Domácí úkoly ke cvičení č. 5

1. Mějme těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel. Uvažme množinu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, to jest množinu všech zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Na této množině $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definujme binární operaci $\oplus : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ předpisem:
pro každá dvě zobrazení $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}:$

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)\big).$$

Dále definujme vnější operaci $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ předpisem:
pro každé $r \in \mathbb{R}$ a pro každé zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}:$

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((r \odot f)(x) = r \cdot f(x)\big).$$

Ověřte, že pak struktura $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2. V každé z následujících úloh je dáno číselné těleso $(T, +, \cdot)$, množina $\mathbf{V}$, binární operace $\oplus : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a vnější operace $\circledcirc : T \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Pokaždé rozhodněte, zda potom $(\mathbf{V}, \oplus, \circledcirc)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, a své tvrzení ověřte nebo zdůvodněte.

a) Je dáno těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reálných čísel, množina $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{R})\}$ všech posloupností reálných čísel, binární operace $\oplus : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je definována pro libovolné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel předpisem

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \oplus \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a vnější operace $\circledcirc : \mathbb{R} \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je definována pro každé $r \in \mathbb{R}$ a pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel předpisem

$$r \circledcirc \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{r \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

b) Je dáno těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reálných čísel, množina $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ všech zobrazení $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, binární operace $\oplus : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ je definována pro libovolná zobrazení $\gamma, \delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall m \in \mathbb{Z})\big((\gamma \oplus \delta)(m) = \gamma(m) + \delta(m)\big)$$

a vnější operace $\circledcirc : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ je definována pro každé $r \in \mathbb{R}$ a pro každé zobrazení $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall m \in \mathbb{Z})\big((r \circledcirc \gamma)(m) = r{\cdot}\gamma(-m)\big).$$

c) Je dáno těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reálných čísel, množina $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, binární operace $\oplus : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je definována pro libovolná zobrazení $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((\varphi \oplus \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)\big)$$

a vnější operace $\circledcirc : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je definována pro každé $r \in \mathbb{R}$ a pro každé zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((r \circledcirc \varphi)(x) = |r|{\cdot}\varphi(x)\big).$$

d) Je dáno těleso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ komplexních čísel, množina $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ všech zobrazení $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, binární operace $\oplus : \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ je definována pro libovolná zobrazení $\vartheta, \zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((\vartheta \oplus \zeta)(x) = \vartheta(x) + \zeta(x)\big)$$

a vnější operace $\circledcirc : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ je definována pro každé $c \in \mathbb{C}$ a pro každé zobrazení $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((c \circledcirc \vartheta)(x) = \overline{c}{\cdot}\vartheta(x)\big).$$

3. O každé z následujících podmnožin $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ rozhodněte, zda se jedná o vektorový podprostor vektorového prostoru $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ popsaného v úloze 1, a své tvrzení ověřte nebo zdůvodněte.

a) $\mathbf{W} = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall x \in \mathbb{R})(f(|x|) = 0) \big\}$

b) $\mathbf{W} = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall x \in \mathbb{R})(f(-x) = -f(x)) \big\}$

c) $\mathbf{W} = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall c \in \mathbb{Z})(f(c){\cdot}f(-c) = 0) \big\}$

d) $\mathbf{W} = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall x \in \mathbb{R})(f(-|x|) \leqslant f(|x|)) \big\}$

e) $\mathbf{W} = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall x \in \mathbb{R})(f(x+1) = f(x)) \big\}$

f) $\mathbf{W} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\forall s, t \in \mathbb{R})(f(s) \cdot f(t) \geqslant 0)\}$

g) $\mathbf{W} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\forall s, t \in \mathbb{R})(s \leqslant t \Longrightarrow f(s) \geqslant f(t))\}$

h) $\mathbf{W} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leqslant nx^2)\}$

i) $\mathbf{W} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(|f(x)| \leqslant n|x|)\}$

j) $\mathbf{W} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(|x| \geqslant n \Longrightarrow f(x) = 0)\}$

4. V každé z následujících úloh jsou dána tři zobrazení $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokaždé rozhodněte, zda se jedná o lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ popsaném v úloze 1.

a) $f(x) = \left(\sqrt{x^2} + 1\right)^2,\ g(x) = \left(\sqrt{x^2} - 1\right)^2,\ h(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}),\ h(x) = \sin(x + \frac{3\pi}{4})$

c) $f(x) = 1 + x^2,\ g(x) = 1 - x^2,\ h(x) = (1 + x)^2$

d) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \cos 2x$

e) $f(x) = (x - 1)^2,\ g(x) = (x - 2)^2,\ h(x) = x^2 - 2$

f) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \sin 2x,\ h(x) = \sin \frac{x}{2}$

g) $f(x) = x^2,\ g(x) = |x|,\ h(x) = \sqrt{|x|}$

h) $f(x) = 1,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

i) $f(x) = x^3,\ g(x) = |x|^3,\ h(x) = \left(\frac{x+|x|}{2}\right)^3$

j) $f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = \sin^4 x,\ h(x) = \sin^2 2x$

Jde-li o lineárně nezávislé vektory, dokažte to. V opačném případě vyjádřete některý z těchto tří vektorů ve tvaru lineární kombinace zbývajících dvou vektorů.