STEINITZOVA VĚTA (1)

Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k \in [u_1, u_2, \ldots, u_n] \subseteq U$.

Jestliže $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé vektory, pak

$$k \le n.$$

Důkaz později.

Důsledek: Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze. Pak každé dvě jeho báze mají stejný počet prvků.

Důkaz: Mějme dvě báze $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $\beta = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

2

Aplikujme Steinitzovu větu v této situaci

$$v_1, \dots, v_k \in U = [u_1, \dots, u_n],$$ neboť $u_1 \dots u_n$ generují U

Protože $v_1, \dots, v_k$ je báze, jsou tyto vekt. lin. nezávislé. Podle Steinitzovy věty

$$k \le n.$$

Dále platí:

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U = [v_1, v_2, \dots, v_k],$$ neboť $v_1, v_2, \dots, v_k$ generují U

Protože $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi, jsou lin. nezávislé, a proto podle Steinitzovy věty je

$$n \le k.$$

Tedy $n = k$.

3

Dimenze vekt. prostoru Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze (tj. existují $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, že $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$).

Dimenze prostoru U je počet prvků libovolné báze, označujeme ji

$$\dim_{\mathbb{K}} U = (\text{dimenze } U \text{ nad } \mathbb{K})$$

Příklady:

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ .... $\mathbb{R}^n$ má bázi $e_1 = (1, 0, \ldots 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots 0), \ldots,$
$e_n = (0, 0, \ldots 0, 1)$

proto $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

$\mathbb{C}^n$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ s bází $e_1=(1,0,\dots,0), e_2,\dots,e_n$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$$

$\mathbb{C}^2$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ s bází e_1, e_2

$$(z_1,z_2) = z_1\cdot e_1 + z_2\cdot e_2, \quad z_1,z_2\in\mathbb{C}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$$

$\mathbb{C}^2$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$, $\overset{(1,0)}{e_1}, \overset{(0,1)}{e_2}$ už není báze!

$$r_1 e_1 + r_2 e_2 = (r_1,r_2) \qquad r_1,r_2\in\mathbb{R}$$

Tímto způsobem nedostaneme vektor

$$(i, i+1)$$

5

Báze $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ je například

$$(1,0),\ (i,0),\ (0,1),\ (0,i)$$

$$\mathbb{C}^2 \ni (a+bi,\ c+di) = a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i)$$

$$\mathbb{C}^2 = [(1,0),\ (i,0),\ (0,1),\ (0,i)]$$

LN. $\quad a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0)$

1. složka ~~reálná~~ $\quad a + bi = 0 \Rightarrow a = b = 0$

2. složka $\quad c + di = 0 \Rightarrow c = d = 0$

Vektory $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$ jsou lin. nezávislé nad $\mathbb{R}$.

Nad $\mathbb{C}$ $\quad \underline{i}(1,0) - 1\cdot(i,0) = (0,0)$

(6)

$(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$ je báze $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$$

Obecně $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

Poslední příklad

$\mathbb{R}_n[x]$ má bázi nad $\mathbb{R}$ $1, x, x^2, \dots, x^n$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1$$

DÚ. $\dim_{\mathbb{R}} Mat_{k \times n}(\mathbb{R}) =$

7

4 UŽITEČNÉ VĚTY O BÁZI

1. Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou LN. Pak $v_1, v_2, \dots, v_n$ tvoří bázi prostoru U

2. Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují prostor U. Pak tvoří jeho bázi

3. Jestliže $V \subseteq U$ je podprostor a U má konečnou dimenzi, pak
$$\dim V \leq \dim U$$

4. Jestliže $V \subseteq U$, U má konečnou dimenzi a $\dim V = \dim U$, pak
$$V = U.$$

(8)

Důkaz (1) Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je nějaká báze prostoru U

Pak z vektorů $v_1, v_2, \dots v_m, u_1, u_2, \dots u_n$ můžeme podle věty z 5. přednášky vybrat LN vektory $v_1, v_2, \dots v_m, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

$$[v_1, v_2 \dots v_m, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1 \dots v_m, \underbrace{u_1, \dots u_n}_{[\quad] = U}] = U$$

Vybrané vektory tvoří bázi, musí jich být podle důsledku 5.1 věty n. Tedy jsou to pouze vektory

$v_1, v_2, \dots v_m$.

(9)

Důkaz (2) Nechť $[u_1, u_2, \dots u_n] = U$, $\dim U = n$.

Z vektorů $u_1, \dots u_n$ vybereme LN, $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

$$[u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, \dots u_n] = U$$

Tedy $u_{i_1} \dots u_{i_r}$ tvoří bázi, podle Steinitzovy věty,

musí mít tato báze n prvků proto $r = n$

$$i_1 = 1, i_2 = 2, \dots \quad i_r = n$$

Tedy vybereme $u_1, u_2, \dots u_n$, a to je báze.

10

Důkaz ③ $V \subseteq U$ podprostor, $\dim U$ je konečná

Předp. že $\dim U = n$. Kdyby V nebyl prostor konečné dimenze tak, v něm postupně najdeme $n+1$ lin. nezávislých vektorů

$$v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V$$

Tyto vektory jsou také prvky U a protože $\dim U = n$, dostáváme spor se Steinitzovou větou (Podle St. věty $n+1 \leq n$.)

Tedy $\dim V < \infty$. Nechť $v_1, \dots v_k$ je báze prostoru V.

$v_1, \dots v_k \in V \subseteq U$, $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou LN ve V ale také v U.

Podle jedné z předch. vět je lze doplnit na bázi prostoru U

$v_1, v_2, \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_l$ $\quad \dim V = k \leq k + l = \dim U$.

Důkaz 4 Nechť $\dim V = \dim U < \infty$ a nechť $V \subseteq U$.
Vezmeme bázi $v_1, v_2, \ldots v_n$ prostoru V. To jsou LN vektory v U a lze ji v U doplnit na bázi

$$v_1, v_2, \ldots v_n, w_1, \ldots w_l$$

Podle věty $n = n + l$, $l = 0$, již $v_1, v_2 \ldots v_n$ báze prostoru U

$$V = [v_1, v_2, \ldots v_n] = U$$

12

Souřadnice vektoru v dané bázi

Vekt. prostor U nad $\mathbb{K}$, nechť $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je jeho báze

Souřadnice vektoru $u \in U$ je n-tice skalárů

$$(a_1, a_2, \ldots a_n)^T \in \mathbb{K}^n \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

takových, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

K tomu, aby tato definice byla korektní, musíme dokázat.

13

Věta. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je báze vekt. prostoru U. Potom každý vektor $u \in U$ lze vyjádřit ve tvaru

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

právě jedním způsobem.

Důkaz: Že je možné takové vyjádření plyne z definice báze. Dokážeme jednoznačnost tohoto vyjádření.

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$
$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

14

$$\vec{O} = (a_1-b_1)u_1 + (a_2-b_2)u_2 + \dots + (a_n-b_n)u_n$$

$u_1, u_2, \dots u_n$ jsou LN, tedy z rovnice plyne

$$a_1-b_1 = a_2-b_2 = \dots = a_n-b_n = 0.$$

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \dots,\ a_n=b_n.$$

$\square$

Označení souřadnic Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ značíme

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$$

15

Příklad

$\mathbb{R}^3$ báze $\quad \mathcal{E} = \big(e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\big)$

$u = (x_1, x_2, x_3) \quad = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 \cdot e_3$

$$(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

jiná báze $\quad \alpha = \big((1,1,1) = u_1,\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (0,0,1)\big)$

$u = (x_1, x_2, x_3) \quad = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = (y_1 + y_2, y_1, y_1 + y_2 + y_3)$

$y_1 + y_2 = x_1$ $\qquad$ $y_1 = x_2$

$y_1 = x_2$ $\qquad$ $y_2 = x_1 - y_1 = x_1 - x_2$

$y_1 + y_2 + y_3 = x_3$ $\qquad$ $y_3 = x_3 - y_1 - y_2 = x_3 - x_2 - (x_1 - x_2) = x_3 -$

16

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

Souřadnice samozřejmě závisejí na pořadí vektorů v bázi. Proto od této chvíle budeme báze považovat za uspořádané n-tice

Příklad. $\mathbb{R}_2[x]$, $\alpha = (1, x-1, (x-1)^2)$

$$(x^2 + x - 1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^2 + x - 1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 1 (x-1)^2$$

$$= 1 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1$$

$$= x^2 + x - 1$$

17

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K}$. Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je jeho báze. Potom máme zobrazení

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{tak, že} \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Toto zobrazení má následující vlastnosti.

$$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$$(au)_\alpha = a \cdot (u)_\alpha \qquad (\ )_\alpha : (U, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, +, \cdot)$$

18

Průnik a součet podprostorů

Nechť U je vekt. prostor, V a Z jeho podprostory

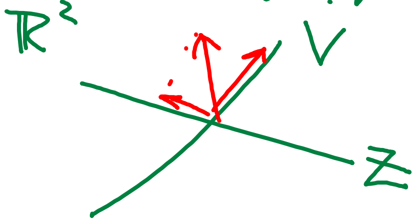
Průnik $V \cap Z = \{u \in U,\ u \in V$ a současně $u \in Z\}$

Je jednoduché dokázat, že $V \cap Z$ je rovněž vekt. podprostor.

Součet podprostorů

Proč se v lin. algebře nezabýváme sjednocením vekt. podprostorů?

Protože sjednocení není obecně podprostor.



$V \cup Z$ není podprostor

19

Definice

$$V+Z=\{u\in U:\ \exists v\in V\ \exists z\in Z\quad u=v+z\}$$
$$=\{v+z\in U,\ \text{kde } v\in V,\ z\in Z\}$$

Příklad: $U=\mathbb{R}^4$, $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4,\ \sum_{i=1}^{4}x_i=0\}$

$Z=\{(0,y_2,0,y_4)\in\mathbb{R}^4,\ y_2,y_4\in\mathbb{R}\}$

$V+Z=\mathbb{R}^4$

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=\underbrace{(x_1,x_2,x_3,\ -x_1-x_2-x_3)}_{\in V}+\underbrace{(0,0,0,\ x_1+x_2+x_3+x_4)}_{\in Z}$$

20

Definice direktního součtu

Řekneme, že součet $V+Z$ je direktní, jestliže

$$V \cap Z = \{0\}.$$

Zapisujeme $V \oplus Z$.

Příklad – pokračování

Součet $V+Z$ z předchozího příkladu není direktní, protože

$$(0,1,0,-1) \in V \cap Z$$

$$\Rightarrow V \cap Z \neq \{\vec{0}\};$$

21

Lemma Součet dvou podprostorů je opět podprostor

Důkaz: $V, Z \subseteq U$ podprostory

Chceme dk, že $V+Z$ je podprostor.

$u_1, u_2 \in V+Z$, $u_1 = v_1 + z_1$, $u_2 = v_2 + z_2$ (definice součtu)

$v_1, v_2 \in V$, $z_1, z_2 \in Z$

$$u_1 + u_2 = v_1 + z_1 + v_2 + z_2 = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{v \in V} + \underbrace{(z_1 + z_2)}_{z \in Z}$$

podle definice podprostoru

$u_1 + u_2 = v + z \in V+Z$

Totéž pro násobek.

22

Počítání součtu

$V = [v_1, v_2, \dots, v_k]$

$Z = [z_1, z_2, \dots, z_l]$

$$V+Z = \left\{ v+z,\ v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in V,\ z = \sum_{j=1}^{l} b_j z_j \in Z \right\}$$

$$= \left\{ \sum_i a_i v_i + \sum_j b_j z_j \right\} = [v_1, v_2, \dots v_k, z_1, z_2, \dots z_l]$$

Chceme-li mít také, vybereme z těchto vektorů lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

23

Počítání průniku

$V = [v_1, v_2, v_3]$ $\quad Z = [z_1, z_2, z_3]$

$u \in V \cap Z$

$$\sum_i a_i v_i = u = \sum b_j z_j$$

Řešíme soustavu s neznámými $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$

$$\sum a_i v_i - \sum b_j v_j = 0$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 z_1 - b_2 z_2 - b_3 z_3 = 0$$

24

Všechna řešení vypadají takto.

$$b_1 = 3p + 2s$$

$$b_2 = p$$

$$b_3 = s$$

$$V \cap Z = \{ u = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3,\ (b_1, b_2, b_3) \text{ je řešení soustavy} \}$$

$$= \{ u = (3p + 2s) z_1 + p z_2 + s z_3 \} =$$

$$= \{ u = p(3z_1 + z_2) + s(2z_1 + z_3) \} = [3z_1 + z_2, 2z_1 + z_3]$$