A matice $n \times n$ $\quad A = (a_{ij})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Počet permutací je $n!$

Příklad 1 $\quad$ A je matice $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{K 1. řádku} \\ \text{přičtu} \\ \text{ostatní řádky}}}{=} \det \begin{pmatrix} n\cdot 1 + a & n\cdot 1+a & n\cdot 1+a & \cdots & n\cdot 1+a \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix}$$

Příklad 2 Postupně Vandermondův determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = D_n(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \cdot D_{n-1}(x_2, x_3, \dots x_{n-1})$$

Nejdříve dokážeme nějaký uvedený vzorec z něhož lze spočítat D_n indukcí:

$$D_n(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots (x_n - x_{n-1})\, D_1(x_n)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \qquad \det(1)$$

Postupně pro $i = n-1, n-2, \dots, 2$ od i-tého sloupce odečtu x_1-násobek $(i-1)$-ního sloupce. Tím se determinant nezmění a my dostaneme

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & & x_n^{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\, D_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

<u>Věta:</u> Nechť A je matice $k \times k$ a B je matice $(n-k) \times (n-k)$.

Potom
$$\det \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$
$$\underbrace{}_{k}\ \underbrace{}_{n-k}$$

$\sigma\{1,2,\dots k\} = \{1,2,\dots k\}$ $\quad \sigma\{k+1,\dots n\} = \{k+1,\dots n\}$

$\sigma = \tau \circ \pi$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ \underbrace{\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k)}_{\tau_1 \in S_k} & k+1 & \dots & n \end{pmatrix} \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & k & \underbrace{\sigma(k+1) & \sigma(k+2) & & \sigma(n)}_{\pi_1 \in S_{n-k}} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\pi = \operatorname{sign}\tau_1 \cdot \operatorname{sign}\pi_1$$

Můžeme psát

$$\det C = \sum_{\substack{\tau_1 \in S_k \\ \pi_1 \in S_{n-k}}} \overbrace{\operatorname{sign}(\tau\circ\pi)} \, a_{1\tau_1(1)}\, a_{2\tau_1(2)} \dots a_{k\tau_1(k)} \cdot b_{k+1\,\pi_1(k+1)} \dots b_{n\pi_1(n)}$$

$$= \left(\sum_{\tau_1 \in S_k} \operatorname{sign}\tau_1 \, a_{1\tau_1(1)} \dots a_{k\tau_1(k)} \right) \left(\sum_{\pi_1 \in S_{n-k}} \operatorname{sign}\pi_1 \, b_{k+1\,\pi_1(k+1)} \dots b_{n\pi_1(n)} \right)$$

Poznámka: G, H dvě grupy $\quad f: G \longrightarrow H$

f je homomorfismus grup, jestliže

$$f(g_1 \cdot_G g_2) = f(g_1) \cdot_H f(g_2)$$

Vezmeme $G = GL(n, \mathbb{K}) = \{$ invertibilní matice $n \times n$ s násobením $\}$

$H = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ s operací násobení

Potom $\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (je potřeba dokázat, že má-li A inverzní, pak $\det A \neq 0$)

je homomorfismus grup.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Nechť má A inverzi A^{-1}. Potom $A \cdot A^{-1} = E$ a podle Cauchyovy věty

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{výměnou} \\ n \text{ řádků} \\ 1 \leftrightarrow n+1 \\ 2 \leftrightarrow n+2}}{=} (-1)^n \det\begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} =$$

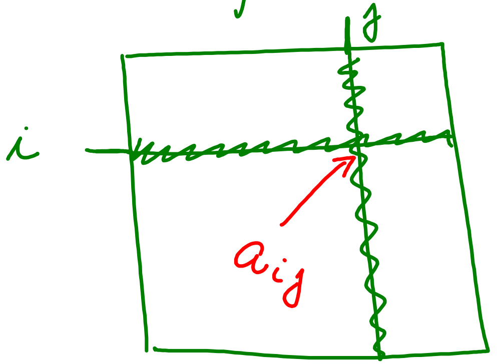
$$= (-1)^n \det(-E) \cdot \det(A \cdot B) = (-1)^n (-1)^n \det(AB) = \det AB$$

Tedy $\det A \cdot \det B = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \dots = \det(AB)$

Laplaceův rozvoj determinantu

$A = (a_{ij})$ typu $n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1)\times(n-1)$, která vznikne z A tak, že vypustíme i-tý řádek a j-tý sloupec



$\det A_{ij} = |A_{ij}|$ se nazývá minor nebo subdeterminant determinantu matice A

$(-1)^{i+j}\,|A_{ij}| = \tilde{a}_{ij}$ nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A

Příklad: Spočítáme rozvoj matice podle 1. řádku

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & x \end{pmatrix}}_{(n+1)\times(n+1)} = a_n (-1)^{1+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 & & & \\ -1 & x & & 0 & \\ 0 & -1 & x & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x \end{pmatrix}}_{a_n x^n}$$

Důkaz Lapl. rozvoje

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{i3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{in} \end{pmatrix} = a_{i1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{i2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{in} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

j-tý sloupec

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{i-tý řádek}$$