1. Vnitrosemestrální práce 29.10.2013, skupina B

1.1. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici:

$$|2x - |3 - x| - 2| \leq 4.$$

Řešení. Rozdělíme nejdřív na dva případy:

- Pro $x \leq 3$ má nerovnost tvar $|2x - 3 + x - 2| = |3x - 5| \leq 4$. Opět zvážíme dvě možnosti.
  - Pro $x \geq \frac{5}{3}$ máme $3x - 5 \leq 4$, tj. $x \leq 3$. Odtud dostáváme interval $x \in \langle \frac{5}{3}, 3 \rangle$.
  - Pro $x < \frac{5}{3}$ máme $-3x + 5 \leq 4$, tj. $x \geq \frac{1}{3}$. Odtud $x \in \langle \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.
- Pro $x > 3$ má nerovnost tvar $|2x + 3 - x - 2| = |x + 1| \leq 4$. Zřejmě ale zároveň $x + 1 > 4$, a proto v tomto případě žádné řešení není.

Dohromady je tedy nerovnost splněna pro $x \in \langle \frac{1}{3}, 3 \rangle$.

1.2. Napište nějaký kvadratický polynom s celočíselnými koeficienty, jehož kořenem je číslo

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}.$$

Řešení. Usměrníme zlomek tak, aby nebylo iracionální číslo ve jmenovateli. Kořen x je pak roven

$$x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{7})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})} = \frac{3 + 7 - 2\sqrt{3}\sqrt{7}}{3 - 7} = \frac{10 - 2\sqrt{21}}{-4},$$

neboli x splňuje $4x + 10 = 2\sqrt{21}$. Vydělením dvěma a umocněním na druhou dostaneme $(2x + 5)^2 = 21$ a úpravou pak $4x^2 + 20x + 4 = 0$. Číslo x ze zadání je tedy kořenem polynomu $x^2 + 5x + 1$.

1.3. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici:

$$3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} > 2 \cdot 7^{x-1} + 7^x$$

Řešení. Vytknutím 3^x respektive 7^{x-1} dostaneme ekvivalentní nerovnici $3^x(1 - 3 + 3^2) > 7^{x-1}(2 + 7)$, neboli $7 \cdot 3^x > 9 \cdot 7^{x-1}$. Vydělením číslem 63 pak máme $3^{x-2} > 7^{x-2}$, neboli $(\frac{7}{3})^{x-2} < 1$. Z průběhu exponenciální funkce plyne, že tato nerovnice je splněna pro $x < 2$.

1.4. Z vzorce pro součet sinů $\sin x + \sin y$ odvoďte pomocí základních vlastností goniometrických funkcí (napište kdy a které používáte) vzorec pro rozdíl cosinů $\cos x - \cos y$.

Řešení. Vzorec pro součet sinů má tvar $\sin x + \sin y = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$. Z Využijeme toho, že $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ a lichosti funkce $\sin x$. Pak dostáváme

$$\cos x - \cos y = \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) - \sin(\tfrac{\pi}{2} - y) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) + \sin(-\tfrac{\pi}{2} + y)$$
$$= 2\sin(\tfrac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2} + y}{2})\cos(\tfrac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} - y}{2}) = 2\sin(\tfrac{-x+y}{2})\cos(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{x+y}{2}).$$

S využitím stejných vlastností jako předtím tak máme

$$\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2}).$$

1.5. Načrtněte graf funkce $f(x) = |\log_{\frac{1}{2}} |x|| - 1$, určete její definiční obor a jeho podmnožinu, na které je funkce kladná.

Řešení. Logaritmus je definovaný pro kladný argument. V našem případě je v argumentu absolutní hodnota z x, a proto hned vidíme, že funkce je definována pro všechna reálná čísla kromě nuly. Navíc je vidět, že nabývá stejné hodnoty pro x a pro $-x$. Jinými slovy, funkce je sudá a její graf je souměrný podle osy y. Venkovní absolutní hodnota překlopí zápornou část pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ do plusu a pak se vše posune o jedničku dolů podél osy y. Průsečíky s osou x pak budou tam, ke před posunutím byla hodnota 1, tj. v bodech $\pm\frac{1}{2}$ a ± 2. Funkce bude kladná pro $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$.

1.6. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$$\sin 2x \sin x - 2\cos^2 x + 2 = 0.$$

Řešení. Využitím vztahu $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ dostaneme ekvivalentní rovnici

$$2\sin^2 x \cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0.$$

Vidíme, že $\sin x$ vystupuje jen v sudé mocnině, a proto ho můžeme jednoduše nahradit cosinem pomocí trigonometrické jedničky, tj. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Pak máme po vydělení dvěma

$$(1 - \cos^2 x)\cos x - \cos^2 x + 1 = -\cos^3 x - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

Substitucí $t = \cos x$ dostáváme polynomiální rovnici $-t^3 - t^2 + t + 1 = 0$. Jinými slovy, potřebujeme určit kořeny tohoto polynomu. Podle Einsteinova kritéria jsou možné racionální kořeny $t \in \{\pm 1\}$. Ty vyzkoušíme Hornerovým schématem a zjistíme, že vyhovuje $t = 1$. Vydělením příslušným kořenovým faktorem pak zjistíme $-t^3 - t^2 + t + 1 = -(t-1)(t+1)^2$. Řešení jsou tedy právě ta x, která splňují $\cos x = \pm 1$, takže $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.