Studijní text

(náhrada za 1.5.2013)

Řady s nezápornými členy, alternující řady

<u>Odmocninové kritérium:</u> Nechť $\sum a_n$ je nekonečná řada s **nezápornými** členy od nějakého indexu N dál a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Potom
(a) řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $q < 1$;
(b) řada $\sum a_n$ diverguje k ∞, pokud $q > 1$ nebo $q = \infty$.

Příklad 1. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení. Řada má nezáporné členy, tedy můžeme využít odmocninové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \ \left|\text{typ } \infty^0\right| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

neboť využitím L'Hospitalova pravidla (ověřte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \ \left|\text{typ } \frac{\infty}{\infty}\right| = 0.$$

Platí $\frac{1}{3} < 1$, tedy podle odmocninového kritéria řada **konverguje**.

Příklad 2. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Řešení. Řada má nezáporné členy, tedy můžeme využít odmocninové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n} \ \left|\text{typ } 1^\infty\right|,$$

neboť $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n \ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)}.$$

Podobně jako v předešlém příkladě spočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \quad \left|\text{typ } \frac{0}{0}\right|.$$

Zderivováním jmenovatele a čitatele dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{2}{\pi} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} (-1) \frac{1}{n^2}}{(-1)\frac{1}{n^2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Užitím L'Hospitalova pravidla pak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = -\frac{2}{\pi}$$

a opět, podobně jako v předešlém příkladě, podle věty o záměnnosti limitního přechodu a funkce platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n \ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Platí $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < 1$ (nakreslete si funkci e^x), tedy podle odmocninového kritéria řada **konverguje**.

Podílové kritérium: Nechť $\sum a_n$ je nekonečná řada s **kladnými** členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Potom

(a) řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $q < 1$;
(b) řada $\sum a_n$ diverguje k ∞, pokud $q > 1$ nebo $q = \infty$.

Příklad 3. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Řešení. Řada má kladné členy, tedy můžeme využít podílové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^n(n+1)}{(n+1)(n!)n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

Připomeňme, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

proto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Platí $\mathrm{e} > 1$, tedy podle podílového kritéria řada **diverguje** k ∞.

Příklad 4. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n!)}{n^n}$$

Řešení. Řada má kladné členy, tedy můžeme využít podílové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}((n+1)!)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n(n!)}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2(n+1)(n!)n^n}{(n+1)^n(n+1)2^n(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n}.$$

Analogicky jako v předchozím příkladě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = 2\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Platí $\frac{2}{\mathrm{e}} < 1$, tedy podle podílového kritéria řada **konverguje**.

<u>Srovnávací kritérium:</u> Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti **nezáporných** čísel, pro které platí

$$0 \le a_n \le b_n$$

pro všechna přirozená čísla n taková, že $n \ge N$, kde N je nějaké (pevně zvolené) přirozené číslo. Potom

(a) jestliže řada $\sum b_n$ konverguje, pak $\sum a_n$ konverguje;
(b) jestliže řada $\sum a_n$ diverguje k ∞, pak $\sum b_n$ diverguje k ∞.

<u>Integrální kritérium:</u> Nechť $\sum a_n$ je nekonečná řada s **nezápornými** členy. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $[N,\infty)$ pro nějaké $N \in [0,\infty)$ a je na tomto intervalu **nezáporná**, **nerostoucí** a platí

$$f(n) = a_n$$

pro každé n přirozené takové, že $n \ge N$. Potom platí, že

(a) řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_N^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje;
(b) řada $\sum a_n$ diverguje k ∞ právě tehdy, když $\int_N^\infty f(x)\mathrm{d}x = \infty$.

Příklad 5. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Řešení. Řada má zřejmě nezáporné členy a je tedy nachystaná jak pro srovnávací, tak pro integrální kritérium.

(a) (pomocí srovnávacího kritéria) Již dříve jsme ukázali, že řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left(= \sum_{k+1=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+1-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} \right)$$

konverguje. Zřejmě platí, že

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

pro $n \geq 2$ $(N = 2)$. Proto, podle srovnávacího kritéria, vyšetřovaná řada **konverguje**.

(b) (pomocí integrálního kritéria) Nechť $f(x) = \frac{1}{x^3}$ pro $x \in [1, \infty)$. Funkce f je zřejmě nezáporná a nerostoucí a platí $f(n) = \frac{1}{n^3}$ pro každé n přirozené takové, že $n \geq 1$. Předpoklady pro integrální kritérium jsou tedy splněny a platí

$$\int_1^\infty x^{-3}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^\infty = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^\infty = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Integrál

$$\int_1^\infty x^{-3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-3}\mathrm{d}x$$

konverguje, proto, podle integrálního kritéria, **konverguje** i vyšetřovaná řada.

Příklad 6. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2^n}$$

Řešení. Řada má nezáporné členy, můžeme tedy užít srovnávací kritérium. Podobně jako v 5. příkladě v případě a), využijeme konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Zřejmě platí, že

$$0 \leq \frac{1}{n^2 + 2^n} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

pro $n \geq 2$ ($N = 2$). Proto, podle srovnávacího kritéria, vyšetřovaná řada **konverguje**. Poznamenejme, že vzhledem k pomocnému odhadu, který jsme učinili, jsme dokázali i konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Příklady na procvičení: Než začnete příklady řešit, všimněte si, pro které typy řad jsme používali jaké kritérium.

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad \textit{(Řešení: konverguje)}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n-1)!}{n^n} \quad \textit{(Řešení: konverguje)}$$

3)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \quad \textit{(Řešení: diverguje; Nápověda: nutná podmínka)}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(5 + \frac{2}{n}\right)^n} \quad \textit{(Řešení: konverguje)}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \text{ pro } a > 0 \quad \textit{(Nápověda: rozdělte na tři případy)}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad \textit{(Řešení: konverguje)}$$

7)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \textit{(Řešení: diverguje)}$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ pro } a > 0 \quad \textit{(Nápověda: rozdělujte vhodně na případy)}$$

Na závěr řad s nezápornými členy uveďme jednu modifikaci srovnávacího kritéria.

Limitní srovnávací kritérium: Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = q.$$

(a) Je-li $q < \infty$ a konverguje-li řada $\sum b_n$, pak konverguje i řada $\sum a_n$.
(b) Je-li $q > 0$ a diverguje-li řada $\sum b_n$, pak diverguje i řada $\sum a_n$.

Příklad 7. Rozhodněte o konvergenci/divergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Řešení. Řada má nezáporné koeficienty, využijeme tedy limitního srovnávacího kritéria a za řadu $\sum b_n$ vezmeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \quad \left|\text{typ } \frac{0}{0}\right|.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} = 1,$$

neboť $\cos 0 = 1$. Pak podle L'Hospitalova pravidla je i původní limita rovna jedné, a protože platí $1 > 0$, podle limitního srovnávacího kritéria řada **diverguje**.

Definice. Nekonečná řada $\sum a_n$ se nazývá alternující, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{sgn}(a_{n+1}) = -\operatorname{sgn}(a_n).$$

[$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$]

Leibnizovo kritérium: Nechť $\{a_n\}$ je **nerostoucí** posloupnost **kladných** čísel. Pak alternující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje právě tehdy, když platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definice. Řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum |a_n|$.

Věta. Konverguje-li řada $\sum |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum a_n$.

Uvědomíme-li si, že řada $\sum |a_n|$ má nezáporné členy, můžeme (vzhledem k právě formulované větě) pro vyšetřování absolutní konvergence řad využít kritéria uvedená pro řady s nezápornými členy. U podílového a odmocninového kritéria můžeme využít také části o divergenci, které ale nejsou přímým důsledkem žádného tvrzení, které jsme zatím uvedli.

Ve smyslu předchozích úvah si přepišme například odmocninové kritérium:
<u>Odmocninové kritérium:</u> Nechť $\sum a_n$ je nekonečná řada a existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Potom

(a) řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, pokud $q < 1$;
(b) řada $\sum a_n$ diverguje, pokud $q > 1$ nebo $q = \infty$.

Příkladový příklad. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konverguje (podle Leibnizova kritéria), ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

diverguje, jak víme z dřívějška. V takovém případě říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje neabsolutně (nebo též relativně).

Příklad 8. Rozhodněte, zda je následující řada absolutně konvergentní, relativně konvergentní nebo divergentní.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

Řešení. Nabízí se využití Leibnizova kritéria, ovšem posloupnost

$$\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \dots\right\}$$

zřejmě není nerostoucí. Formálně tedy využijeme pouze nutnou podmínku konvergence. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}},$$

tedy limita neexistuje a řada proto **diverguje**.

Příklad 9. Rozhodněte, zda je následující řada absolutně konvergentní, relativně konvergentní nebo divergentní.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$$

Řešení. Užijeme odmocninové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{2}=\frac{1}{2},$$

kde poslední rovnost se odvodí obdobně jako v 1. příkladu. Protože $\frac{1}{2}<1$, podle odmocninového kritéria řada v absolutní hodnotě konverguje, proto konverguje i vyšetřovaná řada (viz příslušná věta) a tedy **konverguje absolutně**.

Příklad 10. Rozhodněte, zda je následující řada absolutně konvergentní, relativně konvergentní nebo divergentní.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$$

Řešení. Užijeme Leibnizovo kritérium, proto nejdříve ověřme, zda je posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$$

nerostoucí. Označme

$$f(x)=\frac{1}{x-\ln x},\quad \text{pak}\quad f'(x)=-\frac{1-\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2},$$

tj. $f(x)$ je pro $x>1$ klesající. Dokázali jsme, že posloupnost je klesající, tedy i nerostoucí. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln \mathrm{e}^n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(\frac{\mathrm{e}^n}{n}\right)}=0,$$

neboť podle L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n}=\infty.$$

V tomto okamžiku máme dokázanou konvergenci zadané řady a zajímá nás, zda konverguje absolutně nebo pouze relativně. Budeme proto nyní vyšetřovat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}.$$

Užijeme srovnávací kritérium a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Platí $n - \ln n < n$, proto

$$\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n},$$

tedy podle srovnávacího kritéria řada diverguje. Řada ze zadání proto **konverguje relativně**.

Příklady na procvičení:

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n (n+1)} \quad \textit{(Řešení: konverguje absolutně)}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \quad \textit{(Řešení: konverguje absolutně)}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!} \quad \textit{(Řešení: diverguje)}$$