1. seminář

1. Z vlastností mocnin odvoďte vzorce a) – g):

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$ d) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

e) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ f) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

g) $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

2. Určete číslo m, je-li:

a) $m = 49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$ b) $m = \log\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}$

c) $m = 81^{\frac{1}{\log_5 3}}$ d) $m = \log_2(\frac{2}{3}) + \log_4(\frac{9}{4})$

e) $m = 3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$ f) $m = \dfrac{1}{\log_2 3} + \dfrac{1}{\log_4 9} - \dfrac{1}{\log_8 3}$

g) $m = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$

3. Pomocí čísel a, b, c vyjádřete číslo x:

a) $x = \log_{100} 40$; $a = \log_2 5$
b) $x = \log_6 16$; $a = \log_{12} 27$
c) $x = \log \frac{1}{300}$; $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 5$
d) $x = \log_{140} 63$; $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_7 2$

4. Zjednodušte výraz $V = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$.

na $\log_a b$

5. Dokažte následující implikace:

a) $a^2 + b^2 = 7ab \implies \log\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$

b) $a^2 + 9b^2 = 10ab \implies \log_3\dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$

6. Řešte v $\mathbf{R}$ následující rovnice:

a) $2^x + (0,5)^{2x-3} - 6 \cdot (0,5)^x = 1$ b) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

c) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

d) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ e) $|x|^{x^2-2x} = 1$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$ g) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$

h) $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$ i) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$

dělit 81^x

j) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$ k) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

2. seminář

7. Řešte v **R** následující rovnice:

a) $\log(\frac{9}{2} - x) = \log\frac{9}{2} - \log x$ b) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$

c) $\log 5 + \log(x + 10) = 1 - \log(2x - 1) + \log(21x - 20)$ → monotonie

d) $\log_4 \log_2 \log_3(2x - 1) = \frac{1}{2}$ e) $\log(20 - x) = \log^3 x$ $x = 10$

f) $\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ g) $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$ na $\log 2$

h) $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$

i) $x^{\log x} = 10^3 x^2$ na 10^0 j) $x^{\log_3 x + 1} = 9x^2$ 3^0

k) $16^{\log_x 2} = 8x$ 2^0 l) $15^{\log_5 3} \cdot x^{1 + \log_5(9x)} = 1$

m) $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$ 2^0

n) $\log\sqrt{1 + x} + 3\log\sqrt{1 - x} = \log\sqrt{1 - x^2} + 2$ upravit, násobit 2

o) $x^{\log_a x} = a^{\log_a^3 x}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$

8. Řešte v **R** nerovnice:

a) $\dfrac{1}{2^x - 1} > \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}$ ✓ b) $\dfrac{1}{2^x + 3} > \dfrac{1}{2^{x+2} - 1}$

c) $\dfrac{1}{3^x + 5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$ ✓ d) $5^{2x+1} > 5^x + 4$ ✓

dělit e) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

dělit f) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$ g) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$ 8^0 řešení

h) $\log_{0,7} \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x} < 0$ i) $\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 0$

j) $\log_{0,1}(x^2 + 1) < \log_{0,1}(2x - 5)$ $\boxed{\text{k) } \log_x(x + 2) > 2}$ $\log_x(x+2) > \log_x x^2$

l) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$ → m) $\log_x |x^2 - 1| > 0$ $x \in (0,1)$

n) $\log_x \sqrt{20 - x} > 1$ o) $\log_x(x + 1) > \log_{\frac{1}{x}}(2 - x)$ $x \in (1,\infty)$

p) $\log_{x^2}(2 + x) < 1$ q) $\log_{|x-1|} 0,5 < 0,5$

r) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$

s) $\log_{(x-2)}(2x - 3) > \log_{(x-2)}(24 - 6x)$

t) $\sqrt{\log_2 \dfrac{3 - 2x}{1 - x}} > 1$ → monotonie

u) $x^{\log_2 x} > 2$ v) $2^x \geq 11 - x$

w) $(x^2 + x + 1)^x < 1$ x) $\dfrac{1}{\log_a x} > 1$, kde $a > 1$

y) $\log_a x > 6\log_x a - 1$, kde $a \in (0, 1)$

§4: GONIOMETRICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

Goniometrické funkce *sinus* a *kosinus* s reálným argumentem definujeme jako souřadnice bodů na jednotkové kružnici se středem v počátku kartézské souřadné soustavy. Dále definujeme:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi\}$$

Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi jsou uvedeny v následujícím přehledu:

(i) $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$

(ii) $\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$

$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x$

(iii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$

(iv) $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$

$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$

$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$

(v) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$

(vi) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

(vii) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

(viii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(ix) $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

(x) $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

1. seminář

1. Za předpokladu, že výrazy na obou stranách identit mají smysl, dokažte:

a) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x$

b) $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ c) $(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)\sin 2x = \operatorname{tg} 2x$

d) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}$ e) $\frac{\operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg}\varphi} = \sin 2\varphi$

f) $\frac{\operatorname{tg} 3z}{\operatorname{tg} z} = \frac{3-\operatorname{tg}^2 z}{1-3\operatorname{tg}^2 z}$

g) $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \cos(\pi-\alpha) = 1$

h) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ i) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$

j) $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \frac{1}{4}(3 + \cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha$

k) $\sin\alpha\cos(\beta-\alpha) + \cos\alpha\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta$

l) $\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta)$

m) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sin 2\alpha$

n) $1 + \cos 2x\cos 2y = 2\sin^2 x\sin^2 y + 2\cos^2 x\cos^2 y$

o) $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$

p) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \sin 3x$

q) $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 0$

r) $\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° = \cos 7°$

s) $\sin 50° \sin 24° (\operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 66°) + \sin 74° = 2 \cos 16°$

2. Vypočtěte bez tabulek a kalkulaček:

a) $\cos 15°$ b) $\operatorname{tg} 75°$

c) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40°$

d) $\sin 160° \cos 110° + \sin 250° \cos 340° + \operatorname{tg} 110° \operatorname{tg} 340°$

e) $\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$

3. Pomocí čísla u určete číslo z:

a) $z = \sin x;\ u = \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};\ x \in (0, \pi)$

b) $z = \operatorname{tg} x;\ u = \cos x = -\frac{3}{5};\ x \in (\pi, 2\pi)$

c) $z = \sin 2x;\ u = \operatorname{cotg} x = -2$

d) $z = \dfrac{5 \sin x + 7 \cos x}{6 \cos x - 3 \sin x};\ u = \operatorname{tg} x = \frac{4}{15}$

e) $z = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);\ u = \sin \alpha = -\frac{12}{13};\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

f) $z = \dfrac{5}{6 + 7 \sin 2\alpha};\ u = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$

4. Zjednodušte dané výrazy:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}(180° - \alpha) \cos(180° - \alpha) \operatorname{tg}(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha) \operatorname{cotg}(90° - \alpha) \operatorname{tg}(90° + \alpha)}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ c) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$

d) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha (\operatorname{cotg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha)}$

e) $4 \cos^4 \alpha - 2 \cos 2\alpha - 3 \sin^2 2\alpha - 2 \cos 4\alpha$

5. Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníka ABC platí:

a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

b) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$

c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$

d) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

2. seminář

6. Řešte v **R** rovnice:

a) $\sin 2x = \sin x$
b) $2\cos x \cos 2x = \cos x$
c) $\cos 3x + \sin 3x = 0$
d) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$
e) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$
f) $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$
g) $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$; $x \in \langle \pi, 3\pi \rangle$
h) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$
i) $\cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1$
j) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$
k) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$
l) $\sin x \cos x = \cos^4 x + \sin^4 x$
m) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$
n) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$
o) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$
p) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$
q) $\cos 3x + \sin 5x = 0$
r) $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$
s) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$
t) $8\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 6x}{\sin x}$
u) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$
v) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = 1$
w) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$
x) $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$
y) $|\cos x| = \cos x - 2\sin x$
z) $\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$

7. V množině A řešte nerovnice s neznámou x:

a) $\sin x > \frac{1}{2}$; $A = \mathbf{R}$
b) $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$; $A = \mathbf{R}$
c) $\sin x < \cos x$; $A = \mathbf{R}$
d) $\sin 3x < \sin x$; $A = \langle -\pi, \pi \rangle$
e) $\sin 2x + \sin x \leq 0$; $A = \langle 0, 2\pi \rangle$
f) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$; $A = \mathbf{R}$
g) $\sin x + \cos x < \dfrac{1}{\cos x}$; $A = \langle -\pi, \pi \rangle$
h) $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$; $A = \langle 0, 2\pi \rangle$
i) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$; $A = \langle 0, 2\pi \rangle$
j) $\sin \dfrac{\pi}{x} > 0$; $A = \mathbf{R}$
k) $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$; $A = \mathbf{R}$
l) $\cos^2 2x + \cos^2 x \leq 1$; $A = \mathbf{R}$
m) $\sin 3x > 4\sin x \cos 2x$; $A = \langle 0, 2\pi \rangle$
n) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$; $A = \left\langle \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2} \right\rangle$

$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x > 1 - \cos x$

$\sin x - \sin x \cos x > \cos x - \cos^2 x$

převeď na sin x

převeď na sin x

2.
a) $m = 49/5$
b) $m = -1$
c) $m = 625$
d) $m = 0$
e) $m = 20$
f) $m = -\log_3 2$
g) $m = 24$
3.
a) $x = \dfrac{a+3}{2(a+1)}$
b) $x = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$
c) $x = -(2a+b+2c)$
d) $x = \dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$
4.
$V = \log_a b$
5.
a) $a^2 + b^2 = 7ab$ upravte na $(a+b)^2 = 9ab$ a pak logaritmujte.
b) $a^2 + 9b^2 = 10ab$ upravte na $(a+3b)^2 = 16ab$ a pak logaritmujte.
6.
a) $x_1 = 1$, $x_2 = \log_2 \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$
b) $x = 2$
c) $x = \dfrac{\log 13 - \log 31}{\log 5 - \log 3}$
d) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$
e) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$
f) $x = 3$
g) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ [Uvažte, že $(2-\sqrt{3})^{-1} = 2+\sqrt{3}$.]
h) $x = 1/2$ [Po vydělení 81^x položte $y = (4/9)^x$.]
i) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ [Po vydělení 4^x položte $y = (3/2)^x$.]
j) $x = 1$ [Levá strana je klesající v x, pravá strana je rostoucí.]
k) $x = 0$ [Zvolte substituci $y = (3/2)^x$, nebo uvažte, že po vydělení mocninou 9^x bude levá strana klesající a pravá konstantní.]
7.
a) $x_1 = 3/2$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
c) $x_1 = 3/2$, $x_2 = 10$
d) $x = 41$
e) $x = 10$ [Uvažte monotonii každé ze stran rovnice na intervalu $(0, 20)$.]
f) $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

g) $x = 4$

h) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $x_1 = 1/10$, $x_2 = 1\,000$

j) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 9$

k) $x_1 = 1/16$, $x_2 = 2$

l) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/15$ [Zlogaritmujte obě strany rovnice při základu 5 a zvolte substituci $y = \log_5 x$.]

m) $x_1 = 7$, $x_2 = 14$ [Zlogaritmujte obě strany rovnice při základu 2 a zvolte substituci $y = \log_2 x$.]

n) $x \in \emptyset$

o) $x_1 = 1$, $x_2 = a$

8.

a) $x \in (0, 2 - \log_2 3) \cup (1, \infty)$

b) $x \in (-\infty, -2) \cup (2 - \log_2 3, \infty)$

c) $x \in (-1, 1\rangle$

d) $x \in (0, \infty)$

e) $x \in (0, \infty)$

f) $x \in (-\infty, 0)$ [Po vydělení 27^x položte $y = (2/3)^x$.]

g) $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$

h) $x \in (0, 2) \cup (3, \infty)$

i) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

j) $x \in (5/2, \infty)$

k) $x \in (1, 2)$

l) $x \in (1, 3)$

m) $x \in (0, 1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

n) $x \in (1, 4)$

o) $1 < x < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

p) $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$

q) $x \in (-\infty, 0) \cup (3/4, 1) \cup (1, 5/4) \cup (2, \infty)$

r) $x \in (1, \infty)$

s) $x \in (2, 3) \cup (27/8, 4)$

t) $x \in (-\infty, 1)$

u) $x \in (0, 1/2) \cup (2, \infty)$

v) $x \in (3, \infty)$ [Využijte monotonie každé z obou stran.]

w) $x \in (-\infty, -1)$

x) $x \in (1, a)$

y) $x \in (0, a^2) \cup (1, a^{-3})$

§4: Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

2.
a) $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})/4$ [$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$]
b) $2+\sqrt{3}$
c) $\sqrt{3}$ [Využijte: $\operatorname{tg} 60° = \operatorname{tg}(20° + 40°)$]
d) 0
e) 0 [Využijte třikrát: $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$]

3.
a) $\sqrt{5}/5$
b) $4/3$
c) $-4/5$
d) $125/78$
e) $(5-12\sqrt{3})/26$
f) $65/113$

4.
a) -1
b) $\operatorname{tg}\alpha$
c) $\operatorname{tg} 5\alpha$
d) $1/4$
e) 0

5.
Obecně lze postupovat takto: dosadíme $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ do obou stran a dokážeme vzniklou identitu v nezávislých proměnných α, β.

6.
V zápisech kořenů značí k libovolné celé číslo.
a) $k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$
b) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi$
c) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$
e) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
f) $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ [Užijte vzorec pro rozdíl hodnot sinu.]
g) $2\pi,\ \frac{5\pi}{2}$
h) $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$
i) $2k\pi$ [Uvažte, že $L \leq 1$.]
j) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ [Upravte na rovnici $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.]

k) $2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi$

l) $\frac{\pi}{4}+k\pi$ [K oběma stranám přičtěte $2\sin^2 x\cos^2 x$ a užijte substituci $y=\sin 2x$.]

m) $\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi$ [Užijte vzorec pro součet hodnot sinu.]

n) $\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi$ [$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$]

o) $\frac{k\pi}{4}$ [Užijte vzorce pro součin hodnot sinu a rozdíl hodnot kosinu.]

p) $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$

q) $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}+k\pi$ [Přepište $\cos 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ a užijte vzorec pro součet hodnot sinu.]

r) $\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{11\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ [Pravá strana je $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, dále užijte vzorec pro rozdíl hodnot kosinu.]

s) $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$ [Odvoďte $\sin 2x=\pm\cos 3x$ a dále postupujte jako v q).]

t) $\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}$

u) $k\pi,\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi$

v) $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$ [Uvažte, že $\operatorname{tg}(3x+x)$ nemá smysl.]

w) $\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+k\pi$

x) $2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ [Upravte do tvaru $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.]

y) $2k\pi,\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi$

z) $\frac{3\pi}{4}+k\pi$ [Užijte substituci $y=\sin x+\cos x$, pak $y^2=1+\sin 2x$].

7.

Obor pravdivosti je sjednocením uvedených intervalů, k značí libovolné celé číslo.

a) $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$

b) $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$

c) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

d) $\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right),\ \left(-\frac{\pi}{4},0\right),\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

e) $\left\langle \frac{2\pi}{3}, \pi \right\rangle$, $\left\langle \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\rangle$

f) $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

g) $\left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

h) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

i) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

j) $(1, +\infty)$, $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ pro $k \neq 0$

k) $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$

l) $\left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

m) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

n) $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}\right)$

§5: Komplexní čísla

1.

$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) =$
$= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) = (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$,
$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] =$
$= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) = (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$.

2.

a) $-1+3\mathrm{i}$
b) $1-\mathrm{i}$
c) -1
d) $-48\mathrm{i}/25$
e) 0
f) $1+\mathrm{i}\sqrt{1-a}$

3.

a) $a=1$, $b=2$
b) $a=2$, $b=-3$

4.

a) 0
b) $13/10$
c) 5^{99}
d) 2 ($z_1 \neq 0$ nebo $z_2 \neq 0$)