APLIKACE LAPLACEOVA ROZVOJE

Inverzní matice – výpočet pomocí alg doplňků

Věta. Matice A typu $n \times n$ má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$. V tomto případě

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T.$$

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$(\tilde{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\det A = -2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

Důkaz. Nechť A^{-1} existuje. Pak $A \cdot A^{-1} = E$

$$\det(A\,A^{-1}) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \implies \det A \neq 0.$$

Obrácení: Nechť $\det A \neq 0$. Vezmeme matici $B = \left(\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\det A}\right)^T$ a ukážeme, že $A\;B = E$.

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\tilde{a}_{jk}}{\det A} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \tilde{a}_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\det A} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \tilde{a}_{ik} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det A = 1 & i = j \quad \text{podle Laplaceova rozvoje i-tého řádku} \\[2ex] \dfrac{1}{\det A} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \tilde{a}_{jk} = 0 & i \neq j \quad \text{neboť} \end{cases}$$

(3)

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk}$ je Laplaceův rozvoj det matice C, která vznikne z A tak, že místo j-tého řádku napíšeme i-tý řádek.

Matice se dvěma stejnými řádky má $\det = 0$.

$$\det C = \underset{\overset{\|}{0}}{\sum_k c_{jk}\tilde{c}_{jk}} = \sum_k a_{ik}\tilde{a}_{jk}$$

<u>CRAMEROVO PRAVIDLO</u> Nechť A je matice $n \times n$ s $\det A \neq 0$.

Potom soustava

$$Ax = b$$

má řešení

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A} \qquad (4)$$

Důkaz: $Ax = b$ a $\det A \neq 0$, pak existuje A^{-1} a my můžeme rovnici vynásobit inverzní maticí zleva

$$x = A^{-1} b$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij}\, b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A}\, b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \tilde{a}_{ji}$$

$\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \tilde{a}_{ji}$ je Laplaceův rozvoj $\det \begin{pmatrix} s_1(A) \dots s_{i-1}(A) & b & s_{i+1}(A) \dots s_n(A) \end{pmatrix}$ podle i-tého sloupce

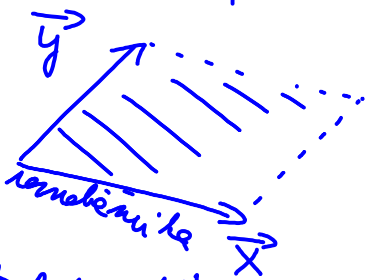
5

Skutečně důležitá aplikace determinantu spočívá ve výpočtu vlastních čísel matic → viz 2. semestr.

A v geometrickém významu determinantu

A matice 2×2 pak det A je „orientovaný" obsah rovnoběžníka se stranami, které jsou dány sloupci matice A

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \text{obsah rovnoběžníka}$$



$$B = \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = -\text{obsah rovnoběžníka}$$

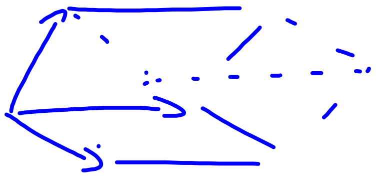
det A = ± obsah rovnoběžníku

+ od $\vec{x}$ se dostaneme k $\vec{y}$ proti směru hod. ručiček o úhel < 180°

− v opačném případě

(6)

U matice 3×3 je determinant roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného sloupci matice.



znaménko + jestliže vektory jsou kladně orientované (podle pravidla pravé ruky)

− v opačném případě

Tedy $|\det A|$ je objem rovnoběžnostěnu.

V mat. analýze u vícerozměrného integrálu je věta o substituci

$$\int_{\varphi(V)} f(x)\,dx = \int_V f(\varphi(y)) \left|\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right)\right| dy$$

7

Hodnost matice a věty o řešení soustav lin. rovnic

Nechť A je matice $k \times n$. Její sloupce značíme

$$s_1(A),\ s_2(A), \dots\ s_n(A)$$

a řádky $\quad r_1(A), r_2(A), \dots, r_k(A).$

Řádková hodnost matice A je $h_r = \dim \underbrace{[r_1(A), \dots r_k(A)]}_{\text{podprostor v } \mathbb{K}^n} \leq \min(k, n)$

jinými slovy je to maximální počet lin. nezávislých řádků

Sloupcová hodnost matice A $\quad h_s = \dim \underbrace{[s_1(A), \dots s_n(A)]}_{\text{podprostor v } \mathbb{K}^k} \leq \min(k, n)$

jinak max. počet lin. nezávislých sloupců

8

Věta $h_r(A) = h_s(A)$

Definice: Společnou hodnotu $h_s(A) = h_r(A)$ nazýváme **HODNOSTÍ MATICE A**

Lemma: Řádková hodnost se nemění při provádění elementárních řádkových operací

Důkaz lemmatu: (1) Výměna $[r_1, r_2, \dots r_n] = [\ r_i \ r_j \dots]$

(2) nenulový násobek $[c r_1, r_2 \dots r_n] = [r_1, r_2, \dots r_n]$

(3) přičtení násobku jiného řádku $[r_1 + c r_2, r_2, \dots r_n] = [r_1, r_2, r_3, \dots r_n]$

$r_1 = (r_1 + c r_2) - c r_2$

9

Důkaz věty:

Použijeme algoritmus na výběr lin. nezávislých sloupců

$A \xrightarrow{\text{ERO}} B$ ve schod. tvaru

$h_s(A) = \dim [s_1(A), \dots s_n(A)]$ = počet ved. koeficientů v B

= počet nenulových řádků matice B = $h_r(B) = h_r(A)$

podle lemmatu

Důsledek Nechť A je matice $n \times n$. Potom

$h(A) = n$ právě když $\det A \neq 0$.

Důkaz: $\Longrightarrow$ Nechť $h(A) = n$, pak řádky matice A jsou lin. nezávislé. Úpravou na schod. tvar dostaneme matici, která nemá nulový řádek

10

Tato matice je horní Δ a má det $\neq 0$.
Jestliže $h(A) < n$, úpravou na schod. tvar dostaneme matici
s nulovým řádkem a nulovým determinantem.

Při elem. řádk. úpravách se nulovost nebo nenulovost determinantu
nemění. Proto dostáváme tvrzení věty.

11

Frobeniova věta (o existenci řešení soustavy rovnic)

Nechť A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$. Soustava lin. rovnic

$$A x = b \qquad x \in \mathbb{K}^n, \quad b \in \mathbb{K}^k$$

má řešení, právě když

$$h(A) = h(A|b).$$

Důkaz: Nechť soustava $Ax = b$ má řešení. Pak platí

$$s_1(A)\, x_1 + s_2(A)\, x_2 + \dots + s_n(A)\, x_n = b.$$

Potom $[s_1(A), s_2(A), \dots s_n(A)] = [s_1(A), \dots, s_n(A), b]$

Proto $h(A) = \dim[s_1(A) \dots s_n(A)] = \dim[s_1(A), \dots b] = h(A|b)$.

12

Ověření: Nechť $h(A) = h(A|b)$. Platí

$$[s_1(A), \dots, s_n(A)] \subseteq [s_1(A), \dots, s_n(A), b]$$

Protože $h(A) = h(A|b)$, rovnají se jejich dimenze a proto se rovnají i oba podprostory

$$[s_1(A) \dots s_n(A)] = [s_1(A), \dots, s_n(A), b]$$

Tedy

$$b \in [s_1(A), \dots, s_n(A)]$$

Proto existují $x_1, x_2, \dots, x_n$ taková, že

$$b = x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + \dots + x_n s_n(A)$$

$$\iff \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

Soustava má řešení.

13

<u>Věta:</u> (O struktuře řešení nehomogenní soustavy)

Označme $\mathcal{R}(A|b)$ množinu řešení soustavy
$$Ax = b.$$
Nechť soustava $Ax = b$ má jedno řešení x_0. Potom
$$\mathcal{R}(A|b) = \{\, x_0 + y,\ \text{kde } y \in \mathcal{R}(A|0)\}$$

<u>Důkaz:</u> Nechť x_0 je řešením $Ax_0 = b$
a y je řešením $Ay = 0$

Potom
$$A(x_0+y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$$
je řešením nehomogenní soustavy.

14

Obrácení, nechť x je řešení nehomogenní soustavy $Ax=b$.

Můžeme psát: $x = x_0 + (x-x_0)$

Víme, že $Ax_0 = b$

Platí: $A(x-x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$,

tedy $x - x_0$ je řešení homogenní soustavy.

$$x = x_0 + \underbrace{(x-x_0)}_{\text{řešení hom. soustavy}}$$

15

Věta (o dimenzi prostoru řešení)

Nechť A je matice $k \times n$. Uvažujme homogenní soustavu

$$Ax = 0.$$

Potom množina řešení této homogenní soustavy je vektorový podprostor v $\mathbb{R}^n$ dimenze

$$n - h(A).$$

Důkaz: Jestliže x, y jsou řešení této soustavy, pak

$$A(ax+by) = aAx + bAy = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

Proto $ax+by$ je také řešení.

16

Matice A typu $k \times n$ definuje lin. zobrazení

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax$$

Množina řešení rovnice $Ax = 0$ není nic jiného než

$$\ker \varphi = \{ x \in \mathbb{K}^n ,\ \varphi(x) = 0 \} = \{ x \in \mathbb{K}^n ,\ Ax = 0 \}.$$

Pro dimenze jádra a obrazu jsme odvodili:

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$$

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{im} \varphi = n - \dim [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)]$$

$$= n - \dim [Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n] = n - \dim [s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A)]$$

$$= n - h(A).$$

17

Rovnice roviny v $\mathbb{R}^3$ (procházející počátkem)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$ kde jedno z $a_i \neq 0$

dim roviny $= 2 = 3 - 1 =$
$= 3 - h(A)$

$$Ax = 0$$
$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$$
$$h(A) = 1$$

Rovnice přímky v $\mathbb{R}^3$ (procházející počátkem)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

dim přímky $= 1 = 3 - 2 = 3 - h(A)$

$h(A) =$ 0, 1, 2