det $= (n-1+a)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} =$ Od 2., 3., ..., n. řádku odečteme 1. řádek $(n-1+a)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix}$

$$= (n-1+a)\; 1\cdot(a-1)\cdot(a-1)\cdots(a-1) = (n-1+a)\,(a-1)^{n-1}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Od 2., 3., …, n. řádku odečteme 1. řádek

$$\det\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ \hline 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 & & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & x_n^3-x_1^3 & \dots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{array}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 & \dots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & x_3^3-x_1^3 & \dots & x_3^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & x_n^3-x_1^3 & \dots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Časem dokážeme

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \det B$$

$$a^i - b^i = (a-b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + \dots + ab^{i-2} + b^{i-1})$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_1x_2+x_1^2 & x_2^3+x_1x_2^2+x_1^2x_2+x_1^3 & \dots \\ 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_1x_3+x_1^2 & x_3^3+x_1x_3^2+x_1^2x_3+x_1^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

<u>Dowód:</u> $C = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} = (c_{ij})$

$$\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; c_{1\sigma(1)} \cdot c_{k\sigma(k)} \, c_{k+1\,\sigma(k+1)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$c_{ij} = 0$ dla $i \in \{k+1, \ldots n\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots k\}$

Proba

$$\det C = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(k+1, k+2, \ldots n) \cap (1, 2, \ldots k) = \emptyset}} \operatorname{sign} \sigma \; c_{1\sigma(1)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

Tedy σ musi odwzorować zbiór $\{k+1, k+2, \ldots n\}$ do zbioru $\{k+1, k+2, \ldots n\}$

a zbiór $\{1, 2, \ldots k\}$ do $\{1, 2, \ldots k\}$

$$= \det A \det B$$

Důsledek $$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

Důkaz.

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}^T = \det\begin{pmatrix} A^T & D^T \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \det A^T \cdot \det B^T =$$
$$= \det A \det B$$

$\boxed{\text{CAUCHYOVA VĚTA}}$ Jsou li A, B matice $n \times n$, pak

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

$$\underline{\underline{1}} = \det E \qquad = \det(A\,A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Důkaz Cauchyovy věty.

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}}_{2n} \Big\}{2n} = \det A \cdot \det B \quad \text{podle předchozí věty}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \underset{\text{ESO}}{\overset{\text{EŘO}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

bez výměn
a násobení

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \underset{ESO}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \overset{(AB)_{11}}{\overset{\parallel}{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \underset{(AB)_{21}}{\underset{\parallel}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

ke 3. sloupci přičteme b_{11} násobek 1

ke 3. sloupci přičteme b_{21}-násobek 2. sloupce

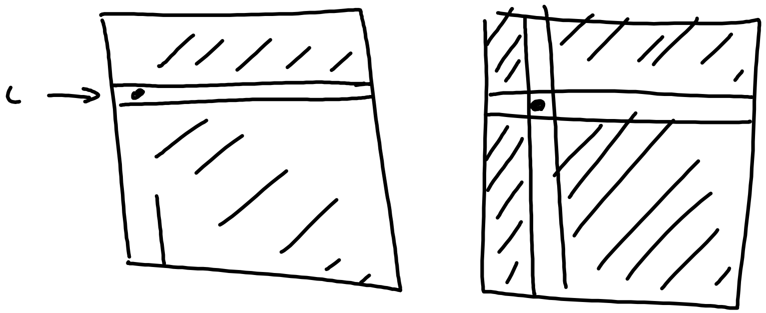
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Přitom nedochází ke změně determinantu.

Laplaceova věta o rozvoji determinantu podle i. tého řádku

Při použití předchozího označení platí pro každý řádek i následující rozvoj

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{a}_{ij} \quad \left(= \sum_{j=1}^{n} \cancel{a_{ij}} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}| \right)$$



$$+(-1)^{1+2} a_{n-1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & x & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \cdot & x \end{pmatrix}}_{(-1)^3 a_{n-1} (-1) x^{n-1} = a_{n-1} x^{n-1}} + (-1)^{1+3} a_{n-2} \det \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline & & x & 0 \\ & 0 & -1 & x \\ & & & -1 \\ & & & & x \end{array}\right)}_{(-1)^{1+3} a_{n-2} \det \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \underbrace{\begin{pmatrix} x & & & 0 \\ -1 & x & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & x \end{pmatrix}}_{a_{n-2} x^{n-2}}}$$

$$= \cdots\cdot = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j-1+i-1} \det \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & & \end{array}\right) =$$

$$= \sum a_{ij} (-1)^{i+j} \det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0\;0 & \dots & 0 \\ \hline & & A_{ij} & \end{array}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(1) \det A_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| A_{ij} \right|$$

matice A, ze které
jsme vynechali i.-tý řádek
a j.-tý sloupec