

Matice lineární.

Lineární: U, V v. p. nad \mathbb{K} , $\varphi: U \rightarrow V$ lineární
 $\forall u, v \in U, a, b \in \mathbb{K}: \varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$

Příklady: $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k$ A matice $k \times n$ a prvky v \mathbb{K}

$$\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k \quad \varphi(x) = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

'Káždě' lineární zobrazení $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ je určeno svou

Souřadnice U vekt. prostoru, $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$U \ni v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \quad \begin{pmatrix} v \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

②

Soudruce radenijsi lin. rohaseni

$$(\)_a : U \rightarrow K^n$$

postei, na - biptca, imnermi rohaseni

$$K^n \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in U$$

Skladani lin. rohaseni(1) $\text{Id} : U \rightarrow U$ $\text{Id}(u) = u$ ji lin isomorfizmu(2) $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow W$ linearni $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ ji komi linearni

$$\Rightarrow \varphi(x) = Ax, \quad \psi(y) = By \quad \psi \circ \varphi(x) = B(Ax) = (BA)x$$

③

(3) $\varphi: U \rightarrow V$ lin. izomorfismus
 $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ je lineární lin. zobrazení

$\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \quad \varphi(x) = Ax$
 $\varphi^{-1}: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \varphi^{-1}(y) = By$

$\varphi: U \rightarrow V, \dim U < \infty$
 $\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$
 φ je lin. izomorfismus
 $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$ a
 $\dim U = \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$

$x = \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = B(Ax) = (BA)x$
 $y = \varphi \circ \varphi^{-1}(y) = A(By) = (AB)y$

$\rightarrow BA = E$
 $AB = E \Rightarrow B = A^{-1}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots$

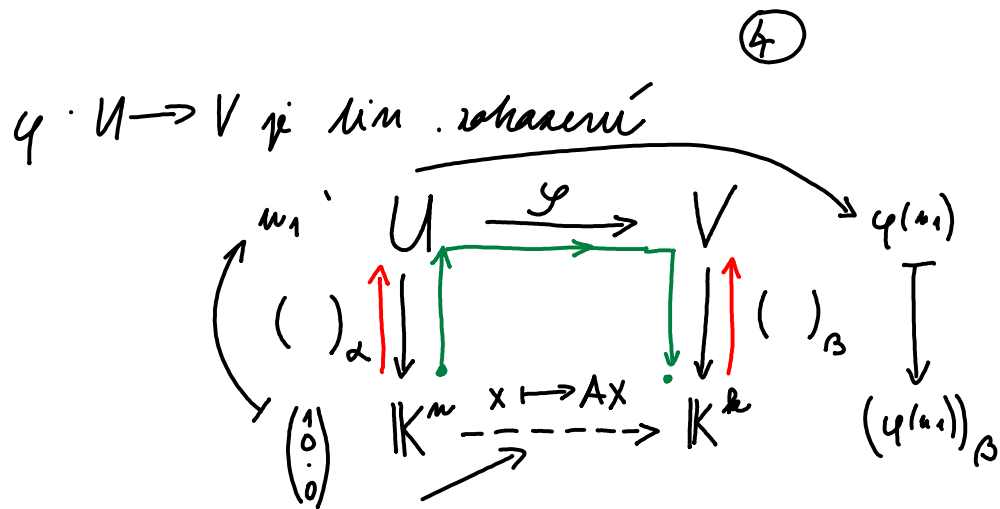
Matrice lin. zobrazení

U, V vekt. prostory nad \mathbb{K} dimenzi n a k s bázelemi

$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$
 $\in U$

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$
 $\in V$

$u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots$



$$S_1 A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 A = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a K^m do K^k , musí být určena matrice. Tato matrice narybíme matrici lineárního zobrazení

Definice: matice lineárního zobrazení $\varphi: U \rightarrow V$ v bázích α a β je matice

$$(\varphi)_{\beta, \alpha} = \left(\begin{pmatrix} \varphi(u_1) \end{pmatrix}_{\beta} \begin{pmatrix} \varphi(u_2) \end{pmatrix}_{\beta} \dots \begin{pmatrix} \varphi(u_n) \end{pmatrix}_{\beta} \right)$$

(5)

P.üklad

$$U = \mathbb{R}_3[x] \quad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$$

$$V = \mathbb{R}_2[x] \quad \beta = (1, x, x^2)$$

$$\varphi(p) = p' \quad (\text{derivative}) \quad (\varphi)_{\beta, \alpha} = ?$$

$$(\varphi)_{\beta, \alpha} = \left((\varphi(1))_{\beta} \quad (\varphi(x))_{\beta} \quad (\varphi(x^2))_{\beta} \quad (\varphi(x^3))_{\beta} \right)$$

$$= \left((0)_{\beta} \quad (1)_{\beta} \quad (2x)_{\beta} \quad (3x^2)_{\beta} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(6)

Nový príklad

$$U = V = \mathbb{R}^2 \quad \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \beta = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left(\left(\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\alpha}, \left(\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\alpha}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \left(\left(\varphi(e_1) \right)_{\varepsilon_2}, \left(\varphi(e_2) \right)_{\varepsilon_2} \right) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}_{\varepsilon_2}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\varepsilon_2} \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

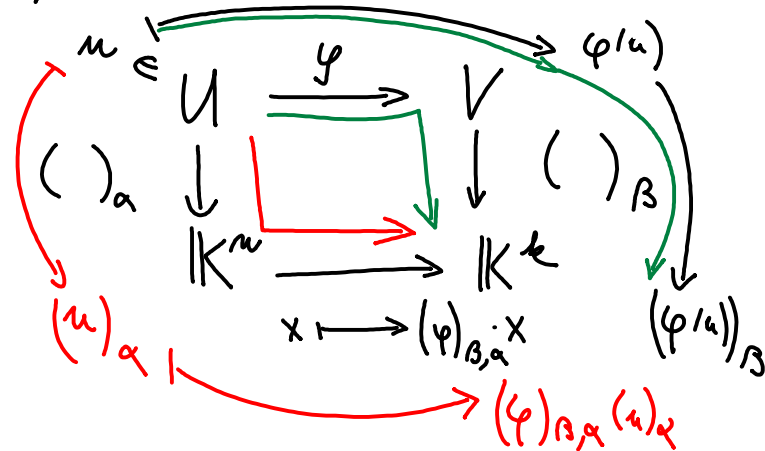
$$\varepsilon_2 = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

⑦

Věta: Necht U, V jsou vekt. prostory nad tělesem K a lineární α, β . Necht $\varphi: U \rightarrow V$ je lineární. Pak platí

$$(*) \quad (\forall u \in U) \quad \underline{(\varphi(u))_{\beta}} = \underline{(\varphi)_{\beta, \alpha}} \cdot \underline{(u)_{\alpha}}$$

Důkaz: Opět pomocí obrázkem



⑧

Fornitmi ditas. Maime doë

Lin. rohaseni $U \rightarrow \mathbb{R}^k$

① $u \mapsto (\varphi(u))_{\beta}$ (slòieni 2 lin. rohaseni ò lineární)

② $u \mapsto (\varphi)_{\beta, \alpha} (u)_{\alpha}$ (slòieni 2 lin. rohaseni ò lineární)

Lin. rohaseni pou òidnòvòacné unò na nòjmi kòduòami na vektòech nòjòbò kòre. Spòicòime kòduòy kòchò rohaseni na vektòech kòre $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

① $u_1 \mapsto (\varphi(u_1))_{\beta} = 1.$ slòupòc matice $(\varphi)_{\beta, \alpha}$

② $u_1 \mapsto (\varphi)_{\beta, \alpha} (u_1)_{\alpha} = (\varphi)_{\beta, \alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$ slòupòc matice $(\varphi)_{\beta, \alpha}$

Tòdy obò rohaseni pou slòjòvò!

(9)

Piiklad (masaruji na 1. piiklad)

$$U = \mathbb{R}_3[x] \quad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$$

$$V = \mathbb{R}_2[x] \quad \beta = (1, x, x^2)$$

$$p = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$$

$$\varphi(p) = p' \quad (\varphi)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi(p))_{\beta} = (\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (p)_{\alpha}$$

Leva strana:

$$(\varphi(p))_{\beta} = (6x^2 - 2x + 5)_{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Prava strana:

$$(\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (p)_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(10)

Ľeta o počítaní s maticemi lin. zobrazení

(1) Necht' $\text{id}_U : U \rightarrow U$ je identické zobrazení, a α báze v U podle

$$(\text{id}_U)_{\alpha, \alpha} = E.$$

(2) Necht' báze prostoru U, V, W jsou α, β, γ a necht' $\varphi : U \rightarrow V$ a $\psi : V \rightarrow W$ jsou lineární podle

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma, \alpha} = (\psi)_{\gamma, \beta} \cdot (\varphi)_{\beta, \alpha} \quad (\text{množení matic})$$

(3) Necht' $\varphi : U \rightarrow V$ je lin. izomorfismus, a α báze v U , β báze v V .

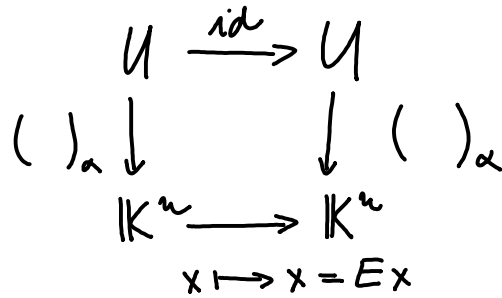
Podle toho $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ je

$$(\varphi^{-1})_{\alpha, \beta} = [(\varphi)_{\beta, \alpha}]^{-1} \quad (\text{inverzní matice})$$

(11)

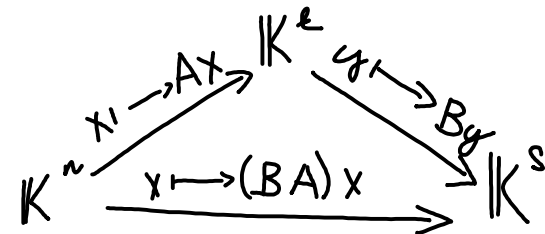
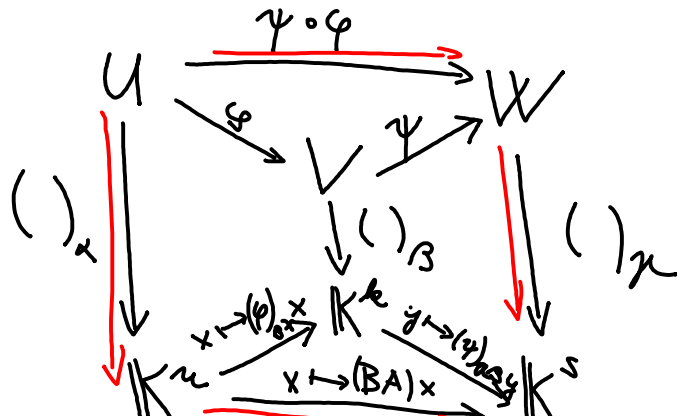
Diklas pemrosi diagramu

(1)



$$\begin{aligned}
 (id)_{\alpha\alpha} &= \left((id|_{u_1})_\alpha \ \dots \ (id|_{u_n})_\alpha \right) \\
 &= \left((u_1)_\alpha \ \dots \ (u_n)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \dots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(2)



(12)

Matrice přechodu mezi bázemi

Necht U je n -rozměrný vektorový prostor a B je báze

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{a} \quad \beta = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Matrice přechodu $(\text{id})_{\beta, \alpha}$ je matrice identické zobrazení

$$\text{id}: U \rightarrow U \quad \text{id}(u) = u$$

v bázi α, β - tedy podle definice je to matrice

$$(\text{id})_{\beta, \alpha} = \left((u_1)_{\beta} \quad (u_2)_{\beta} \quad \dots \quad (u_n)_{\beta} \right)$$

(13)

Věta: Platí

$$(u)_B = (\text{id})_{B,A} \cdot (u)_A.$$

Tato věta říká, že čím více máme přechodu dohoda, že souvisí v jednom
 řádku, specifickému souřadnice v druhé řádce.

Důkaz. Vezme větu

$$(\varphi(u))_B = (\varphi)_{B,A} \cdot (u)_A$$

aplikovanou na $\varphi = \text{id}$.

(14)

Prklad $V = \mathbb{R}^3$

$$\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{id})_{\varepsilon, \alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\varepsilon} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{id})_{\alpha, \varepsilon} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\alpha} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(15)

Dokážeme rovnost 3 řádků a 3 neznámých.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Souadnice nullam $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ v řádku α upřeme se rovností

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a stejné také souadnice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v řádku α

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(16)

Tylo 3 ruskay müzi me rapal yidivou matricou romici'

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→
To yi kledana matrice pichodu

$$(id)_{\alpha, \varepsilon} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17)

Věta.

$$\textcircled{1} \quad (\text{id})_{\alpha, \alpha} = E$$

$$\textcircled{2} \quad (\text{id})_{\gamma, \alpha} = (\text{id})_{\gamma, \beta} (\text{id})_{\beta, \alpha}$$

$$\textcircled{3} \quad (\text{id})_{\alpha, \beta} = \left((\text{id})_{\beta, \alpha} \right)^{-1}$$

Důkaz je srovnání případů sítě pro matice lin. zobrazení

$$\textcircled{2} \quad (\text{id})_{\gamma, \alpha} = (\text{id} \circ \text{id})_{\gamma, \alpha} = (\text{id})_{\gamma, \beta} \circ (\text{id})_{\beta, \alpha}$$

$$\textcircled{3} \quad (\text{id})_{\alpha, \beta} = (\text{id}^{-1})_{\alpha, \beta} = \left[(\text{id})_{\beta, \alpha} \right]^{-1}$$

(18)

Poniamo a posto i due:

primo. li in \mathbb{R}^n a matrice invertibile $(id)_{\alpha, \varepsilon}$ possiamo scrivere

$$(id)_{\varepsilon, \alpha}$$

con φ invertibile a parte

$$(id)_{\alpha, \varepsilon} = [(id)_{\varepsilon, \alpha}]^{-1}$$

Spiega il diagramma (3) per lin. trasformazioni: $\varphi: U \rightarrow V$ lin. iso

$$(\varphi^{-1})_{\alpha, \beta} = [(\varphi)_{\beta, \alpha}]^{-1}$$

