Příklad 1. Určete poloměr konvergence a součet následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

Řešení. Posloupnost koeficientů mocninné řady můžeme zapsat po částech takto:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{4n-3} & \text{pro } k = 4n-3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Spočteme limitu superior této posloupnosti:

$$a = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4n-3]{\left|\frac{1}{4n-3}\right|} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

kde předposlední rovnost dostaneme standardním rozepsáním odmocniny do exponenciály a logaritmu a následným využitím L'Hospitalova pravidla. Poloměr konvergence je tedy

$$r = \frac{1}{a} = 1.$$

Platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = \frac{1}{x^4}\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{x^4}\cdot\frac{x^4}{1-x^4} = \frac{1}{1-x^4}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Nyní už přikročíme k výpočtu samotného součtu řady, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x t^{4n-4}\mathrm{d}t\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{4n-4}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\mathrm{d}t.$$

Po rozkladu na parciální zlomky a integraci dostáváme

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1-t^4}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\ln|1+t|\right]_0^x = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{4}\ln|1+x|\end{aligned}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Zbývá vyšetřit krajní body - zkuste si sami.

Příklad 2. Určete poloměr konvergence a součet následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$$

Řešení. Platí

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+4n+3} = 1.$$

Opět si v limitě všimněte poměru $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, kvůli kterému dostáváme přímo poloměr konvergence řady. Platí

$$\left(x^{n+2}\right)' = (n+2)x^{n+1} = (n+2)x^n x, \quad \text{odtud} \quad (n+2)x^n = \frac{\left(x^{n+2}\right)'}{x}.$$

Dále podobně, platí

$$\left(\frac{\left(x^{n+2}\right)'}{x} \right)' = (n+2)nx^{n-1}, \quad \text{odtud} \quad (n+2)nx^n = x \left(\frac{\left(x^{n+2}\right)'}{x} \right)'.$$

Máme tedy vypsané důležité vztahy, a opět tedy přikročíme k výpočtu samotného součtu řady. Pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x \left(\frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \right)' \right)' = x \left(\frac{1}{x} \cdot \left(x^2 \frac{x}{1-x} \right)' \right)',$$

kde v poslední rovnosti jsme opět sečetli geometrickou posloupnost. Po zderivování a úpravě dostáváme

$$x \left(\frac{1}{x} \cdot \left(x^2 \frac{x}{1-x} \right)' \right)' = \frac{(3-x)x}{(1-x)^3}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Zbývá vyšetřit krajní body - zkuste si sami.