§1: RACIONÁLNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

• Při hledání rozkladu mnohočlenu v **R** na součin mnohočlenů nižšího stupně používáme *Bezoutovu větu:*
Je-li x_0 kořen mnohočlenu $F(x)$ stupně n, pak existuje mnohočlen $G(x)$ stupně $(n-1)$ takový, že platí

$$F(x) = (x - x_0) \cdot G(x).$$

• Má-li mnohočlen $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ celé koeficienty a platí-li $a_0 \neq 0$ a $a_n \neq 0$, leží všechny jeho racionální kořeny v množině všech zlomků $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná celá čísla taková, že $p|a_0$ a $q|a_n$.
• Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, kde $a,b,c \in \mathbf{R}$ a $a \neq 0$, platí vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

kde $D = b^2 - 4ac$ je tzv. *diskriminant*. Kořeny jsou reálné, právě když $D \geq 0$, přitom je-li $D = 0$, je $x_1 = x_2$ (tzv. *dvojnásobný* kořen).
• Mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty a, b, c kvadratické rovnice platí tzv. *Viétovy* vztahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

• Každý mnohočlen v **R** lze rozložit na součin činitelů, z nichž každý je lineární nebo kvadratický se záporným diskriminantem. Žádný z těchto mnohočlenů nelze v **R** rozložit na součin činitelů nižšího stupně.
• Obsahuje-li algebraická rovnice *absolutní hodnotu*, je zpravidla vhodné rozdělit řešení na etapy podle znamének výrazů v absolutní hodnotě. Stojí-li absolutní hodnota osamocena na jedné straně rovnice, je někdy výhodné takovou rovnici umocnit na druhou.
• Nerovnice s racionální funkcí řešíme zpravidla *metodou intervalů*: nerovnici upravíme na tvar $P(x) \cdot Q(x) > 0$, resp. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, rozložíme oba mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ v **R** a číselnou osu x rozdělíme na intervaly, v nichž žádný činitel nemění znaménko. Násobíme-li nerovnici výrazem s proměnnou, je nutné brát ohled na znaménko tohoto výrazu.
• Při řešení kvadratických nerovnic (s parametry) je výhodné uplatnit následující větu:
Nechť $F(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ a $D = b^2 - 4ac$. Pak platí:
(i) $F(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}$, právě když $D < 0$.
(ii) Je-li $D > 0$, má rovnice $F(x) = 0$ dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, přitom

$$F(x) > 0 \iff (x < x_1 \vee x > x_2),$$
$$F(x) < 0 \iff x_1 < x < x_2.$$

1. seminář

1. Rozložte v $\mathbf{R}$:

a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

b) $x^3 - 6x^2 - x + 30$

c) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$

d) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

e) $9x^3 - 15x^2 - 32x - 12$

2. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnice s parametry $a, b \in \mathbf{R}$:

a) $x^2 - 2(a + 1)x + 4a = 0$

b) $ax^2 + 2x + 1 = 0$

c) $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2 - a^2}$

d) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, kde $ab \neq 0$

3. Pro která $a \in \mathbf{R}$ má rovnice $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$ dva různé reálné kořeny? Určete jejich znaménka.

4. Označme x_1, x_2 kořeny rovnice $3x^2 + 8x + 4 = 0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo m, kde

a) $m = x_1^2 + x_2^2$

b) $m = x_1^3 + x_2^3$

c) $m = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

d) $m = x_1 - x_2$

e) $m = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

f) $m = x_1^2 - x_2^2$

5. Nalezněte kvadratickou rovnici s racionálními koeficienty, jejímž jedním kořenem je $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

6. Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$ má dvojnásobný kořen rovnice

$$(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0.$$

7. Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k + 2)x + 12 + k^2 = 0$$

dva reálné různé kořeny.

8. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$ tak, aby obě rovnice

a) $(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$
$ax^2 - x + 1 = 0$

b) $x^2 + ax + 8 = 0$
$x^2 + x + a = 0$

měly aspoň jeden společný kořen.

2. seminář

9. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnice:

a) $|x^2 - 3x + 3| = 2$ b) $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$

c) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$

d) $|x^2 - 1| + x + 1 = 0$ e) $\dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$

10. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnice:

a) $(x^2 + 4)(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12) > 0$

b) $\dfrac{(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2)(x^2 - 8x + 15)}{(x + 4)(x^2 + 2x + 5)} < 0$

c) $3x^3 - 14x^2 + 20x > 8$ d) $\dfrac{x^4 + 10x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$

e) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} > \dfrac{4}{3}$ f) $\dfrac{x - 1}{x} - \dfrac{x + 1}{x - 1} < 2$

g) $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{7}{x + 2} \le \dfrac{6}{x - 1}$ h) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} < 1$

i) $1 < \dfrac{3x - 1}{2x + 1} < 2$ j) $\dfrac{2 - x}{x^3 + x^2} \ge \dfrac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}$

k) $|x| > \dfrac{1}{x}$ l) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$

m) $x|x| - 4x + 3 < 0$ n) $\left|\dfrac{2x + 3}{3x - 2}\right| > 1$

o) $|x^2 - 2x - 3| \le 3(x - 1)$ p) $|x^2 - 3x + 2| \le 2x - x^2$

q) $|x^2 - 4x| + 3 \ge x^2 + |x - 5|$ r) $\big(|x - 1| - 3\big)\big(|x + 2| - 5\big) < 0$

s) $\big||x - 2| - x + 3\big| < 5$ t) $\big|2x - |3 - x| - 2\big| \le 4$

11. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro každé $x \in A$:

a) $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0,\ \ A = \mathbf{R}$

b) $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0,\ \ A = \mathbf{R}$

c) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0,\ \ A = \mathbf{R}$

d) $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0,\ \ A = \mathbf{R}^+$

e) $(x - 3a)(x - a - 3) < 0,\ \ A = \langle 1; 3\rangle$

12. Určete všechny hodnoty parametru $b \in \mathbf{R}$ tak, aby soustava dvou nerovností

$$-6 < \frac{2x^2 + bx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$$

platila pro každé $x \in \mathbf{R}$.

13. Určete, kdy pro kořeny x_1, x_2 rovnice

$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$$

platí $x_1 < a < x_2$.

14. Určete, kdy pro kořeny x_1, x_2 rovnice

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.

§2: IRACIONÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE

Iracionálními nazýváme rovnice a nerovnice, ve kterých neznámá vystupuje v jednom či více výrazech pod odmocninou. Nejjednodušší příklady lze řešit metodou *substituce*, kdy odmocninu z výrazu s neznámou nahradíme novou neznámou.

Základní obrat v řešení iracionálních rovnic spočívá v odstranění zastoupené odmocniny z rovnice tím, že odmocninu nejprve *osamostatníme* na jedné straně a poté obě strany rovnice *umocníme*. Protože umocnění na sudý stupeň je v oboru **R** *důsledková úprava*, je při takovém postupu nutnou součástí řešení *zkouška* všech nalezených kořenů jejich dosazením do původní rovnice. U rovnice s více odmocninami je často nutné provést popsaný obrat vícekrát za sebou.

Nerovnice s osamostatněnou odmocninou zpravidla hned neumocňujeme, nýbrž nejdříve zjistíme definiční obor dané odmocniny a ten pak rozdělíme na části (většinou intervaly), na kterých je druhá strana nerovnice kladná, nulová či záporná. Teprve poté posuzujeme danou nerovnici v těchto jednotlivých intervalech, přitom k umocnění nerovnice přistupujeme pouze tehdy, mají-li obě strany nerovnice totéž znaménko (je-li záporné, napíšeme u umocněné nerovnice opačný znak nerovnosti.) Tím zaručíme, že provedené umocnění je ve zkoumaném dílčím oboru *ekvivalentní úprava*.

1. Řešte v **R** rovnice:

a) $\dfrac{x-4}{2+\sqrt{x}} = x - 8$

b) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}} + 3\cdot\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} = 4$

c) $\sqrt{7-x} = x - 1$

d) $2 + \sqrt{4+2x-x^2} = x$

e) $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x} = 1$

f) $2x^2 + \sqrt{2x^2-4x+12} = 4x + 8$

g) $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$

h) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$

i) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$

j) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$

k) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$

l) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

2. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnice:

a) $2\sqrt{x-1} < x$
b) $x + \sqrt{x+18} < 2$
c) $\sqrt{5-2x} \geq 6x - 1$
d) $\sqrt{x+78} - 6 > x$
e) $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$
f) $x + 4 > 2\sqrt{4 - x^2}$
g) $3 > x + 3 \cdot \sqrt{1 - x^2}$
h) $\sqrt{x^2+1} > x - 1$
i) $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x + 2$
j) $4 > x + \sqrt{x^2 - 2x}$
k) $\sqrt{6x - x^2 - 5} + 2x > 8$
l) $3 \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$
m) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$
n) $\dfrac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0$

§3: EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

• Mocnina a^x je definována v těchto případech
(i) $a \in \mathbf{R}$; $x \in \mathbf{N}$
(ii) $a \in \mathbf{R} - \{0\}$; $x \in \mathbf{Z}$
(iii) $a \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$; $x \in \mathbf{R}^+$
(iv) $a \in \mathbf{R}^+$; $x \in \mathbf{R}$
• Základní vlastnosti mocnin:

$$a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$
$$a > 0 \implies \big(a^x = a^y \iff (a = 1 \vee x = y)\big)$$

• Číslo $x = \log_a b$ definujeme vztahem $a^x = b$ pro všechna $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ a $b \in \mathbf{R}^+$. Místo $\log_{10}$ píšeme pouze log. Základní vlastnosti logaritmů jsou uvedeny ve cvičení 1.
• Při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic lze v mnoha případech užít vhodné substituce a převést je na základní rovnici $a^x = b$, resp. $\log_a x = b$, nebo na základní nerovnici $a^x > b$, resp. $\log_a x > b$. U takových nerovnic využíváme následující pravidla:
(i) je-li $a > 1$, pak

$$a^x < a^y \iff x < y; \qquad \log_a x < \log_a y \iff x < y$$

(ii) je-li $0 < a < 1$, pak

$$a^x < a^y \iff x > y; \qquad \log_a x < \log_a y \iff x > y$$

VÝSLEDKY

§1: Racionální funkce, rovnice a nerovnice

1.
a) $(x-1)(x+3)(x+7)$
b) $(x+2)(x-3)(x-5)$
c) $(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$
d) $x(x+5)(x^2+5x+10)$ [substituce $y=x^2+5x$]
e) $(x-3)(3x+2)^2$

2.
a) $x_1=2$, $x_2=2a$ ($x_1=x_2$ pro $a=1$)
b) $x=-1/2$ pro $a=0$, $x_1=x_2=-1$ pro $a=1$, $x\in\emptyset$ pro $a\in(1,\infty)$,
$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-a}}{a}$ pro $a\in(-\infty,0)\cup(0,1)$
c) $x_1=-2a$, $x_2=3a$ pro $a\neq 0$, $x\in\emptyset$ pro $a=0$
d) $x_1=a+b\neq x_2=\dfrac{2ab}{a+b}$ pro $a\neq\pm b$, $x=0$ pro $a=-b$,
$x=2a$ pro $a=b$

3.
Dva různé kořeny pro $a\in(-\infty,-2)\cup(1/2,3)\cup(3,\infty)$, oba kladné pro $a\in(-\infty,-2)\cup(1/2,6/7)\cup(3,\infty)$, jeden kladný a druhý záporný pro $a\in(6/7,3)$, jeden nulový a druhý kladný pro $a=6/7$.

4.
a) $40/9$
b) $-224/27$
c) -2
d) $\pm 4/3$
e) $-32/9$
f) $\pm 32/9$

5.
Například $x^2+8x+1=0$. [$x=\sqrt{15}-4$, takže $(x+4)^2=15$]

6.
$a=4$

7.
$k=3$ [diskriminant $D=16(k-2)$]

8.
a) $a=-3/4$, $a=0$, $a=2/9$
b) $a=-6$

9.
a) $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
b) $x_1=1$, $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

c) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$
d) $x = -1$
e) $x_1 = -2/3$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2$

10.
a) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (4, \infty)$
b) $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 5)$
c) $x \in (2/3, 2) \cup (2, \infty)$
d) $x \in (-1, 5)$ [čitatel je kladný]
e) $x \in (-2, 0) \cup (6, \infty)$
f) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1/2) \cup (1, \infty)$
g) $x \in (-\infty, -2) \cup \langle -5/4, -1) \cup (1, 5\rangle$
h) $x \in (-2, \infty)$
i) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
j) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup (-1, 0) \cup (0, 1\rangle \cup (3, \infty)$
k) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
l) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$
m) $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{7}) \cup (1, 3)$
n) $x \in (-1/5, 2/3) \cup (2/3, 5)$
o) $x \in \langle 2, 5\rangle$
p) $x \in \langle 1/2, 2\rangle$
q) $x \in (-\infty, -2/3\rangle \cup \langle 1/2, 2\rangle$
r) $x \in (-7, -2) \cup (3, 4)$
s) $x \in (0, \infty)$
t) $x \in \langle 1/3, 3\rangle$

11.
a) $a \in (-\infty, -6)$ [$a = -4$ nevyhovuje, takže $a + 4 < 0$ a $D < 0$]
b) $a \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, \infty)$ [buď $a = 1$, nebo $a^2 - 1 > 0$ a $D < 0$]
c) $a \in (5/3, \infty)$ [$a = 1$ nevyhovuje, takže $a - 1 > 0$ a $D < 0$]
d) $a \in (1, \infty)$ [Nemůže být ani $a < 0$, ani $a = 0$; pro $a > 0$ má vrchol příslušné paraboly kladnou x-ovou souřadnici $x_0 = 2/a$, takže zjistíme, kdy i jeho y-ová souřadnice je kladná.]
e) $a \in (0, 1/3)$ [Zjistíme, kdy daný trojčlen má zápornou hodnotu jak pro $x = 1$, tak pro $x = 3$, právě tehdy leží příslušná parabola pod osou x v celém intervalu $A = \langle 1, 3\rangle$.]

12.
$b \in (-2, 4)$ [Jmenovatel je kladný pro každé $x \in \mathbf{R}$.]

13.
$a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$ [Číslo a leží mezi kořeny dané rovnice $F(x) = 0$, právě když $F(a) < 0$ (tato nerovnost zaručuje i existenci kořenů).]

14.
$a \in (2, 5)$ [V případě $a - 2 > 0$ zjistíme, kdy pro trojčlen $F(x)$ z dané rovnice platí $F(2) < 0$ a $F(3) < 0$; v případě $a - 2 < 0$ kdy $F(2) > 0$ a $F(3) > 0$.]

§2: Iracionální rovnice a nerovnice

1.
a) $x = 9$
b) $x = -3/2$, $x = 1/2$
c) $x = 3$
d) $x = 3$
e) $x = 4$
f) $x = 1 + \sqrt{3}$, $x = 1 - \sqrt{3}$
g) $x = 10$
h) $x = 5$
i) $x = 8$
j) $x = 4$
k) $x = 1$
l) $x = -1$, $x = 9/16$

2.
a) $x \in \langle 1, 2) \cup (2, \infty)$
b) $x \in \langle -18, -2)$
c) $x \in (-\infty, 1/2\rangle$
d) $x \in \langle -78, 3)$
e) $x \in \langle 0, 2\rangle$
f) $x \in \langle -2, -8/5\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$
g) $x \in \langle -1, 0) \cup (3/5, 1\rangle$
h) $x \in (-\infty, \infty)$
i) $x \in (-\infty, -3\rangle$
j) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, 8/3)$
k) $x \in (3, 5\rangle$
l) $x \in (1, \infty)$
m) $x \in \langle 1, 3/2)$
n) $x \in \langle -20, 0) \cup (5, \infty)$

§3: Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

1.
a) $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y \Rightarrow$ vzorec
b) $a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a x} / a^{\log_a y} = x/y \Rightarrow$ vzorec
c) $a^{y \cdot \log_a x} = a^{(\log_a x) \cdot y} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y \Rightarrow$ vzorec
d) $a^{-\log_a x} = a^{0 - \log_a x} = a^0 / a^{\log_a x} = 1/x \Rightarrow$ vzorec
e) $x = a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \cdot \log_a x} \Rightarrow$ vzorec
f) Položte $x = b$ v e).
g) $b^{\log_a c} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a c} = a^{\log_a b \cdot \log_a c} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_a b} = c^{\log_a b}$