

# Štatistická analýza tvaru a obrazu

Interdisciplinárny prístup  
postavený na matematických a štatistických základoch

Stanislav Katina

<sup>1</sup>Ústav matematiky a štatistiky  
Přírodovědecká fakulta  
Masarykova Univerzita v Brně

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

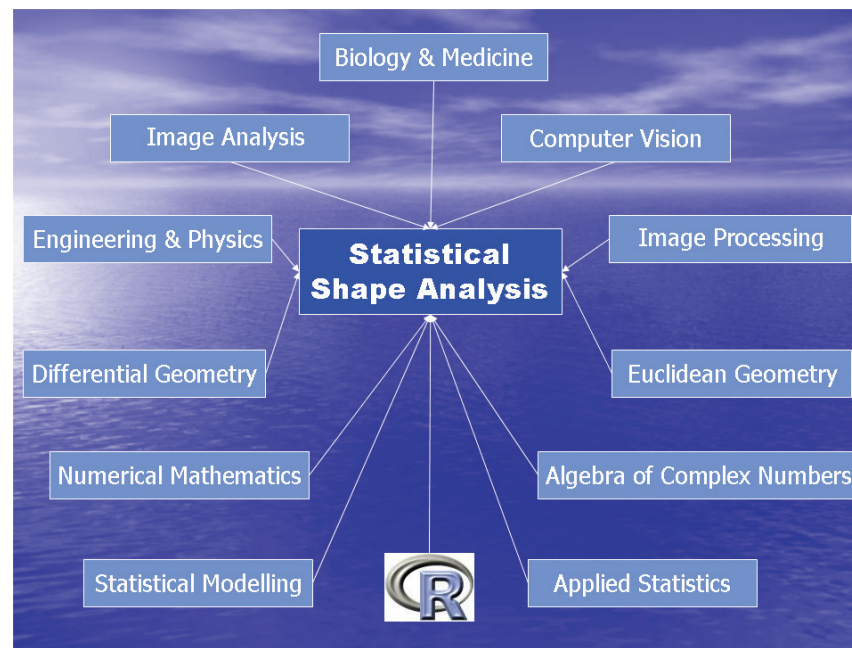


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Stanislav Katina

Štatistická analýza tvaru a obrazu

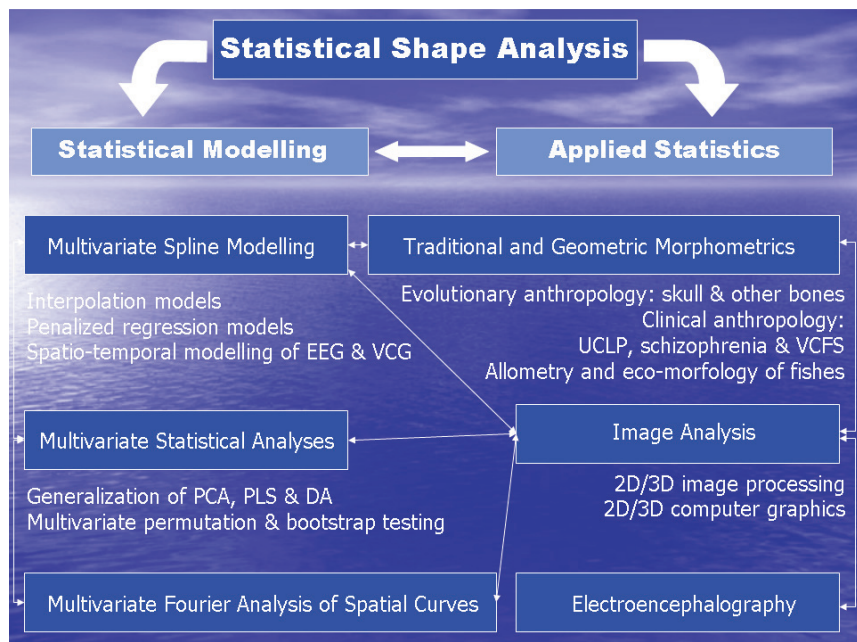
## Shape Analysis—Interdisciplinary View



Stanislav Katina

Štatistická analýza tvaru a obrazu

## Shape Analysis Vision $\approx$ My Partial Research Tree



Stanislav Katina

Štatistická analýza tvaru a obrazu

## Transformácie

Otočenie

Definition (Otočenie a optimálne otočenie medzi dvoma objektami)

**Rotačná matica** rotácie v smere a proti smeru hodinových ručičiek má v 2D nasledovný tvar

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a  $\mathbf{X}_{(k+1) \times 2} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{1}_2)^T$ . Potom dostaneme transformáciu v tvare  $\mathbf{X}_r = \mathbf{X}\Gamma$ .

**Optimálna rotácia medzi dvoma objektami.** Nech  $\mathbf{X}_1$  a  $\mathbf{X}_2$  sú  $k \times d$  konfiguračné matice. Nech  $\Gamma$  je rotačná matica, ktorá minimalizuje  $\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\Gamma\|^2$  alebo maximalizuje  $\text{tr}(\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 \Gamma)$ . Optimálne znamienkovaná SVD matice  $\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2$  je definovaná ako  $\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ , kde  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  sú rotačné matice a elementy matice  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T$  sú optimálne znamienkované. Ďalej  $\text{tr}(\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 \Gamma) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}^T \Gamma \mathbf{U}))$  je jednoznačne maximalizovaná cez všetky rotačné matice  $\Gamma$ , kde  $\mathbf{V}^T \Gamma \mathbf{U} = \mathbf{I}$  a  $\Gamma = \mathbf{V}\mathbf{U}^T$ , z čoho vyplýva, že  $\text{tr}(\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 \Gamma) = \sum_{j=1}^d \lambda_j = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

Stanislav Katina

Štatistická analýza tvaru a obrazu

## Definition (Posunutie)

Nech  $t_{x^{(1)}}$  je translačný koeficient translácie v smere osi  $x^{(1)}$  a  $t_{x^{(2)}}$  translačný koeficient translácie v smere osi  $x^{(2)}$ , potom má **translačná matica**  $\mathbf{T}_t$  v 2D tvar

$$\mathbf{T}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_{x^{(1)}} \\ 0 & 1 & t_{x^{(2)}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformáciu **posunutie** píšeme v tvare  $\mathbf{X}_t = \mathbf{X}\mathbf{T}_t$ .

## Definition (Škálovanie)

Nech  $s_{x^{(1)}}$  je škálovací koeficient škálovania v smere osi  $x^{(1)}$  a  $s_{x^{(2)}}$  je škálovací koeficient škálovania v smere osi  $x^{(2)}$ , potom má **škálovacia matica**  $\mathbf{T}_{sc}$  v 2D tvar

$$\mathbf{T}_{sc} = \begin{pmatrix} s_{x^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & s_{x^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformáciu **škálovanie** píšeme v tvare  $\mathbf{X}_{sc} = \mathbf{X}\mathbf{T}_{sc}$ .

## Definition (Procrustove tvarové súradnice)

**Procrustove tvarové súradnice** sú definované ako  $\mathbf{x}_{P,ij} = c_i \Gamma_i (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{t}_i)$ , kde  $c_i$  je škálovací koeficient,  $\Gamma_i$  je rotačná matica a  $\mathbf{t}_i$  translačný koeficient,  $\mathbf{x}_{P,ij}$  sú riadky matic  $\mathbf{X}_{P,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Potom hovoríme, že  $\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sú v **optimálnej Procrustovej pozícii** v zmysle 'tvaru' ak

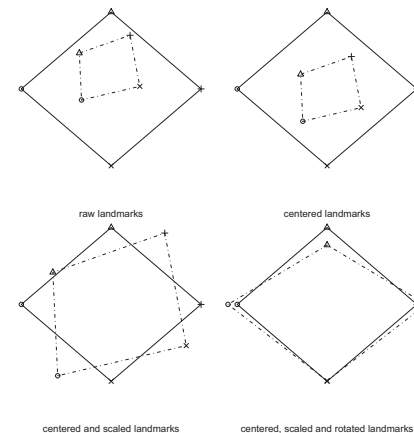
$$\arg \inf \sum_{1 \leq i < j \leq n} \|\mathbf{X}_{P,i} - \mathbf{X}_{P,j}\|^2 =$$

$$\arg \inf \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\| c_i \Gamma_i (\mathbf{X}_i - \mathbf{1}_k \mathbf{t}_i^T)^T - c_j \Gamma_j (\mathbf{X}_j - \mathbf{1}_k \mathbf{t}_j^T)^T \right\|^2 \right\}$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \text{SO}(2)$   
 $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n \in \mathbb{R}^d, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+$

Iteračný algoritmus Procrustovej superimpozície:

- 1 najprv vypočítame **centroidy**  $\bar{\mathbf{x}}_{c,i}$  každej konfiguračnej matice  $\mathbf{X}_i$ ; konfiguračné matice potom **centrujeme**, kde  $\mathbf{X}_{c,i} = \mathbf{X}_i - \mathbf{1}_k \bar{\mathbf{x}}_{c,i}^T$  (t.j. centroidy  $\bar{\mathbf{x}}_{c,i}$  sú superponované),
- 2 potom vypočítame **centroidovú veľkosť** každej matice  $\mathbf{X}_i$  (odmocnina sumy euklidovských vzdialeností centroidu od súradníc landmarkov), t.j.  
 $CS_i = \sqrt{(\sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_{ij} - \bar{\mathbf{x}}_{c,i}\|_2^2)} = \|\mathbf{X}_{c,i}\| = \text{tr}(\mathbf{X}_{c,i} \mathbf{X}_{c,i}^T)$
- 3 **centrované konfiguračné matice**  $\mathbf{X}_{c,i}$  sú **preškálované** tak, aby  $CS_i = 1$ , kde dostaneme **centrované normované konfiguračné matice**  $\mathbf{X}_{cn,i} = \mathbf{X}_{c,i} / \|\mathbf{X}_{c,i}\|$
- 4 každá  $\mathbf{X}_{cn,i}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , je optimálne rotovaná k  $\mathbf{X}_{cn,1}$  rotačnou maticou  $\Gamma_i$ , ktorá minimalizuje  $\|\mathbf{X}_{cn,1} - \mathbf{X}_{cn,i} \Gamma_i\|^2$  alebo maximalizuje  $\text{tr}(\mathbf{X}_{cn,1}^T \mathbf{X}_{cn,i} \Gamma_i)$ , kde sme použili *optimálne znamienkovanú SVD*  $\mathbf{X}_{cn,1}^T \mathbf{X}_{cn,i} = \mathbf{U}_i \Lambda_i \mathbf{V}_i^T$ ,  $\mathbf{U}_i$  a  $\mathbf{V}_i$  sú rotačné matice a elementy  $\Lambda_i = \text{diag}(\lambda_i)$ ,  $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i,dk})^T$  sú optimálne znamienkované,  $\text{tr}(\mathbf{X}_{cn,1}^T \mathbf{X}_{cn,i} \Gamma_i) = \text{tr}(\Lambda_i (\mathbf{V}_i^T \Gamma_i \mathbf{U}_i))$  sú jednoznačne maximalizované rotačnými maticami  $\Gamma_i$ , kde  $\mathbf{V}_i^T \Gamma_i \mathbf{U}_i = \mathbf{I}$ ,  $\Gamma_i = \mathbf{V}_i \mathbf{U}_i^T$ ,  
 $\text{tr}(\mathbf{X}_{cn,1}^T \mathbf{X}_{cn,i} \Gamma_i) = \sum_{j=1}^d \lambda_{ij} = \alpha_i$ ,  $\alpha_i > 0$ ; výsledkom sú matice  $\mathbf{X}'_{P,i}$ ,
- 5 vypočítaj priemernú konfiguračnú maticu  $\bar{\mathbf{X}}_P$  matic  $\mathbf{X}'_{P,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- 6 zopakuj (4) a (5) pokiaľ rozdiel medzi krokom  $i - 1$  a  $i$  nebude dostatočne malý



Obrázok: Procrustova geometria

# Transformácie

Skosenie

## Definition (Skosenie)

Nech  $\alpha_{x^{(1)}}$  je koeficient skosenia pozdĺž osi  $x^{(1)}$  a  $\alpha_{x^{(2)}}$  koeficient skosenia pozdĺž osi  $x^{(2)}$ , potom **matica skosenia**  $\mathbf{T}_{sh}$  pozdĺž osi  $x^{(1)}$  a pozdĺž osi  $x^{(2)}$  má tvar

$$\mathbf{T}_{sh} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \alpha_{x^{(1)}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_{sh} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \alpha_{x^{(2)}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{sh} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \alpha_{x^{(1)}} & 0 \\ \tan \alpha_{x^{(2)}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformáciu **skosenie** píšeme v tvare  $\mathbf{X}_{sh} = \mathbf{X}\mathbf{T}_{sh}$ .

# Transformácie

Zrkadlenie

## Definition (Zrkadlenie)

Nech **matica zrkadlenia**  $\mathbf{T}_r$  osovej súmernosti okolo osi  $x^{(1)}$  a  $x^{(2)}$  má tvar

$$\mathbf{T}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformáciu **zrkadlenie** píšeme v tvare  $\mathbf{X}_r = \mathbf{X}\mathbf{T}_r$ .

## Definition (Preznačené a zrkadlovo súmerné Procrustove súradnice)

Nech  $\mathbf{Q}$  je **permutačná matica**, ktorá preznačí každý každý pár súradníc párových landmarkov (vymení kódovanie ľavý za pravý landmark a naopak), nech  $\mathbf{A}$  je ortogonálna matica s determinantom rovným  $-1$ . Potom  $\mathbf{X}_{P,i}^{(R)} = \mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{X}_{P,i}$  sú matice **preznačených a zrkadlovo súmerných** (relabelled and reflected) **Procrustových tvarových súradníc**. V prípade, že MNŠ priamka, na ktorej ležia všetky nepárové landmarky je zároveň aj osou  $y$  (hovoríme, že tvar charakterizovaný landmarkami je vhodne orientovaný), potom  $\mathbf{A} = \mathbf{T}_r$ .

# Transformácie

Affínna a neafínna transformácia

## Definition (Affínna a neafínna transformácia)

Majme mnohorozmerný lineárny regresný model (**MMLRM**, **Multivariate Multiple Linear Regression Model**)  $k \times d$  matíc  $\mathbf{X}_{P,i}$  ( $d = 2, 3$ ) na  $\bar{\mathbf{X}}_P$  definovaný ako

$$\mathbf{X}_{P,i} = \bar{\mathbf{X}}_P \beta_i + \epsilon_i; \hat{\beta}_i = (\bar{\mathbf{X}}_P^T \bar{\mathbf{X}}_P)^{-1} \bar{\mathbf{X}}_P^T \mathbf{X}_{P,i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Nech  $\hat{\beta}_i = (\hat{\beta}_{i1}; \hat{\beta}_{i2})$  pre 2D a  $\hat{\beta}_i = (\hat{\beta}_{i1}; \hat{\beta}_{i2}; \hat{\beta}_{i3})$  pre 3D, potom

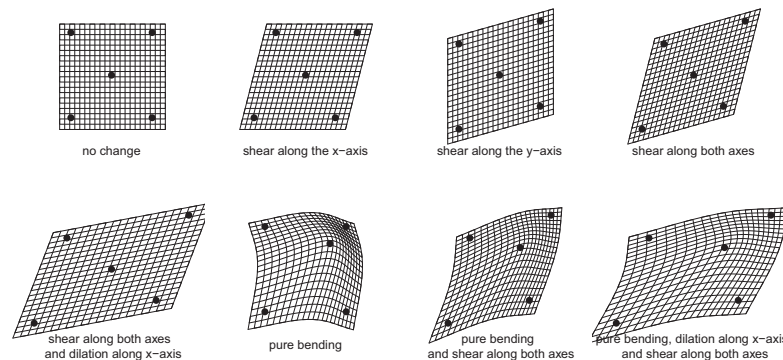
1 **afínne procrustove súradnice**:  $\mathbf{X}_{A,i} = \mathbf{X}_{P,i} \hat{\beta}_i$

2 **neafínne procrustove súradnice** (reziduály MMLRM):

$$\mathbf{X}_{NA,i} = \mathbf{X}_{P,i} + (\mathbf{X}_{P,i} - \mathbf{X}_{A,i})$$

# Transformácie

Affínne a neafínne transformácie



**Obrazok:** Affínne a neafínne transformácie – afínne transformácie (prvý riadok a prvý obrázok druhého riadka), neafínna transformácia (druhý obrázok druhého riadka) a zložené transformácie (tretí a štvrtý obrázok druhého riadka)

## Example 1

Interpolačný a vyhladzovací regresný splajn

### Example (DÚ 1)

Majme interpolačný model [IM1] ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\beta, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{1}_k & \mathbf{x} \\ \mathbf{1}_k^T & 0 & 0 \\ \mathbf{x}^T & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{x}_{k \times 1} = (x_1, \dots, x_k)^T$ ,  $\mathbf{y}_{k \times 1} = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$ ,  $(\mathbf{S})_{ij} = \phi(x_i, x_j) = \frac{1}{12} |x_i - x_j|^3$ .

1.1) Je vyššie uvedený model identický s modelom [IM2]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^* \beta^*, \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k & \mathbf{x} & \mathbf{S} \\ 0 & 0 & \mathbf{x}^T \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_k^T \end{pmatrix}, \beta^* = \begin{pmatrix} c \\ a \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}?$$

1.2) Prečo musí byť matica plánu v podobe  $\mathbf{X}$  v modeli IM1 alebo  $\mathbf{X}^*$  v modeli IM2?

1.3) Ako vypočítame odhady  $\hat{\beta}$  a  $\hat{\beta}^*$ ? [napísať vzorec] Akú funkciu v  $\mathbb{R}$  na to použijeme?

1.4) V akom vzťahu je odhad  $\hat{\mathbf{y}}$  k realizáciám  $\mathbf{y}$ ?

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 2

Interpolačný a vyhladzovací regresný splajn

### Example (DÚ 2)

Majme model  $y_i = \sin(2\pi x_i^3)^3$ , kde  $x_i \in (0, 1)$ ,  $\epsilon \sim 0.1 \times N(0, 1)$ ,  $n = 101$ . V R zapišeme tento model v podobe

```
sinusovka <- function(x)
x <- seq(0, 1, by=0.01)
y <- sinusovka(x) + 0.1*rnorm(101)
```

Majme penalizovaný regresný model [PRM1]

$$\mathbf{y}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{k+2} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_P \beta + \epsilon, \mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{dm} \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{R} \end{pmatrix}, \mathbf{S}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times 2} & \mathbf{S} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{X}_{dm} = (\mathbf{1}_k : \mathbf{x} : \mathbf{S})$  je **penalizovaná časť matice plánu**,  $(\mathbf{S})_{ij} = \phi(x_i, x_j) = \frac{1}{12} |x_i - x_j|^3$ ,  $\mathbf{S}_P = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$  a  $\sqrt{\lambda} \mathbf{R}$  je **penalizovaná časť matice plánu**. Potom penalizovanú sumu štvorcov budeme písať v tvare  $SS_{pen} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}_{dm} \beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}_{dm} \beta) + \lambda \beta^T \mathbf{S}_P \beta = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\beta^T \mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{y} + \beta^T (\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P) \beta$ .

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 2

Interpolačný a vyhladzovací regresný splajn

**Pozn.:** Po derivovaní  $SS_{pen}$  podľa  $\beta$  a položení tejto prvej derivácie rovné nule, dostaneme  $(\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P) \hat{\beta} = \mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{y}$ , kde  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P)^{-1} \mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{y}$ , "hat" (projekčná) matica  $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{dm} (\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P)^{-1} \mathbf{X}_{dm}^T$  a potom  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ . Efektívnejšie je použiť funkciu `lm(y~xp-1)` použitím vektora  $\mathbf{y}_P$  a matice  $\mathbf{X}_P$  z modelu PRM1 (funkcia `lm()` používa na výpočet QR rozklad a nie maticu  $\mathbf{A}$ —pozri prednášky z numerickej matematiky).

2.1) Použitím IM1 naprogramujte v R funkciu na výpočet interpolačného splajnu pre dáta  $\mathbf{y}$  a odhadnite  $\hat{\mathbf{y}}$ . Výsledky skontrolujte použitím funkcie `spline(x, y, method = "natural")`. Nakreslite rozptylový graf  $(x_j, y_j)$  spolu s krivkou  $(x_j, \hat{y}_j)$ . Použite funkcie `plot(x, y)`, `lines(x, y)`.

2.2) Použitím PRM1 naprogramujte v R funkciu na výpočet penalizovaného regresného splajnu pre dáta  $\mathbf{y}$  a odhadnite  $\hat{\mathbf{y}}$  pre  $\lambda = 4.774251 \times 10^{-06}$ .

Výsledky skontrolujte použitím funkcie `smooth.spline(x, y, all.knots = TRUE)` a porovnajte s polynomickým regresným modelom 12-teho stupňa (použite funkciu `lm(y~poly(x, 12))`). Nakreslite rozptylový graf  $(x_j, y_j)$  spolu s krivkou  $(x_j, \hat{y}_j)$ . Použite funkcie `plot(x, y)`, `lines(x, y)`.

**Pomôcka:** odmocninu matice  $\mathbf{S}_P$  vypočítame pomocou SVD

`eigen(Sp, symmetric=TRUE)`

2.3) Popíšte rozdiel medzi odhadmi IM1 a PRM1.

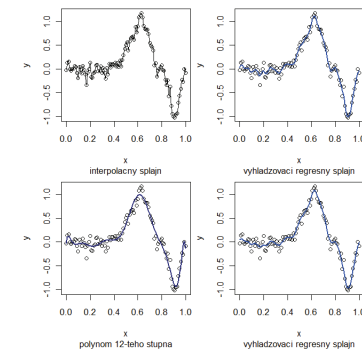
Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 2

Interpolačný a vyhladzovací regresný splajn

Graf bude vyzeráť podobne ako nasledujúci.



**Obrázok:** Model  $y_i = \sin(2\pi x_i^3)^3 + \epsilon$ , kde  $\epsilon \sim 0.1 \times N(0.1)$ ,  $n = 101$ ; interpolačný splajn (vľavo hore), polynomický regresný model 12-teho stupňa (vľavo dole), vyhladzovací regresný splajn ( $\lambda = 4.774251 \times 10^{-06}$ , vpravo hore a dole)

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 3

Interpoláčny splajn

### Example (DÚ 3)

Majme interpoláčny model [IM1] a krivku  $\mathbf{X}$  definovanú bodmi  $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)})$ , kde  $j = 1, 2, \dots, k$  a  $\mathbf{X}$  je matica rozmerov  $k \times 2$ . Nech  $\mathbf{d}_{ch}$  je vektor  $k$  **chordálnych (uhlových) vzdialeností**, kde  $d_{ch}^{(j)}$  zodpovedá vzdialenosti bodov  $(x_{j-1}^{(1)}, x_{j-1}^{(2)})$  a  $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)})$  krivky  $\mathbf{X}$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$ ;  $d_{ch}^{(1)} = 0$ . IM1 je počítaný pre  $(d_{ch}^{(j)}, x_j^{(1)})$  a  $(d_{ch}^{(j)}, x_j^{(2)})$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$  osobitne; vizualizujeme krivku  $\hat{\mathbf{X}}$  s  $k$  odhadnutými bodmi, kde  $j$ -ty bod je rovný  $(\hat{x}_j^{(1)}, \hat{x}_j^{(2)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .  $\mathbf{X}$  sa nazýva **resamplovaná interpolovaná krivka  $\mathbf{X}$** .

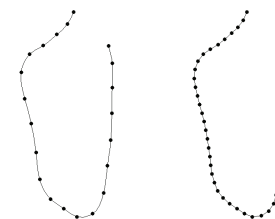
3.1) Použitím IM1 interpolujte symphyseálnu krivku ( $k = 21$ ; dáta symphysis) a resamplujte jej odhadnuté body pre  $k_l = 50$ . Použite pritom funkcie

```
"cumchord" <- function(X)
cumsum(sqrt(apply((X-rbind(X[1,], X[-(nrow(X)), ]))^2, 1, sum)))
CH <- cumchord(X); spline(CHD, ..., method="natural"); approx();
plot(..., asp=1, axes=FALSE); lines(); points(). (Načítanie dát:
read.table("symphysis.txt", header=TRUE)).
```

## Example 3

Interpoláčny a vyhladzovací regresný splajn

Graf bude vyzerať podobne ako nasledujúci.



**Obrazok:** Interpolovaná ( $k = 21$ ; vľavo) a resamplovaná ( $k_l = 50$ ; vpravo) symphyseálna krivka

## Example 4

Interpoláčny splajn

### Example (DÚ 4)

Majme interpoláčny model [IM3; thin-plate splajn, TPS] ( $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ )

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{1}_k & \mathbf{X} \\ \mathbf{1}_k^T & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{c}^T \\ \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)^T$  a  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)^T$ ,  $(\mathbf{S})_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 \log(\|\mathbf{x}\|_2^2)$ ,  $\forall \|\mathbf{x}\|_2 > 0$ , ak  $\|\mathbf{x}\|_2 = 0$ , potom  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ . Potom extrapolácia IM3 bude definovaná ako  $\mathbf{Y}_l \mapsto \mathbf{X} + l \times (\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ , kde  $l \in \mathbb{R}$ .

4.1) Použite IM3 (pre  $l = 0$ ) a jeho  $l$ -násobnú extrapoláciu ( $l$  zvolíte ľubovoľne) na deformáciu kosoštvorca na deltoid (ich súradnice zvolíte ľubovoľne). Použite poznámku a programy uvedené na nasledujúcich troch slajdoch. Naprogramujte v R.

4.2) Transformujte štvorec. Použite skosenie pozdĺž osi  $x$  (A) a pozdĺž osi  $y$  (B), skosenie pozdĺž oboch osí (C), skosenie pozdĺž oboch osí kombinované so škálovaním pozdĺž osi  $x$  (D) a pozdĺž osi  $y$  (E). Zapište použité transformačné matice.

Naprogramujte v R. (teória viď. slajdy o transformáciách)

## Example 4

Interpoláčny splajn IM3

**Pozn. 1:** TPS používame aj ako zobrazovaciu metódu, kedy hovoríme o **(ne)deformovanej štvorcovej TPS sieti** – kde ide o (nedeformovanú) štvorcovú sieť pre model  $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}$  a deformovanú štvorcovú sieť pre model  $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_l$ . Ide v podstate o IM3 definovaný pre všetky uzly siete, kde  $\mathbf{y}_j = \mathbf{f}(\mathbf{x}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n_{cp}$ ;  $n_{cp}$  ( $cp$  znamená "crossing points") je počet uzlov siete (je jednoduché model predefinovať na (ne)deformovanú obdĺžnikovú TPS sieť). V TPS  $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_l$  sa použijú odhadnuté koeficienty  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{A}$  na interpolovanie uzlov siete. Jednotlivé uzly sú potom pospájané (v smere oboch osí pre rovnaké  $j$ ) *lokálne lineárne* (úsečkami) alebo *interpolovanou krivkou* (použitím IM1 ako v DÚ 3).

**Pozn. 2:** Treba si uvedomiť, že kosoštvorec a deltoid musia mať rovnakú **centroidovú veľkosť (CS)** a musia byť optimálne rotované jeden na druhý použitím **optimálne znamienkovanej SVD** (viď. slajdy o transformáciách).

R-funkcie na výpočet TPS siete sú zobrazené na nasledujúcich dvoch slajdoch. Okrem nich použite aj funkcie `plot(..., asp=1, axes=FALSE)`; `lines()`; `points()`; `arrows(..., length=0.1, lwd=2)`

## Example 4

Interpoláčny splajn IM3

```
"tps2d" <- function(M, X, Y){
## M = uzly siete (pocet uzlov = n)
## X (vzor)
## Y (obraz)
k <- dim(X)[1]; n <- dim(M)[1]
P <- matrix(NA, k, k)
for (i in 1:k) {
for (j in 1:k) {
r2 <- sum((X[i,] - X[j,])^2)
P[i,j] <- r2*log(r2) } }
P[which(is.na(P))] <- 0
Q <- cbind(1, X)
L <- rbind(cbind(P,Q), cbind(t(Q),matrix(0,3,3)))
Y2 <- rbind(Y, matrix(0, 3, 2))
coefx <- solve(L) %*% Y2[,1]
coefy <- solve(L) %*% Y2[,2]
"fx" <- function(X, M, coef) {
Xn <- numeric(n)
for (i in 1:n){
W <- apply((X-matrix(M[i,],k,2,byrow=TRUE))^2,1,sum)
Xn[i] <- coef[k+1]+coef[k+2]*M[i,1]+coef[k+3]*M[i,2]+sum(coef[1:k]*(W*log(W))) }
Xn }
Ytps <- matrix(NA, n, 2)
Ytps[,1]<-fx(X, M, coefx)
Ytps[,2]<-fx(X, M, coefy)
return(Ytps) }
```

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 4

Interpoláčny splajn IM3

```
"tps.siet" <- function(X, Y, n){
## X (vzor)
## Y (obraz)
## pocet uzlov siete = n
xm <- min(Y[,1])
ym <- min(Y[,2])
xM <- max(Y[,1])
yM <- max(Y[,2])
rX <- xM - xm; rY <- yM - ym
a <- seq(xm - 1/5 * rX, xM + 1/5 * rX, length=n)
b <- seq(ym - 1/5 * rY, yM + 1/5 * rY, by = (xM - xm) * 7/(5 * (n-1)))
m <- round(0.5 + (n-1) * (2/5 * rX + yM - ym)/(2/5 * rX + xM - xm))
M <- as.matrix(expand.grid(a,b))
ngrid <- tps2d(M,X,Y)
plot(ngrid, cex=0.2, asp=1, axes=FALSE, xlab="", ylab="")
for (i in 1:m) lines(ngrid[(1:n) + (i-1)*n,])
for (i in 1:n) lines(ngrid[(1:m) * n-i+1,])
}
```

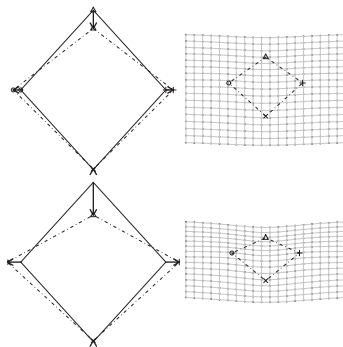
Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 4

Interpoláčny splajn

Graf bude vyzeráť podobne ako nasledujúci.



**Obrázok:** Interpolácia kosoštvorca na deltoid pre  $l = 0$  (hore) a  $l = 1$  (dole); zobrazenie pomocou vektorového poľa (vľavo) a deformovanej obdĺžnikovej TPS siete (vpravo)

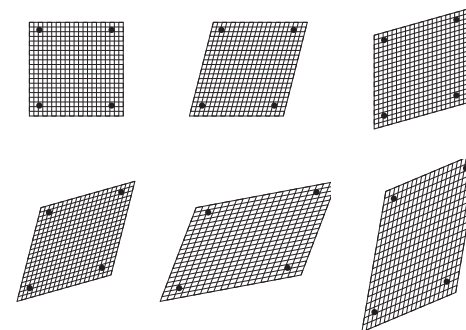
Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 4

Interpoláčny splajn

Grafy budú vyzeráť podobne ako nasledujúce.



**Obrázok:** Transformácie

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 5

Transformácie v praxi

### Example (DÚ 5)

Vieme, že uhol  $\alpha$  (v radiánoch) medzi dvoma vektormi  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  vypočítame ako  $\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|}\right)$ . Majme tvár s  $k = 34$  (semi)landmarkami (dáta `face`), kde  $d = 2$ , ktorých súradnice sú zapísané v matici  $\mathbf{X}$ . Landmarky trichion  $I_1$  a gnathion  $I_{31}$  tvoria úsečku  $(I_1, I_{31})$ , ktorá nie je rovnobežná s osou  $y$ .

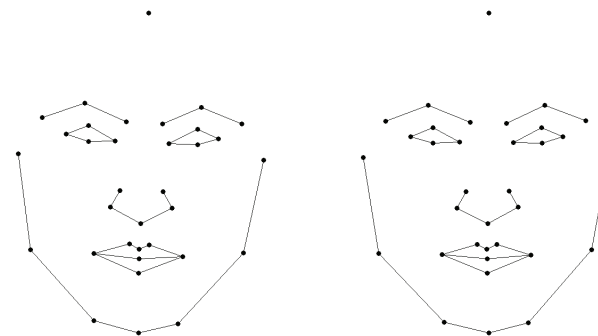
5.1) Identifikujte uhol úsečky  $(I_1, I_{31})$  a osi  $y$  a rotujte tvár  $\mathbf{X}$  tak, aby bola  $(I_1, I_{31})$  orientovaná rovnobežne s touto osou, rotovanú tvár ozn.  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$ . Zobrazte obe tváre.

Pozn.: Naprogramujte v R. Najprv funkciu na výpočet uhla ľubovoľnej úsečky a osi  $y$ . Potom použite rotačnú maticu (definovanú na slajdoch o transformáciách) na rotáciu tváre do požadovanej polohy. Vizualizácia (semi)landmarkov môže byť vylepšená pomocou úsečiek, ktoré spájajú vybrané landmarky tak, aby sa zviditeľnili vybrané anatomické časti tváre ako pery, nos, oči, obočie a brada. Takáto množina úsečiek je definovaná v súbore `wireframe.txt`, ktorý použijete na vizualizáciu. Koncové body úsečiek sú tu definované pomocou 30-tich ID riadkov z dátového rámca `face.txt`. Použite aj funkcie `plot(..., asp=1, axes=FALSE); lines(); points()`. (Načítanie dát: `read.table("face.txt", header=TRUE)`).

## Example 5

Transformácie v praxi

Obrázky budú vyzeráť ako nasledujúce.



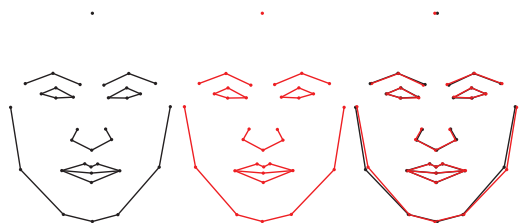
Obrázok: Tvár pred (vľavo) a po rotácii (vpravo)

## Example 5

Transformácie v praxi

### Example (pokrač.)

Majme tvár s  $k = 34$  (semi)landmarkami (dáta `face`), kde  $d = 2$ , ktorých súradnice sú zapísané v matici  $\mathbf{X}$  (príklad 5). Použite vhodne orientovanú (optimálne rotovanú) konfiguračnú maticu  $\mathbf{X}$  na preznačenie ľavých párových landmarkov na pravej a naopak pomocou permutačnej matice  $\mathbf{Q}$ , potom aplikujte transformáciu zrkadlenie okolo osi  $y$  ( $x^{(2)}$ ) s maticou zrkadlenia  $\mathbf{T}_r$ , tak, aby ste dostali **maticu preznačených a zrkadlovo súmerných súradníc**  $\mathbf{X}^{(R)} = \mathbf{Q}\mathbf{T}_r\mathbf{X}$ .



Obrázok: Originálna tvár (vľavo), preznačená a zrkadlovo súmerná tvár (v strede) a obe tváre superponované (vpravo)

## Example 6

Transformácie v praxi

### Example (DÚ 6)

Majme súradnice  $k = 18$  landmarkov ryby sumček čierny (*Ameiurus melas*) zapísané v matici  $\mathbf{X}$  (dáta `ryba`). Rotácia ryby nie je správna. Ako optimálna sa javí rotácia do smeru najväčšej variability, ktorý nájdeme pomocou SVD rozkladu kovariančnej matice  $\text{Var}(\mathbf{X})$ , kde matica vlastných vektorov predstavuje rotačnú maticu (viď. slajdy o transformáciách). Problémom však je, ak je *os prvého hlavného komponentu otočená o  $\pi$  rad (do opačného smeru)*, t.j. ryba ( $\mathbf{X}_{\text{opt}}$ ) je otočená ventrálnou stranou nahor. V tomto prípade je potrebné  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$  otočiť o  $-\pi$  rad do správneho smeru. Ako prostriedok slúži znamienko determinantu  $\det(\mathbf{X}_\Delta)$ , kde riadky matice  $\mathbf{X}_\Delta$  predstavujú tzv. *rozšítené súradnice* vrcholov  $\Delta(I_7, I_{12}, I_{17})$  s doplnenou treťou súradnicou rovnou 1, kde prvé dva body (tu apex  $I_7$  a bod zárezu chvostovej plutvy  $I_{12}$ ) sú body hlavnej osi tela a tretí bod je ľubovoľný bod v hornej polovici tela (tu  $I_{17}$ ). Ak je toto znamienko záporné, je nutné  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$  otočiť o uhol  $-\pi$  rad.

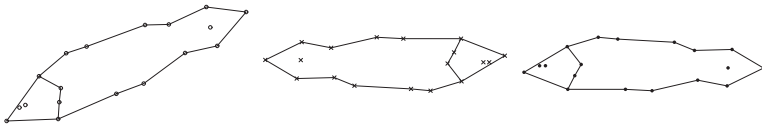
## Example 5

### Transformácie v praxi

6.1) Otočte  $\mathbf{X}$  do  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$  a v prípade potreby skorigujte smer orientácie (pomocou `if` v R programe). Naprogramujte v R. Pospájajte landmarky na obryse ryby a v zadnej časti hlavy úsečkami kvôli vylepšeniu zobrazenia. Použite funkcie `eigen(var(X)), sign(...)` a `det(...)`. Použite aj funkcie `plot(..., asp=1, axes=FALSE); lines(); points()`. (Načítanie dát: `read.table("ryba.txt", header=TRUE)`).

6.2) Prečo závisí smer orientácie matice  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$  od znamienka  $\det(\mathbf{X}_{\Delta})$ ? Ide o dôsledok dôkazu výpočtu obsahu trojuholníka pomocou determinantu, kde zoradenie vrcholov proti smeru hodinových ručičiek dáva znamienko *kladné* a zoradenie vrcholov v smere hodinových ručičiek dáva znamienko *záporné*. Dokážte.

Obrázky budú vyzeráť ako nasledujúce.



**Obrázok:** Ryba pred rotáciou (vľavo), rotovaná do smeru najväčšej variability v opačnom smere (v strede) a v správnom smere (vpravo)

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 7

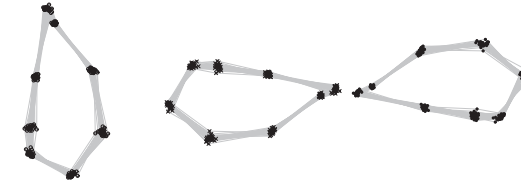
### Transformácie v praxi

#### Example (DÚ 7)

Majme dáta `gorf.dat`, ktoré sú v knižnici `shapes` a predstavujú súradnice  $k = 8$  landmarkov na lebkách  $n = 30$  samíc goril (*Gorilla gorilla*). Vrcholy  $\mathbf{X}_{\Delta}$  sú landmarky  $l_1, l_2$  a  $l_8$ . Detaily o GPA nájdete na slajdoch o transformáciách.

7.1) Registrujte súradnice landmarkov `gorf.dat` do tvarového priestoru pomocou zovšeobecnenej procrustovskej analýzy (GPA) a aplikujte algoritmus výpočtu rotácie do smeru najväčšej variability z DÚ6. Použite funkciu `procGPA(...)$rotated` (GPA, kde výstupom je pole rozmeru  $8 \times 2 \times 30$  **procrustovských tvarových súradníc**).

Obrázky budú vyzeráť ako nasledujúce.



**Obrázok:** Lebka gorily pred rotáciou (vľavo), rotovaná do smeru najväčšej variability v opačnom smere (v strede) a v správnom smere (vpravo)

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 8

### Vyhľadovací regresný splajn

#### Example (DÚ8)

Majme tvár (dáta `face`) z DÚ 5 optimálne rotovanú a doplnenú o jeden landmark so súradnicami  $\mathbf{l}_{35}^x = (1.933765, -41.093985)$  a nazveme ho *pronasale*, maticu označme ako  $\mathbf{X}$ . Ozn.  $\mathbf{Y}$  maticu identickú s maticou  $\mathbf{X}$  až na súradnice bodu *pronasale*,  $\mathbf{l}_{35}^y = (1.933765, 50.000000)$ . Majme penalizovaný regresný model [PRM3]

$$\mathbf{Y}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0}_{k \times 3} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_P \beta + \epsilon, \mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\text{dm}} \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{R} \end{pmatrix}, \mathbf{S}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times 3} & \mathbf{S} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{X}_{\text{dm}} = (\mathbf{1}_k : \mathbf{X} : \mathbf{S})$  je **penalizovaná časť matice plánu**,  $(\mathbf{S})_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 \log\left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2}\right)$ ,  $\forall \|\mathbf{x}\|_2 > 0$ , ak  $\|\mathbf{x}\|_2 = 0$ , potom  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ ;  $\mathbf{S}_P = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$  a  $\sqrt{\lambda} \mathbf{R}$  je **penalizovaná časť matice plánu**. Potom penalizovanú sumu štvorcov budeme písať v tvare

$$SS_{\text{pen}} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_{\text{dm}} \beta)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_{\text{dm}} \beta) + \lambda \beta^T \mathbf{S}_P \beta = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\beta^T \mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{Y} + \beta^T (\mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{X}_{\text{dm}} + \lambda \mathbf{S}_P) \beta.$$

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

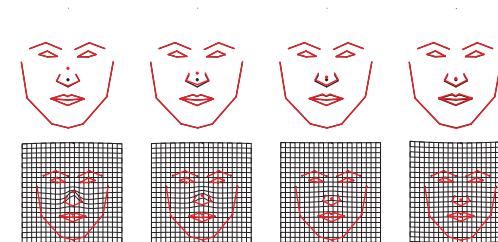
## Example 8

### Vyhľadovací regresný splajn

Pozn.: Po derivovaní  $SS_{\text{pen}}$  podľa  $\beta$  a položení tejto prvej derivácie rovné nule, dostaneme  $(\mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{X}_{\text{dm}} + \lambda \mathbf{S}_P) \hat{\beta} = \mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{Y}$ , odkiaľ  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{X}_{\text{dm}} + \lambda \mathbf{S}_P)^{-1} \mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{Y}$ , "hat" (projekčná) matica  $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{\text{dm}} (\mathbf{X}_{\text{dm}}^T \mathbf{X}_{\text{dm}} + \lambda \mathbf{S}_P)^{-1} \mathbf{X}_{\text{dm}}^T$  a potom  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} \mathbf{Y}$ . Efektívnejšie je použiť funkciu `lm(Yp~Xp-1)` použitím matic  $\mathbf{Y}_P$  a  $\mathbf{X}_P$  z modelu PRM3.

8.1) Použitím PRM3 naprogramujte v R funkciu na výpočet penalizovaného regresného splajnu pre dáta  $\mathbf{Y}$  a odhadnite  $\hat{\mathbf{Y}}$  pre  $\lambda = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ . Zobrazte tvár  $\mathbf{X}$  čiernou farbou a tváre  $\hat{\mathbf{Y}}_{\lambda}$  červenou. Okomentujte rozdiely medzi jednotlivými  $\hat{\mathbf{Y}}_{\lambda}$ . Pomôcka: mierne modifikujte program z DÚ2

Obrázky budú vyzeráť ako nasledujúce.



**Obrázok:** Sekvencia tvárí pre  $\lambda = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu



## Example 9

Analýza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

### Definition (10-20 systém)

**10-20 systém** je vytvorený na základe vzťahu medzi polohou elektród a oblasťou mozgovej kôry ležiacou pod nimi. Každý bod má prislúchajúce písmeno na identifikáciu laloka mozgu, ku ktorému patrí a číslo alebo iné písmeno na identifikáciu ľavej alebo pravej hemisféry. Písmená F, T, C, P a O znamenajú po rade **frontálny, temporálny, centrálny, parietálny a okcipitálny**. Treba si uvedomiť, že centrálny lalok neexistuje, ale tento pojem tu súvisí s identifikáciou polohy. **Nepárne čísla** (1,3,5 a 7) prislúchajú **ľavej hemisfére** a **párne čísla** (2,4,6 a 8) **pravej hemisfére**. Písmeno "z" prislúcha elektróde umiestnenej v prostriedku krivky. Menšie číslo identifikuje elektódu bližšie ku mediánnej rovine. Čísla 10 a 20 hovoria o 10% alebo 20% vzdialenosti medzi jednotlivými elektródami z celkovej *uhlovej (chordálnej) vzdialenosti* medzi použitými referenčnými landmarkami *nasion – inion* na mediánnej referenčnej krivke a *ľavý preauriculare – pravý preauriculare* na centrálnej koronálnej referenčnej krivke. Ide o systém **ACNS** (American Clinical Neurophysiology Society) a je vysoko kompatibilný so systémom navrhnutým **IFCN** (International Federation of Clinical Neurophysiology)

## Example 9

Analýza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

### Definition (Referenčné landmarky)

- 1 **nasion na pokožke** (Nz): kolmá projekcia bodu *nasion* na povrch pokožky, kde nasion je definovaný ako priesečník *sutura nasofrontalis* s mediánou rovinou
- 2 **inion na pokožke** (Iz): kolmá projekcia bodu *inion* na povrch pokožky, kde *inion* je definovaný ako bod ležiaci na *protuberantia occipitalis externa* v mieste, v ktorom sa spájajú obe *lineae nuchae superiores*
- 3 **tragion (preauriculare)** vľavo/vpravo (LPA/RPA) bod na hornom okraji *tragusu*; ide o projekciu bodu *auriculare* na pokožku, kde bod *auriculare* je najlaterálnejší bod ležiaci na koreni jarmového oblúka, kolmo nad stredom *porus acusticus externus*; v UI 10-10 systéme sú LPA a RPA body označené ako T9 a T10

## Example 9

Analýza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

### Definition (Referenčné landmarky—nesprávne definície bodu *tragion*)

- 1 depresia koreňa jarmového oblúka anteriórne od *tragusu* v preaurikulárnej oblasti
- 2 kolmá projekcia centroidu špičky *tragusu* na jeho anteriórny koreň
- 3 centroid oblasti hrany *tragusu* v okolí jeho špičky
- 4 horný okraj *porus acusticus externus* kolmo nad jeho stredom, čo je v podstate definícia bodu *porion*

**Tabuľka:** Reliabilita bodov *nasion*, *inion* a *auriculare* v mm (cf. Katina a kol., 2012); reliabilita vysoká – celková chyba pod 2 mm, reliabilita stredná – celková chyba [2,5) mm, reliabilita nízka – celková chyba nad 5 mm vrátane

landmark	os x	os y	os z	celkovo	reliabilita	chyba
<i>nasion</i>	0.57	0.58	0.69	1.84	vysoká	nízka
<i>inion</i>	1.29	9.91	5.69	16.89	nízka	veľká
ľavý <i>auriculare</i>	3.29	9.56	4.64	17.49	nízka	veľká
pravý <i>auriculare</i>	2.85	10.4	3.68	16.89	nízka	veľká

## Example 9

Analýza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

- dôvodom vysokoj reliability bodu *nasion* je jeho zaradenie do **Typu 3b**, kde ide o priesečník nejakej pozorovanej krivky a mediánnej roviny s vysokou viditeľnosťou *sutura nasofrontalis*
- s bodom *nasion* je však spojený sexuálny dimorfizmus a tento bod je na kosti ale aj na lebke ťažšie rozpoznateľný u žien kvôli menšiemu zarezaniu koreňa nosa; preto reliabilita bodu *nasion* na pokožke môže byť horšia prevažne v smere osi y
- na rozdiel od bodu *nasion* má *inion* nízku reliabilitu (aj napriek zaradenia do **Typu 3b**) kvôli nízkej viditeľnosti (zachovalosti) oboch *lineae nuchae superiores*; problém môže nastať u žien a u mužov, ktorí nemajú dobre vyvinutú *protuberantia occipitalis externa*; Ak sú vyššie spomenuté anatomické štruktúry cez pokožku málo zreteľné, je potrebné ich polohu odhadnúť pomocou okolitých anatomických štruktúr ako napr. úponov *musculus trapesius*
- bod *auriculare* je hybridom **Typu 4** a **Typu 6** (Typ 4: (semi)landmarky chrbtovej (hrebeňovej) krivky a symetrickej krivky (v mediánnej rovine)); Typ 6: skonštruované (semi)landmarky)

## Example 9

Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

- navyac reliabilita bodov *inion* a *auriculare* je skomplikovaná ich projekciou na pokožku, čo ich viditeľnosť výrazne znižuje v závislosti od hrúbky pokožky
- bod *auriculare* sa preto nahrádza bodom *preauriculare* (*tragion*)
- problémy nastávajú v prípade nesprávneho pochopenia definície alebo použitia inej nesprávnej definície, kedy ide o **systematickú chybu merania**, t.j. chybu z odlišnej aplikácie techniky merania (rôzne pochopenie definície meranej miery), intraindividuálnu a interindividuálnu chybu (iné držanie prístroja, iný tlak aplikovaný pri meraní, iná orientácia hlavy pri meraní a pod.)
- na základe vyššie spomenutého je **nutné konštatovať, že je potrebné striktno dodržiavať zaužívané antropologické definície anatomických landmarkov** podľa Farkasa (1994); Fettera (1967); Bräuera (1988); Martina, Sallera (1957); Kuželku (1999) a Drozdovej (2004)

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 9

Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

Definition (Sekvenčný postup odhadu polohy elektród EEG)

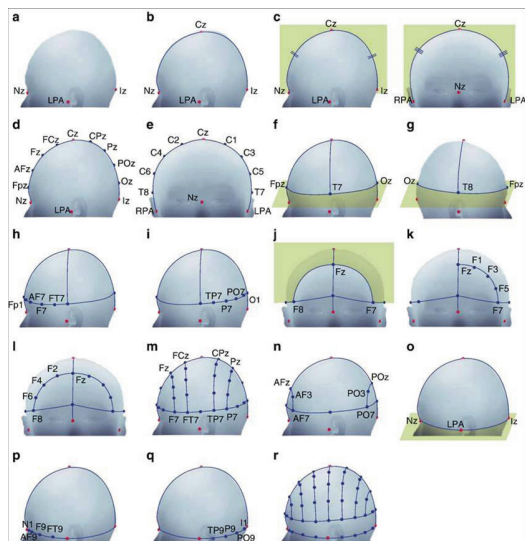
- 1 Stanoveniu **referenčných (hlavných, centrálnych) kriviek**, kde ide o krivky definované ako prienik povrchu pokožky hlavy s rovinou určenou tromi **uzlovými bodmi (uzlovými landmarkami)**
- 2 krivky sú následne delené na **ekvidistantné úseky** ďalšími bodmi, ktoré nazývame **semilandmarky** (ide o Typ 4: (semi)landmarky chrbtovej (hrebeňovej) krivky a symetrickej krivky (v mediánnej rovine), kde je ale potrebné dodefinovať túto skupinu o **(semi)landmarky pozorovanej krivky**)
- 3 Systém odhadovania kriviek je **sekvenčný**, t.j. najprv sa odhadne 1) **mediánna referenčná krivka**, potom 2) **centrálna koronálna referenčná krivka**, ďalej 3) **10% axiálna referenčná krivka** a nakoniec šesť koronálnych referenčných kriviek – 4) **frontálna koronálna krivka**, 5) **fronto-centrálne/temporálne koronálna krivka**, 6) **temporo/centro-parietálne koronálna krivka**, 7) **parietálne koronálna krivka**, 8) **anterio-frontálne koronálna krivka**, 9) **parieto-okcipitálne koronálna krivka** a 10) **0% axiálna referenčná krivka**

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 9

Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród



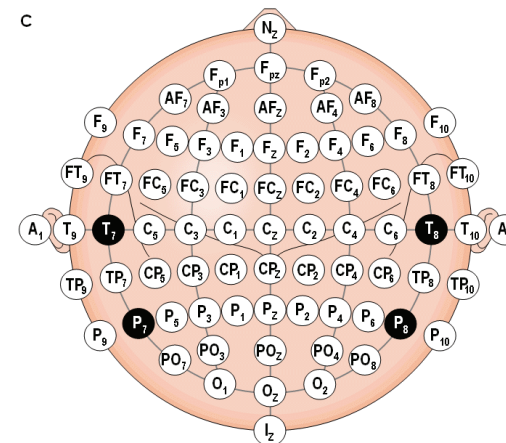
Obrázok: Sekvencia výpočtu súradníc (semi)landmarkov

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 9

Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród



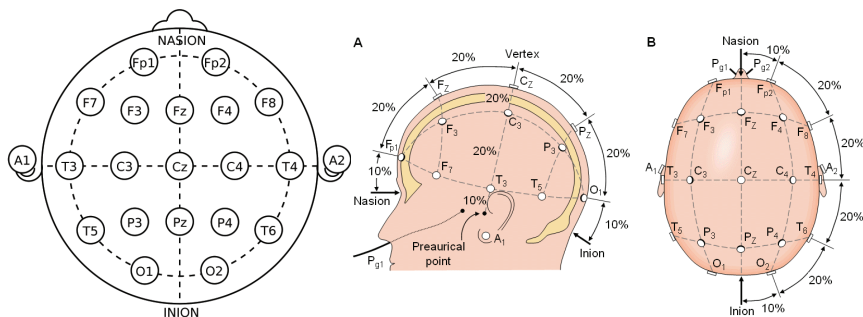
Obrázok: UI 10-20 systém pozícií elektród EEGs k = 81 elektródami

Stanislav Katina

Statistická analýza tvaru a obrazu

## Example 9

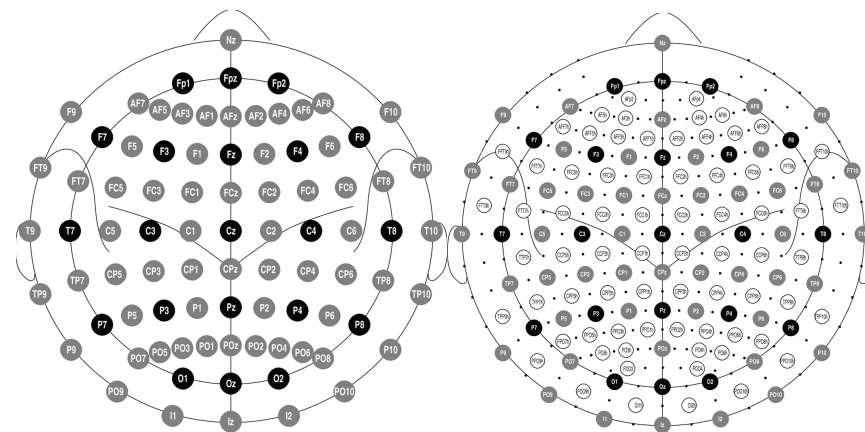
Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród



Obrázok: UI 10-20 systém pozícií elektród EEG s  $k = 19$  elektródami

## Example 9

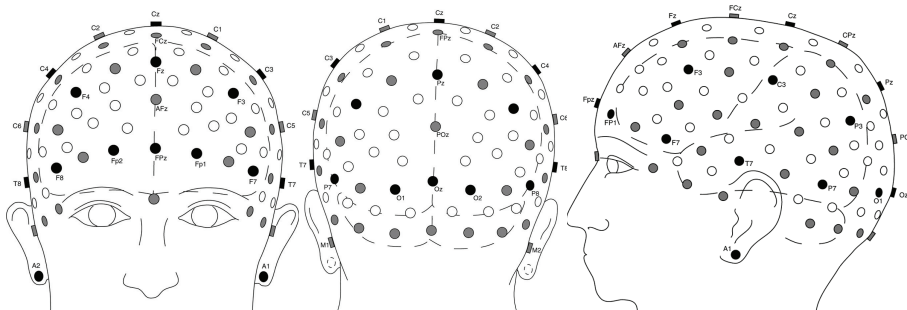
Analyza tvaru EEG – definícia 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród



Obrázok: UI 10-5 systém pozícií elektród EEG s  $k = 329$  elektródami [čierna farba—pozície v 10 – 20 systéme (vľavo), pozície v 10 – 10 systéme (vpravo)]

## Example 9

Analyza tvaru EEG – definícia 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród



Obrázok: UI 10-5 systém pozícií elektród EEG s  $k = 329$  elektródami [čierna farba—pozície v 10 – 10 systéme]

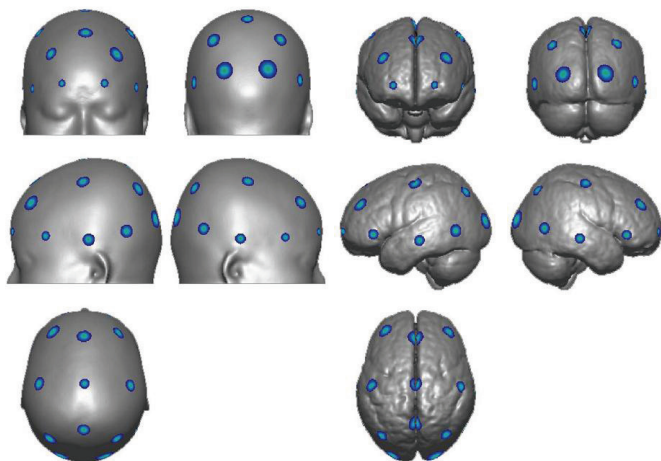
## Example 9

Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród

- ak zaznamenávame detailnejšie EEG s viacerými elektródami ďalšie elektródy sú pridávané do priestoru medzi už existujúcimi elektródami 10-20 systému
- tento modifikovaný systém je komplikovanejší a dal vznik **MCN** (Modified Combinatorial Nomenclature)
- UI 10-20 systém je prostriedkom na **registráciu** (Okamoto a kol., 2004; Okamoto, Dan, 2005) landmarkov na povrchu pokožky hlavy do **štandardizovaného stereotaktického súradnicového systému mozgu** ako je **MNI** (Montreal Neurological Institute; Brett a kol., 2002; Friston a kol., 1995) alebo **Talairach systém** (Talairach a kol., 1988) bez použitia MR (magnetic resonance) obrazu sledovaného človeka
- tento systém je akosi **konvenciou tomografických zobrazovacích techník mozgu** ako napr. **fMRI** (functional Magnetic Resonance Imaging) a **PET** (Positron Emission Tomography) a je základom registrácie **fNIRS** (near-infrared spectroscopy) a **TMS** (transcranial magnetic stimulation) dát do tvarového priestoru, v ktorom sa nachádza **vzor mozgu** (brain template), a tým sa stáva jednotným základom pre všetky zobrazovacie techniky mozgu v neurologickej komunite vedcov

## Example 9

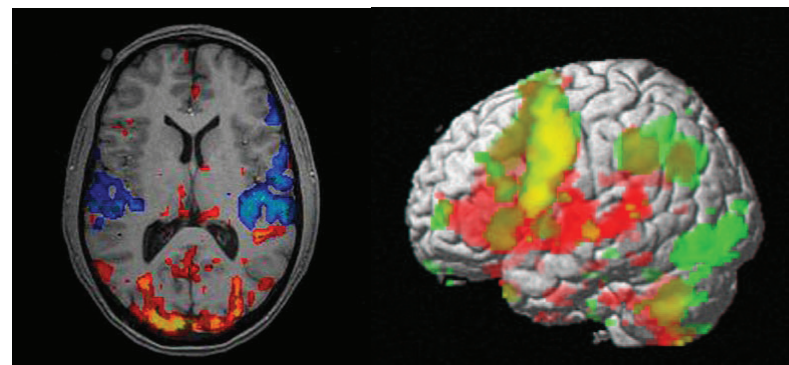
Analyza tvaru EEG – definícia UI 10-10, 10-20 a 10-5 systému elektród



Obrázok: Štandardizovaný vzor (template) MNI152 (ICBMI152; International Consortium for Brain Mapping)

## Example 9

fMRI



Obrázok: fMRI

## Example 9

Interpoláčny a vyhladzovací regresný splajn

### Example

Nech  $\mathbf{X}$  je projekcia súradníc  $k = 19$  pozícií elektród v UI 10-20 systéme do kruhu v rovine, ktorého hranice tvoria landmarky *inion*, ľavý *preauriculare*, *nasion* a pravý *preauriculare* (viď. obrázok). Nech  $\mathbf{y}$  je elektrický signál meraný na týchto  $k = 19$  elektródach. Majme penalizovaný regresný model [PRM2]

$$\mathbf{y}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{k+3} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_P \beta + \epsilon, \mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{dm} \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{R} \end{pmatrix}, \mathbf{S}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times 3} & \mathbf{S} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{X}_{dm} = (\mathbf{1}_k \cdot \mathbf{X} : \mathbf{S})$  je **penalizovaná časť matice plánu**,  $(\mathbf{S})_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 \log(\|\mathbf{x}\|_2^2)$ ,  $\forall \|\mathbf{x}\|_2 > 0$ , ak  $\|\mathbf{x}\|_2 = 0$ , potom  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ ;  $\mathbf{S}_P = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$  a  $\sqrt{\lambda} \mathbf{R}$  je **penalizovaná časť matice plánu**. Potom penalizovanú sumu štvorcov budeme písať v tvare

$$SS_{pen} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}_{dm} \beta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}_{dm} \beta) + \lambda \beta^T \mathbf{S}_P \beta = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2 \beta^T \mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{y} + \beta^T (\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P) \beta.$$

## Example 9

Analyza tvaru EEG – 10-20 systému elektród

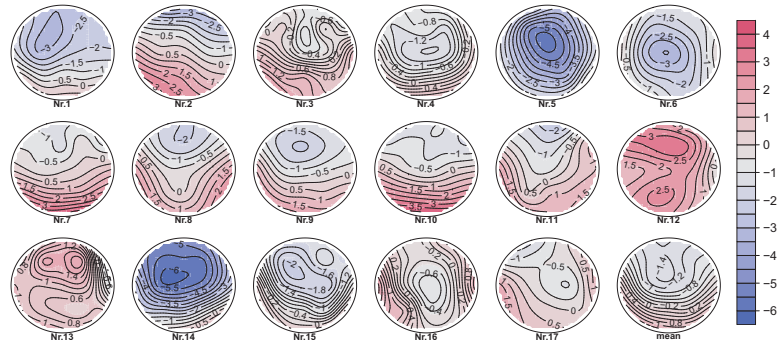
Pozn.: Po derivovaní  $SS_{pen}$  podľa  $\beta$  a položení tejto prvej derivácie rovné nule, dostaneme  $(\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P) \hat{\beta} = \mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{y}$ , odkiaľ  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P)^{-1} \mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{y}$ , "hat" (projekčná) matica  $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{dm} (\mathbf{X}_{dm}^T \mathbf{X}_{dm} + \lambda \mathbf{S}_P)^{-1} \mathbf{X}_{dm}^T$  a potom  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ . Efektívnejšie je použiť funkciu  $1_m(\mathbf{y}_P \sim \mathbf{X}_P - 1)$  použitím vektora  $\mathbf{y}_P$  a matice  $\mathbf{X}_P$  z modelu PRM3.

	FP1	FP2				1	2			
F7	F3	Fz	F4	F8		11	3	17	4	12
T3	C3	Cz	C4	T4		13	5	18	6	14
T5	P3	Pz	P4	T6		15	7	19	8	16
	O1	O2					9		10	
	channels						labels			

Obrázok: UI 10-20 systém pozícií elektród EEG s  $k = 19$  elektródami

## Example 9

Analyza tvaru EEG – 10-20 systému elektród



**Obrázok:** TPS sieť farebných štvoruholníkov s farbami korešpondujúcimi vyhladeným hodnotám plochy superponovanými kontúrami (použitím optimálnej  $\lambda$  vypočítanej pomocou GCV)

## Example 9

Analyza tvaru EEG – 10-20 systému elektród

### Example

Majme interpolačný model [IM2; thin-plate splajn, TPS] ( $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{1}_k & \mathbf{X} \\ \mathbf{1}_k^T & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ c \\ \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)^T$  a  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)^T$ ,  $(\mathbf{S})_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 \log(\|\mathbf{x}\|_2^2)$ ,  $\forall \|\mathbf{x}\|_2 > 0$ , ak  $\|\mathbf{x}\|_2 = 0$ , potom  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ . Tento model by bolo možné aplikovať na dáta z Príkladu 9, avšak v praxi sa predpokladá výskyt odľahlých pozorovaní kvôli napr. možným nedoľahnutým elektródam k pokožke hlavy. Preto je lepšie použiť PRM2.

**Problém:** Sú jednotlivé pozície elektród systému UI 10-20 nejakého subjektu biologicky a geometricky homologické ku štandardizovanému vzoru MNI152? [Neberieme do úvahy štyri landmarky.]

**NIE !!!**