1. Řešení příkladů z 3.12.

1.1. Dokažte pro $m \leq n$ rovnost

$$\binom{n}{0}\binom{m}{0} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \cdots + \binom{n}{m}\binom{m}{m} = \binom{n+m}{m}$$

.

Řešení. Například pomocí binomické věty porovnáním koeficientů u x^m na levé respektive pravé straně rovnice $(x+1)^n(x+1)^m = (x+1)^{n+m}$. Promyslete! Nebo kombinatorickou úvahou. Počet výběrů m prvků z $n+m$ prvků je jednak dán kombinačním číslem na pravé straně, ale taky můžeme výběry počítat následovně. Předem prvky rozdělíme na dvě skupiny o n respektive m prvcích a pak uvažujeme, kolik prvků vybereme z které skupiny. Pokud 0 z první, pak všech m ze druhé, tj. $\binom{n}{0}\binom{m}{m} = 1$ možnost, pokud 1 z první, pak $m-1$ ze druhé, tj. $\binom{n}{1}\binom{m}{m-1}$ možností atd. To je ale vzhledem k symetrii kombinačních čísel $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$ právě výraz na levé straně.

1.2. Urči největší člen v rozvoji výrazu $(\sqrt{2}+1)^{10}$.

Řešení. Samotné binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ se zvyšují pro $k = 1, \ldots, \frac{n}{2}$ a vzhledem k jejich symetrii pak zase snižují. V rozvoji ještě vystupuje mocnina $(\sqrt{2})^k$, která maximum posouvá. Je třeba si ale především všimnout, že opět členy rostou, pak pro nějaké k nastane maximum a pak už jen klesají. Na danou otázku teda můžeme jednoduše odpovědět vyřešením nerovnosti

$$\binom{10}{k} 2^{\frac{k}{2}} < \binom{10}{k+1} 2^{\frac{k+1}{2}},$$

tj. pro která k je k-tý člen menší než $k+1$-tý. Úpravou nerovnosti dostaneme $k < 5,44$. To znamená, že ještě pátý člen je menší než šestý. Sedmý už je ovšem zase menší, a proto je šestý člen, tj. $\binom{10}{6}(\sqrt{2})^6$, ten největší.

1.3. Určete počet sudých čtyřciferných čísel sestavených právě ze dvou různých cifer.

Řešení. Napřed se opět nebudeme omezovat na čísla, která nezačínají nulou. Císla ze zadání můžou být dvojího druhu - bud z dvou sudých cifer nebo z jedné sudé a jedné liché cifry. V prvním případě máme $\binom{5}{2}(2^4-2)$ možností (vybereme dvě sudé cifry, na každé pozici pak může být jedna nebo druhá a odečítáme dva případy, kdy použijeme pouze jednu cifru), ve druhém $5.5(2^3-1)$ možností (vybereme jednu sudou, jednu lichou, tj 5 krát 5 možností, na posledním místě musí být ta sudá a na zbývajících třech může být libvolná z těchto dvou, odečítáme jedem případ, kdy je číslo složené pouze ze sudé cifry). Odečteme čísla začínaqjící nulou. Pokud je druhá cifra sudá, pak je $4.(2^3-1)$ možností a pokud je lichá, pak je $5.(2^2-1)$ možností. Promyslete! Dohromady je tedy možností

$$\binom{5}{2}(2^4-2) + 5.5(2^3-1) - 4.(2^3-1) - 5.(2^2-1) = 272.$$

1.4. Kolika způsoby můžeme rozesadit 20 lidi a 2 řidiče do 25-místného minibusu?

Řešení. Na místě řidiče může sedět jen jeden nebo druhý řidič, tj. 2 možnosti. Zbylých 21 lidí vždy může sedět kdekoli. Vybereme teda místa, která budou obsazená, tj. $\binom{24}{21} = \binom{24}{3}$ možností a na těchto místech můžou být lidi v jakémkoli pořadí, tj. 21! možností. Dohromady $2.\binom{24}{21}.21! = 6072$ možností.