1. Vnitrosemestrální práce 10.12. 2013, skupina A

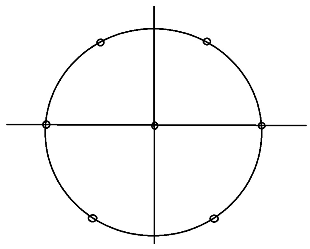
1.1. Určete absolutní hodnotu komplexního čísla z daného rovnicí

$$(1 + i\sqrt{3})z = 1 - i\sqrt{3}.$$

Řešení. $|z| = 1$

1.2. V $\mathbb{C}$ vyřešte rovnici $\bar{z} = z^5$. Všechna řešení napište v algebraickém i goniometrickém tvaru a zobrazte v komplexní rovině.

Řešení. $|z|^2 = z^6 = |z|^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi)$. Odud $z = 0$ nebo $|z| = 1$ a pak $6\varphi = 2k\pi$, tj. $\varphi = \frac{1}{3}k\pi$. Algebraický tvar: $0, 1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



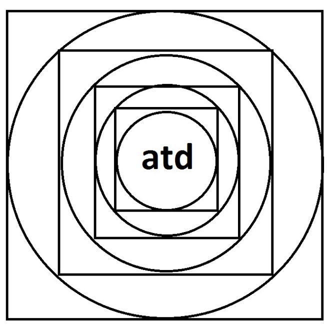
1.3. Existuje takový konvexní mnohoúhelník, že jeden jeho vnitřní úhel je 40° a každý další je o 20° větší než ten předchozí?

Řešení. Pro n-úhelník jde o aritmetickou posloupnost, pro kterou má být součet prvních n členů roven $(n-2).180^\circ$. Protože pro takový součet platí $s_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \cdots + a_1 + (n-1)d = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, dostáváme kvadratickou rovnici

$$40n + \frac{20n(n-1)}{2} = 180(n-2).$$

Ta má celočíselná řešení $n = 3$ a $n = 12$. Zadání tedy vyhovuje trojúhelník s úhly $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Tento trojúhelník je jediný konvexní mnohoúhelník vyhovující zadání, protože v dvanáctiúhelníku bude už devátý úhel větší než 180°.

1.4. Určete součet obsahů všech kruhů následujícího fraktálu. Délka hrany největšího čtverce je 1.



Řešení. Jde o geometrickou posloupnost. Každý další kruh má průměr $\frac{1}{\sqrt{2}}$-násobek předchozího. Obsah každého dalšího kruhu je tedy vždy poloviční, tj. $q = \frac{1}{2}$ a celkový obsah je $S = S_1(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots) = S_1 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2S_1$, kde $S_1 = \frac{1}{4}\pi$ je obsah největšího kruhu. $S = \frac{\pi}{2}$.

1.5. Určete největší člen v binomickém rozvoji čísla $(\sqrt{3}+1)^{20}$.

Řešení. Nerovnost mezi k-tým a následujícím členem má tvar $\binom{20}{k}(\sqrt{3})^k < \binom{20}{k+1}(\sqrt{3})^{k+1}$ je ekvivalentní nerovnici $\frac{k+1}{20-k} < \sqrt{3}$. Odtud $k < \frac{20\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \approx 12,3$. Tedy dvanáctý člen je ještě pořád menší než třináctý, pak už nerovnost neplatí. Maximální je 13. člen.

1.6. Kolik je možných pořadí na fotce volejbalového týmu (6 hráčů), když Bambík chce stát vždy vedle Goaulda a naopak Kamil nechce nikdy stát vedle Goaulda?

Řešení. B a G můžeme považovat za jednoho, přitom můžou stát v pořadí BG nebo GB, tj. 2.5! možností. Musíme však odečíst případy, kdy vedle G je K, tj. v prvním případě situace BGK, ve druhém KGB. Tyto trojice pak můžeme považovat za jednoho, a proto je takových pořadí 2.4!. Dohromady je $2.(5!-4!) = 192$ možností.