DETERMINANTY

Permutace je bijekce $\{1, 2, \dots n\}$ do sebe.

n prvkové permutace S_n tvoří grupu s operací skládání

Znaménko permutace

$$\mathrm{sign}: S_n \longrightarrow \{-1, 1\} = \mathbb{Z}_2$$

je homomorfismus grup

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}\,\sigma \cdot \mathrm{sign}\,\tau$$

inverze je dvojice $i < j$ taková, že $\tau(i) > \tau(j)$

$$\mathrm{sign}\,\tau = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = (-1)^{\text{počet inverzí}}$$

2

n-prvková permutace

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sign} \tau = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

V 2. řádku
za n je $n-1$ menších čísel
za $n-1$ je $n-2$ menších čísel
$\vdots$
za 2 je 1 menší číslo

Počet inverzí je

$$n-1 + n-2 + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

n dává po dělení 4 zbytek 0 nebo 1 je $\operatorname{sign} \tau = \underline{1}$

n dává po dělení 4 zbytek 2 nebo 3 je $\operatorname{sign} \sigma = -1$.

3

Každé čtvercové matici přiřadíme číslo, tzv. determinant matice
Časem uvidíme, že skutečnost, že $\det A \neq 0$ znamená, že
A má inverzní matici, nebo že řádky matice A jsou LN nebo že
sloupce matice A jsou LN.

<u>Definice</u> Nechť A je matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Počet prvků S_n je $n!$

$a_{i\sigma(i)}$

i … řádek, $\sigma(i)$ … sloupec

4

$n=1 \qquad \det(a_{11}) = a_{11}$

$n=2 \qquad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}$

$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

σ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
sign	1	-1

$$\overset{+}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

$n=3$

σ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
sign	1	-1	1	-1	1	-1

5

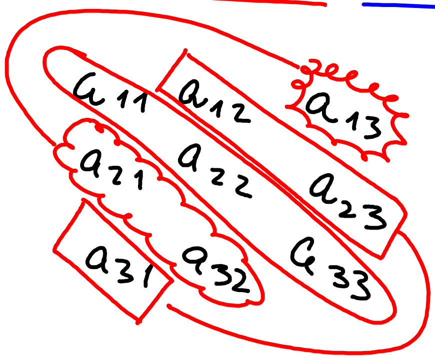
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31}$$

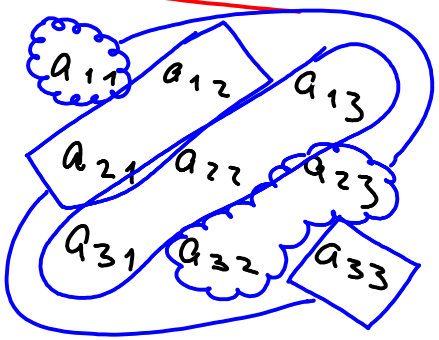
$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

+1



-1



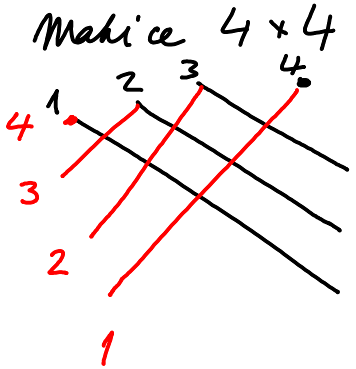
6

Výpočet determinantu matice 3×3 podle výše uvedeného pravidla se nazývá <u>Sarrusovo pravidlo</u>.

Platí pro matice 2×2 a 3×3.

$\boxed{\text{Pro vyšší matice už neplatí!}}$

Matice 4×4



Sarrusovo pravidlo pro matici 4×4 dává 8 sčítanců, ale definice determinantu matice 4×4 dává $4! = 24$ sčítanců

7

Determinant horní a dolní trojúhelníkové matice

Dolní trojúhelníková matice $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i < j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & * & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Horní trojúhelníková matice

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i > j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Věta Nechť A je horní nebo dolní $\triangle$ matice. Pak

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Důkaz: Nechť A je horní $\triangle$ matice.

Jestliže σ je permutace taková, že $\sigma(n) \neq n$, pak $a_{n\sigma(n)} = 0$.
Tudíž i součin $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$. Proto budeme brát jen permutace, kde $\sigma(n) = n$ ~~jestliže~~ $\sigma(n-1) \neq n$. Pokud $\sigma(n-1) \neq n-1$, pak $\sigma_{n-1\,\sigma(n-1)} = 0$. Tedy i $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n-1\,\sigma(n-1)}\, a_{n\sigma(n)} = 0$. Proto $\sigma(n-1) = n-1$.

$$\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & & 0 & 0 & a_{nn} \end{matrix}$$

atd $\sigma(n-2) = n-2, \ldots \sigma(2) = 2, \sigma(1) = 1$ je jediná možná permutace, kde součin nemusí být roven 0

9

Základní pravidla pro počítání s determinanty

(1) Nechť B vznikne z A výměnou i-tého a j-tého řádku. Pak
$$\det B = -\det A.$$

Důkaz. Pro jednoduchost vezmeme $i=1,\ j=2$. $B=(b_{ij})$ $A=(a_{ij})$

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\ b_{1\sigma(1)}\, b_{2\sigma(2)}\, b_{3\sigma(3)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\ a_{2\sigma(1)}\, a_{1\sigma(2)}\, a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\ a_{1\sigma(2)}\, a_{2\sigma(1)}\, a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

(10)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\tau = \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\operatorname{sign} \tau} = \operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) =$$
$$= \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \pi =$$
$$= \underline{- \operatorname{sign} \sigma}$$

jestliže σ probíhá S_n, pak $\tau = \sigma \circ \pi$ probíhá také S_n.
zobrazení $S_n \to S_n$
$\sigma \mapsto \sigma \circ \pi$
je bijekce

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S^n \\ \tau = \sigma \circ \pi}} \operatorname{sign} \sigma \quad a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S^n \\ \tau = \sigma \circ \pi}} - \operatorname{sign} \tau \quad a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} =$$

$$= - \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = - \det A$$

(11)

(2) Nechť matice A má dva stejné řádky. Pak
$$\det A = 0.$$

Důkaz. Nechť matice A má stejný i-tý a j-tý řádek. Výměnou těchto řádků dostaneme opět matici A. Podle předchozího platí

$$\det A = -\det A$$

Odtud
$$2 \det A = 0$$
$$\det A = 0.$$

(3) Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku číslem c. Potom
$$\det B = c \det A.$$

(12)

Dokaz: $\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$

$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; c\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$

$= c\left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\right) = c \det A$

(4) Naj se matrike A a B liši pouze v i-tem řádku. Nechť C je matice taková, že j-tý řádek je

$r_j(C) = r_j(A) = r_j(B)$ pro $j \neq i$

$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$

Pak

$$\det C = \det A + \det B$$

(13) $\boxed{i = 1}$

Důkaz: $\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)} =$

$$= \sum \operatorname{sign} \sigma \left(a_{1\sigma(1)} + b_{1\sigma(1)} \right) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} \underset{\substack{\| \\ b_{2\sigma(2)}}}{a_{2\sigma(2)}} \cdots \underset{\substack{\| \\ b_{n\sigma(n)}}}{a_{n\sigma(n)}}$$

$= \det A + \det B$

(5) Nechť C vznikne z matice A tak, že k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku. Pak

$$\det C = \det A \qquad i \neq j.$$

(14) $i=1,\ j=2$

Důkaz: Uvažujme ve (4) za matici A naši původní matici A, za matici B uvažujme tuto:

$$r_1(B) = c\, r_2(A)$$
$$r_2(B) = r_2(A) \qquad i \geq 2$$
$$r_i(B) = r_i(A)$$

C je matice, která se rovná A i B v řádcích $2, 3, \ldots n$ a v prvním je

$$r_1(C) = r_1(A) + r_1(B) = r_1(A) + c\, r_2(A)$$

Platí podle (4) je $\det C = \det A + \det B$.

Podle (3) je $\det B = c \cdot \det \begin{pmatrix} r_2(A) \\ r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} c \cdot 0 = 0$

Tedy $\det C = \det A$.

15

6 $\det A^T = \det A$

Důkaz. Nechť $A^T = (b_{ij})$ $\qquad b_{ij} = a_{ji}$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$\sigma^{-1}(\sigma(i)) = \sigma^{-1}(1)$, $\sigma(i) = 1$, $\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$\sigma^{-1} \circ \sigma = id$

$\operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot \operatorname{sgn}\sigma = 1$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$

16

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma^{-1} \; a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

Když σ probíhá všechny prvky S_n, pak σ^{-1} také probíhá všechny prvky S_n

$$\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$$

je bijekce S_n na S_n. Proto

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign} \sigma^{-1} \; a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$= \det A$

7 Pravidla 1 – 5 platí rovněž pro sloupce.

17

Příklad Spočítejte determinant matice A tvaru n×n

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\text{k 1 řádku}}{\overset{\text{přičteme 2., 3., ... n-tý řádek}}{=}} \det\begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

18

$$\overset{3}{=} (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} =$$

Od 2, 3, ... n-tého řádku odečteme 1. řádek.

$$= (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{(a+n-1)(a-1)^{n-1}}}$$