1. Vnitrosemestrální práce 10.12. 2013, skupina B

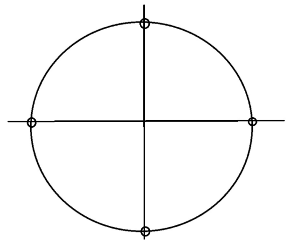
1.1. Určete absolutní hodnotu komplexního čísla z daného rovnicí

$$(2+i)z = (1-i)(1-2i).$$

Řešení. $|z| = \sqrt{2}$

1.2. V $\mathbb{C}$ vyřešte rovnici $1 = \bar{z}z^5$. Všechna řešení napište v algebraickém i goniometrickém tvaru a zobrazte v komplexní rovině.

Řešení. $1 = \bar{z}z^5 = |z|^2 z^4 = |z|^6(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)$. Odtud $|z| = 1$ a $4\varphi = 2k\pi$, tj. $\varphi = \frac{1}{2}k\pi$. Algebraický tvar řěšení je $0, i, -1, -i$.



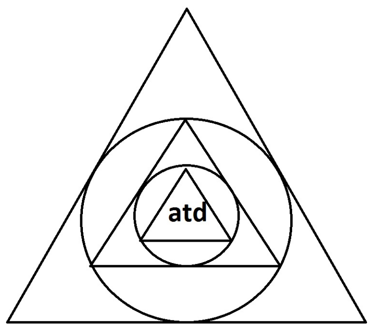
1.3. Existuje takový konvexní mnohoúhelník, že jeden jeho vnitřní úhel je 65° a každý další je o 13° větší než ten předchozí?

Řešení. Pro n-úhelník jde o aritmetickou posloupnost, pro kterou má být součet prvních n členů roven $(n-2).180^\circ$. Protože pro takový součet platí $s_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \cdots + a_1 + (n-1)d = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, dostáváme kvadratickou rovnici

$$65n + \frac{13n(n-1)}{2} = 180(n-2).$$

Ta má jediné celočíselné řešení $n = 15$. Už desátý úhel bude ale větší než 180°, a proto takový konvexní mnohoúhelník neexistuje.

1.4. Určete součet obsahů všech trojúhelníků následujícího fraktálu. Délka hrany největšího trojúhelníka je 1.



Řešení. Jde o geometrickou posloupnost. Každý další trojúhelník je poloviční, tj. jeho obsah je čtvrtina předchozího. Kvocient je tedy $q = \frac{1}{4}$ a celkový obsah je $S = S_1(1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots) = S_1 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S_1$, kde $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ je obsah největšího trojúhelníka. $S = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.5. Určete největší člen v binomickém rozvoji čísla $(\sqrt{5}+1)^{30}$.

Řešení. Nerovnost mezi k-tým a následujícím členem má tvar $\binom{30}{k}(\sqrt{5})^k < \binom{30}{k+1}(\sqrt{5})^{k+1}$ je ekvivalentní nerovnici $\frac{k+1}{30-k} < \sqrt{5}$. Odtud $k < \frac{30\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 20,4$. Tedy dvacátý člen je ještě pořád menší než dvacátý prvý, pak už nerovnost neplatí. Maximální je 21. člen.

1.6. Určete počet všech trojciferných čísel složených z právě dvou různých cifer.

Řešení. Napřed spočítáme čísla bez ohledu na to, jestli je na prvním místě nula nebo není. Vybereme nejprv 2 cifry A a B, které budeme používat, tj $\binom{10}{2}$ možností, a pro každý takový výběr může být na každém místě buď A anebo B, musíme však odečíst 2 případy - AAAA a BBBB. To znamená, že je $\binom{10}{2}(2^3-2)$ takových čísel. Teď odečteme ty začínající nulou. Druhá cifra A může být libovolaná, tj. $\binom{9}{1}=9$ možností, a na každém s třech míst může být buď 0 nebo A, musíme ale odečíst případ 0000, tj. $\binom{9}{1}(2^2-1)$ možností. Dohromady je $\binom{10}{2}(2^3-2)-\binom{9}{1}(2^2-1)=270-27=243$ čísel vyhovujících zadání.