ještě k maticím lin. zobrazení a přechodu

$\varphi : U \longrightarrow V$

v prostoru U máme báze α, α'

v prostoru V máme báze β, β'

známe $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ a chceme spočítat $(\varphi)_{\beta',\alpha'}$

Věta:

$$(\varphi)_{\beta',\alpha'} = (id)_{\beta',\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\alpha'}$$

Dk aplikace (dvojitá) formulky pro matici složeného zobrazení

$$(id_V \circ \varphi \circ id_U)_{\beta',\alpha'} = (id_V \circ \varphi)_{\beta',\alpha} \cdot (id)_{\alpha\alpha'} =$$

(2) Podobnost matic je ekvivalence (dokázat reflexivnost, symetrii a tranzitivitu)

$$A \approx B \text{ a } B \approx C \Rightarrow A \approx C$$

$$P: B = P^{-1} A P \qquad C = Q^{-1} B Q$$

$$C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A (PQ)$$

Permutace bijekce $\{1, 2, \dots n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots n\}$

$\sigma \in S_n$ n prvková permutace

$$\operatorname{sign} \sigma = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$$

i.e. sgn libovolné transpozice $= \operatorname{sign}(i\ j) = (-1)^{2(j-i)+1} = -1$

počet inverzí $= (j-i) + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{j-i-1} = 2(j-i)+1$

Lze ukázat, že každá permutace je složením transpozic.

<u>Věta</u>: $\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \sigma$

<u>Poznámka:</u> Homomorfismus grup $f : G \longrightarrow H$

$$f(g_1 \circ_G g_2) = f(g_1) \circ_H f(g_2)$$

Věta říká, že $\operatorname{sign} : S_n \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot)$ je homomorfismus grup.

$\underline{\text{ch. 7}}$ Determinanty

Užitečné pro
(1) výpočet vlastních čísel lineárních zobrazení $U \to U$ (2. semestr)
(2) výpočet objemu (něco málo naznačím, věta o substituci pro vícerozměrný integrál 2. nebo 3. semestr analýzy

Determinant přiřazuje každé matici z $Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ číslo z $\mathbb{K}$

Definice: Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Potom $\left(A = (a_{ij}) \right)$

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Př. 9 $\quad A$ matice 3×3

$$S_3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & & \\ 2 & & \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{sign} \qquad 1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad -1$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Saarusovo pravidlo

LZE HO POUŽÍT POUZE PRO MATICE 2×2 a 3×3

Determinant dolní trojúhelníkové matice je

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$$

Důkaz:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Pro která σ je $a_{1\sigma(1)} \overset{=}{\cancel{\neq}} 0$?

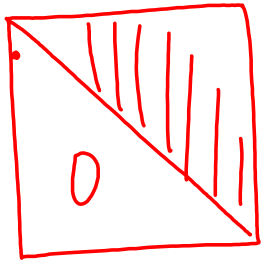
~~Pouze pro $\sigma(1) = 1$~~ Určitě pro $\sigma(1) = 2, 3, \ldots n$

Pro která σ je $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cancel{\neq} = 0$?

~~Určitě pro~~

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} = \underline{A}$$

Horní Δ matice



$a_{ij} = 0$ pro $i > j$

Pro takové matice platí

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

Determinanty nepočítáme obvykle z definice. Odvodíme si, jak se determinant mění při provádění řádkových a sloupcových element. operací. Výpočet determinantu pak probíhá tak, že čtvercovou matici upravujeme na schod. tvar (horní Δ matice).

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{array}\right\} \quad \pi = \sigma \circ (1\,2) \rightarrow \text{prohazuje } 1 \text{ a } 2$$

$$\pi \circ (1\,2) = \sigma \circ (1\,2) \circ (1\,2) = \sigma$$

$$= \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi = \sigma \circ (1\,2)}} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \underbrace{\operatorname{sign} (1\,2)}_{-1} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= (-1) \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \right) = (-1) \cdot \det A$$

(2) Jestliže má matice A dva stejné řádky, pak

$$\det A = 0$$

Dk: Nechť A má stejný i-tý a j-tý řádek. Prohozením těchto řádků dostaneme opět matici. Podle předchozího:

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

Neplatí $\det(A+B) \cancel{=} \det A + \det B$

Dk: Nech $i = 1$.

$$\det C = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \; c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \left(a_{1\sigma(1)} + b_{1\sigma(1)}\right) c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \; b_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A + \det B$$

⑥ $\det A^T = \det A$

Dokaz $A^T = (b_{ij})$, $A = (a_{ij})$ $b_{ij} = a_{ji}$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdot \; b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{\sigma(1)1} \; a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma^{-1}(1)} \; a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \\ &= \operatorname{sign} id = 1 \\ &\operatorname{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \\ &= \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \sigma^{-1} \\ &\operatorname{sign} \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \sigma \end{aligned}}$$