1. Vnitrosemestrální práce 29.10.2013, skupina A

1.1. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici:

$$||x-2|-x+3|<5.$$

Řešení. Rozdělíme nejdřív na dva případy:

- Pro $x \geq 2$ má nerovnost tvar $|x-2-x+3| = 1 < 5$ a to je splněno vždy.
- Pro $x < 2$ má nerovnost tvar $|-x+2-x+3| = |-2x+5| < 5$. Protože $-2x+5 > -2\cdot 2+5 = 1 > 0$, je tato nerovnost ekvivalentní nerovnosti $-2x+5 < 5$, která je zřejmě splněna pro $x > 0$.

Dohromady je tedy nerovnost splněna pro $x \in \langle 2, \infty) \cup (0,2) = (0,\infty)$.

1.2. Napište nějaký kvadratický polynom s celočíselnými koeficienty, jehož kořenem je číslo

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Řešení. Usměrníme zlomek tak, aby nebylo iracionální číslo ve jmenovateli. Kořen x je pak roven

$$x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{2+3-2\sqrt{2}\sqrt{3}}{2-3} = -5+2\sqrt{6},$$

neboli x splňuje $x+5 = 2\sqrt{6}$. Umocněním na druhou dostaneme $(x+5)^2 = 4\cdot 6 = 24$ a úpravou pak $x^2+10x+1 = 0$. Číslo x ze zadání je tedy kořenem polynomu $x^2+10x+1$.

1.3. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici:

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

Řešení. Vytknutím 2^{x+2} respektive 5^{x+1} dostaneme ekvivalentní nerovnici $2^{x+2}(1-2-2^2) > 5^{x+1}(1-5)$, neboli $-5\cdot 2^{x+2} > -4\cdot 5^{x+1}$. Vydělením číslem 20 pak máme $5^x > 2^x$, neboli $(\frac{5}{2})^x > 1$. Z průběhu exponenciální funkce plyne, že tato nerovnice je splněna pro $x > 0$.

1.4. Pomocí vlastností exponenciální funkce (vypište kdy a kterou používáte) a definice logaritmu dokažte, že

$$\log_a(x^y) = y\log_a x.$$

Řešení. Vlastnost exponenciální funkce, kterou použijeme je $(a^b)^c = a^{bc}$. Dosadíme-li $c = y$, $b = \log_a x$, pak nám tato vlastnost dává $(a^{\log_a x})^y = a^{y\log_a x}$. Podle definice logaritmu je levá strana je rovna x^y, tj. máme $x^y = a^{y\log_a x}$. Když pak celou rovnici zlogaritmujeme, pak opět z definice logaritmu je $\log_a(x^y) = y\log_a x$.

1.5. Načrtněte graf funkce $f(x) = |\log_2|x|| - 1$, určete její definiční obor a jeho podmnožinu, na které je funkce kladná.

Řešení. Logaritmus je definovaný pro kladný argument. V našem případě je v argumentu absolutní hodnota z x, a proto hned vidíme, že funkce je definována pro všechna reálná čísla kromě nuly. Navíc je vidět, že nabývá stejné hodnoty pro x a pro $-x$. Jinými slovy, funkce je sudá a její graf je souměrný podle osy y. Venkovní absolutní hodnota překlopí zápornou část pro $x \in (-1,0)\cup(0,1)$ do plusu a pak se vše posune o jedničku dolů podél osy y. Průsečíky s osou x pak budou tam, ke před posunutím byla hodnota 1, tj. v bodech $\pm\frac{1}{2}$ a ± 2. Funkce bude kladná pro $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$.

1.6. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$$-\sin 2x \cos x - \cos^2 x + 3 \sin x = 0.$$

Řešení. Využitím vztahu $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ dostaneme ekvivalentní rovnici

$$-2 \sin x \cos^2 x - \cos^2 x + 3 \sin x = 0.$$

Vidíme, že $\cos x$ vystupuje jen v sudé mocnině, a proto ho můžeme jednoduše nahradit sinem pomocí trigonometrické jedničky, tj. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Pak máme

$$-2 \sin x(1 - \sin^2 x)x - (1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 2 \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Substitucí $t = \sin x$ dostáváme polynomiální rovnici $2t^3 + t^2 + t - 1 = 0$. Jinými slovy, potřebujeme určit kořeny tohoto polynomu. Podle Einsteinova kritéria jsou možné racionální kořeny $t \in \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$. Ty vyzkoušíme Hornerovým schématem a zjistíme, že vyhovuje $t = \frac{1}{2}$. Vydělením příslušným kořenovým faktorem pak zjistíme $2t^3 + t^2 + t - 1 = 2(t - \frac{1}{2})(t^2 + t + 1)$. Diskriminant polynomu $t^2 + t + 1$ je $1 - 4 = -3 < 0$, a proto žádné jiné reálné kořeny nejsou. Jediné řešení je tedy $\sin x = \frac{1}{2}$, takže $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.