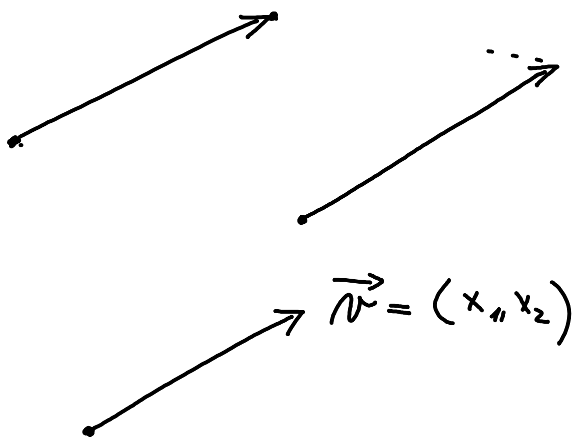
Vektorové prostory

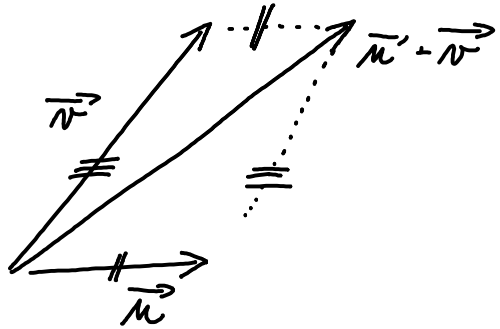
Vektory na gymnáziu



$\vec{v} = (x_1, x_2)$

$O = (0,0)$

Sčítání vektorů



$\vec{v} = (x_1, x_2)$

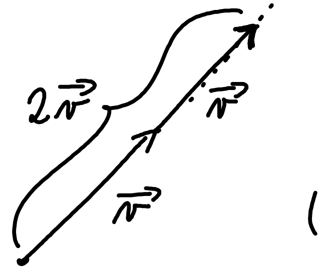
$\vec{u} = (y_1, y_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (y_1 + x_1, x_2 + y_2)$

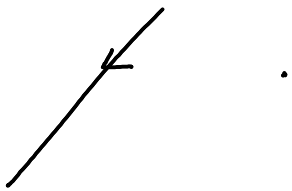
2

Vynásobení vektoru číslem:

$2\vec{v}$



$-2\vec{v}$



Toto sčítání vektorů v rovině a prostoru má tyto vlastnosti:

(1) $\vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v}$

(2) $(\vec{v}+\vec{u})+\vec{z}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{z})$

(3) $\exists\,\vec{O} \quad \vec{v}+\vec{O}=\vec{v}$

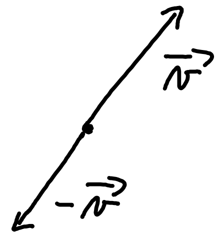
(4) $\forall\vec{v}\ \exists(-\vec{v}) \quad \vec{v}+(-\vec{v})=\vec{O}$

(5) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

(6) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

(7) $a\cdot(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$

(8) $1\vec{u}=\vec{u}$



3

<u>Definice vektorového prostoru</u> Neprázdná množina U s operacemi sčítání $+ : U \times U \to U$ a násobení skalárem $\cdot : \mathbb{K} \times U \to U$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C})$ se nazývá VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{K}$, jestliže platí:

(1) $\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in U \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativní)

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \in U \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$ asociativní

(3) $\exists \vec{0} \in U \ \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ nulový vektor

(4) $\forall \vec{u} \in U \ \exists (-\vec{u}) \in U \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ opačný vektor

4

(5) $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \qquad a(\vec{u} + \vec{v}) = (a\vec{u}) + (a\vec{v})$

(6) $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u} \in U \qquad (a+b)\vec{u} = (a\vec{u}) + (b\vec{u})$

(7) $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u} \in U \qquad (a \cdot b) \circ \vec{u} = a \circ (b \circ \vec{u})$ $\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

(8) $\forall \vec{u} \in U \qquad 1 \circ \vec{u} = \vec{u}$ $\qquad \circ : \mathbb{K} \times U \to U$

Prvky prostoru U nazýváme vektory.
Zpočátku je budeme označovat šipkou $\vec{u}$.

Příklady vekt. prostorů

① $U = \mathbb{R}^n \qquad \vec{u} = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n)\ , \ \vec{v} = (y_1, y_2, \dots y_n)$

$\vec{u} + \vec{v} \underset{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$ $\qquad \mathbb{R}^n$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$c\vec{u} \underset{def}{=} (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \qquad \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0) \qquad -\vec{u} = (-x_1, -x_2, \dots -x_n)$

(5)

(2) $U = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{C}$

$\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\qquad$ $\vec{u} + \vec{v} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $\qquad$ $c\,\vec{u} = (cx_1, cx_2, \dots)$

vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

(2b) $\mathbb{C}^n$ je rovněž vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ $\qquad (\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C})$

Časem uvidíme, že mezi v. p. $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$ a v. p. $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$ je rozdíl

(3) $Map(M, \mathbb{K})$ $\qquad$ M neprázdná množina, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

množina všech zobrazení z M do $\mathbb{K}$

$g, f \in Map(M, \mathbb{K})$ $\qquad$ $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ $\qquad$ $(f+g)(m) \underset{def}{=} f(m) + g(m)$

$\qquad$ $g : M \longrightarrow \mathbb{K}$ $\qquad$ $(cf)(m) \underset{def}{=} c\,f(m)$

6

$\mathrm{Map}(M, \mathbb{K})$ je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$\vec{o}$ zobrazení $\vec{o}(m) = 0$

Vezmeme-li si $M = \{1, 2, 3, \dots n\}$

$f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ je totéž jako uspořádaná n-tice prvků z $\mathbb{K}$

$f(1) = x_1, \quad f(2) = x_2, \quad \dots \quad f(n) = x_n$

$\mathrm{Map}(M, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$

Příklad 3 zahrnuje (1) a (2).

4 Matice $n \times k$ nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$

$+$ je sčítání matic

$\cdot$ je násobení skalárem

0 je nulová matice

Vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

Spec. příklad (3)

$M = \{(i,j),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k\}$

$f(i,j) = A_{ij}$

7

Spojité funkce na intervalu $[0,1]$ .. $C[0,1]$

$$(f+g)(t) =_{def} f(t)+g(t)$$

vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$$(cf)(t) =_{def} c \cdot f(t)$$

6 Polynomy v proměnné x s reálnými koeficienty $\mathbb{R}[x]$

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) =_{def}$$

$$(a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (b_1 + a_1) x + (a_0 + b_0)$$

$$c\,(a_n x^n + \dots + a_0) =_{def} c a_n x^n + c a_{n-1} x^{n-1} + \dots + c a_0$$

$\mathbb{R}[x]$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$, analogicky $\mathbb{C}[x]$ je v. p. nad $\mathbb{C}$

6b $\mathbb{R}_n[x]$ polynomy stupně nejvýše n je příkl. vekt. prostoru nad $\mathbb{R}$

Z vlastností (1) – (8) v definici vekt. prostoru lze odvodit některé další vlastnosti vekt. prostorů

Lemma (Další vlastnosti vekt. prostorů)

(i) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

(ii) $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(iii) $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$ právě když $a = 0$ nebo $\vec{v} = \vec{0}$.

(iv) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

9

<u>Důkaz:</u>

(i) $$0\cdot\vec{v} = (0+0)\vec{v} \underset{6}{=} 0\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{v}$$

$$0\cdot\vec{v} = 0\cdot\vec{v}+0\,\vec{v}$$ (přičteme k oběma stranám $-(0\,\vec{v})$)

$$\underset{4}{0\,\vec{v}+(-(0\cdot\vec{v}))} \underset{2}{=} (0\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{v})+(-(0\,\vec{v}))$$

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{v}+(\underbrace{0\cdot\vec{v}+(-0\,\vec{v})}_{4})$$

$$\vec{0} = \underset{3}{0\cdot\vec{v}+\vec{0}}$$

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{v}$$

(ii) Podobně $(\vec{0}=\vec{0}+\vec{0})$, udělejte za DÚ.

10

(iii) jestliže $a = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$, pak podle (i) a (ii) je

$$a\vec{u} = \vec{o}.$$

Nechť $a\vec{u} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom rovnici

$$a\vec{u} = \vec{o}$$

vynásobíme číslem a^{-1}

$$a^{-1}(a\vec{u}) = a^{-1}\vec{o}$$

$$7 \qquad (a^{-1} \cdot a)\vec{u} \overset{(ii)}{=} \vec{o}$$

$$1\vec{u} = \vec{o}$$

$$8 \qquad \vec{u} = \vec{o}$$

Dokažimo 11

(iv) $(-1)\cdot\vec{v} = -\vec{v}$.

Vemo, da velja

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{v} = (1+(-1))\,\vec{v} = 1\,\vec{v} + (-1)\cdot\vec{v} \overset{8}{=} \vec{v} + (-1)\,\vec{v}$$

$$\vec{0} = \vec{v} + (-1)\cdot\vec{v}$$ prištejemo nasprotni vektor k $\vec{v}$

$$\underbrace{-\vec{v} + \vec{0}} = \underbrace{-\vec{v} + \vec{v}} + (-1)\,\vec{v}$$

$$-\vec{v} = \vec{0} + (-1)\,\vec{v}$$

$$-\vec{v} = (-1)\,\vec{v}$$

12

<u>Lineární kombinace vektorů</u> Máme vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ a skaláry $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$. Potom vektor

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$$

se nazývá <u>lineární kombinací vektorů</u> $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

<u>Definice</u> Neprázdná podmnožina V vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ se nazývá vektorový podprostor v U, jestliže platí:

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} \in V$ (V je uzavřené na sčítání)

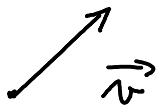
(2) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in V \quad a\vec{u} \in V$ (V je uzavřené na násobení skalárem)

Příklady

Vekt. podprostory v $U = \mathbb{R}^2$.

Nechť $V \subset U$ je nepraázdný

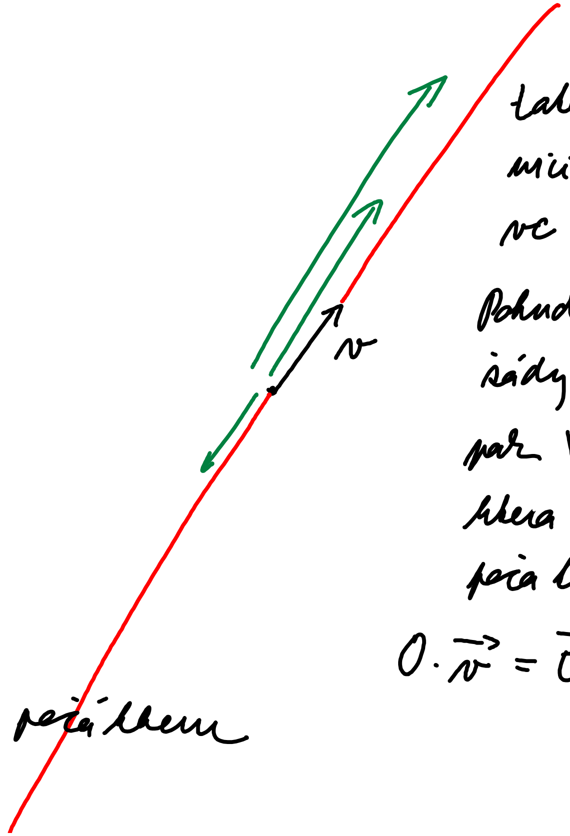
(i) $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$



2 vlastnosti (R)

víme, že všechny vektory

$a\vec{v}$, $a \in \mathbb{R}$ leží ve V



taková přímka musí ležet ve V

Pokud ve V neleží žádný další vektor, pak V je přímkou, která prochází počátkem.

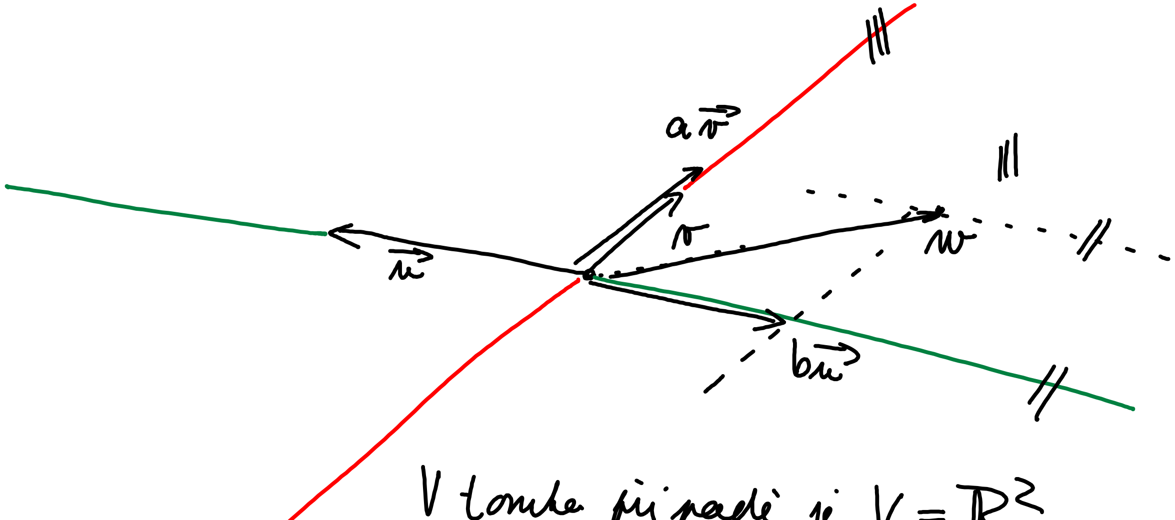
$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Všechny přímky v $\mathbb{R}^2$ procházející počátkem jsou vekt podprostory.

14

(ii) $V = \{\vec{0}\}$ je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^2$

(iii) $\vec{v}, \vec{u} \in V$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ neleží na přímce $\{a\vec{v},\ a \in R\}$



$b\vec{u} \in V \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$\vec{w} = \underbrace{\underbrace{a\vec{v}}_{\in V} + \underbrace{b\vec{u}}_{\in V}}_{\in V}$$

V tomto případě je $V = \mathbb{R}^2$.

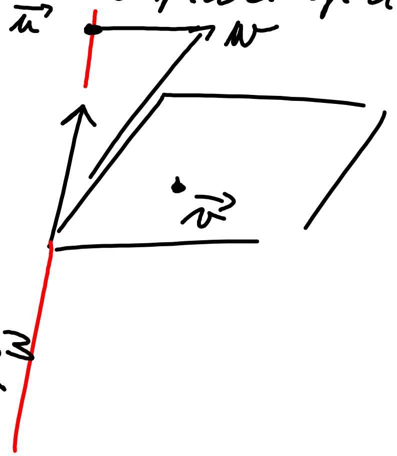
Všechny vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou počátek, přímky procházející počátkem a celé $\mathbb{R}^2$.

2 Podprostory v $\mathbb{R}^3$

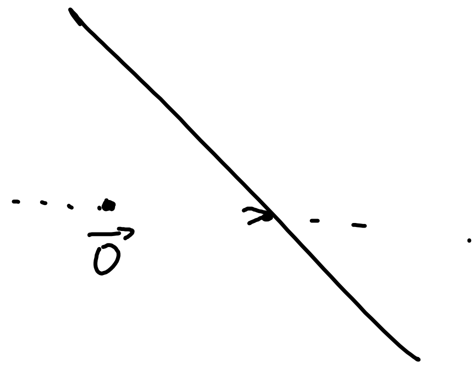
$V = \{\vec{o}\}$

V = přímka procházející počátkem

V = rovina procházející počátkem



$V = \mathbb{R}^3$



Lemma Je-li $V \subset U$ vekt. podprostor, pak $\vec{o} \in V$.

Dk. V je neprázdná. Proto existuje vektor $\vec{v} \in V$. Potom

$$\vec{o} = 0 \cdot \vec{v} \in V.$$

16

Lemma. Vlastnosti (1) a (2) z definice vekt. podprostoru jsou ekvivalentní této vlastnosti:

$$(*) \quad \forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \quad a\vec{u} + b\vec{v} \in V.$$

(V je uzavřený na lin. kombinace dvou vektorů)

Dk: $(*) \Rightarrow (1)$ a (2)

$a = b = 1$ dostaneme (1)

$a \in \mathbb{K},\ b = 0$ dostaneme (2)

(1) i $(2) \Rightarrow (*)$

Z (2) plyne $a\vec{u}, b\vec{v} \in V$.

Z (1) plyne $a\vec{u} + b\vec{v} \in V$

Lemma Je-li $V \subset U$ vekt. podprostor, pak každá lin. kombinace prvků z V leží ve V: $\forall a_1, a_2 .. a_k \in \mathbb{K},\ \forall u_1, u_2, .. u_k \in U$ je $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k \in V$.

Dk indukcí podle k

17

Důležitý příklad vekt. podprostoru

$U = \mathbb{R}^n$, A matice typu $k \times n$

$V = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ Ax = 0 \}$

V je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^n$

(0) V je neprázdný $\vec{0} \in V$ neboť $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) vezmi $x, y \in V$ $\quad Ax = 0,\ Ay = 0$

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in V$$

(2) $$A(cx) = c(Ax) = c\,0 = 0 \Rightarrow cx \in V$$

18

Věta. Nechť $V \subseteq U$ je vekt. podprostor. Potom V s operacemi $+$ a $\cdot$ zúženými od U je vekt. prostor.

Dk.

$+, \cdot \quad U \times U \longrightarrow U$

$+/_{V \times V} : V \times V \longrightarrow V$

$\cdot : \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$

$\cdot/_{\mathbb{K} \times V} : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

Operace $+$ a $\cdot$ jsou na V dobře definovány. Podílné vlastnosti mají díky tomu, že je mají operace $+$ a $\cdot$ na U