## 1. Řešení příkladů z 22.10.

**1.1.** Spočítejte
$$\operatorname{tg} 660^\circ + \cos(-\frac{13}{2}\pi) + \sin 745^\circ.$$

**Řešení**. Tangens je periodický s periodou $\pi$ a kosinus a sinus jsou periodické s periodou $2\pi$. Proto je výraz roven
$$\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) + \cos(-\frac{\pi}{2}) + \sin\frac{3\pi}{2} = -\sqrt{3} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**1.2.** Řešte v $\mathbb{R}$:
$$\sin 2x = \sqrt{2}\cos x.$$

**Řešení**. Ze vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu máme ekvivalentní rovnici
$$2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x.$$
Odtud vidíme, že rovnice je splněna pro $\cos x = 0$, tj. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pokud $\cos x \neq 0$, pak musí platit $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**1.3.** Řešte v $\mathbb{R}$:
$$2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0.$$

**Řešení**. Dosazením $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a vydělením -1 dostáváme rovnici
$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.$$
Kosinus tedy musí splňovat $\cos x = \frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2} = \frac{7\pm5}{4}$. Pro jeden případ zřejmě řešení neexistuje, pro druhý máme $\cos x = \frac{1}{2}$, tj. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**1.4.** Řešte v $\mathbb{R}$:
$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$$

**Řešení**. Ze vzorce pro sinus součtu argumentů můžeme jednoduše odvodit vzorec pro sinus trojnásobného argumentu $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Zadaná rovnice je tedy ekvivalentní
$$4\sin x - 4\sin^3 x = 2\sin x\cos x.$$
Je tedy splněna pro $\sin x = 0$, tj. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pokud $\sin x \neq 0$, pak vydělením dostaneme
$$2 - 2\sin^2 x = \cos x,$$
neboli $2\cos^2 x = \cos x$. Rovnice je tedy splněna i pro $\cos x = 0$, tj. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, a pro $\cos x = \frac{1}{2}$, tj. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

**1.5.** Řešte v $\mathbb{R}$:
$$\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x.$$

**Řešení**. Rovnice lze přepsat na tvar $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$. Odtud $2x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ nebo $2x + \frac{\pi}{4} = \pi - (x + \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$, to znamená $x = 2k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**1.6.** Řešte v $\mathbb{R}$:

$$\sin 2x + \sin x \leq 0.$$

**Řešení**. Nerovnici můžeme upravit na tvar

$$2\sin x \cos x + \sin x = \sin x(2\cos x + 1) \leq 0.$$

Jedna možnost je tedy $\sin x \leq 0, \cos x \geq -\frac{1}{2}$ a druhá $\sin x \geq 0, \cos x \leq -\frac{1}{2}$. První dává řešení $x \in \langle \frac{4}{3}\pi, 2\pi\rangle$, druhá $x \in \langle \frac{2}{3}\pi, \pi\rangle$.

**1.7.** Řešte v $\mathbb{R}_+$:

$$\sin \frac{\pi}{x} > 0.$$

**Řešení**. Nerovnice je splněna pro taková $x$, pro která platí $2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi + 2k\pi$. Pro $k = 0$ tato podmínka dává $x > 1$ a pro $k \neq 0$ $x \in (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

**1.8.** Řešte v $\mathbb{R}$:

$$4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x.$$

**Řešení**. Nejdřív vyjádříme $\cos 2x$ pomocí $\sin x$, tj. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Dostaneme tak

$$4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 < 0.$$

Teď potřebujeme rozložit polynom na levé straně, tj. polynom $4t^3 + 2t^2 - 2t - 1$. Možné racionální kořeny jsou $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$. Vyhovuje $t = -\frac{1}{2}$, tj $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Pomocí Hornerova schématu zjistíme, že další kořeny jsou $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.