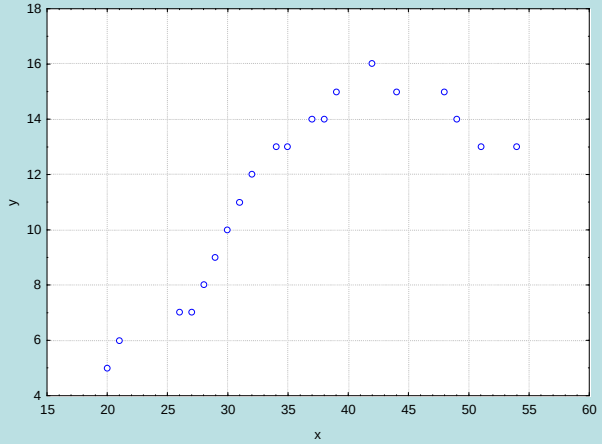
Výsledky F-testu zapisujeme do tabulky analýzy rozptylu:

zdroj variability	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	statistika F
model	S_R	p	S_R/p	$\dfrac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$
reziduální	S_E	n-p-1	$S_E/(n-p-1)$	-
celkový	S_T	n-1	-	-

Příklad:
Majitelé prodejny počítačových her nechali své prodavače absolvovat kurz prodejních dovedností. Poté zjišťovali po dobu 20 dnů, kolik osob navštíví během otevírací doby prodejnu (proměnná X) a jaká je v tento den tržba (proměnná Y, udává se v tisících Kč a je zaokrouhlená).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	20	21	2	27	28	29	30	31	32	34	35	37	38	39	42	44	48	49	51	54
y_i	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13	13	14	14	15	16	15	15	14	13	13

Dvourozměrný tečkový diagram



Z grafu závislosti Y na X vyplývá, že s rostoucím počtem zákazníků se tržby zvyšují, avšak při denním počtu zákazníků asi 42 dosahují svého maxima a pak už zase klesají (vyšší počet zákazníků obsluha prodejny nezvládá a zákazníci odcházejí, aniž by nakoupili). Zdá se tedy, že vhodným modelem závislosti tržeb na počtu zákazníků bude regresní parabola $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$.
Odhadněte parametry regresního modelu a proveďte celkový F-test.

Řešení:

Vytvoříme nový datový soubor se třemi proměnnými X, Xkv, Y a o 20 případech. Do proměnných X a Y napíšeme zjištěné hodnoty a do Dlouhého jména proměnné Xkv napíšeme = X^2.

Získání odhadů b_0, b_1, b_2:

Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná rok, nezávisle proměnné Y - OK – OK – Výpočet: Výsledky regrese.

N=20	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(17)	p-hodn.
Výsledky regrese se závislou proměnnou : y (prodejna_software.sta) R= ,95519276 R2= ,91239322 Upravené R2= ,90208653 F(2,17)=88,524 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 1,0623						
Abs.člen			-20,7723	3,373256	-6,15792	0,000011
x	4,52641	0,548220	1,5651	0,189559	8,25655	0,000000
xkv	-3,73838	0,548220	-0,0173	0,002535	-6,81912	0,000003

Regresní parabola má tedy tvar: $y = -20,7723 + 1,5651x - 0,0173x^2$.

Výsledky celkového F-testu jsou uvedeny v záhlaví výstupní tabulky. Testová statistika F nabývá hodnoty 88,524, odpovídající p-hodnota je blízká 0, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že dostačující je model konstanty.

Podrobnější výsledky získáme v tabulce analýzy rozptylu:

Aktivujeme Výsledky–vícenásobná regrese – Detailní výsledky – ANOVA

Efekt	Součet čtverců	sv	Průměr čtverců	F	p-hodn.
Analýza rozptylu (prodejna_software.sta)					
Regres.	199,8141	2	99,90706	88,52445	0,000000
Rezid.	19,1859	17	1,12858		
Celk.	219,0000				

Testování významnosti regresních parametrů (dílčí t-testy)

Na hladině významnosti α pro j = 0,1, ..., p testujeme hypotézu
H_0: $\beta_j = 0$ proti H_1: $\beta_j \neq 0$.

Testová statistika: $T_j = \frac{b_j}{s_{b_j}}$ má rozložení t(n-p-1), pokud H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle -\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty)$.

$T_j \in W \Rightarrow H_0$ zamítáme na hladině významnosti α.

Příklad:

V předešlém příkladě, kde byla modelována závislost tržby na počtu zákazníků regresní parabolou, proveďte dílčí t-testy o nevýznamnosti jednotlivých regresních parametrů

Řešení:

Stačí interpretovat výstupní tabulku vícenásobné regrese:

Výsledky regrese se závislou proměnnou : y (prodejna_software.sta)
R= ,95519276 R2= ,91239322 Upravené R2= ,90208653
F(2,17)=88,524 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 1,0623

N=20	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(17)	p-hodn.
Abs.člen			-20,7723	3,373256	-6,15792	0,000011
x	4,52641	0,548220	1,5651	0,189559	8,25655	0,000000
xkv	-3,73838	0,548220	-0,0173	0,002535	-6,81912	0,000003

Sloupec označený t(17) obsahuje realizace testových statistik a sloupec p-hodn. pak odpovídající p-hodnoty. Ve všech třech případech jsou p-hodnoty menší než 0,05, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézy o nevýznamnosti regresních parametrů β_0, β_1, β_2.

Kritéria pro posouzení vhodnosti zvolené regresní funkce

a) Index determinace

$ID^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_E}{S_T}$ - index determinace $(0 \le ID^2 \le 1)$

- udává, jakou část variability závisle proměnné veličiny Y lze vysvětlit zvolenou regresní funkcí (často se udává v %);
- je zároveň mírou těsnosti závislosti proměnné Y na proměnné X;
- je to obecná míra, nezávislá na typu regresní funkce (lze použít i pro měření nelineární závislosti);
- je to míra, která nebere v úvahu počet parametrů regresní funkce. U regresních funkcí s více parametry vychází tedy obvykle vyšší než u regresních funkcí s méně parametry;
- tato míra není symetrická.

Za vhodnější se považuje ta regresní funkce, pro niž je index determinace vyšší. V případě, že porovnáváme několik modelů s rozdílným počtem parametrů, používáme adjustovaný index determinace:

$ID_{adj}^2 = ID^2 - \frac{(1 - ID^2)p}{n - p - 1}$ - adjustovaný index determinace

V příkladu s prodejem software najdeme index determinace ve výstupní tabulce regrese:

Výsledky regrese se závislou proměnnou : y (prodejna_software.sta)
R= ,95519276 R2= ,91239322 Upravené R2= ,90208653
F(2,17)=88,524 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 1,0623

N=20	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(17)	p-hodn.
Abs.člen			-20,7723	3,373256	-6,15792	0,000011
x	4,52641	0,548220	1,5651	0,189559	8,25655	0,000000
xkv	-3,73838	0,548220	-0,0173	0,002535	-6,81912	0,000003

Index determinace je zde označen jako R2, nabývá hodnoty 0,9124 a říká nám, že 91,24% variability tržeb je vysvětleno regresní parabolou. Adjustovaný index determinace je označen Upravené R2.

b) Testové kritérium F

Za vhodnější je považována ta regresní funkce, u níž je hodnota testové statistiky $F = \frac{S_R / p}{S_E / (n - p - 1)}$ pro test významnosti modelu jako celku vyšší.

Ve výstupní tabulce regrese je testová statistika F uvedena v záhlaví:

N=20	Výsledky regrese se závislou proměnnou : y (prodejna_software.sta) R= ,95519276 R2= ,91239322 Upravené R2= ,90208653 F(2,17)=88,524 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 1,0623					
	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(17)	p-hodn.
Abs.člen			-20,7723	3,373256	-6,15792	0,000011
x	4,52641	0,548220	1,5651	0,189559	8,25655	0,000000
xkv	-3,73838	0,548220	-0,0173	0,002535	-6,81912	0,000003

V našem příkladě je označena F(2,17) a nabývá hodnoty 88,524.

c) Reziduální součet čtverců a reziduální rozptyl

Reziduální součet čtverců: $S_E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

Za vhodnější považujeme funkci, která má reziduální součet čtverců nižší. Reziduální součet čtverců lze použít pouze tehdy, když srovnáváme funkce se stejným počtem parametrů.

Reziduální rozptyl: $s^2 = \frac{S_E}{n - p - 1}$

Za vhodnější považujeme tu funkci, která má reziduální rozptyl nižší. Reziduální rozptyl můžeme použít vždy, bez ohledu na to, kolik parametrů mají srovnávané regresní funkce.

Obě charakteristiky najdeme v tabulce ANOVA:

	Analýza rozptylu (prodejna_software.sta)				
Efekt	Součet čtverců	sv	Průměr čtverců	F	p-hodn.
Regres.	199,8141	2	99,90706	88,52445	0,000000
Rezid.	19,1859	17	1,12858		
Celk.	219,0000				

Reziduální součet čtverců je 19,1859 a reziduální rozptyl je 1,12858.

d) Střední absolutní procentuální chyba predikce (MAPE)

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$$

Za vhodnější považujeme tu funkci, která má MAPE nižší.

Systém STATISTICA MAPE neposkytuje, tuto chybu musíme vypočítat.

Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná y, nezávisle proměnné x, xkv - OK – OK – zvolíme Rezidua/předpoklady/předpovědi – Reziduální analýza – Uložit – Uložit rezidua & předpovědi – vybereme proměnnou y - OK. K vzniklému datovému souboru přidáme jednu novou proměnnou, nazveme ji chyba a do jejího Dlouhého jména napíšeme =100*abs((v1-v2)/v1)
Pomocí Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky zjistíme průměr proměnné chyba. V našem případě je MAPE 9,31%.

e) Analýza reziduí

Rezidua považujeme za odhady náhodných odchylek a klademe na ně stejné požadavky jako na náhodné odchylky, tj.
mají být nezávislá,
mají být normálně rozložená,
mají mít nulovou střední hodnotu,
mají mít konstantní rozptyl (tj. jsou homoskedastická).

Nezávislost reziduí (autokorelaci) posuzujeme např. pomocí Durbinovy – Watsonovy statistiky, která by se měla nacházet v intervalu $\langle 1{,}4;2{,}6 \rangle$ (to je ovšem pouze orientační vodítko, korektní postup spočívá v porovnání této statistiky s tabelovanou kritickou hodnotou).

Normalitu reziduí ověřujeme pomocí testů normality (např. Lilieforsovou variantou Kolmogorovova – Smirnovova testu nebo Shapirovým – Wilksovým testem) či graficky pomocí N-P plotu.

Testování nulovosti střední hodnoty reziduí provádíme pomocí jednovýběrového t-testu.

Homoskedasticitu reziduí posuzujeme pomocí grafu závislosti reziduí na predikovaných hodnotách. V tomto grafu by rezidua měla být rovnoměrně rozptýlena.

Příklad: Proveďte analýzu reziduí pro příklad s modelováním závislosti tržby na počtu zákazníků.

Posouzení nezávislosti reziduí pomocí Durbinovy – Watsonovy statistiky:

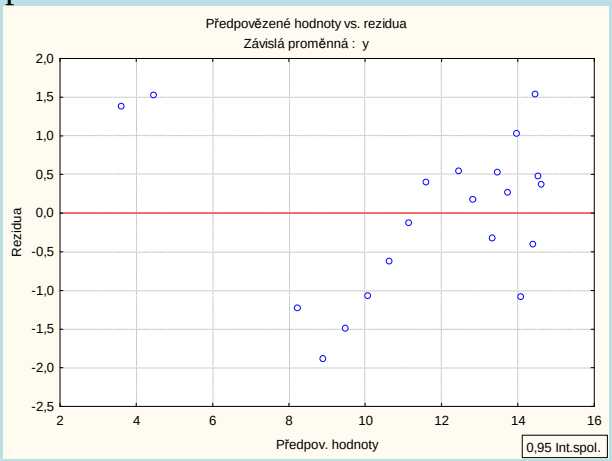
Statistiky – Vícenásobná regrese – proměnná Závislá: y, nezávislá x, xkv – OK – na záložce Residua/předpoklady/předpovědi vybereme Reziduální analýza - Detaily – Durbin-Watsonova statistika:

	Durbin-Watson.d	Sériové korelace
Odhad	0,702506	0,599248

Hodnota této statistiky je nízká, svědčí o tom, že rezidua jsou kladně korelovaná.

Posouzení homoskedasticity reziduí

Reziduální analýza – Bodové grafy – Předpovědi vs. rezidua



Je vidět, že rezidua nejsou kolem 0 rozmístěna náhodně. Model s regresní parabolou tedy není úplně vhodný.

Testování nulovosti střední hodnoty reziduí:

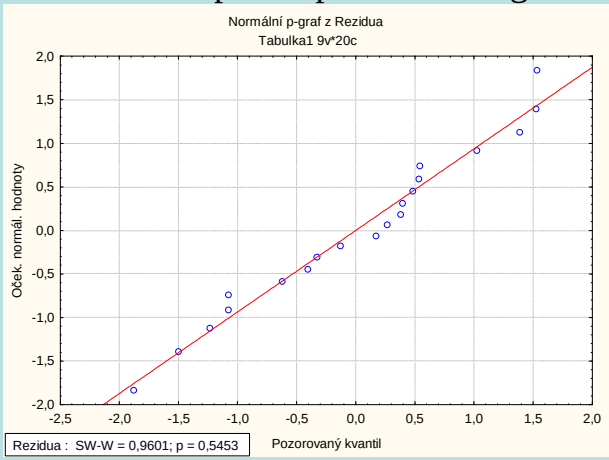
Pro proměnnou Rezidua z tabulky uložené pomocí Reziduální analýzy provedeme jednovýběrový t-test: Statistiky - Základní statistiky/tabulky – t-test, samost. vzorek – OK – proměnné Rezidua – OK.

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Rezidua	-0,000000	1,004880	20	0,224698	0,00	-0,000000	19	1,000000

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že střední hodnota reziduí je 0.

Posouzení normality reziduí:

Na záložce Pravděpodobnostní grafy zvolíme Normální pravděpodobnostní graf reziduí:



Rezidua se řadí kolem ideální přímky, lze tedy soudit, že se řídí normálním rozložením.

Závěr: V neprospěch regresní paraboly hovoří hodnota Durbinovy – Watsonovy statistiky a graf závislosti reziduí na predikovaných hodnotách.

Model regresní přímky

Máme regresní model $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, kde

$y = \beta_0 + \beta_1 x$ - teoretická regresní přímka (deterministicka složka modelu).

(Parametr β_0 interpretujeme jako teoretickou hodnotu Y při x = 0 a β_1 udává změnu Y, když X se změní o jednotku.)

Složka ε - náhodná složka modelu.

Předpoklady použití regresní přímky:

- Závislost Y na X má lineární charakter.
- Pro celý rozsah uvažovaných hodnot nezávisle proměnné X je reziduální rozptyl s^2 konstantní (hovoříme o homoskedasticitě a znamená to, že variabilita hodnot závisle proměnné veličiny Y kolem regresní přímky je stejná pro všechny uvažované hodnoty nezávisle proměnné veličiny X).
- Hodnoty závisle proměnné veličiny Y mají normální rozložení pro dané hodnoty x_i a jsou stochasticky nezávislé (to souvisí s uspořádáním experimentu).

Poznámka: Menší odchylky od normality a homoskedasticity je možno tolerovat.

Systém normálních rovnic pro regresní přímku

Uvažujeme regresní model $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$.

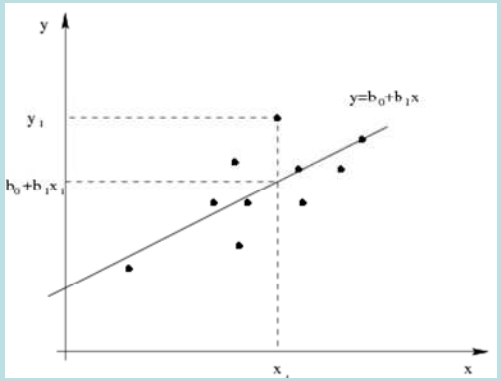
Systém normálních rovnic pro odhad regresních parametrů β_0 a β_1 získáme derivováním výrazu

$q(\beta_0,\beta_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ parciálně podle β_0 a β_1:

$$\frac{\partial q(\beta_0,\beta_1)}{\partial \beta_0} = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)(-1) = 0\,,\quad \frac{\partial q(\beta_0,\beta_1)}{\partial \beta_1} = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)(-x_i) = 0$$

Řešením tohoto systému získáme odhady $b_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$, $b_1 = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

Po jednoduchých úpravách dospějeme ke tvaru $b_1 = \dfrac{s_{12}}{s_1^{\,2}}$, kde s_{12} je kovariance hodnot (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ a $s_1^{\,2}$ je rozptyl hodnot $x_1, \ldots, x_n$. Dále dostáváme $b_0 = m_2 - b_1 m_1$, tedy regresní přímku můžeme vyjádřit ve tvaru $y = m_2 + \dfrac{s_{12}}{s_1^{\,2}}(x - m_1)$.



Index determinace regresní přímky

Kvalitu regresních modelů posuzujeme mj. pomocí indexu determinace: $ID^2 = \frac{S_R}{S_T}$, kde

$S_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - m_2)^2$ je regresní součet čtverců a $S_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_2)^2$ je celkový součet čtverců.

Pro regresní přímku má regresní součet čtverců tvar:

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - m_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[m_2 + \frac{s_{12}}{s_1^2}(x_i - m_1) - m_2 \right]^2 = \frac{s_{12}^2}{s_1^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_2)^2 = n \frac{s_{12}^2}{s_1^2}.$$

Celkový součet čtverců $S_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_2)^2 = n s_2^2$, tedy index determinace

$$ID^2 = \frac{S_R}{S_T} = \frac{n \frac{s_{12}^2}{s_1^2}}{n s_2^2} = \frac{s_{12}^2}{s_1^2 s_2^2} = r_{12}^2$$

Vidíme tedy, že v případě regresní přímky index determinace je roven kvadrátu koeficientu korelace.

Index determinace nabývá hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Často se vyjadřuje v procentech a informuje nás o tom, jakou část variability hodnot závisle proměnné veličiny Y vyčerpává regresní model.

Sdružené regresní přímky

Předpokládáme, že obě veličiny Y a X jsou náhodné a veličina X nezávisí na náhodné složce ε. Pak jde o případ oboustranné závislosti.

Závislost Y na X vystihuje regresní model $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$,

závislost X na Y vystihuje regresní model $X = \alpha_0 + \alpha_1 y + \delta$.

Odhady a_0, a_1 regresních parametrů α_0, α_1 v modelu $X_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_i + \delta_i$ získáme opět MNČ ve tvaru

$$a_1 = \frac{s_{12}}{s_2^2}, a_0 = m_1 - a_1 m_2 = m_1 - \frac{s_{12}}{s_2^2} m_2 .$$

Empirická regresní přímka závislosti X na Y má tedy rovnici:

$$x = m_1 + \frac{s_{12}}{s_2^2}(y - m_2).$$

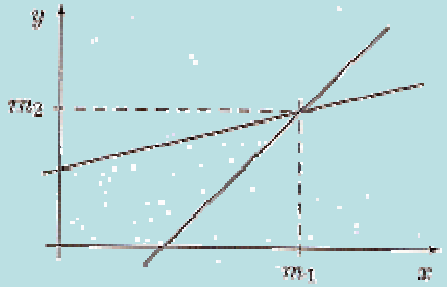
Obě empirické regresní přímky $y = b_0 + b_1 x$, $x = a_0 + a_1 y$ se nazývají sdružené regresní přímky a odhady regresních parametrů b_1, a_1 se nazývají odhady párově sdružených regresních parametrů.

Je zřejmé, že $b_1 a_1 = r_{12}^2$. Rovnice sdružených regresních přímek můžeme tedy psát ve tvaru:

$$y = m_2 + \frac{s_{12}}{s_1^2}(x - m_1), \; y = m_1 + \frac{1}{r_{12}} \frac{s_2}{s_1}(x - m_2).$$

Vlastnosti sdružených regresních přímek

a) Sdružené regresní přímky se protínají v bodě o souřadnicích $[m_1, m_2]$ (tj. v těžišti dvourozměrného tečkového diagramu).



b) Je-li $r_{12} = 0$ (tj. náhodné veličiny X, Y jsou nekorelované), pak sdružené regresní přímky mají rovnice $y = m_2$, $x = m_1$ (tj. jsou to kolmice rovnoběžné se souřadnými osami).

c) Je-li $r_{12}^2 = 1$ (tj. mezi náhodnými veličinami X, Y existuje úplná lineární závislost), pak sdružené regresní přímky splynou a $a_1 = \frac{1}{b_1}$.

d) Je-li $0 < r_{12}^2 < 1$, pak sdružené regresní přímky se liší a svírají úhel, který je tím menší, čím je těsnější lineární závislost veličin X, Y.

e) Označíme-li φ úhel, který svírají sdružené regresní přímky, pak z předešlých úvah plyne:

$\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow$ mezi X a Y neexistuje žádná lineární závislost;

$\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow$ mezi X a Y existuje úplná přímá lineární závislost;

$\cos\varphi = -1 \Leftrightarrow$ <=> mezi X a Y existuje úplná nepřímá lineární závislost.

Příklad:
Z fiktivního základního souboru všech vzorků oceli odpovídajících „všem myslitelným tavbám“ bylo do laboratoře dodáno 60 vzorků a zjištěny a hodnoty proměnné X – mez plasticity a Y – mez pevnosti. Datový soubor má tvar:

154	178	83	98	73	76	133	164	105	111	77	85
58	75	92	104	47	61	145	161	85	103	68	85
94	107	112	118	137	142	113	141	98	102	44	68
86	97	103	108	92	116	121	127	99	119	141	157
119	138	104	128	155	189	112	125	107	118	136	155
85	97	98	140	82	81	41	72	97	115	136	163
96	113	105	101	72	79	45	89	71	93	66	81
99	109	39	69	42	61	51	95	122	147	113	123
101	114	33	52	42	85	160	169	78	117	133	147
87	101	114	137	153	179	88	139	125	149	85	91

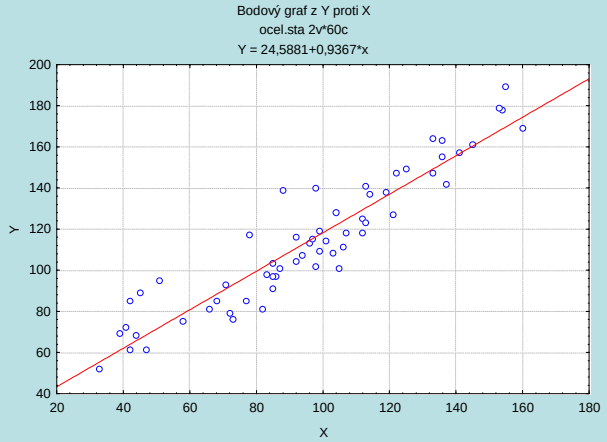
a) Určete regresní přímku meze pevnosti na mez plasticity.
b) Zakreslete regresní přímku do dvourozměrného tečkového diagramu.
c) Najděte regresní odhad meze pevnosti pro mez plasticity = 60.
d) Vypočtěte index determinace a interpretujte ho.
e) Najděte reziduální součet čtverců a odhad rozptylu náhodných odchylek.
f) Určete regresní přímku meze plasticity na mez pevnosti.
g) Zakreslete regresní přímku do dvourozměrného tečkového diagramu.
h) Obě regresní přímky zakreslete do téhož dvourozměrného tečkového diagramu.

Řešení v systému STATISTICA:

Ad a) Odhad parametrů 1. regresní přímky:
Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná Y, nezávisle proměnná X - OK – OK – Výpočet: Výsledky regrese.

N=60	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (ocel.sta) R= ,93454811 R2= ,87338017 Upravené R2= ,87119707 F(1,58)=400,06 p<0,0000 Směrod. chyba odhadu : 11,768					
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(58)	Úroveň p
Abs.člen			24,58814	4,740272	5,18707	0,000003
X	0,934548	0,046724	0,93668	0,046830	20,00160	0,000000

Ad b) Zakreslení regresních přímky do dvourozměrného tečkového diagramu:
Grafy – Bodové grafy – Proměnné X, Y – OK – OK.



Ad c) Výpočet predikované hodnoty: Pro výpočet predikované hodnoty zvolíme Rezidua/předpoklady/předpovědi - Předpovědi závisle proměnné X: 60 OK. Ve výstupní tabulce je hledaná hodnota označena jako Předpověď: 80,79

Proměnná	Předpovězené hodnoty (ocel.sta) proměnné: Y		
	b-váha	Hodnota	b-váha * Hodnot
X	0,936679	60,00000	56,20071
Abs. člen			24,58814
Předpověď			80,78885
-95,0%LS			76,25426
+95,0%LS			85,32344

Regresní odhad meze pevnosti pro mez plasticity 60 je tedy 80,8.

Ad d) Index determinace najdeme ve výstupní tabulce regrese pod označením R2:

N=60	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (ocel.sta) R= ,93454811 R2= ,87338017 Upravené R2= ,87119707 F(1,58)=400,06 p<0,0000 Směrod. chyba odhadu : 11,768					
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(58)	Úroveň p
Abs.člen			24,58814	4,740272	5,18707	0,000003
X	0,934548	0,046724	0,93668	0,046830	20,00160	0,000000

Vidíme, že variabilita meze pevnosti je regresní přímkou vyčerpána z 87,3 %.

Ad e) Reziduální součet čtverců a odhad rozptylu najdeme v tabulce ANOVA: Vrátíme se do Výsledky – Vícenásobná regrese – na záložce Detailní výsledky zvolíme ANOVA (Celk. vhodnost modelu)

Efekt	Analýza rozptylu (ocel.sta)				
	Součet čtverců	sv	Průměr čtverců	F	p-hodn.
Regres.	55400,60	1	55400,60	400,0641	0,000000
Rezid.	8031,80	58	138,48		
Celk.	63432,40				

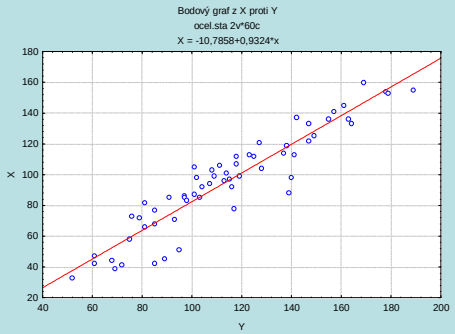
Vidíme, že reziduální součet čtverců je 8031,8 a reziduální rozptyl nabývá hodnoty 138,48.

Ad f) Výsledky pro 2. regresní přímku:

	Výsledky regrese se závislou proměnnou : X (ocel.sta) R= ,93454811 R2= ,87338017 Upravené R2= ,87119707 F(1,58)=400,06 p<0,0000 Směrod. chyba odhadu : 11,741					
N=60	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(58)	Úroveň p
Abs.člen			-10,7858	5,544250	-1,94540	0,056579
Y	0,934548	0,046724	0,9324	0,046617	20,00160	0,000000

Vidíme, že x = -10,7858 + 0,9324y.

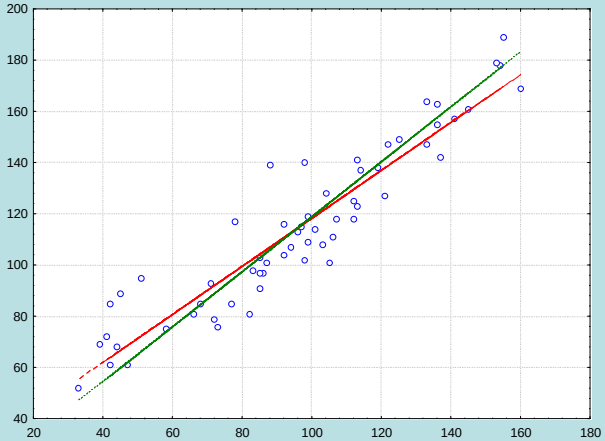
Ad g) Dvourozměrný tečkový diagram se zakreslenou 2. regresní přímkou



Ad h) Nakreslení sdružených regresních přímek do jednoho diagramu:

K datovému souboru ocel.sta přidáme dvě nové proměnné y1 a y2. Do proměnné y1 uložíme predikované hodnoty meze pevnosti na mezi plasticity (do Dlouhého jména proměnné y1 napíšeme =24,58814 + 0,93668*x a do Dlouhého jména proměnné y2 napíšeme =(x+10,7858)/0,9324

Grafy – Bodové grafy – zaškrtneme Vícenásobný – Proměnné X: X, Y: Y, y1, y2 – OK. Ve vytvořeném grafu pak vypneme zobrazování značek pro y1, y2 a naopak zapneme Spojnici.



Kritické hodnoty Durbinova-Watsonova testu pro autokorelaci 1. řádu pro $\alpha = 0{,}05$, rozsah výběru n a počet regresorů p (bez konstant)

	p=1		p=2		p=3		p=4		p=5	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Úvod do analýzy časových řad

Osnova:

- pojem časové řady
- druhy časových řad a jejich grafické znázornění
- statické a dynamické charakteristiky časové řady
- aditivní model časové řady
- odhad trendu časové řady pomocí klouzavých průměrů
- regresní analýza trendu

Pojem časové řady: Časovou řadou rozumíme řadu hodnot $y_{t_1},\ldots,y_{t_n}$ určitého ukazatele uspořádanou podle přirozené časové posloupnosti $t_1 < \ldots < t_n$. Jsou-li časové intervaly (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n) stejně dlouhé (ekvidistantní), zjednodušeně zapisujeme časovou řadu jako y_1, ..., y_n. Přitom ukazatel je veličina, která charakterizuje nějaký jev v určitém prostoru a určitém čase (okamžiku či intervalu).

Druhy časových řad

a) Časová řada okamžiková: příslušný ukazatel udává, kolik jevů existuje v daném časovém okamžiku (např. počet obyvatelstva k určitému dnu).

b) Časová řada intervalová: příslušný ukazatel udává, kolik jevů vzniklo či zaniklo v určitém časovém intervalu (např. počet sňatků během roku). Nejsou-li jednotlivé časové intervaly ekvidistantní, musíme provést očištění časové řady od důsledků kalendářních variací.

Příklad: Máme k dispozici údaje o tržbě obchodní organizace (v tis. Kč) v jednotlivých měsících roku 1995: 2400, 2134, 2407, 2445, 2894, 3354, 3515, 3515, 3225, 3063, 2694, 2600. Vypočtěte očištěné údaje.

Řešení: Průměrná délka měsíce je 365/12 dne. Očištěná hodnota

pro leden $y_1^{(o)} = 2400 \cdot \frac{365}{12 \cdot 31} = 2354{,}84$,

pro únor $y_2^{(o)} = 2134 \cdot \frac{365}{12 \cdot 28} = 2318{,}18$.

Pro ostatní měsíce analogicky dostaneme

2361,71; 2478,96; 2839,54; 3400,58, 3448,86; 3448,86; 3269,79; 3005,36; 2731,42; 2551,08.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných: trzba, dm (délky jednotlivých měsíců) a ot (očištěná tržba) a 12 případech. Do proměnné trzba zapíšeme zjištěné hodnoty. Do proměnné dm vložíme délky jednotlivých měsíců, tj. 31, 28, 30, …, 31. Do Dlouhého jména proměnné ot napíšeme =trzba*365/(12*dm).

	1 trzba	2 dm	3 ot
1	2400	31	2354,839
2	2134	28	2318,185
3	2407	31	2361,707
4	2445	30	2478,958
5	2894	31	2839,543
6	3354	30	3400,583
7	3515	31	3448,858
8	3515	31	3448,858
9	3225	30	3269,792
10	3063	31	3005,363
11	2694	30	2731,417
12	2600	31	2551,075

Grafické znázornění okamžikové časové řady

Použijeme spojnicový diagram. Na vodorovnou osu vynášíme časové okamžiky t_1, ..., t_n, na svislou osu odpovídající hodnoty y_1, ..., y_n. Dvojice bodů (t_i, y_i), i = 1, ..., n spojíme úsečkami.

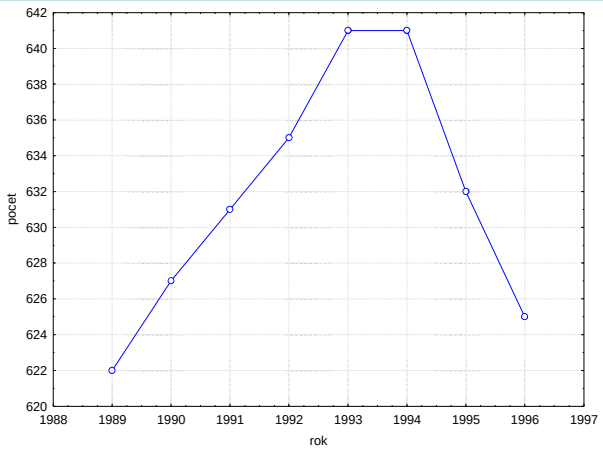
Příklad: Časová řada obsahuje údaje o počtu zaměstnanců určité akciové společnosti v letech 1989 – 1996 vždy k 31.12.

1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
622	627	631	635	641	641	632	625

Znázorněte tuto časovou řadu graficky.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných nazvaných rok a pocet a 8 případech.
Grafy – Bodové grafy – odškrtneme Lineární proložení – Proměnné X – rok, Y – počet – OK – OK. 2x klikneme na pozadí grafu – vybereme Graf: obecné – zaškrtneme Spojnice – OK.



Grafické znázornění intervalové časové řady

Použijeme sloupkový diagram. Je to soustava obdélníků, kde šířka obdélníku je rovna délce intervalu a výška odpovídá hodnotě ukazatele v daném intervalu. Ke znázornění intervalové časové řady lze použít i spojnicový diagram, přičemž na vodorovnou osu vynášíme středy příslušných intervalů.

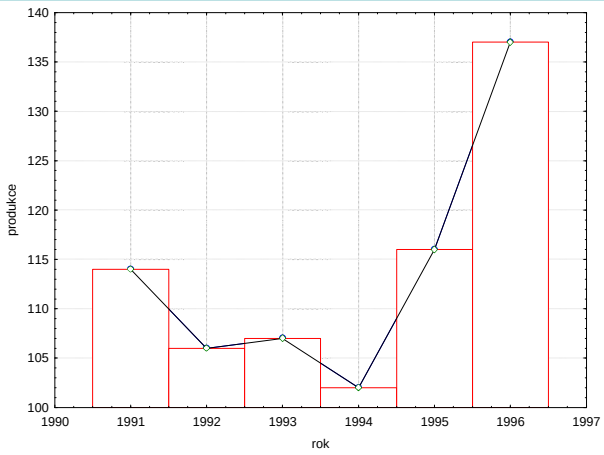
Příklad: Máme k dispozici údaje o produkci určitého podniku (v tisících výrobků) v letech 1991-1996.

1991	1992	1993	1994	1995	1996
114	106	107	102	116	137

Znázorněte tuto časovou řadu graficky.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných nazvaných rok a produkce a 6 případech.
Grafy – Bodové grafy – odškrtneme Lineární proložení – Proměnné X – rok, Y – produkce – OK – OK. 2x klikneme na pozadí grafu – vybereme Graf: obecné – zaškrtneme Spojnice – Přidat nový graf – typ Sloupcový graf – OK. Do sloupců označených jako Nový1, Nový2 okopírujeme hodnoty proměnných rok a produkce. Ve Všech možnostech: Sloupce upravíme šířku sloupce na 1.



Průměr okamžikové časové řady

Nejprve vypočteme průměry pro jednotlivé dílčí intervaly (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_{n-1}, t_n): $\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \ldots, \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$. Jsou-li všechny tyto intervaly stejně dlouhé, vypočteme prostý chronologický průměr okamžikové časové řady:

$$\bar{y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{y_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right).$$

Nemají-li intervaly stejnou délku, vypočteme $d_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$ a použijeme vážený chronologický průměr okamžikové časové řady:

$$\bar{y} = \frac{1}{\sum_{i=2}^{n} d_i} \sum_{i=2}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot d_i .$$

Příklad: Časová řada vyjadřuje počet obyvatelstva ČSSR (v tisících) v letech 1965 až 1974 vždy ke dni 31.12.

Rok	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
počet	14194	14271	14333	14387	14443	14345	14419	14576	14631	14738

Charakterizujte tuto časovou řadu chronologickým průměrem.

Řešení: $\bar{y} = \frac{1}{9} \left(\frac{14194}{2} + 14271 + \ldots + 14631 + \frac{14738}{2} \right) = 14430 .$

Průměr intervalové časové řady

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Příklad: Vypočtěte průměrnou hodnotu roční časové řady HDP ČR (v miliardách Kč) v letech 1994 až 2000.

1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1303,6	1381,1	1447,7	1432,8	1401,3	1390,6	1433,8

Řešení: $\bar{y} = \frac{1}{7}(1303{,}6 + \ldots + 1433{,}8) = 1398{,}7$.

Dynamické charakteristiky časových řad

Absolutní přírůstky

1. diference: $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}, i = 2, \ldots, n$

2. diference: $\Delta^{(2)} y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}, i = 3, \ldots, n$

atd.

(Diferencování má velký význam při odhadu trendu časové řady regresními metodami.)

Průměrný absolutní přírůstek: $\overline{\Delta} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \Delta y_i}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$

Relativní přírůstek

$\delta_i = \frac{\Delta y_i}{y_{i-1}}, i = 2, \ldots, n$

(Relativní přírůstek po vynásobení 100 udává, o kolik procent se změnila hodnota v čase t_i oproti času t_{i-1}.)

Koeficient růstu (tempo růstu)

$k_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}, i = 2, \ldots, n$

(Koeficient růstu po vynásobení 100 udává, na kolik procent hodnoty v čase t_{i-1} vzrostla či poklesla hodnota v čase t_i.)

Průměrný koeficient růstu

$\overline{k} = \sqrt[n-1]{k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$

Průměrný relativní přírůstek

$\overline{\delta} = \overline{k} - 1$

Příklad: Pro časovou řadu HDP ČR v letech 1994 až 2000 (v miliardách Kč) vypočtěte základní charakteristiky dynamiky a graficky znázorněte 1. diference a koeficienty růstu.

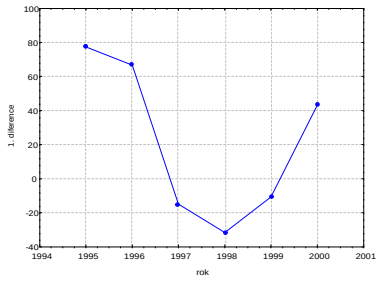
Řešení:

rok	HDP	Δy_i	k_i	δ_i
1994	1303,6	x	x	x
1995	1381,1	77,5	1,059	0,059
1996	1447,7	66,6	1,048	0,048
1997	1432,8	-14,7	0,990	-0,010
1998	1401,3	-31,5	0,978	-0,022
1999	1390,6	-10,7	0,992	-0,008
2000	1433,8	43,2	1,031	0,031

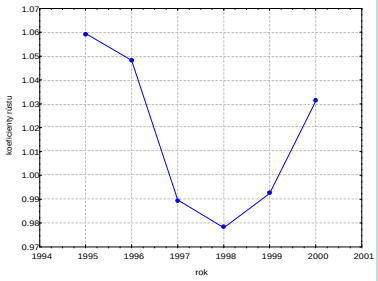
Průměrný absolutní přírůstek: $\overline{\Delta} = \frac{1433,8 - 1303,6}{6} = 21,7$, tzn., že v období 1994 – 2000 rostl HDP průměrně o 21,7 miliard Kč ročně.

Průměrný koeficient růstu: $\overline{k} = \sqrt[6]{\frac{1433,8}{1303,6}} = 1,016$, tzn., že v období 1994 – 2000 rostl HDP průměrně o 1,6% ročně.

Graf 1. diferencí:

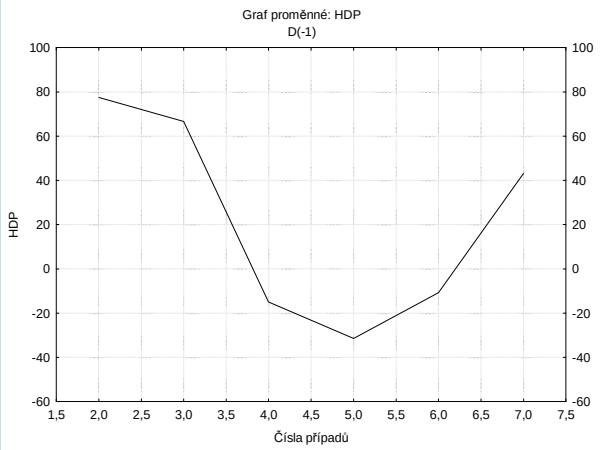


Graf koeficientů růstu:



Výpočet pomocí systému STATISTICA

Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné HDP – OK – OK (transformace, autokorelace, kříž. korelace, grafy) – Diferencování - OK (transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf.



Vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Otevře se nové datové okno, kde v proměnné HDP_1 jsou uloženy 1. diference.

	HDP	HDP_1
1	1303,600	
2	1381,100	77,500
3	1447,700	66,600
4	1432,800	-14,900
5	1401,300	-31,500
6	1390,600	-10,700
7	1433,800	43,200

Výpočet relativních přírůstků: $\delta_i = \frac{\Delta y_i}{y_{i-1}}$ pro i = 2,...,n

Vrátíme se do Transformace proměnných – označíme proměnnou, kterou chceme transformovat (HDP) – vybereme Posun – OK, (Transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf.
Vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Tato transformovaná veličina se uloží do tabulky pod názvem HDP_1 (proměnná s 1. diferencemi se přejmenuje na HDP_2). Přidáme novou proměnnou RP a do jejího Dlouhého jména napíšeme vzorec =HDP_2/HDP_1.

Výpočet koeficientů růstu: $k_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$ pro i = 2,...,n

Do tabulky přidáme proměnnou KR a do jejího Dlouhého jména napíšeme vzorec =HDP/HDP_1. Získáme tabulku

	1 HDP	2 HDP_2	3 HDP_1	4 RP	5 KR
1	1303,600				
2	1381,100	77,500	1303,600	0,059451	1,059451
3	1447,700	66,600	1381,100	0,048222	1,048222
4	1432,800	-14,900	1447,700	-0,01029	0,989708
5	1401,300	-31,500	1432,800	-0,02198	0,978015
6	1390,600	-10,700	1401,300	-0,00764	0,992364
7	1433,800	43,200	1390,600	0,031066	1,031066
8			1433,800		

Pomocí Grafy - 2D Grafy – Spojnicové grafy (Proměnné) vykreslíme průběh relativních přírůstků a koeficientů růstu.

Průměrný absolutní přírůstek a průměrný koeficient růstu vypočteme na kalkulačce pomocí vzorců
$\overline{\Delta} = \frac{1433{,}8 - 1303{,}6}{6} = 21{,}7$ a $\overline{k} = \sqrt[6]{\frac{1433{,}8}{1303{,}6}} = 1{,}016$.

Aditivní model časové řady

Předpokládejme, že pro časovou řadu $y_1, ..., y_n$ platí model

$y_t = f(t) + \varepsilon_t$, $t = 1, ..., n$, kde

$f(t)$ je neznámá trendová funkce (trend), kterou považujeme za systematickou (deterministickou) složku časové řady (popisuje hlavní tendenci dlouhodobého vývoje časové řady),

ε_t je náhodná složka časové řady zahrnující odchylky od trendu. Náhodná složka splňuje předpoklady

$E(\varepsilon_t) = 0$,

$D(\varepsilon_t) = \sigma^2$,

$C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$,

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ (říkáme, že ε_t je bílý šum).

Odhad trendu časové řady pomocí klouzavých průměrů

Podstata klouzavých průměrů

Předpokládáme, že časová řada se řídí aditivním modelem

$y_t = f(t) + \varepsilon_t$, t = 1, ..., n.

Odhad trendu v bodě t získáme určitým zprůměrováním původních pozorování z jistého okolí uvažovaného časového okamžiku t. Můžeme si představit, že podél dané časové řady klouže okénko, v jehož rámci se průměruje. Nechť toto okénko zahrnuje d členů nalevo od bodu t a d členů napravo od bodu t. Hovoříme pak o vyhlazovacím okénku šířky h = 2d + 1. Prvních a posledních d hodnot trendu neodhadujeme, protože pro $t \in \{1,\ldots,d\} \cup \{n-d+1,\ldots,n\}$ není vyhlazovací okénko symetrické. Odhad trendu ve středu vyhlazovacího okénka je dán vztahem:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2d+1}\left(y_{t-d} + y_{t-d+1} + \ldots + y_{t+d}\right) = \frac{1}{2d+1}\sum_{k=0}^{2d} y_{t-d+k}$$, t = d+1, ..., n-d.

Šířka vyhlazovacího okénka

Velmi důležitou otázkou je stanovení šířky vyhlazovacího okénka. Je-li okénko příliš široké, bude se odhad trendu blížit přímce (říkáme, že je přehlazen) a zároveň se ztratí velký počet členů na začátku a na konci časové řady. Je-li naopak okénko úzké, bude se odhad trendu blížit původním hodnotám (říkáme, že odhad je podhlazen). Nejčastěji se volí šířka okénka h = 3, 5, 7, pro čtvrtletní hodnoty pak 4.

Příklad: Časová řada 215, 219, 222, 235, 202, 207, 187, 204, 174, 172, 201, 272 udává roční objemy vývozu piva (v miliónech litrů) z Československa v letech 1980 až 1991.

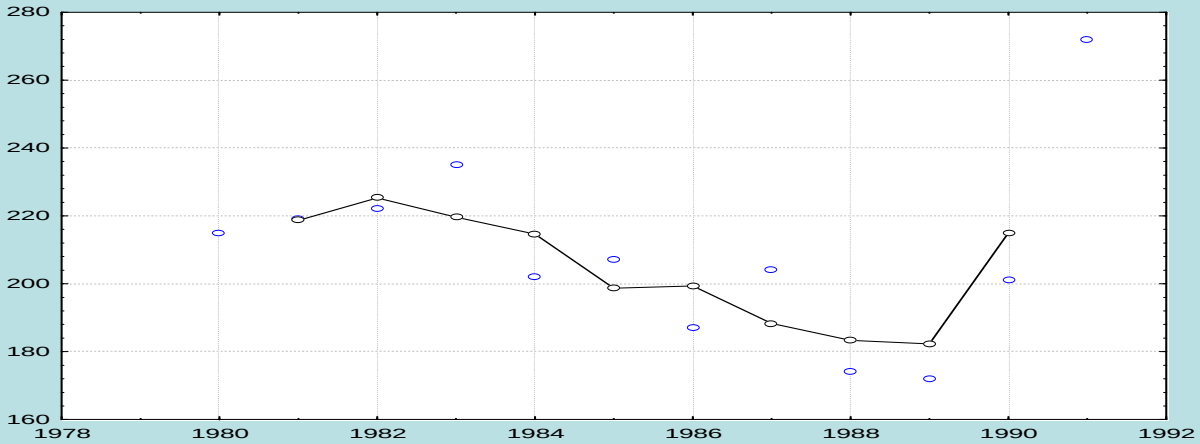
a) Odhadněte trend této časové řady pomocí klouzavých průměrů s vyhlazovacím okénkem šířky 3 a poté 5.
b) Graficky znázorněte průběh časové řady s odhadnutým trendem.

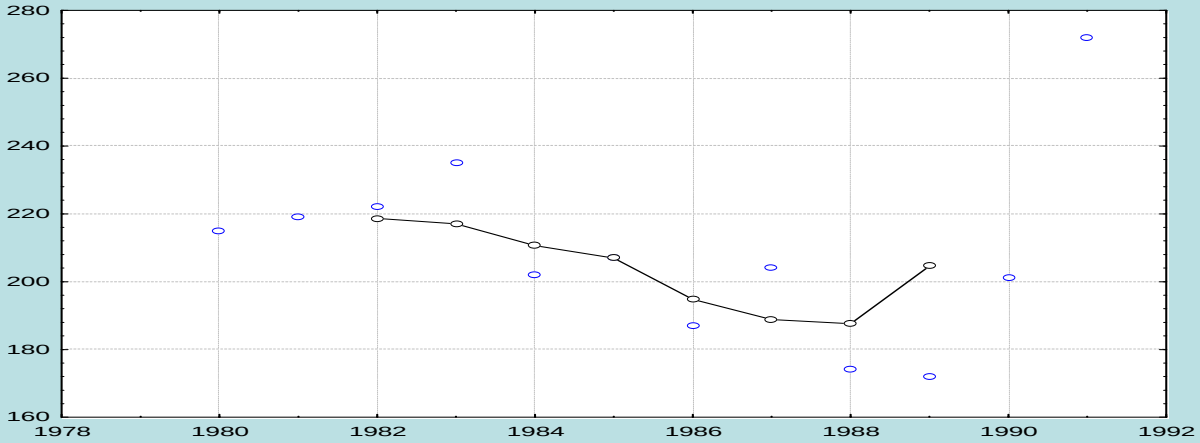
Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor export_piva.sta o dvou proměnných ROK a VYVOZ a dvanácti případech.
Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné Y – OK– OK (transformace, autokorelace, kříž. korelace, grafy) – Vyhlazování – zaškrtneme N-bod. klouzavý průměr, N = 3 – OK (Transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf, vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Otevře se nový spreadsheet, kde v proměnné VYVOZ_1 jsou uloženy klouzavé průměry pro N = 3. Totéž uděláme pro případ N = 5. Ve spreadsheetu se proměnná VYVOZ_1 přepíše na VYVOZ_2 a nová proměnná se uloží jako VYVOZ_1. Nově vzniklé proměnné nazveme KP3 a KP5. K datovému souboru přidáme proměnnou ROK, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =1979+v0.

	export_piva.sta			
	1 rok	2 VYVOZ	3 KP3	4 KP5
1	1980	215,000		
2	1981	219,000	218,667	
3	1982	222,000	225,333	218,600
4	1983	235,000	219,667	217,000
5	1984	202,000	214,667	210,600
6	1985	207,000	198,667	207,000
7	1986	187,000	199,333	194,800
8	1987	204,000	188,333	188,800
9	1988	174,000	183,333	187,600
10	1989	172,000	182,333	204,600
11	1990	201,000	215,000	
12	1991	272,000		

Grafické znázornění časové řady s odhadnutým trendem provedeme pomocí vícenásobných bodových grafů.





Cíl regresní analýzy trendu

Regresní analýza trendu má objasnit vztah mezi závisle proměnnou veličinou Y a časem t.

Předpokládáme, že trend f(t) závisí (lineárně či nelineárně) na neznámých parametrech $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ a známých funkcích $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)$, které již neobsahují žádné neznámé parametry, tj.

$f(t) = g(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k; \varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t))$.

Odhady $b_0, b_1, ..., b_k$ neznámých parametrů $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ lze získat např. metodou nejmenších čtverců a pak vyjádřit odhad $\hat{f}(t)$ neznámého trendu v bodě t pomocí odhadů $b_0, b_1, ..., b_k$ a funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)$, tj.

$\hat{f}(t) = g(b_0, b_1, ..., b_k; \varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t))$.

Nejdůležitější typy trendových funkcí

Volba typu trendové funkce se provádí

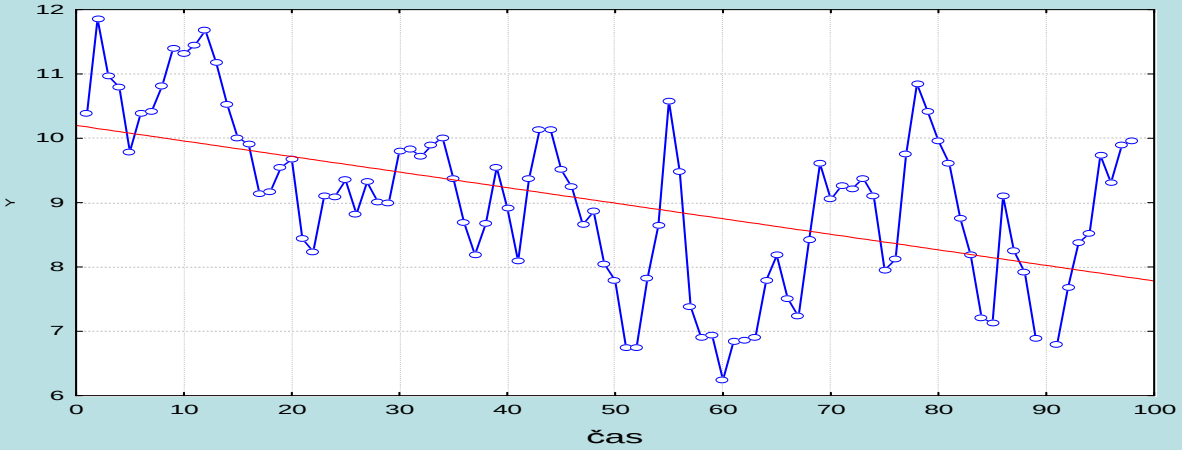
- na základě teoretických znalostí a zkušeností se zkoumanou veličinou Y_t
- pomocí grafu časové řady
- pomocí informativních testů založených na jednoduchých charakteristikách časové řady

a) Lineární trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$

Informativní test: 1. diference ($\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, t = 2, \ldots, n$) jsou přibližně konstantní.

Příklad lineárního trendu:

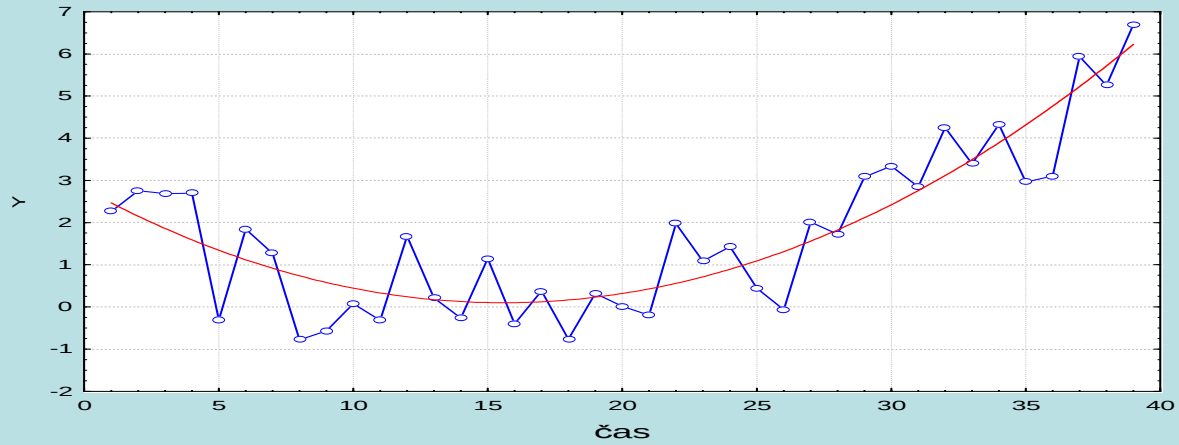


b) Kvadratický trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

Informativní test: 1. diference mají přibližně lineární trend, 2. diference ($\Delta^{(2)} y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}, t = 3, \ldots, n$) jsou přibližně konstantní.

Příklad kvadratického trendu:

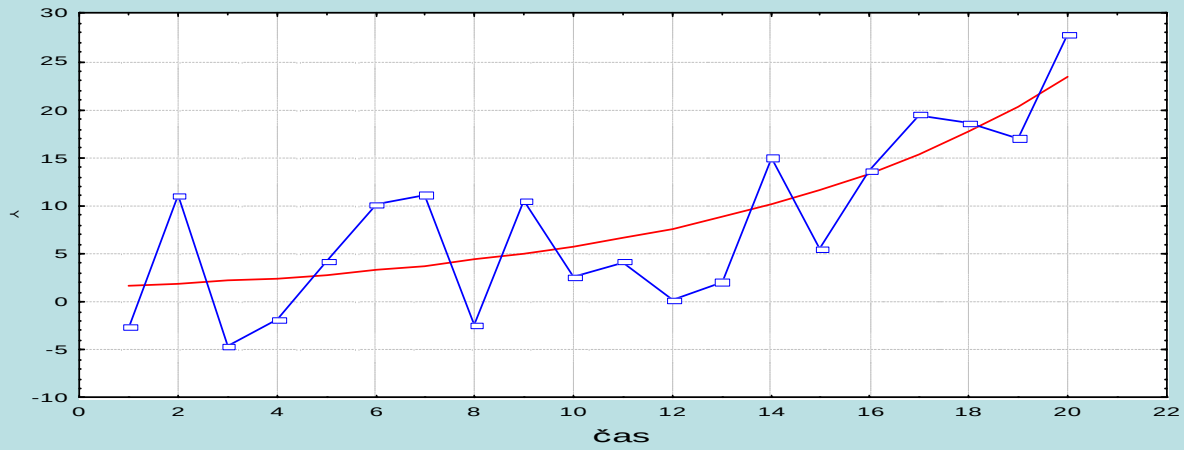


c) Exponenciální trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 \beta_1^{\,t}$.

Informativní test: koeficienty růstu ($k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}, t = 2, \ldots, n$) jsou přibližně konstantní.

Příklad exponenciálního trendu:

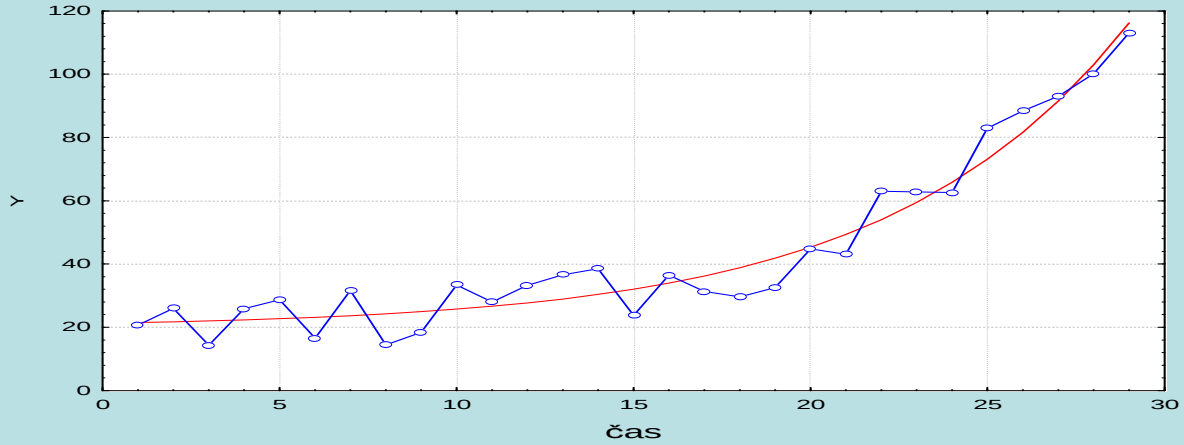


d) Modifikovaný exponenciální trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \alpha + \beta_0 \beta_1^{\,t}$.

Informativní test: řada podílů sousedních 1. diferencí je přibližně konstantní.

Příklad modifikovaného exponenciálního trendu

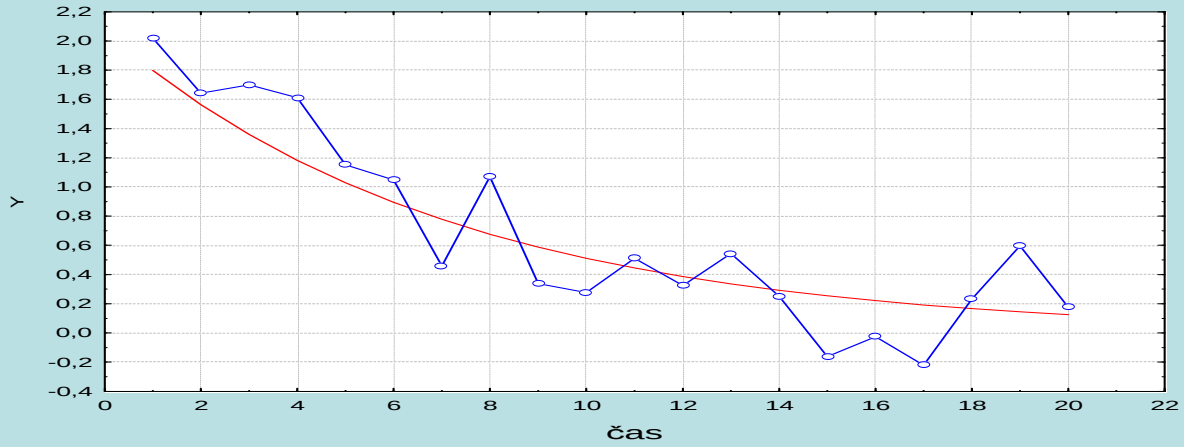


e) Logistický trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta_0 \beta_1^{\,t}}$

Informativní test: průběh 1. diferencí je podobný Gaussově křivce a podíly $\frac{1/y_{t+2} - 1/y_{t+1}}{1/y_{t+1} - 1/y_t}$ jsou přibližně konstantní.

Příklad logistického trendu:

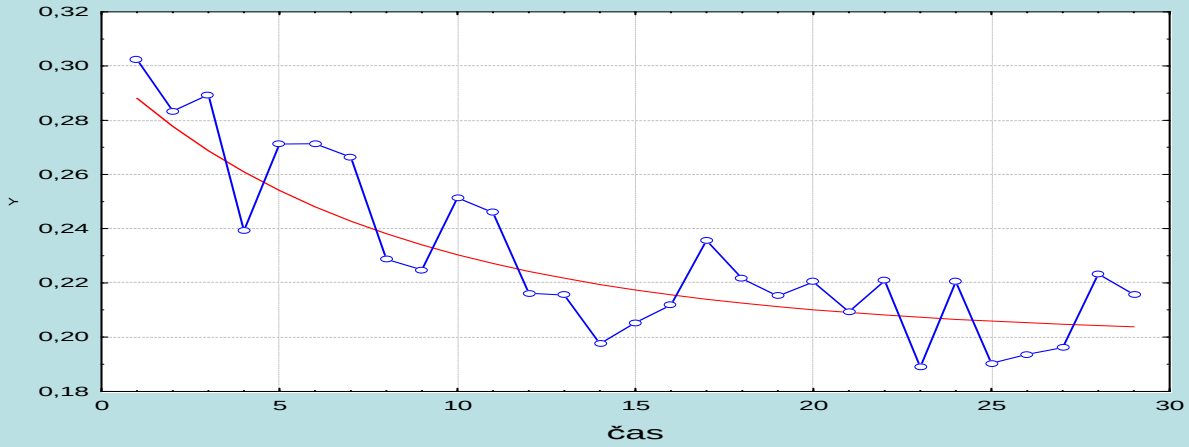


f) Gompertzova křivka

Analytické vyjádření: $f(t) = \alpha\beta_0^{\beta_1^t}$

Informativní test: podíly $\frac{\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}}{\ln y_{t+1} - \ln y_t}$ jsou přibližně konstantní.

Příklad Gompertzovy křivky



Modely (a), (b), (c) jsou lineární nebo se dají linearizovat a odhady parametrů získáme metodou nejmenších čtverců. Modely (d), (e), (f) jsou nelineární a odhady parametrů se získávají speciálními numerickými metodami.

Orientační ověřování kvality modelu

- Index determinace (tj. podíl vysvětlené a celkové variability závisle proměnné veličiny) by měl být blízký 1.
- Body grafu $\left(f(t), \hat{f}(t)\right)$, t = 1, 2, ..., n by se měly řadit do přímky se směrnicí 1.

Příklad: Časová řada 112, 149, 238, 354, 580, 867 udává zisk (v tisících dolarů) jisté společnosti v prvních šesti letech její existence.

a) Graficky znázorněte průběh této časové řady.

b) Vypočtěte koeficienty růstu

c) Z grafu časové řady a chování koeficientů růstu lze usoudit, že časová řada má exponenciální trend $f(t) = \beta_0 \beta_1^{\,t}$.

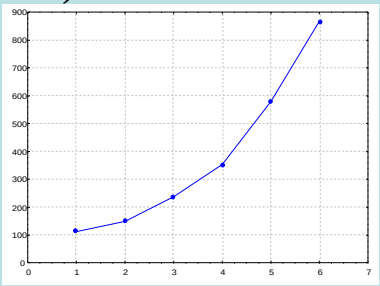
Odhadněte jeho parametry.

d) Najděte odhad zisku společnosti v 7. a 8. roce její existence.

e) Zjistěte index determinace a sestrojte graf $\left(f(t), \hat{f}(t)\right)$, t = 1, ..., 6.

Řešení: Znovu uveďme hodnoty časové řady: 112, 149, 238, 354, 580, 867

ad a)

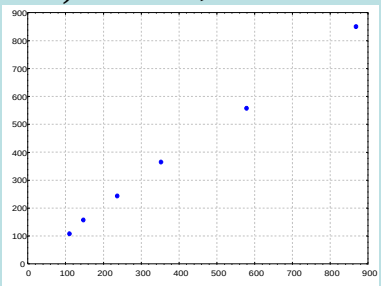


ad b) Koeficienty růstu: 149/112 = 1,33, 238/149 = 1,597, 354/238 = 1,487, 580/354 = 1,628, 867/580 = 1,495. Vidíme, že koeficienty růstu jsou přibližně konstantní.

ad c) Model $f(t) = \beta_0 \beta_1^{\,t}$ linearizujeme a metodou nejmenších čtverců získáme odhady ln b_0 = 4, 227983, ln b_1 = 0,420199. Odlogaritmováním dostaneme b_0 = 68,57875, b_1 = 1,522265.

ad d) $\hat{y}_7 = 68{,}57875 \cdot 1{,}522265^7 = 1299, \hat{y}_8 = 68{,}57875 \cdot 1{,}522265^8 = 1977$

ad e) ID^2 = 0,996



Jak index determinace, tak graf $\left(f(t), \hat{f}(t)\right)$ svědčí o tom, že model byl zvolen správně.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme datový soubor se dvěma proměnnými čas a Y a 6 případy.

ad a) Časovou řadu znázorníme graficky pomocí Grafy – Bodové grafy.

ad b) Koeficienty růstu získáme pomocí Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce.

ad c) K datovému souboru přidáme novou proměnnou ln Y, kterou získáme zlogaritmováním proměnné Y, v níž jsou uloženy hodnoty zisku společnosti. Provedeme regresní analýzu se závisle proměnnou ln Y a nezávisle proměnnou čas. K výstupní tabulce přidáme novou proměnnou, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =exp(b)

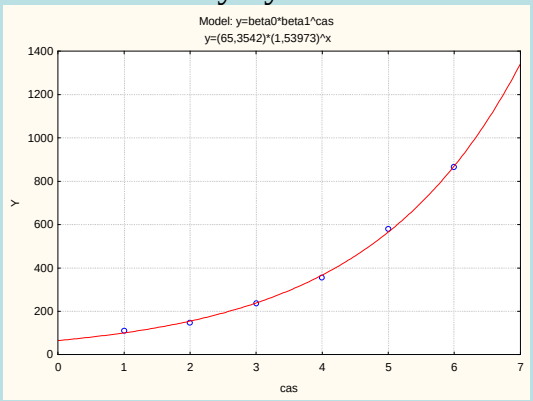
N=6	Výsledky regrese se závislou proměnnou : lnY (zisk_spolecnosti.sta) R= ,99801042 R2= ,99602479 Upravené R2= ,99503099 F(1,4)=1002,2 p<,00001 Směrod. chyba odhadu : ,05553						
	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(4)	p-hodn.	NProm =exp(b)
Abs.člen			4,227983	0,051691	81,79336	0,000000	68,57875
cas	0,998010	0,031525	0,420199	0,013273	31,65812	0,000006	1,522265

Vidíme, že $Y = 68{,}57875 \cdot 1{,}522265^{t}$.

ad d) Pro výpočet predikovaného zisku v 7. a 8. roce existence společnosti použijeme STATISTIKU jako kalkulačku.

ad e) Index determinace najdeme ve výstupní tabulce regrese pod označením R2. V našem případě je 0,996.
Pro získání grafu závislosti predikovaných hodnot na naměřených hodnotách přidám ek datovému souboru proměnnou predikce a do jejího Dlouhého jména napíšeme =68,57875*1,52265^cas. Pak vytvoříme Bodový graf.

Můžeme též nakreslit dvourozměrný tečkový diagram s odhadnutou regresní křivkou:
Na liště Detaily vybereme Proložení Exponenciální.



Seznam literatury

BUDÍKOVÁ, Marie, Maria KRÁLOVÁ a Bohumil MAROŠ. Průvodce základními statistickými metodami. vydání první. Praha: Grada Publishing, a.s., 2010. 272 s. edice Expert. ISBN 978-80-247-3243-5.

BUDÍKOVÁ, Marie, Tomáš LERCH a Štěpán MIKOLÁŠ. Základní statistické metody. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2005. viii, 170. ISBN 80-210-3886-1.

HENDL, Jan. Přehled statistických metod: analýza a metaanalýza dat. 3., přeprac. vyd. Praha: Portál, 2009. 695 s. ISBN 978-80-7367-482-3.