Štatistická analýza tvaru a obrazu

Interdisciplinárny prístup
postavený na matematických a štatistických základoch

Stanislav Katina

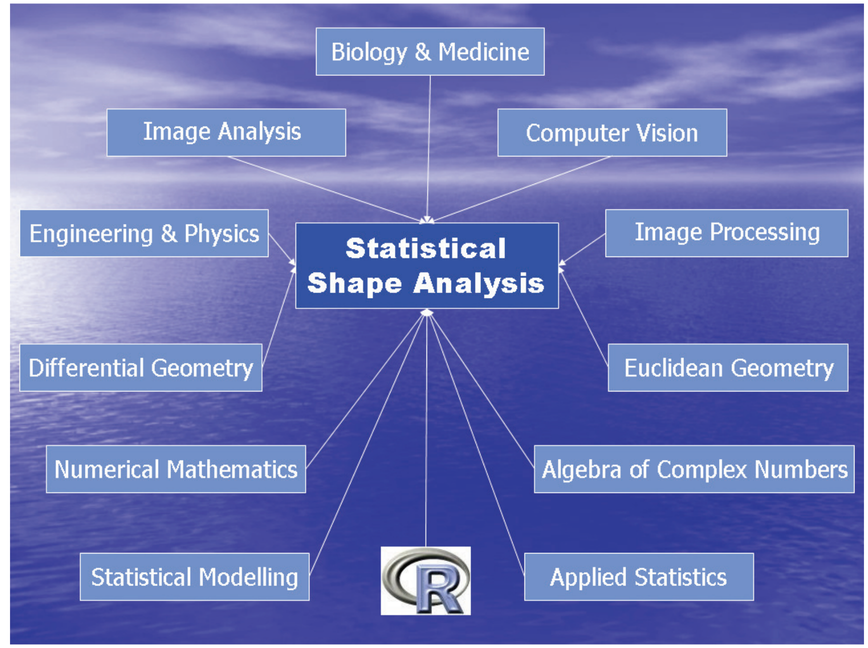
[1]Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova Univerzita v Brne

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

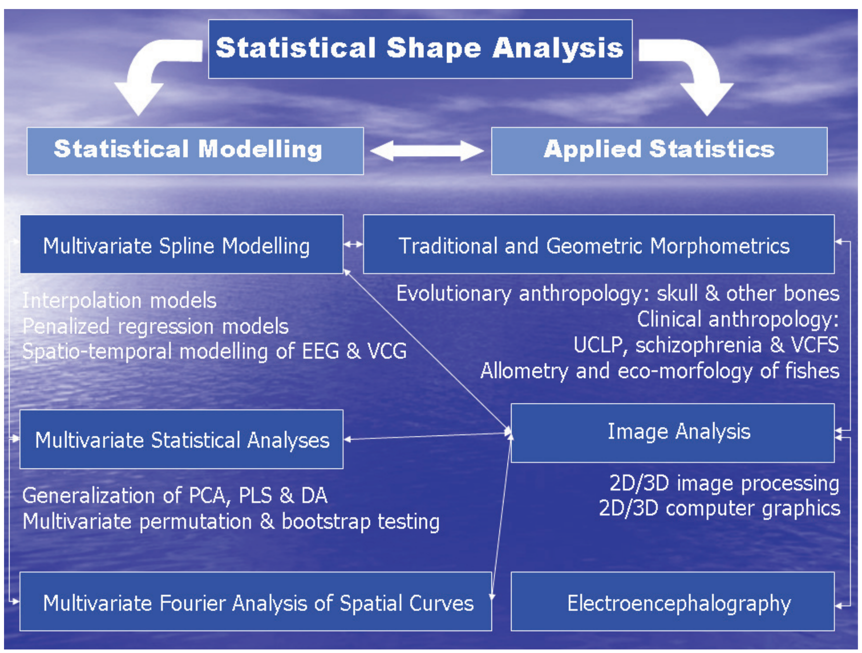
evropský sociální fond v ČR   EVROPSKÁ UNIE   MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY   OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Shape Analysis—Interdisciplinary View



Shape Analysis Vision ≈ My Partial Research Tree



Analýza obrazu

Digitálny obraz

Definition (Digitálny obraz – definícia)

Digitálny obraz I je dvoj-dimenzionálna funkcia prirodzených čísel vrátane nuly $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ do možných hodnôt intenzity z množiny $\mathbb{P}$, teda

$$I : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{P}; \text{ kde } u, v \in \mathbb{N}_0 \text{ a } I(u, v) \in \mathbb{P}.$$

Veľkosť obrazu je charakterizovaná jeho **šírkou** M (počet stĺpcov) a **výškou** N (počet riadkov) **obrazovej matice I**, kde $u_{\max} = M - 1, v_{\max} = N - 1$ a rozmery obrazu sú $M \times N$ **pixelov** (obrazových elementov). Čísla M, N sú zvyčajne rovné 2^k, kde k sa nazýva **bitová hĺbka**. Obrazový súradnicový systém sa riadi nasledovnými zásadami

1. y-ové súradnice idú zhora dole,
2. stred súradnicovaj sústavy je bod $(u = 0, v = 0)$ ležiaci v ľavom hornom rohu.

Potom transformácia z obrazovej do karteziánskej súradnicovej sústavy bude nasledovná $I(u, v) \longrightarrow I(N - 1 - v, u)$.

Definition (Typy digitálneho obrazu)

1. **Obraz v odtienoch sivej** – obraz pozostávajúci z jedného komponentu reprezentovaného intenzitou (nazývanou aj jas alebo hustota), ktorej hodnoty patria množine $\{0, 1, \ldots 2^k - 1\}$, zvyčajne $2^k - 1 = 255$; $(k = 8)$ bitov (1 byte); 0 reprezentuje minimálny jas (**čierna farba**) a 255 the maximálny jas (**biela farba**).
2. **Binárny obraz** – obraz, ktorý je špeciálnym typom obrazu v odtieni sivej, kde intenzita môže nadobúdať dve hodnoty nula a jedna (na pixel) a kóduje **farby čierna a biela**.
3. **RGB farebný obraz** – obraz zložený z troch komponentov nazývaných aj primárne farby—**červená, zelená a modrá (RGB)**; typicky zaberajúce $k = 8$ bitov pre každý farebný komponent.

Analýza obrazu
Digitálny obraz

Definition (RGB farebný obraz)

RGB je **aditívny systém farieb**, čo znamená, že všetky farby sú vytvárané pridávaním primárnych farieb k základnej čiernej farbe. RGB môžeme vizualizovať ako troj-dimenzionálnu jednotkovú kocku (**RGB kocka**), kde osi tohoto systému nazývame osi primárnych farbieb. Rozsah RGB hodnôt je $[0, C_{\max}]$. Každá možná farba korešponduje bodu $\mathbf{C}_i$ v RGB kocke

$$\mathbf{C}_i = (R_i, G_i, B_i), \text{ kde } 0 \leq R_i, G_i, B_i \leq C_{\max}.$$

Rovinné usporiadanie farieb v skutočnom farebnom RGB obraze – jednotlivé farebné komponenty ležia v separátnych maticiach rovnakých rozmerov a funkcia intenzity má tvar $I = (I_R, I_G, I_B)$. Potom RGB farebný

obraz $\mathbf{I}$ je pole $M \times N \times 3$ typu $\mathbf{I} = (\mathbf{I}_R \vdots \mathbf{I}_G \vdots \mathbf{I}_B)$, kde $\mathbf{I}_R, \mathbf{I}_G$, a $\mathbf{I}_B$ sú $M \times N$ matice. Element (u, v, c) pola je definovaný ako $I_c(u, v)$, kde $c = R, G$ a B komponent. RGB metrika (vzdialenosť) nezodpovedá našmu zrakovému vnímaniu, t.j. RGB metrika a zrakové vnímanie sú neproporcionálne.

Analýza obrazu
Digitálny obraz

Definition (Transformácia RGB farieb do sivej škály)

Výsledkom transformácie RGB farieb do sivej škály je **iluminácia (jas) v sivej škále** definovaná ako

$$Y_g = \mathrm{Avg}(R, G, B) = \frac{R + G + B}{3}.$$

Keďže *červená a zelená sú vnímané ako oveľa jasnejšie ako modrá, výsledný obraz sa nám bude zdať tmavý v červených a zelených oblastiach a príliš svetlý v modrých*. Preto je potrebné zaviesť **váženú ilumináciu (jas) v sivej škále**

$$Y_g = \mathrm{Lum}(R, G, B) = w_R R + w_G G + w_B B,$$

kde $w_R = 0.2125$, $w_G = 0.7154$, and $w_B = 0.0720$ sú odporúčané váhy. **Bezfarebný (sivý) obraz** definujeme ako obraz, kde každý RGB komponent má rovnakú hodnotu, t.j.

$$I_g(u, v) = \begin{pmatrix} R_{u,v}^{(g)} \\ G_{u,v}^{(g)} \\ B_{u,v}^{(g)} \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} Y_g \\ Y_g \\ Y_g \end{pmatrix}, \text{ kde } Y_g = \mathrm{Lum}(R, G, B).$$

Analýza obrazu
Digitálny obraz

Definition (Obrazový histogram)

Obrazový histogram je histogram popisujúci početnosti hodnôt intenzity (jasu) obrazu. Histogram h obrazu v odtieňoch sivej I s hodnotami intenzity $I(u, v) \in [0, K - 1]$ obsahuje K hodnôt, kde pre typický 8 bitový obraz $K = 2^8 = 256$. Jednotlivé zložky histogramu sú definované ako

$$\mathrm{h}(i) = \text{ počet pixelov v } I \text{ s intenzitou } i, \text{ pre všetky } i \in [0, K - 1],$$

$$\mathrm{h}(i) = \mathrm{card}\left\{(u, v) | I(u, v) = i, \in \mathbb{P}\right\}.$$

Interpretácia:

1. **expozícia** – *pod- a preexponovaný* obraz, *dobre exponovaný* obraz,
2. **kontrast** – rozsah hodnôt intenzity použitý v danom obraze; *plnokontrastový obraz*—efektívne používa celkový možný rozsah hodnôt intenzity $a \in [a_{\min}, a_{\max}]$ alebo $\{0, 1, \ldots K - 1\}$ (čierna–biela)
3. **dynamický rozsah** – počet rozdielnych hodnôt intenzity v obraze (ideálne všetkých K hodnôt); pokiaľ máme $a \in [a_{\min} < a_{\mathrm{low}}, a_{\mathrm{high}} < a_{\max}]$ *maximálne možný dynamicky rozsah* je možné dosiahnuť použitím všetkých možných hodnôt intenzity

Definition (Chyby alebo artefakty obrazu)

1. **chyby saturácie** – ideálne by mal *byť rozsah kontrastu senzora väčší ako rozsah intenzity svetla snímanej scény, potom by bol histogram hladký na oboch koncoch*; realita – často lesklé alebo tmave plochy; histogram je ***saturovaný*** na koncoch; signifikantné hroty na koncoch pri pod- a preexponovaných obrazoch
2. **chyby transformácie** – ideálne je *rozdelenie intenzity hladké globálne ako aj lokálne*; realita – zriedka v originálnom obraze, ale často v transformovanom obraze; ***zvyšovanie kontrastu*** vedie ku separácii hodnôt intenzity (diskretizácii; tvorbe dier); ***znižovanie kontrastu*** vedie ku zlučovaniu hodnôt intenzity, ktoré boli predtým rozdielne (diskretizácia; tvorba hrotov)
3. **chyby kompresie** – napr. počas kompresie do GIF je dynamický rozsah redukovaný na niekoľko hodnôt intenzity (***kvantovanie farieb***), tzv. ***líniová štruktúra histogramu***
4. **chyby individuálnych komponent** – v iluminačnom histograme (hist. intenzity sivej farby) neviditeľné chyby, ktoré sa objavia v histogramoch jednotlivých komponent (***presaturovanie modrého komponentu***)

Definition (Bodové operácie)

Homogénna bodová operácia (**globálna**) – modifikácia intenzity bez zmeny veľkosti, geometrie alebo lokálnych štruktúr obrazu. Hodnoty intenzity a sú transformované na nové hodnoty a' použitím funkcie $f(a)$,

$$a' \leftarrow f(a) \text{ alebo } I'(u,v) \leftarrow f(I(u,v)), \text{ pre } \forall\,(u,v),$$

kde $f(\cdot)$ je **nezávislá na súradniciach** (u,v), t.j. je všade rovnaká, napr.

1. globálna transformácia intenzity (jasu), kontrastu alebo farby
2. globálne kvantovanie obrazu a thresholding

Avšak funkcia $g(\cdot)$ ako **nehomogénna bodová operácia** (**lokálna**) berie do úvahy aj súradnice (u,v), ale netransformuje ich na iné; t.j.

$$a' \leftarrow g(a,u,v) \text{ alebo } I'(u,v) \leftarrow g(I(u,v),u,v).$$

Napr.

1. lokálna transformácia intenzity (jasu), kontrastu alebo farby
2. lokálne kvantovanie obrazu a thresholding

Definition (Lineárne bodové operácie)

Lineárnu bodovú operáciu definujeme ako

$$f_{\mathrm{lio}}(a) = k \cdot a + l,$$

kde k je nejaká **škálovacia konštanta intenzity** and l je **aditívna vyrovnávacia konštanta intenzity** obrazu.

Saturačné (urezávacie, winsorizačné) podmienky definujeme nasledovne

1. ak $f_{\mathrm{lio}}(a) < 0$, potom $f_{\mathrm{lio}}(a) = 0$ (`if (a < 0) a <- 0`)
2. ak $f_{\mathrm{lio}}(a) > K-1$ potom $f_{\mathrm{lio}}(a) = K-1$ (`if (a > K-1) a <- K-1`)

Definition (Aditívne vyrovnávanie obrazu)

Aditívne vyrovnávanie obrazu: nech $k=1$, $l \in \mathbb{Z}$, $|l| \le K-1$

$$f_{\mathrm{lio}}(a) = a + l,$$

kde

1. $l \in \mathbb{Z}$, pretože chceme, aby intenzita bola kvantovaná z $\{0,1,\dots K-1\}$
2. $|l| \le K-1$, pretože inak by bola intenzita mimo povoleného rozsahu
3. ak $l > 0$, potom transformovaný obraz bude **svetlejší** ako pôvodný
4. ak $l < 0$, potom transformovaný obraz bude **tmavší** ako pôvodný
5. l predstavuje ***posun histogramu doľava alebo doprava***

Definition (Škálovanie obrazu)

Škálovanie obrazu: nech $l = 0$ a $k > 0$, potom

$$f_{\text{lio}}(a) = k \cdot a,$$

kde

1. $k > 0$, pretože $f_{\text{lio}}(a)$ musí byť kladné
2. nie je nutné, aby $k \in \mathbb{Z}$, pretože by sme mali len veľmi málo použiteľných možností
3. praktické zaokrúhlovanie (v prípade potreby) $f_{\text{lio}}(a) = \lfloor k \cdot a + 0.5 \rfloor$
4. ak $k > 1$, potom intenzita $f_{\text{lio}}(a)$ pokryje <u>**širší interval hodnôt**</u> ako a
5. ak $k < 1$, potom intenzita $f_{\text{lio}}(a)$ pokryje <u>**užší interval hodnôt**</u> ako a
6. ***škálovanie naťahuje alebo stláča histogram v smere osi x***

Definition (Negatív obrazu)

Negatív obrazu: nech $k = -1$ a $l = K - 1$, potom

$$f_{\text{lio}}(a) = -a + (K - 1),$$

kde

1. škálovanie použitím $k = -1$ spôsobí ***reverziu (flip) histogramu v smere osi x***
2. additívna konštanta $l = K - 1$ spôsobuje, že ***všetky transformované hodnoty sú kladné a patria do povoleného rozsahu***

Definition (Autokontrast)

Autokontrast:

$$f_{\text{lio}}(a) = k \cdot (a - c) + l, \text{ kde } l = a_{\min}, c = a_{\text{low}}, k = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{a_{\text{high}} - a_{\text{low}}}, a_{\text{low}} \neq a_{\text{high}},$$

a ***intenzita je modifikovaná tak, aby jej hodnoty pokryli celý možný rozsah povolených hodnôt.***

Definition (Thresholding)

Thresholding je špeciálnym typom kvantovania obrazu, ktoré separuje intenzitu do dvoch tried v závislosti na **prahovej konštante** a_{th}. **Prahová funkcia** $f_{\text{threshold}}(a)$ kategorizuje pixely do dvoch skupín, ktorým zodpovedajú hodnoty intenzity a_0 a a_1, nasledovne

$$f_{\text{threshold}}(a) = \begin{cases} a_0 & \text{pre } a < a_{\text{th}} \\ a_1 & \text{pre } a \geq a_{\text{th}} \end{cases}, \text{ kde } 0 < a_{\text{th}} \leq a_{\max}$$

Typickými aplikáciami sú

1. ***binarizácia intenzity obrazu*** s hodnotami $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$, ktorá v R bude vyzerať nasledovne
   `a[which(a < a.th)] <- 0; a[which(a >= a.th)] <- 1.`
2. thresholding je najefektívnejší pri ***bimodálnom histograme*** – charakterizuje <u>objekt a pozadie majúce rôznu priemernú intenzitu</u> – tmavý objekt a svetlé pozadie alebo svetlý objekt a tmavé pozadie
3. <u>cieľ</u> – ***separovať objekt od pozadia*** alebo nájsť ***obrys objektu***

Example (R logo)

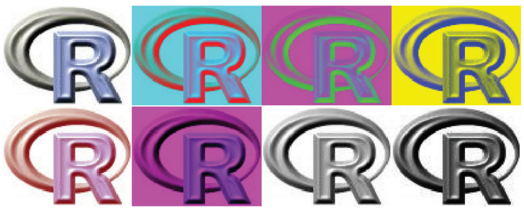
Majme R logo (rozmery 77×101 pixelov)—uložené ako **PPM** (***Portable Pixel Map***, ***portable pixmaps***). Aj napriek tomu, že ide o neefektívny formát rastrovaného obrazu, je veľmi jednoduchý z hľadiska spracovania obrazu, a preto sa často používa.

1. Načítajte a zobrazte toto logo `M` v R.
2. Inveretujte R (červený) komponent obrazu `M`.
3. Inveretujte G (zelený) komponent obrazu `M`.
4. Inveretujte B (modrý) komponent obrazu `M`.
5. Zvýraznite R komponent obrazu `M`.
6. Odstráňte zelený komponent obrazu `M`.
7. Transformujte `M` do sivej škály.
8. Zvýraznite kontrast `M` v sivej škále pomocou funkcie $f(a) = a^k, k = 2$.

Example 10
Digitálny obraz

Riešenia:

1. knižnica `library(pixmap)`, príkaz
   `M <- read.pnm(system.file("pictures/logo.ppm", package="pixmap")[1])`
2. `M1 <- M; M1@red <- 1-M@red; plot(M1)`
3. `M1 <- M; M1@green <- 1-M@green; plot(M1)`
4. `M1 <- M; M1@blue <- 1-M@blue; plot(M1)`
5. `M1 <- M; M1@red <- 0.5 + M@red/2; plot(M1)`
6. `M1 <- M; M1@green <- matrix(0,77,101); plot(M1)`
7. `M1 <- as(M,"pixmapGrey"); M2 <- M1; plot(M2)`
8. `M2 <- M1; M2@grey <- (M2@grey)^2; plot(M2)`



Obrázok: Bodové operácie s obrazom `R` loga

Example 11
Digitálny obraz

Example (Binarizácia lastúry)

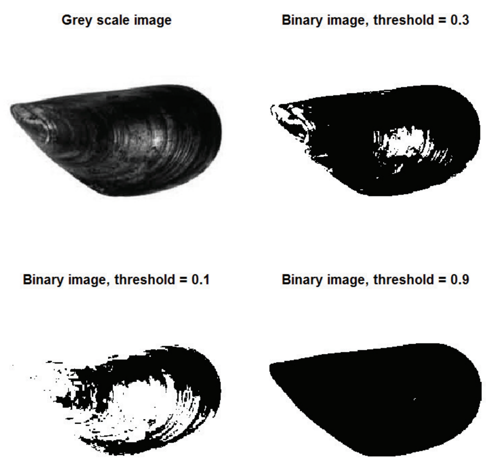
Majme lastúru (*Mitilus* sp.) uloženú ako **PPM**.

1. Načítajte obraz lastúry `M` v `R`.
2. Transformujte `M` do sivej škály a zobrazte použitím funkcie `plot()`.
3. Binarizujte obraz `M` pri thresholde 0.1 a vypočítajte počet pixelov lastúry.
4. Binarizujte obraz `M` pri thresholde 0.3 a vypočítajte počet pixelov lastúry.
5. Binarizujte obraz `M` pri thresholde 0.9 a vypočítajte počet pixelov lastúry.

Riešenia:

1. `library(pixmap); M <- read.pnm("mytilus.ppm")`
2. `M <- as(M,"pixmapGrey"); M1 <- M@grey plot(M,main="Grey scale image")`
3. ```
   M1 <- M@grey; M@grey[which(M1 >= 0.1)] <- 1; a.th <- .1
   M@grey[which(M1 < a.th)] <- 0
   plot(M,main="Binary image, threshold = 0.1")
   length(M@grey[which(M1 < a.th)])
   ```


Example 11
Digitálny obraz



Obrázok: Lastúra *Mytilus sp.* v sivej škále (vľavo hore) a binarizovaná pri rôznych hodnotách konštanty $a_{\text{th}} = 0.1, 0.3, 0.9$

Example 12
Digitálny obraz

Example (Binarizácia lastúry, pokrač.)

Majme lastúru (*Mitilus* sp.) uloženú ako **JPEG**.

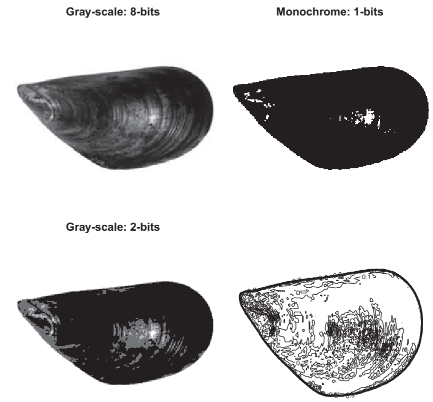
1. Transformujte obraz z formátu JPEG do formátu PPM.
2. Načítajte obraz lastúry `M` v `R`.
3. Transformujte `M` do sivej škály a zobrazte použitím funkcie `image()`.
   Pozn.: Treba si uvedomiť, že **Pixel Aspect Ratio** (**PAR**), kde PAR je rovné pomeru šírky a výšky pixela, nemusí byť rovné jednej, ale napr. $2/3$, $3/4$ alebo $9/16$, čo sa dá ľahko ošetriť pomocou argumentu `asp=PAR` vo funkcii `image()`. Funkcia `plot()` priamo načítava PAR zo súboru PPM, a preto táto korekcia nebola potrebná. PAR je pre lastúru rovný $9/16$. Na zobrazenie `M` použite všetky možné odtiene sivej (8-**bitová škála sivej**).
4. Na zobrazenie `M` použite len tri odtiene sivej (2-**bitová škála sivej**).
5. Na zobrazenie `M` použite len dva odtiene sivej (1-**bitová škála sivej**, **monochromatický obraz**).
6. Zobrazte `M` použitím funkcie `contour()` bez korekcie PAR.
   ```

Example 12
Digitálny obraz

Riešenia:

1. ```
   library(pixmap); library(rimage)
   shell("convert mytilus.jpg mytilus.ppm")
   ```
2. ```
   M <- read.pnm("mytilus.ppm")
   ```
3. ```
   M <- as(M,"pixmapGrey")
   image(t(M@grey[dim(M@grey)[1]:1,]),col=grey(0:255/255),
         asp=9/16,axes=FALSE, main="Gray-scale:  8-bits")
   ```
4. ```
   image(t(M@grey[dim(M@grey)[1]:1,]),col=grey(0:3/3),
         asp=9/16,axes=FALSE, main="Gray-scale:  2-bits")
   ```
5. ```
   image(t(M@grey[dim(M@grey)[1]:1,]),col=grey(0:1/1),
         asp=9/16,axes=FALSE, main="Monochrome:  1-bits")
   ```
6. ```
   contour(t(M@grey[dim(M@grey)[1]:1,]),axes=FALSE)
   title(main="Contour plot")
   ```


Example 12
Digitálny obraz



Obrázok: Lastúra *Mytilus sp.* v 8-bitovej sivej škále (vľavo hore), v 2-bitovej sivej škále (vľavo dole), v 1-bitovej sivej škále (vpravo hore) a kontúrový obraz použitím nesprávneho PAR

Example 13
Digitálny obraz

Example (Hmyzie krídlo, histogram intenzity a extrakcia súradníc landmarkov)

Majme hmyzie krídlo uložené ako **JPEG**.

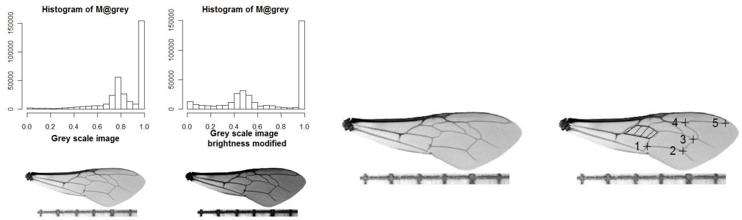
1. Načítajte obraz krídla `M` v `R`.
2. Transformujte obraz z formátu JPEG do formátu PPM.
3. Transformujte `M` do sivej škály, zobrazte histogram intenzity `M` a zobrazte `M` použitím funkcie `plot()`.
4. Zvýraznite kontrast `M` v sivej škále pomocou funkcie $f(a) = a^k, k = 3$, zobrazte histogram intenzity `M` a zobrazte použitím funkcie `plot()`.
5. Použitím funkcie `locator()` lokalizujte 5 landmarkov (viď. obrázok), označte ich ako $+$ a extrahujte ich súradnice. Do obrázku dopíšte čísla landmarkov $1-5$.
6. Lokalizujte hranice časti krídla (viď. obrázok) ako landmarky $6-10$ použitím funkcie `locator()` a vykreslite polygón vnútri konvexného obalu týchto landmarkov pomocou funkcie `polygon()`.
7. Čo sme pri extrakcii landmarkov zanedbali?

Example 13
Digitálny obraz

Riešenia:

1. ```
   library(pixmap); library(rimage)
   M <- read.jpeg("wing.jpg")
   ```
2. ```
   shell("convert wing.jpg wing.ppm")
   M <- read.pnm("wing.ppm")
   ```
3. ```
   M1 <- M; M1 <- as(M1,"pixmapGrey")
   hist(M1@grey)
   plot(M1,main="Grey scale image")
   ```
4. ```
   M1@grey <- (M1@grey)^3
   hist(M@grey)
   plot(M,main="Grey scale image brightness modified")
   ```
5. ```
   plot(M)
   lok <- locator(5,type="p",pch=3)
   text(lok,pos=2,labels=1:5)
   ```
6. ```
   lok <- locator(5,type="l")
   polygon(lok,density=12)
   ```

Example 13
Digitálny obraz



Obrázok: Histogramy (prvý riadok vľavo) a obrazy v sivej škále, modifikovanej sivej škále (druhý riadok vľavo) obrazu hmyzie krídlo a obraz hmyzie krídlo v sivej škále s lokalizovanými landmarkami (vpravo)

Example 14
Digitálny obraz

Example (Sánka, negatív obrazu a extrakcia súradníc landmarkov)

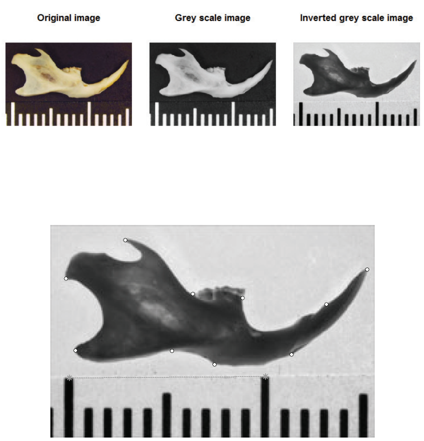
Majme sánku uloženú ako **JPEG**.

1. Načítajte obraz sánky `M` v `R`.
2. Transformujte `M` do sivej škály a zobrazte `M` použitím funkcie `plot()`.
3. Invertujte obraz `M` v sivej škále (vytvorte negatív obrazu) a zobrazte použitím funkcie `plot()`.
4. Použitím funkcie `locator()` odmerajte vzdialenosť 1cm.
5. Použitím funkcie `locator()` lokalizujte 10 landmarkov (viď. obrázok), označte ich ako `o`. Preškálujte extrahované súradnice na správnu mierku.

Riešenia: `library(rimage)`

1. `M <- read.jpeg("jawd.jpg")`
2. `M <- rgb2grey(M); plot(M)`
3. `M <- 1- M; plot(M)`
4. ```
   lok <-
   locator(2,type="o",pch=8,lwd=2,col="grey60",lty="11")
   scale.one <- sqrt(sum(diff(lok$x)^2+diff(lok$y)^2))
   ```
5. ```
   b <- locator(10,type="p")
   conf.mat <- rbind(b$x,b$y)/scale.one
   ```


Example 14
Digitálny obraz



Obrázok: Obrázok sánky v RGB škále (prvý riadok vľavo), v sivej škále (prvý riadok v strede), negatív obrazu v sivej škále (prvý riadok vpravo) a negatív s lokalizovanými landmarkami (druhý riadok)

Analýza obrazu
Uzavreté obrysy

Definition (Automatická extrakcia uzavretých obrysov a reťazové kódovanie)

Objekt v rovine je reprezentovaný jeho **vnútrom** a **obrysom**. Obrys môžeme automaticky extahovať pomocou **reťazového (sekvenčného, Freemanovho) kódovania** definovaného pomocou sekvencie smerových zmien na diskrétnom rastrovanom obraze.

1. definujeme **štartovací bod** $\mathbf{x}_S$ vnútri objektu $\mathcal{R}$ v rovine
2. uzavretý obrys je definovaný pomocou sekvencie bodov $\mathbf{c}_{\mathcal{R}} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_{C-1}]$, kde $\mathbf{x}_i = (u_i, v_i)$
3. jednotlivé elementy sekvencie $\mathbf{c}'_{\mathcal{R}} = [c'_0, c'_1, \ldots c'_{C-1}]$ definujeme ako $c'_i = \text{Code}(\Delta u_i, \Delta v_i)$, kde

$$(\Delta u_i, \Delta v_i) = \begin{cases} (u_{i+1} - u_i, v_{i+1} - v_i) & \text{pre } 0 \le i < C - 1 \\ (u_0 - u_i, v_0 - v_i) & \text{pre } i = C - 1 \end{cases}$$

a $\text{Code}(\Delta u_i, \Delta v_i)$ definujeme pomocou 8-**pixelového susedstva**

Δu	1	1	0	−1	−1	−1	0	0	**3**	**2**	**1**
Δv	0	1	1	1	0	−1	−1	−1	**4**	**pixel**	**0**
$\text{Code}(\Delta u_i, \Delta v_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	**5**	**6**	**7**

Analýza obrazu

Uzavreté obrysy – algoritmus `kontura`

Algoritmus:

1. I: binarizovaný obraz; $I(u, v) = 0$ (objekt), $I(u, v) = 1$ (pozadie)
2. lokalizuj súradnice štartovacieho pixela, $\mathbf{x}_S = (x_S, y_S)$, vnútri objektu tak, aby bolo jeho 4-pixelové susedstvo v objekte; potom transformuj obrazové súradnice od karteziánskych, kde $\mathbf{x}_S = (\dim(\mathbf{I})_{(1)} - y_S, x_S)$ (pozri slajd "Digitálny obraz – definícia")
3. fixuj $a = 1$ (štartovací bod pre pohyb z jedného pixela do druhého, kde index pixela korešponduje a, ktoré sa zvýši o jednotku, keď je nájdený ďalší pixel proti smeru hodinových ručičiek), $S = 6$ (štartovací bod; pixel č.6) a $SS =$`NA` (reťazec); $\mathbf{x} = 0$; $\mathbf{y} = 0$ (štartovacie body; x- a y-ové súradnice); nech matica Δ má riadky Δu a Δv, potom $\mathbf{D} = (\Delta_{(\cdot,8)} \vdots \Delta \vdots \Delta_{(\cdot,1)})$, kde $\Delta_{(\cdot,i)}$ je i-ty stĺpec matice Δ
4. `while` $(\mathbf{x}_{(a)}, \mathbf{x}_{(a)}) \neq \mathbf{x}_S$ (pokiaľ sa dosiahne opäť štartovací bod) `or` dĺžka vektora $\mathbf{x}$ je menšia ako 3 (vyhneme sa nekonečnej slučke) choď na (5) – (6)
5. `if` $\left|\left(I(x_S + \mathbf{D}_{(1,S+1)}, y_S + \mathbf{D}_{(2,S+1)}\right) - I(x_S, y_S))\right| <$ `threshold`, potom
   $a = a + 1$
   $\mathbf{x}_{(a)} = x_S$; $\mathbf{y}_{(a)} = y_S$
   $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_S + \mathbf{D}_{(\cdot,S+1)}$
   $SS_{(a)} = S + 1$; $S = (S + 7) \mod 8$ (skontroluj pixel 5 a choď na pixel 5)

Analýza obrazu

Uzavreté obrysy – algoritmus `kontura`

Algoritmus (pokrač.):

6. `if else` $\left|\left(I(x_S + \mathbf{D}_{(1,S+2)}, y_S + \mathbf{D}_{(2,S+2)}\right) - I(x_S, y_S))\right| <$ `threshold`, potom
   $a = a + 1$
   $\mathbf{x}_{(a)} = x_S$; $\mathbf{y}_{(a)} = y_S$
   $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_S + \mathbf{D}_{(\cdot,S+2)}$
   $SS_{(a)} = S + 2$; $S = (S + 7) \mod 8$ (skontroluj pixel 6 a choď na pixel 6)
7. `if else` $\left|\left(I(x_S + \mathbf{D}_{(1,S+3)}, y_S + \mathbf{D}_{(2,S+3)}\right) - I(x_S, y_S))\right| <$ `threshold`, potom
   $a = a + 1$
   $\mathbf{x}_{(a)} = x_S$; $\mathbf{y}_{(a)} = y_S$
   $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_S + \mathbf{D}_{(\cdot,S+3)}$
   $SS_{(a)} = S + 3$; $S = (S + 7) \mod 8$ (skontroluj pixel 7 a choď na pixel 7)
8. `else` choď na obrys obrazu (smer – napr.diagonálne dole vpravo, $S = (S + 1) \mod 8$; pokiaľ nenájdeš pixel s intenzitou menšou ako `threshold`; t.j. prvý pixel pozadia)
9. `return` $\mathbf{x} = \mathbf{y}_{(-1)}$ a $\mathbf{y} = \left(\dim(\mathbf{I})_{(1)} - \mathbf{x}))\right)_{(-1)}$ (vymaž prvý element, ktorý je rovný poslednému – štartovací bod; pozri slajd "Digitálny obraz – definícia")

Example 15

Uzavreté obrysy

Example (pokrač. príkladu 11 a 12)

Majme lastúru (*Mitilus* sp.) uloženú ako **PPM**. Použite binarizovaný obraz `M` pri thresholde 0.9 z príkladu 11. Extrahujte súradnice obrysu lastúry.

1. Zobrazte binarizovaný obraz `M` (pri thresholde 0.9).
2. Pomocou funkcie `locator()` označte štartovací bod $\mathbf{x}_S$ vnútri lastúry.
3. Na identifikáciu obrysu použite algoritmus `kontura`.
4. Resamplujte súradnice bodov obrysu na $k = 32$, kde body budú **ekvidištantne vzdialené – *s rovnakou uhlovou vzdialenosťou medzi nimi***, kde je potrebné vybrať $k = 32$ ekvidištantných bodov z 629 identifikovaných bodov s použitím funkcie `seq(1,629,length=32)`.
5. Resamplujte súradnice bodov obrysu na $k = 32$, kde body budú **ekvidištantne vzdialené – *s rovnakou radiálnou vzdialenosťou medzi nimi***, kde najprv vypočítate centroid lastúry (aritmetický priemer súradníc obrysu získaných v bode (4)), potom pomocou znalostí z analýzy komplexných čísel vyberiete tie z 629 súradníc identifikovaných algoritmom `kontura`, ktoré patria prieniku kontúry a ramien uhlov $\frac{2 \times i \times \pi}{k}$, $i = 0, 1 \ldots k$, s vrcholom v bode $(0, 0)$.

Example 15

Uzavreté obrysy

Riešenia:

1. ```
   plot(M,main="Binary image, threshold = 0.9")
   ```
2. ```
   x.start <- locator(1)
   x.start <- round(c(x.start$x,x.start$y))
   ```
3. ```
   myt.contour <- kontura(x.start, M@grey, start.threshold =
       0.1, threshold = 0.1) lines(myt.contour$X,myt.contour$Y,lwd=3)
   ```
4. ```
   k.r=32; k <- length(myt.contour$X)
   myt.contour.x <- (myt.contour$X[seq(1,k,length=k.r)])
   myt.contour.y <- (mytilus.contour$Y[seq(1,k,length=k.r)])
   plot(myt.contour.x,myt.contour.y,type="l",lwd=1.1,
       asp=1,axes=FALSE, main="Equidistantly spaced
       coordinates")
   points(myt.contour.x,myt.contour.y,pch=16,cex=0.7)
   ```
5. ```
   plot(myt.contour.x,myt.contour.y,type="l",lwd=1.1, asp=1,axes=FALSE,
       main="Radially spaced coordinates")
   mean.x <- mean(mytillus.contour$X)
   mean.y <- mean(mytillus.contour$Y)
   points(mean.x,mean.y,pch=16)
   r.coords <- radial.coords(mytillus.contour$X,mytillus.contour$Y, 32)
   points(mean.x + r.coords$coords[,1],mean.y +
       r.coords$coords[,2],pch=16,cex=0.7)
   for (i in 1:k.r) {
       segments(mean.x,mean.y,
                mean.x + r.coords$coords[,1],
                mean.y + r.coords$coords[,2])
   }
   ```
   ```

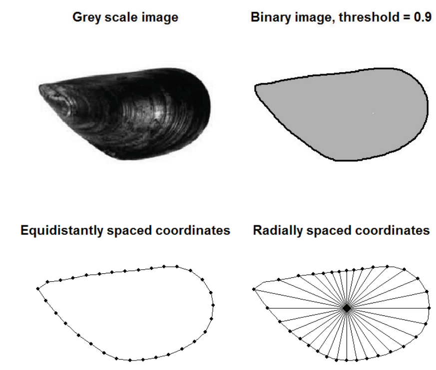
Example 15
Uzavreté obrysy

Riešenia (pokrač.):

```
"radial.coords" <- function(Rx, Ry, k1) {
k <- length(Rx)
M <- matrix(c(Rx, Ry), k, 2)
M1 <- matrix(c(Rx-mean(Rx), Ry-mean(Ry)), k, 2)
V1 <- complex(real = M1[,1], imaginary = M1[,2])
M2 <- matrix(c(Arg(V1), Mod(V1)), k, 2)
V2 <- NA
for (i in 0:(k1-1)) V2[i+1] <- which.max((cos(M2[,1] - 2*i*pi/k1)))
V2 <- sort(V2)
RES <- list("IDs" = V2,"radii" = M2[V2,2],"coords" = M1[V2,])
return(RES)

}
```


Example 15
Uzavreté obrysy



Obrázok: Obrázok lastúry *Mytilus sp.* v sivej škále (prvý riadok vľavo), binarizovaný s extrahovaným obrysom (prvý riadok vpravo), ekvidištantné body obrysu s identickou uhlovou vzialenosťou (druhý riadok vľavo) a s identickou radiálnou vzialenosťou (druhý riadok vpravo)

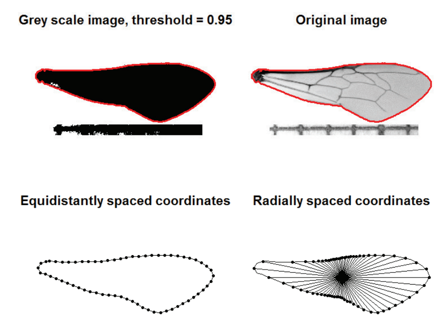
Example 16
Uzavreté obrysy

Example (pokrač. príkladu 13)

Majme hmyzie krídlo uložené ako **JPEG**. Extrahujte súradnice obrysu krídla.

1. Binarizujte obraz `M` (pri thresholde 0.95).
2. Pomocou funkcie `locator()` označte štartovací bod $\mathbf{x}_S$ vnútri krídla.
3. Na identifikáciu obrysu použite algoritmus `kontura`.
4. Resamplujte súradnice bodov obrysu na $k = 64$, kde body budú **ekvidištantne vzdialené – *s rovnakou uhlovou vzdialenosťou medzi nimi***.
5. Resamplujte súradnice bodov obrysu na $k = 64$, kde body budú **ekvidištantne vzdialené – *s rovnakou radiálnou vzdialenosťou medzi nimi***.

Example 16
Uzavreté obrysy



Obrázok: Obrázok hmyzieho krídla binarizovaný s extrahovaným obrysom (prvý riadok vľavo), v sivej škále s extrahovaným obrysom (prvý riadok vpravo), ekvidištantné body obrysu s identickou uhlovou vzialenosťou (druhý riadok vľavo) a s identickou radiálnou vzialenosťou (druhý riadok vpravo)

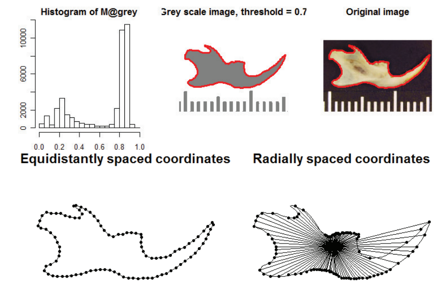
Example 17
Uzavreté obrysy

Example (pokrač. príkladu 14)

Majme sánku uloženú ako **JPEG**. Extrahujte súradnice obrysu sánky.

1. Binarizujte obraz `M` (pri thresholde 0.7).
2. Pomocou funkcie `locator()` označte štartovací bod $\mathbf{x}_S$ vnútri sánky.
3. Na identifikáciu obrysu použite algoritmus `kontura`.
4. Resamplujte súradnice bodov obrysu na $k = 100$, kde body budú **ekvidištantne vzdialené – *s rovnakou uhlovou vzdialenosťou medzi nimi***.
5. Resamplujte súradnice bodov obrysu na $k = 100$, kde body budú **ekvidištantne vzdialené – *s rovnakou radiálnou vzdialenosťou medzi nimi***.
6. Je možné použiť súradnice bodov ekvidištantne vzdialených (s identickou radiálnou vzialenosťou)? Ak nie prečo?

Example 17
Uzavreté obrysy

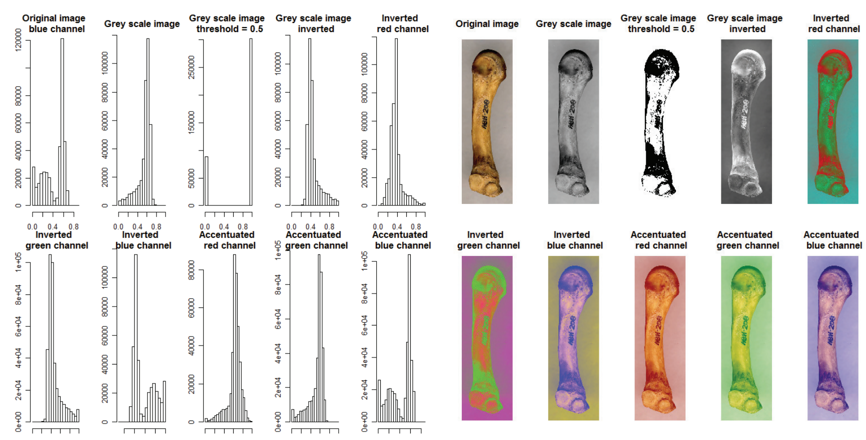


Obrázok: Histogram intenzity sivej (prvý riadok vľavo), obrázok sánky binarizovaný s extrahovaným obrysom (prvý riadok v strede), v RGB škále s extrahovaným obrysom (prvý riadok vpravo), ekvidištantné body obrysu s identickou uhlovou vzialenosťou (druhý riadok vľavo) a s identickou radiálnou vzialenosťou (druhý riadok vpravo)

Example 18
Uzavreté obrysy – zložitejšia situácia na metakarpe ľudskej ruky 1

Obrázok: Originálny obraz metakarpu ľudskej ruky

Example 18
Uzavreté obrysy – zložitejšia situácia na metakarpe ľudskej ruky 2



Obrázok: Histogramy rôznych transformícií farebných komponentov obrazu a nim zodpovedajúce obrazy metakarpu ľudskej ruky

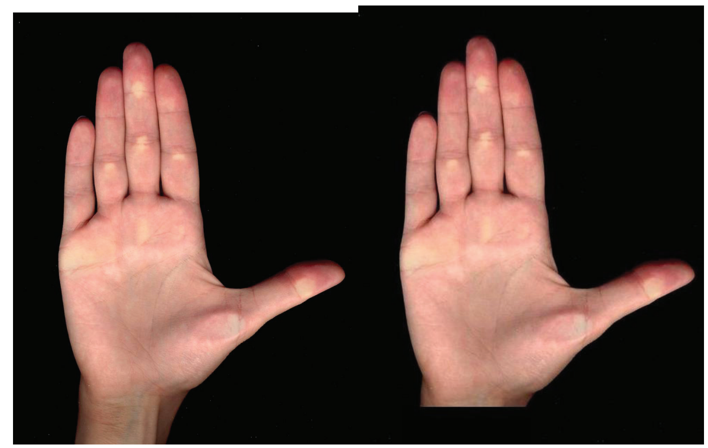
Example 18

Uzavreté obrysy – zložitejšia situácia na metakarpe ľudskej ruky 3

Obrázok: Extrahovaný obrys metakarpu ľudskej ruky

Example 19

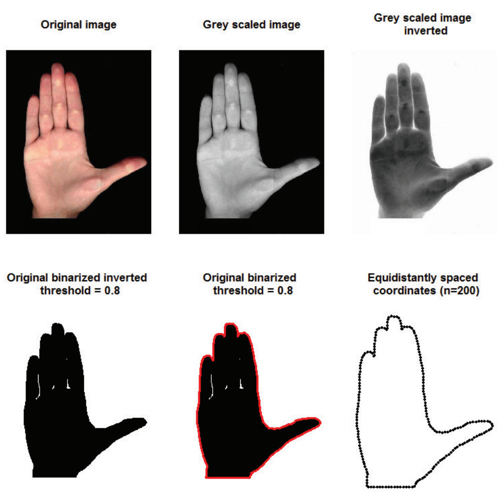
Uzavreté obrysy – zložitejšia situácia ľudskej ruky 1



Obrázok: Obraz ľudskej ruky

Example 19

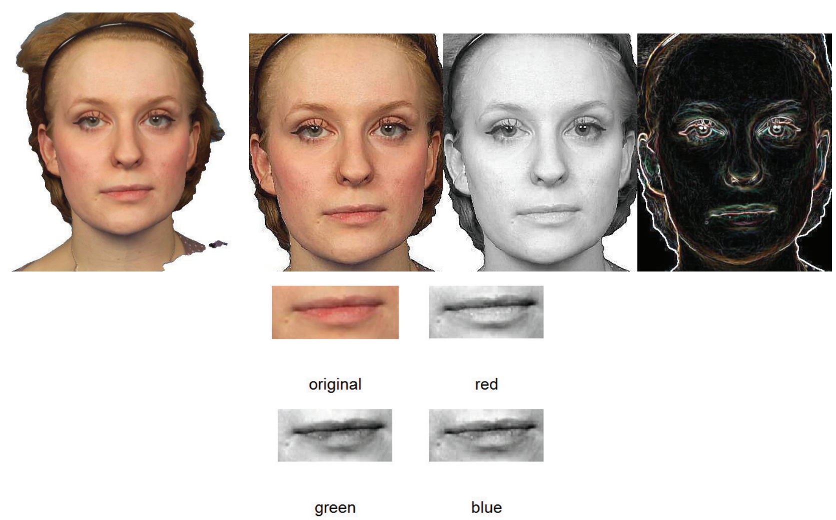
Uzavreté obrysy – zložitejšia situácia ľudskej ruky 2



Obrázok: Extrakcia obrysu ľudskej ruky

Example 20 A – otvorený problém

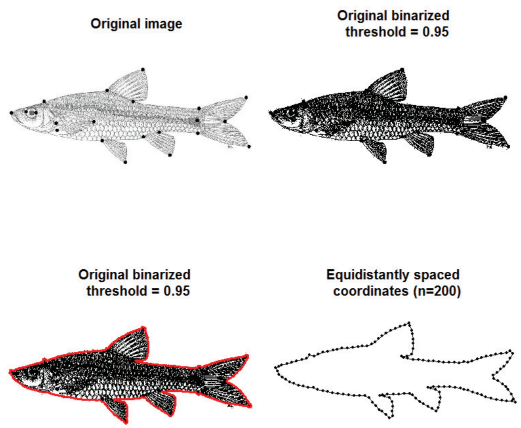
Uzavreté obrysy – (pravdepodobne) neriešiteľná situácia ľudskej tváre a pier



Obrázok: Obrazy rôznych transformácií komponentov obrazu ľudskej tváre a pier, extrahované hrany (vpravo hore)

Example 20 B – otvorený problém

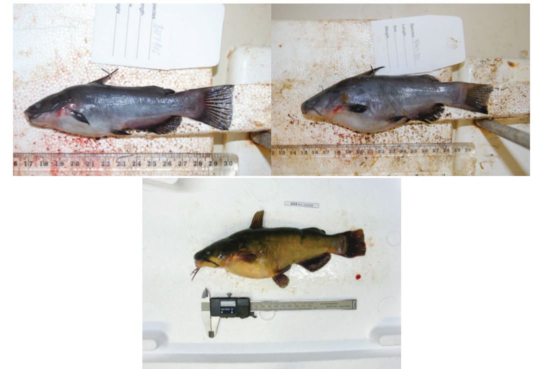
Uzavreté obrysy – stačí len extrakcie obrysu?



Obrázok: Extrakcia obrysu hrúzovca sieťovaného (*Pseudorasbora parva*)

Example 20 B – otvorený problém

Uzavreté obrysy a ich vnútro – potrebná extrakcie objektu ako celku



Obrázok: Extrakcia sumčeka čierneho (*Ameiurus melas*) z pozadia

Analýza obrazu

Geometrické operácie

Definition (Geometrické operácie)

Geometrické operácie transformujú obraz I do nového obrazu I' transformáciou súradníc jednotlivých pixelov,

$$I(u,v) \to I'(u',v'),$$

kde hodnoty intenzity obrazu I pôvodne v bode (u,v) sú transformované do bodu (u',v') v novom obraze I'. Transformačná funkcia má potom tvar

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

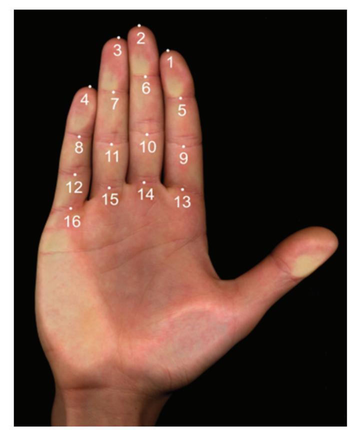
a je definovaná pre každý bod *vzorového obrazu* $\mathbf{x} = (u,v)$ a korešpondujúci bod *transformovaného obrazu* $\mathbf{x}' = (u',v')$, kde $\mathbf{x}' = T(\mathbf{x})$.

Príklady geometrických operácií:

1. **afínne transformácie** – **otočenie**, **posunutie**, **škálovanie**, **skosenie** a **zrkadlenie**
2. **TPS modely** – **interpolačný thin-plate splajn (TPS) model** [IM1, IM3] a **penalizovaný TPS regresný model** [PRM1, PRM3]

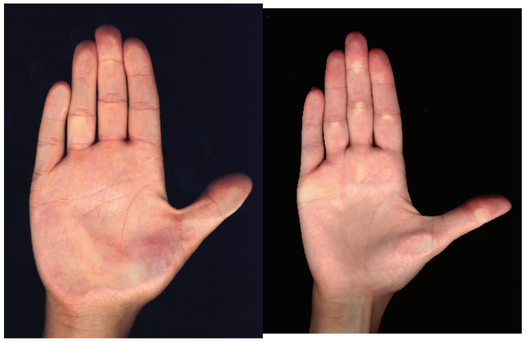
Example 21

Geometrické operácie – **warping** ľudskej ruky 1 (pozor nie **morfing**)



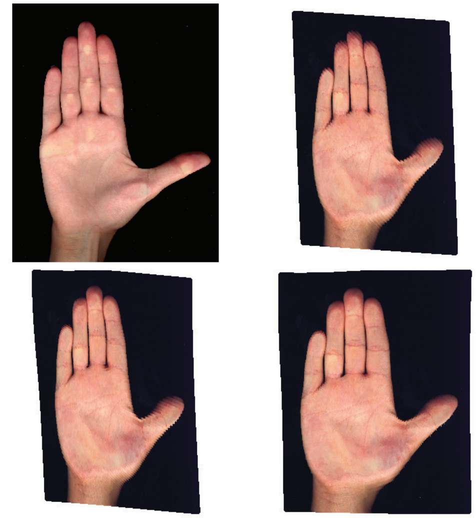
Obrázok: Ľudská ruka a 16 landmarkov

Example 21
Geometrické operácie – **warping** ludskej ruky 2 (pozor nie **morfing**)



Obrázok: Dve ľudské ruky – chceme transformovať ľavú na pravú

Example 21
Geometrické operácie – **warping** ludskej ruky 3 (pozor nie **morfing**)



Obrázok: Ľudské ruky – vzorová ruka, odhadnutá ruka, affínna a neafínna komponenta transformácie (po stĺpcoch) [approx. 1.6mil premenných]

Example 22
Geometrické operácie – **warping** Fredovej tváre (pozor, nie **morfing**)

Obrázok: **Prof. Fred Bookstein** – originálna (vľavo) a transformovaná fotografia (vpravo) [s láskavým dovolením zakladateľa odboru Analýza tvaru]

Analýza tvaru
Analýza obrysov

Definition (Obrys)

Obrys je ***uzavretá krivka*** definovaná súradnicami k bodov (semilandmarkov) patriacich tomuto obrysu, kde body sú

1. **ekvidištantne vzdialené *s rovnakou radiálnou vzdialenosťou medzi nimi*.**
2. **ekvidištantne vzdialené *s rovnakou uhlovou vzdialenosťou medzi nimi*.**

Definition (Analýza obrysov)

Štatistická analýza obrysu závisí od toho, o aký typ obrysu ide.

1. Ak ide o obrys typu (1), používa sa **radiálna Fourierova analýza**.
2. Ak ide o obrys typu (2), používa sa **tangenciálna Fourierova analýza** alebo **eliptická Fourierova analýza**.

2D/3D Fourierova analýza je zovšeobecnením klasickej Fourierovej analýzy používanej v časových radoch na analýzu periodického signálu v dátach, kde sa aplikuje rozklad Fourierovho radu použitím diskrétnych Fourierových transformácií. Slúži ja na ***výraznú redukciu dimenzii***.

Analýza tvaru
Analýza obrysov

Definition (Klasická Fourierova analýza)

Fourierov rozklad periodickej funkcie $f(t)$, kde $t \in \mathbb{R}^+$ s periódou $T_\lambda = \frac{\pi}{\lambda}$ v nejakých časových jednotkách, bude mať tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{p} \left(a_i \cos(\lambda_i t) + b_i \sin(\lambda_i t)\right), \text{ kde } \lambda_i = \frac{i}{T} 2\pi$$

je i**-ta frekvencia** funkcie $f(t)$ v radiánoch $\lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(\lambda_i t) dt; \, b_i = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(\lambda_i t) dt$$

sú **párne a nepárne Fourierove koeficienty** a T je potrebné zvoliť. Aplikácia $f(t)$ predstavuje prepis do podoby **nelineárneho regresného modelu** tvaru

$$f(t) = a_{01} + a_{02} t + \sum_{i=1}^{p} \left(a_i \cos(\lambda_i t) + b_i \sin(\lambda_i t)\right) + \epsilon_t, \text{ kde } \lambda_i = i \frac{\pi}{T},$$

kde je potrebné odhadnúť $3p + 3$ parametrov a model linearizovať.

Analýza tvaru
RFA 1

Definition (Radiálna Fourierova analýza, RFA)

Majme obrys centrovaný do bodu $(0,0)$. **Lúče (ramená)** $r_j, j = 1, 2, \dots k$, **uhlov** θ_j s vrcholom v bode $(0,0)$ je možné popísať **periodickou funkciou** $r(\theta)$ nejakého uhla θ nasledovne

$$r(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{p} \left(a_i \cos(\lambda_i \theta) + b_i \sin(\lambda_i \theta)\right), \text{ kde } \lambda_i = i.$$

Potom j**-ta harmonická zložka** je rovná $r(\theta_j)$, $a_0 = 2\sqrt{\sum_{j=1}^{k} r_j / k}$,

$$a_i = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} r_j \cos(i\theta_j); \, b_i = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} r_j \sin(i\theta_j)$$

sú **párne a nepárne Fourierove koeficienty**, k je **počet lúčov** a zároveň semilandmarkov obrysu a p je **počet frekvencií**. Musí byť splnená podmienka $p < \frac{k}{2}$, lebo máme dva parametre na jednu harmonickú zložku, ktorá je funkciou nejakého jedného uhla θ. Označenia: obrys $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}_{RFA}^{(p)}$.

Analýza tvaru
RFA 2

Metodologické poznámky:

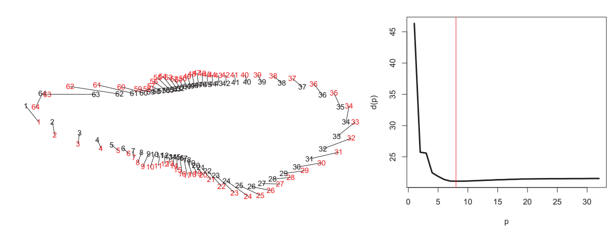
1. všetky obrysy z náhodného výberu ***musia byť automaticky extrahované pomocou reťazového kódu rovnakým smerom***
2. treba mať na zreteli, že ***smer výpočtu lúčov v RFA je proti smeru hodinových ručičiek a odhadovanie je sekvenčné***
3. ***štartovací bod a smer zoradenia bodov na obryse musia byť kompatibilné so štartovacím bodom a smerom odhadovania lúčov RFA***, teda proti smeru hodinových ručičiek; ak nie je, je potrebné zoradenie v smere hodinových ručičiek zmeniť na proti smeru hodinových ručičiek
4. ***uhol a orientácia prvého ramena musí byť rovnaká*** pri všetkých obrysoch z náhodného výberu – všetky obrysy je potrebné rotovať do tejto polohy, t.j. nulté rameno je na osi x-ovej, smeruje k jej kladnej polovici s vrcholom v bode $(0,0)$, čo docielime centrovaním obrysu do jeho centroidu (aritmetický priemer súradníc bodov obrysu) a otočením nultého ramena do osi x
5. ak chceme porovnávať ***obrysy párového typu*** (ľavá a pravá strana), je potrebné extrahovať jednu stranu proti smeru hodinových ručičiek a druhú v smere hodinových ručičiek s opačne orientovaným nultým uhlom a potom napr. ľavú stranu transformovať pomocou osovej súmernosti (s osou v osi y)
6. ***minimálny počet harmonických koeficientov*** p sa odhadne ako $d_p = \arg\min_{\forall p} \left\| \mathbf{M} - \mathbf{M}_{RFA}^{(p)} \right\|^2$
7. RFA ***nemôže byť použitá v prípadoch, keď aspoň jedno rameno (lúč) pretne obrys viac ako jedenkrát***

Example 23
RFA 3

Example (pokrač. príkladu 16)

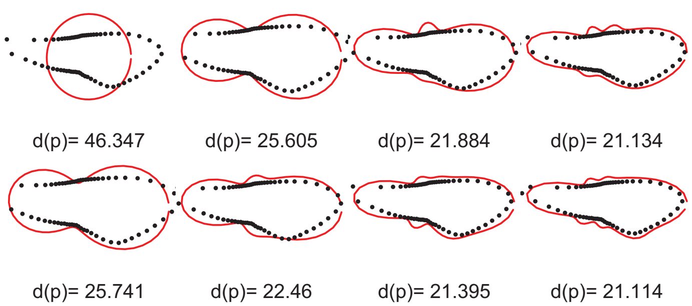
Majme hmyzie krídlo uložené ako **JPEG** a resamplované súradnice semilandmarkov obrysu pomocou radiálnych vzdialeností vypočítané v príklade 16.

1. Odhadnite obrys krídla pomocou RFA pri optimálnom p.



Obrázok: Obrys $\mathbf{M}$ superponovaný s obrysom $\mathbf{M}_{RFA}^{(8)}$ so segmentami spájajúcimi korešpondujúce body, rozptylový graf počtu harmonických koeficientov voči d_p (suboptimálne $p = 8$)

Example 23
RFA 4



Obrázok: Obrys **M** superponovaný s obrysmi $\mathbf{M}^{(p)}_{RFA}, p = 1, 2, \dots 8$

Pozn.: Súradnice sú vypočítané v tvare **komplexných čísel**, kde modulus$= r(\theta_j)$, argument$= \theta_j$.

Analýza tvaru
EFA 1

Definition (Eliptická Fourierova analýza, EFA)

Majme obrys centrovaný do bodu $(0,0)$. Nech T je ***obvod obrysu***, $\lambda = 2\pi/T$ je **frekvencia** a nech $t \in \langle 0, T\rangle$ je **chordálna (uhlová) vzdialenosť**. Potom je možné pomocou t vyjadriť súradnice semilandmarkov obrysu ako $x(t)$ a $y(t)$ nasledovne

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos(i\lambda t) + b_i \sin(i\lambda t)\right), \text{ kde}$$

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(i\lambda t)dt;\, b_i = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(i\lambda t)dt,$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(c_i \cos(i\lambda t) + d_i \sin(i\lambda t)\right), \text{ kde}$$

$$c_i = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(i\lambda t)dt;\, d_i = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(i\lambda t)dt.$$

Analýza tvaru
EFA 2

Definition (EFA, pokrač.)

Ak je obrys definovaný pomocou k semilandmarkov, potom môžeme **Fourierove koeficienty** odhadnúť nasledovne

$$a_i = \frac{T}{2\pi^2 n^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}\left(\cos\left(i\frac{2\pi t_j}{T}\right) - \cos\left(i\frac{2\pi t_{j-1}}{T}\right)\right), \Delta x_1 = x_1 - x_k,$$

$$b_i = \frac{T}{2\pi^2 n^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}\left(\sin\left(i\frac{2\pi t_j}{T}\right) - \sin\left(i\frac{2\pi t_{j-1}}{T}\right)\right), a_0 = \frac{2}{T}\sum_{j=1}^{p} x_j,$$

$$c_i = \frac{T}{2\pi^2 n^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\Delta y_j}{\Delta t_j}\left(\cos\left(i\frac{2\pi t_j}{T}\right) - \cos\left(i\frac{2\pi t_{j-1}}{T}\right)\right), \Delta y_1 = y_1 - y_k,$$

$$d_i = \frac{T}{2\pi^2 n^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\Delta y_j}{\Delta t_j}\left(\sin\left(i\frac{2\pi t_j}{T}\right) - \sin\left(i\frac{2\pi t_{j-1}}{T}\right)\right), c_0 = \frac{2}{T}\sum_{j=1}^{p} y_j.$$

Vypočítané koeficienty a_0, a_i, b_i, c_0, c_i a d_i použijeme na odhad $x(t_j)$ a $y(t_j)$ dosadením do rovníc z predchádzajúceho slajdu, kde ∞ nahradíme p.

Analýza tvaru
EFA 3

Metodologické poznámky:

1. všetky obrysy z náhodného výberu ***musia byť automaticky extrahované pomocou reťazového kódu rovnakým smerom***
2. treba mať na zreteli, že ***smer výpočtu EFA je identický so smerom zoradenia bodov obrysu, odhadovanie je sekvenčné*** **a obe metódy majú rovnaký štartovací bod**
3. ak chceme porovnávať ***obrysy párového typu*** (ľavá a pravá strana), je potrebné extrahovať jednu stranu proti smeru hodinových ručičiek a druhú v smere hodinových ručičiek s opačne orientovanou hlavnou osou a potom napr. ľavú stranu transformovať pomocou osovej súmernosti (s osou v osi y)
4. ***minimálny počet eliptických koeficientov*** p sa odhadne ako
   $d_p = \arg\min_{\forall p} \left\| \mathbf{M} - \mathbf{M}^{(p)}_{RFA} \right\|^2$
5. parametrická forma EFA umožňuje ***jednoduché rozšírenie do 3D*** pridaním $z(t)$
6. ***väčšie eliptické koeficienty korešpondujú s väčšími elipsami, kde obrys vzniká kombináciou superponovaných elíps***
7. počet eliptických koeficientov môžeme odhadnúť pomocou **Furierovej sily** definovanej ako $\text{Power}_i = (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2)/2$, ktorá je proporcionálna amplitúde koeficientov a **kumulatívnej Furierovej sily** $\text{cumsum}(\text{Power}_i)$
8. najviac informácií o tvare obrysu je obsiahnutých v prvej elipse, pretože ide o najlepšiu aproximáciu obrysu

Analýza tvaru
EFA 4

Definition (NEFA – normalizácia (štandardizácia) obrysu)

Normalizovaná eliptická Fourierova analýza (**NEFA**) je EFA invariantná na veľkosť a rotáciu ***prvej elipsy*** a štartovací bod, kde sú koeficienty a_i, b_i, c_i, d_i transformované na a_i', b_i', c_i', d_i' použitím nasledovného algoritmu

$$\begin{pmatrix} a_i' & b_i' \\ c_i' & d_i' \end{pmatrix} = \frac{1}{s_e}\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos i\theta & -\sin i\theta \\ \sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix},$$

kde s_e je **dĺžka hlavnej poloosi prvej elipsy**, ψ súvisí s **orientáciou elipsy** a θ s **rotáciou štartovacieho bodu** na koniec elipsy. Potom

$$\psi = 0.5\arctan\frac{2(a_1b_1 - c_1d_1)}{a_1^2 + c_1^2 - b_1^2 - d_1^2}, s_e = \sqrt{a_*^2 + c_*^2}, \theta = \arctan\frac{c_*}{a_*},$$

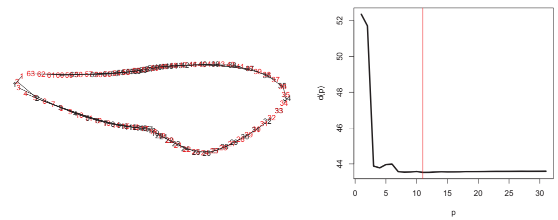
kde $a_* = a_1\cos\psi + b_1\sin\psi$ a $c_* = c_1\cos\psi + d_1\sin\psi$. Koeficienty prvej eliptickej zložky $a_1' = 1, b_1' = c_1' = 0$. Zostávajúci koeficient d_i' súvisí s **eliptickou excentricitou**, t.j. šírko-dĺžkovým pomerom obrysu.
Ak máme k dispozícii aj **súradnice landmarkov** na obryse, môžeme použiť na normalizáciu **GPA**.

Example 24
EFA 5

Example (pokrač. príkladu 16 a 23)

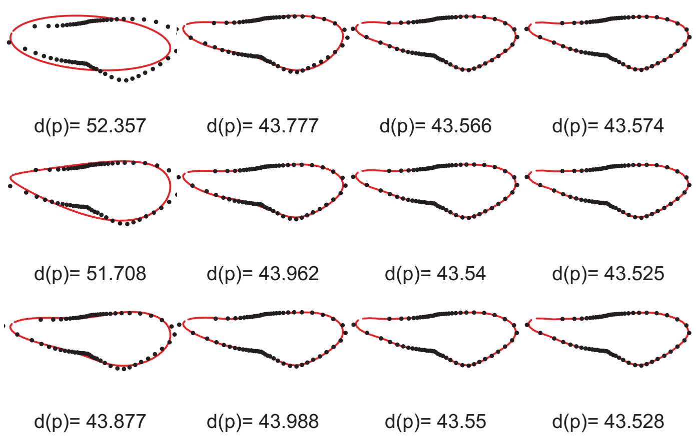
Majme hmyzie krídlo uložené ako **JPEG** a resamplované súradnice semilandmarkov obrysu pomocou uhlových vzdialeností vypočítané v príklade 16.

1. Odhadnite obrys krídla pomocou EFA pri optimálnom p.



Obrázok: Obrys **M** superponovaný s obrysom $\mathbf{M}_{EFA}^{(11)}$ so segmentami spájajúcimi korešpondujúce body, rozptylový graf počtu harmonických koeficientov voči d_p (suboptimálne $p = 11$)

Example 24
EFA 6



Obrázok: Obrys **M** superponovaný s obrysmi $\mathbf{M}_{EFA}^{(p)}, p = 1, 2, \ldots 12$

Analýza tvaru
TFA 1

Definition (Tangenciálna Fourierova analýza, TFA)

Majme obrys centrovaný do bodu $(0, 0)$. Semilandmarky obrysu sú ekvidištantne vzdialené s rovnakou uhlovou vzdialenosťou medzi nimi. Nech T je ***obvod obrysu***, ktorý je pre jednoduchosť potrebné škálovať na 2π. Potom je možné popísať ***kumulatívnu zmenu uhla dotykového vektora*** $\phi(t)$ v jednotlivých bodoch obrysu ako funkciu (kumulatívnej) chordálnej (uhlovej) vzdialenosti t ako $\phi(t) = \theta(t) - \theta(0) - t$, kde $\theta(t)$ je ***uhol dotykového vektora*** vo vzdialenosti t, $\theta(0)$ je uhol dotykového vektora štartovacieho bodu a jeho odpočítanie slúži na štandardizáciu. Potom platí

$$\phi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{p}(a_i\cos(i\theta) + b_i\sin(i\theta)), \text{ kde}$$

$$a_i = \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k}\phi(t)\cos(i\theta_j); b_i = \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k}\phi(t)\sin(i\theta_j); a_0 = 2\sum_{j=1}^{k}\phi(t)/k.$$

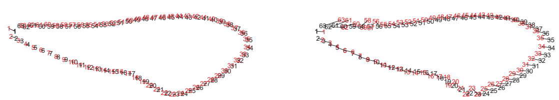
Pozn.: Tak ako aj pri RFA – používame na výpočet **komplexné čísla**, v tomto prípade dostaneme **Z**, kde modulus$= 2\pi/k$, argument$= \theta(t) = \phi(t) + \theta(0) + t$, výsledné súradnice obrysu sú cumsum(**Z**), kt. musíme centrovať do $(0, 0)$.

Example (pokrač. príkladu 16, 23 a 24)

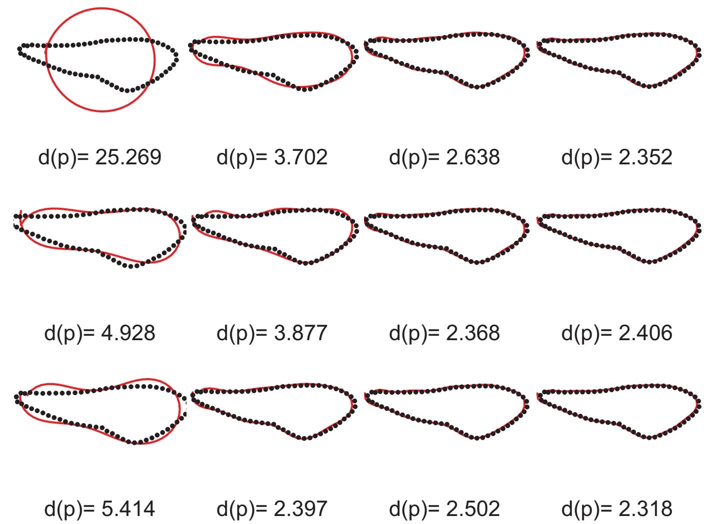
Majme hmyzie krídlo uložené ako **JPEG** a resamplované súradnice semilandmarkov obrysu pomocou uhlových vzdialeností vypočítané v príklade 16.

1. Odhadnite obrys krídla pomocou TFA pri optimálnom p.

Pozn.: Najjednoduchší spôsob aproximácie uhla dotykového vektora je pomocou rozdielu dvoch susediacich bodov obrysu. Treba si uvedomiť, že vplyv uhla $\theta(0)$ môže mať výrazný efekt na odhad obrysu.



Obrázok: Obrys **M** superponovaný s obrysom $\mathbf{M}_{TFA}^{(20)}$ so segmentami spájajúcimi korešpondujúce body (bez a s odpočítaním $\theta(0)$)



Obrázok: Obrys **M** superponovaný s obrysmi $\mathbf{M}_{TFA}^{(p)}, p = 1, 2, \ldots 12$

Definition (Matica ohybovej energie a ohybová energia)

Majme **TPS** model [IM3] definovaný ako

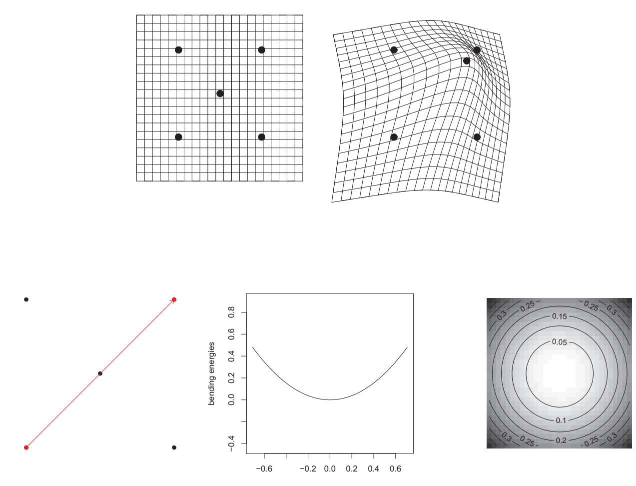
$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{1}_k & \mathbf{X} \\ \mathbf{1}_k^T & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{c}^T \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{1}_k & \mathbf{X} \\ \mathbf{1}_k^T & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Nech je inverzia matice **L** rovná

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{k \times k}^{11} & \mathbf{L}_{k \times 3}^{12} \\ \mathbf{L}_{3 \times k}^{21} & \mathbf{L}_{3 \times 3}^{22} \end{pmatrix},$$

potom

1. **matica ohybovej energie**: $\mathbf{B}_e = \mathbf{L}_{k \times k}^{11}$
2. **ohybová energia** alebo **penalta**:
   $J(\mathbf{f}) = \sum_{m=1}^{2} \int\int_{\mathbb{R}^2} \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \right)^2 \right] dx^{(1)} dx^{(2)}$, s riešením modelu IM3
   $J(\mathbf{f}) = tr\left(\mathbf{W}^T \mathbf{S} \mathbf{W}\right) = tr(\mathbf{Y}^T \mathbf{B}_e \mathbf{Y})$



Obrázok: ***Cirkularita ohybovej energie*** vo vzťahu ku polohe piateho landmarku v prostriedku štvorca

Definition (Analýza kriviek – posúvanie semilandmarkov po krivke)

Nech $\mathbf{X}_{k\times 2} = (\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_k)^T = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ a $\mathbf{Y}_{k\times 2} = (\mathbf{y}_1, \ldots \mathbf{y}_k)^T = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)})$ sú konfiguračné matice s riadkami $\mathbf{x}_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)})^T$ a $\mathbf{y}_j = (y_j^{(1)}, y_j^{(2)})^T$, kde $\mathbf{x}^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots x_k^{(m)}\right)^T, \mathbf{y}^{(m)} = \left(y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots y_k^{(m)}\right)^T, j = 1, 2, \ldots k$ a $m = 1, 2$. Nech body sublistu $\mathbf{y}_{j_i}$ ***posúvame mimo ich pôvodnej polohy*** $\mathbf{x}_{j_i}, i = 1, 2, \ldots q \leq k$, ***pozdĺž tangenciálneho smeru*** $\mathbf{u}_i = \left(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}\right)^T$, kde $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. Potom nová poloha $\mathbf{x}_{j_i}$ je definovaná ako

$$\mathbf{y}_{j_i} = \mathbf{x}_{j_i} + t_i\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \ldots q \leq k, \text{kde } \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}}{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}\|_2} \text{ a } \mathbf{t} = (t_1, \ldots t_q)^T.$$

Je potrebné ***minimalizovať kvadratickú formu***

$$\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{t})^T \mathbf{B} (\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{t}),$$

kde $\mathbf{x} = Vec(\mathbf{X})$ a $\mathbf{y} = Vec(\mathbf{Y})$, $\mathbf{B} = diag(\mathbf{B}_e, \mathbf{B}_e)$, $\mathbf{B}_e$ je závislá iba na nejakej (referenčnej) konfiguračnej matici $\mathbf{X}^*$.

Definition (Analýza kriviek – posúvanie semilandmarkov po krivke; pokrač.)

Kvadratickú formu $\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ minimalizujeme cez ***hyperrovinu***

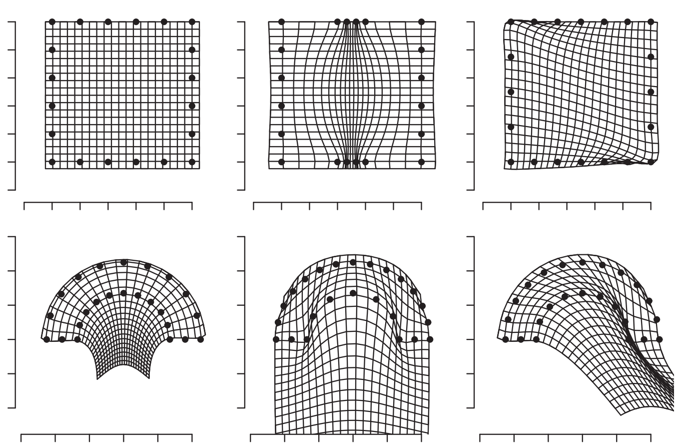
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{t},$$

kde $\mathbf{X}$ je matica landmarkov vzoru (pôvodná poloha) a $\mathbf{Y}$ je matica landmarkov obrazu (nová poloha), $\mathbf{U}$ je matica riadkov dĺžky $2k$ a stĺpcov dĺžky q, kde (j_i, i)-ty element označujeme $u_i^{(1)}$ a $(k + j_i, i)$-ty element $u_i^{(2)}$, na iných miestach sú umiestnené nuly. Vektor $\mathbf{t}$ je riešením nasledujúcej rovnosti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{t})^T \mathbf{B} (\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{t}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{B}(\mathbf{U}\mathbf{t}) + (\mathbf{U}\mathbf{t})^T\mathbf{B}\mathbf{x} + (\mathbf{U}\mathbf{t})^T\mathbf{B}(\mathbf{U}\mathbf{t})) \\
&= \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{x} + 2\mathbf{U}^T\mathbf{B}(\mathbf{U}\mathbf{t}) \\
&= 2(\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{B}(\mathbf{U}\mathbf{t})) = 0
\end{aligned}$$

Riešenie (podobné zovšeobecnenej MNŠ) má tvar

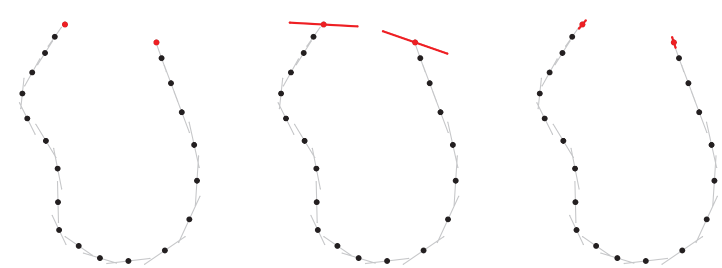
$$\mathbf{t} = -\left(\mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{x}.$$



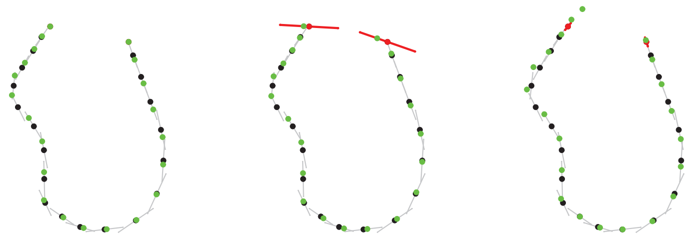
Obrázok: Posúvanie bodov na krivke pri troch situáciách a dvoch tvaroch

Example (Symphyseálna krivka, pokrač.)

Majme symphyseálnu krivku z príkladu 3, kde $k = 21$, dáta (`symphysis`). Na ***optimalizáciu polohy semilandmarkov na krivke v zmysle ohybovej energie (geometrická homológia)*** použijeme konfiguračnú maticu $\mathbf{X}$ a referenčnú (napr. priemernú) krivku $\mathbf{X}_R$ (voči ktorej prebieha optimalizácia).

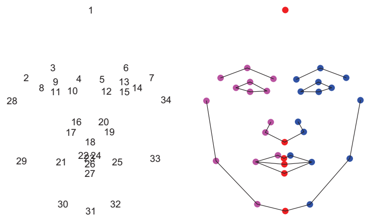


Obrázok: Posúvanie bodov na krivke pri troch situáciách – rôzne chápanie krivky (uzavretá vs otvorená), koncové body fixované vs voľné na posúvanie [dotyčnice v smere $\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \ldots k$; ozn. • pôvodné pozície $\mathbf{x}_i$]

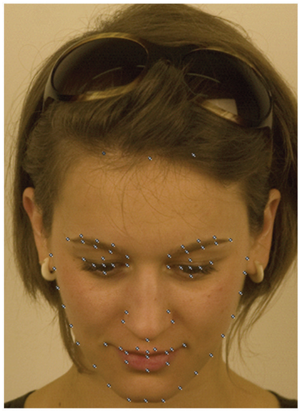


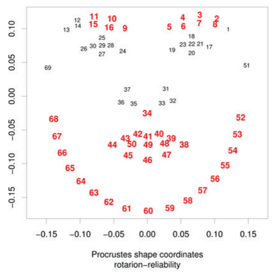
Obrázok: Posúvanie bodov na krivke pri troch situáciách – rôzne chápanie krivky (uzavretá vs otvorená), koncové body fixované vs voľné na posúvanie [dotyčnice v smere $\mathbf{u}_i$ s riešeniami $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + t_i\mathbf{u}_i, i = 1, 2, ...q$, ozn. ● pôvodné pozície $\mathbf{x}_i$, ● odhadnuté pozície $\mathbf{y}_i$]

20 dievčat, $19 - 31$ročných, $46 + 26$ (semi)landmarkov

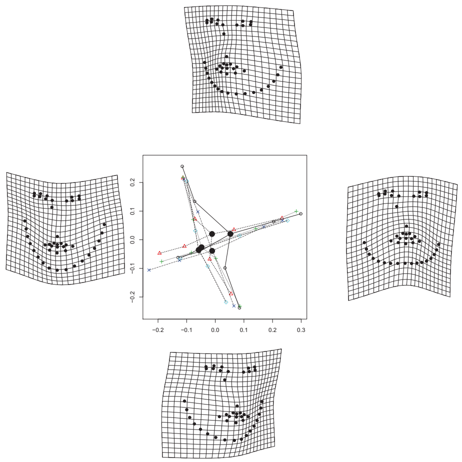


Obrázok: (Semi)landmarky na ľudskej tvári a ***pravo-ľavá (ne)kompatibilita kódovania semilandmarkov na krivkách*** [podmnožina (semi)landmarkov]





Obrázok: Reliabilita náklonu hlavy pri snímaní v rôznych uhloch [podmnožina (semi)landmarkov] a jej PCA



Obrázok: PCA reliability náklonu hlavy pri snímaní v rôznych uhloch [podmnožina (semi)landmarkov]

2D tvár
Získavanie dát a ich úprava v PC

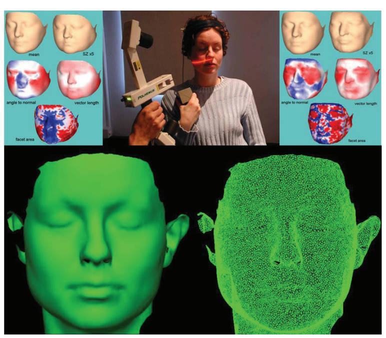
Získavanie dát a ich úprava v PC:

1. **nasnímanie dát klasickým fotoaparátom** – protokol snímania (dotazník, kalibrácia snímacieho systému, participanti a časový harmonogram)
2. **extrakcia 2D súradníc a RGB farieb** – z `.jpeg` a `.tiff` súborov a pod. do `.dmp` súborov čitateľných v R
3. **validačná štúdia (štúdia reliabilita)** – vhodná/optimálna orientácia tváre v anatomickom súradnicovom systéme, opakovateľnosť presnosti snímania/merania (Technical Measurement Error, TEM), lineárny regresný model so zmiešanými efektami
4. **(polo)automatické meranie/extrakcia súradníc (semi)landmarkov, kriviek** $[(46 + 26) \times 2$ (semi)landmarkov$]$
5. iteratívny výpočet **súradníc geometricky homologických semilandmarkov na krivkách** použitím ***TPS warpingu*** $[(46 + 26) \times 2$ (semi)landmarkov a viac ako 2mil pixelov$]$
6. **výpočet symetrizovaného priemerného tvaru (template)** (semi)landmarky na referenčnej tvári a preznačenej a zrkadlovo súmernej tvári musia byť spriemerované

3D tvár – snímok zo stereo-kamerového systému
Dental clinic, The University of Glasgow, UK; Face 3D data

3D tvár – snímok z laserového skaneru
Royal College of Surgeons in Ireland, Dublin; Face 3D data

42 párov naskenovaných tvárí, 23 landmarkov, 1664 geometricky homologických semilandamrkov na krivkách a ploche, 59242 bodov plochy trinagulovaných použitím 117386 trojuholníkov



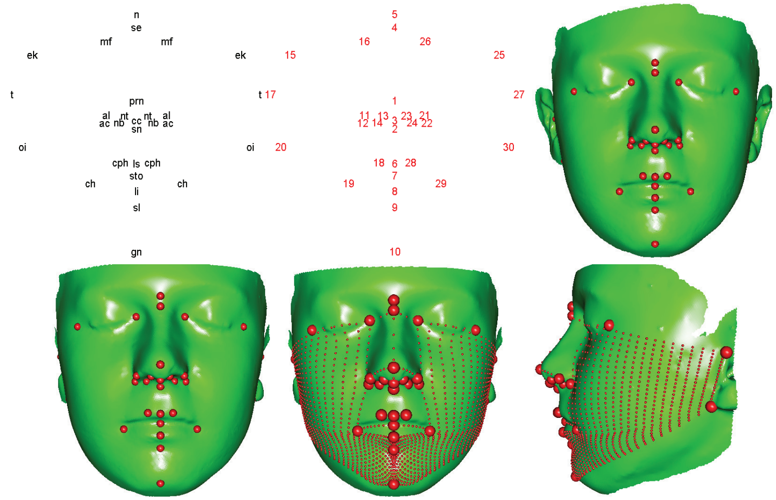
Obrázok: VCFS tvár, laserový skaner a (ne)triangulované semilandmarky na ploche

3D tvár
Získavanie dát a ich úprava v PC

Získavanie dát a ich úprava v PC:

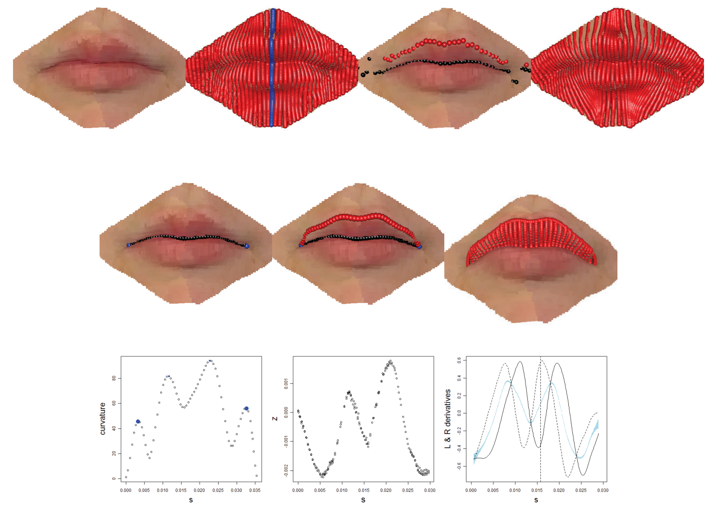
1. **nasnímanie dát stereo-kamerovým systémom alebo laserovým skanerom** – protokol snímania (dotazník, kalibrácia snímacieho systému, participanti a časový harmonogram)
2. **extrakcia 3D súradníc, normál bodov na ploche, trinagulácie a RGB farieb** – z `.obj`, `.wrl` a `.jpeg` súborov do `.dmp` súborov čitateľných v R
3. **validačná štúdia (štúdia reliabilita)** – vhodná/optimálna orientácia tváre v anatomickom súradnicovom systéme, opakovateľnosť presnosti snímania/merania (Technical Measurement Error, TEM), lineárny regresný model so zmiešanými efektami
4. **(polo)automatické meranie/extrakcia súradníc (semi)landmarkov, kriviek a plôch** $[1664 \times 3 = 4992, 4992 \times 42 = 209664$ bodov$]$
5. iteratívny výpočet **súradníc geometricky homologických semilandmarkov na krivkách/plochách a bodov na ploche** použitím ***TPS warpingu*** $[59242 \times 3 = 177726; 177726 \times 42 = 7464492]$
6. **výpočet symetrizovaného priemerného tvaru (template)** (semi)landmarky na referenčnej tvári a preznačenej a zrkadlovo súmernej tvári musia byť spriemerované; plocha tiež symetrizovaná

3D tvár – snímok z laserového skaneru
Royal College of Surgeons in Ireland, Dublin; Face 3D data



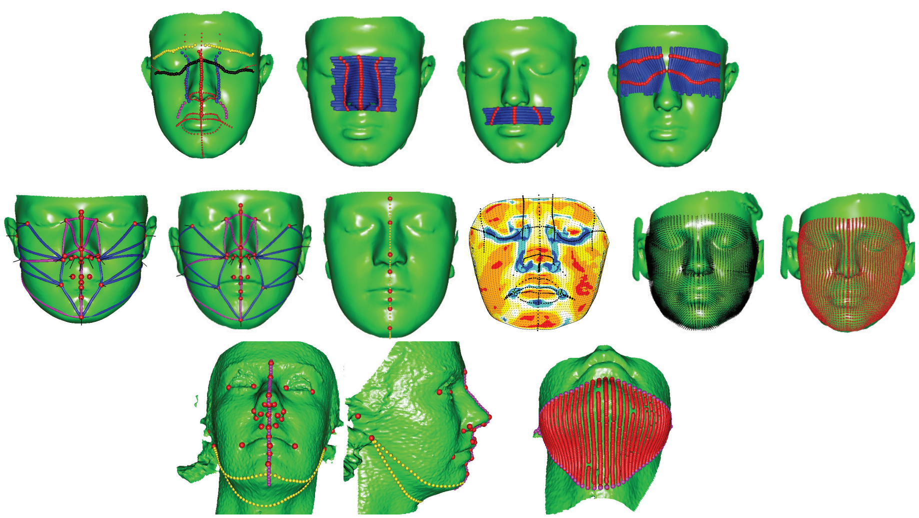
Obrázok: ***Symetrizovaná vzorová tvár (template)*** a (semi)landmarky

Budúcnosť analýzy tvaru
Automatická extrakcia diferenciálno-geometrických štruktúr z biologických objektov



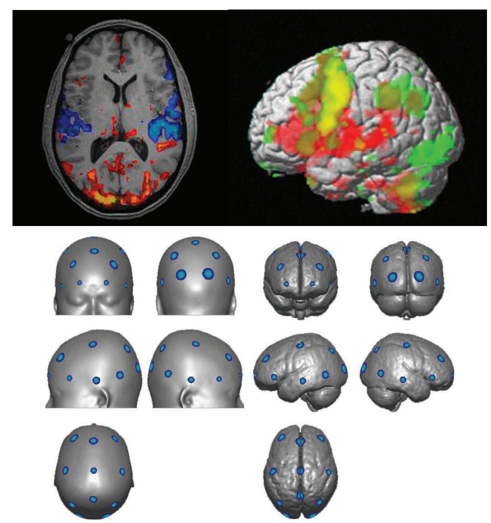
Obrázok: Sekcencia automatickej extrakcie ľudských pier

Budúcnosť analýzy tvaru
Automatická extrakcia diferenciálno-geometrických štruktúr z biologických objektov



Obrázok: Automatická extrakcia landmarkov, kriviek a anatomických plôch

Budúcnosť analýzy tvaru
Analýza tvaru EEG – časo-priestorové modelovanie



Obrázok: Fúzia analýzy tvaru, EEG a zobrazovacích techník mozgu