1 Opakování

1.1 Hornerovo schéma

Rozložte polynomy pomocí Hornerova schématu:

1. $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 32x^2 - 54x + 36 =?$

$$\left[(x-2)(x-3)(x+3)(x^2-2x+2)\right]$$

2. $x^5 - 19x^4 + 130x^3 - 400x^2 + 544x - 256 =?$

$$\left[(x-1)(x-2)(x-4)^2(x-8)\right]$$

3. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 =?$

$$\left[(x-1)^2(x-2)^2\right]$$

1.2 Dělení polynomu polynomem

Napište racionální lomenou funkci jako součet polynomu a ryze lomené fukce (dělte polynomy):

1. $(x^5 - x^4 + 6x^2 + x - 2) \div (x^4 - 2x^3)$

$$\left[(x+1) + \frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}\right]$$

2. $(x^4 + 6x^2 + x - 2) \div (x^4 - 2x^3)$

$$\left[1 + \frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}\right]$$

3. $(2x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1) \div (x^2 - 2x + 4)$

$$\left[2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x+53}{x^2-2x+4}\right]$$

1.3 Rozklad na parciální zlomky

Rozložte ryze lomenné funkce na parciální zlomky:

1. $\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2}$

$$\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x^2-x+2}\right]$$

2. $\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}$

$$\left[\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x}\right]$$

3. $\frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

$$\left[\frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{(x-1)^2}\right]$$

4. $\frac{x^7+2x^6+3x^5+5x^4-2x^3+3x^2+1}{x^5+2x^3+x}$

$$\left[x^2 + 2x - 1 + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x}\right]$$

1.4 Limita posloupnosti

Spočtěte limity posloupností:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

   $[0]$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1}$

   $[\infty]$

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}}$

   $[0]$

4. $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n$

   $[0]$

5. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

   $[0]$

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2(1-4n)(n+1)}{2n^4-100n^3}$

   $[-2]$

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n \cdot n}{n+2}$

   [neexistuje]

8. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n})$

   $[1]$

9. $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a})$

   $\left[\frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$

1.5 Limita funkce

Spočtěte limity funkcí:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

   $[-\frac{1}{2}]$

2. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3})$

   $[\frac{5}{2}]$

3. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}$

$\left[\frac{1}{4}\right]$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$
(Rada: Využijte vzoreček $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.)

$[-3]$

5. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x), a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

$\left[\frac{a+b}{2}\right]$

1.6 Taylorův vzorec

Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $[x_0, y_0]$ funkcí:

1. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $[x_0,y_0]=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$\left[T_2(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}((x-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2}))-\frac{\sqrt{2}}{4}((x-\frac{1}{2})^2+2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})^2)\right]$

2. $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$, $[x_0,y_0]=[0,0]$

$\left[T_2(x,y)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right]$

3. $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $[x_0,y_0]=[0,1]$

$[T_2(x,y)=x-x(y-1)]$

4. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $[x_0,y_0]=[1,1]$

$\left[T_2(x,y)=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}((x-1)+(y-1))-\frac{1}{2}(x-1)(y-1)\right]$

5. $f(x,y)=\sin x\sin y$, $[x_0,y_0]=[0,0]$

$[T_2(x,y)=xy]$

6. $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$, $[x_0,y_0,z_0]=[1,1,1]$

$[T_2(x,y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)]$

Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně určete přibližné funkční hodnoty:

1. $1,04^{2,02}$

$[1,0824, [x_0,y_0]=[1,2]]$

2. $\sqrt{(2,98)^2+(4,05)^2}$

$[5,0281, [x_0,y_0]=[3,4]]$

3. $\sin 29^o\cdot\tan 46^o$

$\left[\frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\frac{\Pi}{180}+\frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-1}{2}\frac{\Pi^2}{2\cdot 180^2}\right]$

2 Nekonečné číselné řady

2.1 Součet číselné řady

Určete součet těchto řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

   $\left[\frac{23}{90}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

   $\left[\frac{1}{3}\right]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

   $\left[1-\sqrt{2}\right]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$

   $\left[-\frac{3}{5}\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{3^n}$

   $\left[-\frac{2}{5}\right]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

   $[diverguje]$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

   $[2]$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
   (Rada: Postupujte podobně jako v předchozím příkladě, jen spočtěte $s_n - \frac{s_n}{3}$.)

   $\left[\frac{3}{4}\right]$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}})$

   $[5]$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-3^n}{4^n}$

    $[-2]$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 4^n-3^{n+1}}{6^n}$

    $[9]$

Vyjádřete ve tvaru zlomku:

1. $0,53\overline{9}$

$\left[\frac{27}{50}\right]$

2. $-1,71\overline{5}$

$\left[\frac{-566}{330}\right]$

Můžou následující řady konvergovat?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan n}$

$[ne]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

$[ne]$

2.2 Číselné řady s nezápornými členy

Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos(\frac{n}{n+1})$

[D (např. limitní srovnávací - s $\frac{1}{n}$)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

[K (např. limitní podílové)]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

[K (např. srovnávací - s $\frac{1}{n^2}$)]

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

[K (např. limitní odmocninové)]

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

[D (např. nutná podmínka konvergence)]

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

[D (např. limitní podílové)]

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[D (např. srovnávací - s $\frac{1}{n}$)]

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$

[K (např. limitní srovnávací - s $\frac{1}{n^2}$)]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n}(\sqrt{3})^n}$

[K (např. limitní podílové)]

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

[D (např. srovnávací s $\frac{1}{n}$)]

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

[D (např. limitní srovnávací - s $\frac{1}{n}$)]

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{\arctan n})^n$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

[K pro $a < \frac{\Pi}{2}$, D pro $a > \frac{\Pi}{2}$ (např. limitní odmocninové)]

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

[D pro $a \leq 1$, K pro $a > 1$ (např. limitní podílové)]

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

[K (např. limitní podílové)]

2.3 Alternující číselné řady

Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

$[K]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

$[D]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\ln n}$

$[K]$

2.4 Absolutní konvergence číselných řad

Rozhodněte o absolutní a neabsolutní konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

   [KN]

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

   [KN]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln^n 10}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   [KA]

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n}{6n-5}$

   [D]

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

   [KN]

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

   [D]

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\frac{n}{2n-1})^n$

   [KA]

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n+1}}{\sqrt{4n+1}}$

   [D]

Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ řady konvergují absolutně, neabsolutně, divergují:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)^n}{n}$

   [KA pro $|a| < 1$, KN pro $x = -1$, D pro $|a| > 1$ a $x = 1$]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} a x^n$

   [KA pro $|a| < 2$, KN pro $x = -2$, D pro $|a| > 2$ a $x = 2$]

3 Posloupnosti a řady funkcí

3.1 Bodová konvergence

Znázorněte prvních pár členů posloupností funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a určete jejich limitu:

1. $f_n(x) = \arctan nx,\ x \in \mathbb{R}$

$\left[\frac{\pi}{2}\ pro\ x > 0, 0\ pro\ x = 0, -\frac{\pi}{2}\ pro\ x < 0\right]$

2. $f_n(x) = n \sin x,\ x \in [-\pi, \pi]$

$[-\infty\ pro\ x \in (-\pi, 0), 0\ pro\ x = \pm\pi\ a\ x = 0, \infty\ pro\ x \in (0, \pi)]$

3. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n},\ x \in [-\pi, \pi]$

$[0]$

Určete obor konvergence funkčních řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \tan \frac{x}{2^n}$

$[x \in (-2, 2)]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$

$\left[x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)\right]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},\ x \in \mathbb{R}$

$[x \in (1, \infty)]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x},\ x \in \mathbb{R}$

$[x \in (0, \infty)]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}},\ x > 0$

$[x \in (e, \infty)]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\ln x}},\ x > 0$

$[x \in (1, \infty)]$

3.2 Stejnoměrná konvergence

Určete limitu posloupností funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a rozhodněte, zda se jedná o stejnoměrnou konvergenci na intervalu I:

1. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $I = [1, \infty)$

$[f(x) = 0,\ ANO]$

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $I = [0, 1]$

$[f(x) = 0,\ NE]$

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $I = [1, 2]$

$[f(x) = 0,\ ANO]$

4. $f_n(x) = \arctan nx$, $I = \mathbb{R}$

$\left[f(x) = -\frac{\pi}{2}\ pro\ x < 0,\ 0\ pro\ x = 0,\ \frac{\pi}{2}\ pro\ x > 0,\ NE\right]$

5. $f_n(x) = e^{-nx}$, $I = \mathbb{R}$

$[f(x) = \infty\ pro\ x < 0,\ 1\ pro\ x = 0,\ 0\ pro\ x > 0,\ NE]$

Pomocí Weierstrassova kritéria dokažte stejnoměrnou konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $I = \mathbb{R}$

$\left[majoranta:\ \frac{1}{n^2}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$, $I = [-1, 1]$

$\left[majoranta:\ \frac{1}{n^s}\right]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $I = \mathbb{R}$

$\left[majoranta:\ \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x^2n^2}}{n^2}$, $I = \mathbb{R}$

$\left[majoranta:\ \frac{1}{n^2}\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $I = [0, \infty)$

$\left[majoranta:\ \frac{1}{n(n+1)}\right]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^2}$, $I = \mathbb{R}$

$\left[majoranta:\ \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}\right]$

3.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

1. * Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$, $0 < r < 1$, má na $I = \mathbb{R}$ spojitý součet $s(x)$ a určete $\int_0^{2\pi} s(x)dx$.

   [spojitost pomocí stejnoměrné konvergence, 2π]

2. * Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.
   (Rada: Použijte geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a její derivaci.)

   $\left[x \in (-1, 1),\ \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right]$

4 Mocninné řady

Určete poloměr a obor konvergence mocninných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$

$[r = 1,\ O = (-1, 1)]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$

$[r = 3,\ O = [-3, 3)]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+2)^n$

$[r = 1,\ O = (-3, -1)]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n,\ a > 1$

$[r = \infty,\ O = (-\infty, \infty)]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$

$[r = \infty,\ O = (-\infty, \infty)]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

$[r = 1,\ O = (-1, 1)]$

4.1 Vlastnosti a součet mocninné řady

Určete poloměr konvergence a součet mocninných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$[r = 1, \ln(1+x)]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

$\left[r = 1, \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x\right]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

$[r = 1, \ln(x+1) - x]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$

$\left[r = 1, \frac{-x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (n)^2 x^{n-1}$

$\left[r = 1, \frac{1+x}{(1-x)^3}\right]$

Pomocí součtu mocninné řady určete součet číselných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$[\ln 2]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

$[\ln 2]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{4})^{n-1}$

$[\frac{80}{27}]$

4.2 Taylorova a Maclaurinova řada

Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

1. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

$[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!},\ x \in \mathbb{R}]$

2. $f(x) = x^2 e^x$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!},\ x \in \mathbb{R}\right]$

3. $f(x) = (1+x)e^{-x}$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n+x^{n+1}}{n!},\ x \in \mathbb{R}\right]$

4. $f(x) = \sin x^2$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!},\ x \in \mathbb{R}\right]$

5. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$
   (Rada: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$)

$\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ |x| < 1\right]$

6. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n,\ |x| < 1]$

7. $f(x) = \arctan x$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| \le 1\right]$

8. $f(x) = \frac{1}{3-2x}$

$\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3}x)^n,\ |x| < \frac{3}{2}\right]$

9. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$\left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},\ |x| < 1\right]$

Určete součet následujících mocninných řad:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$

$\left[e^{x^2}(1+2x^2)\right]$

2. * $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$

$\left[e^{\frac{x}{2}}(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+1)\right]$

Rozviňte následující funkce do Taylorovy řady se středem v bodě x_0. Postupujte podle definice (přes derivace funkce f).

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\right]$

2. $f(x) = e^x$, $x_0 = -2$

$\left[e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}\right]$

3. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}\right]$

5 Užití mocninných řad

Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů:

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, $n = 4$

   $[0,778]$

2. $(1,5)^2$, $n = 3$

   $[2,25]$

3. $\sqrt[3]{128}$, $n = 3$

   $[5,03968]$

4. $\ln \frac{1}{2}$, $n = 3$

   $[-0,693]$

Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než ϵ:

1. $\sin 10^o$, $\epsilon = 10^{-6}$

   $[0,17364]$

2. $\arcsin \frac{1}{2}$, $\epsilon = 10^{-5}$

   $[0,5236]$

Určete následující limity:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x}$

   $[-\frac{1}{2}]$

2. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - x^2 \ln(1+\frac{1}{x^2})\right]$

   $[-1]$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$

   $[-\frac{1}{3}]$

Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů a odhadněte chybu:

1. $\int_0^1 e^{-x^2}\ dx$, $n = 3$

   $[0,77;\ |R_3| < 0,03]$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\ dx$, $n = 3$

$\left[0,4872;\ |R_3| < 10^{-4}\right]$

3. $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\ dx$, $n = 4$

$[2,834]$

Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než ϵ:

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$, $\epsilon = 10^{-4}$

$[0,494]$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \arctan \frac{x}{4}\ dx$, $\epsilon = 10^{-4}$

$[0,12]$

3. $\int_0^1 \cos x^2\ dx$, $\epsilon = 10^{-4}$

$[0,905]$

Vyjádřete mocninnou řadou:

1. $\int_0^x \sin t^2\ dt$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!},\ x \in (-\infty, \infty)\right]$

2. $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\ dt$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},\ x \in (-\infty, \infty)\right]$

3. $\int_0^x \frac{dt}{1-t^9}$

$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8},\ x \in [-1, 1)\right]$

4. $\int \frac{\sin x}{x}\ dx$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},\ x \in (-\infty, \infty)\right]$

Řešte diferenciální rovnice pomocí mocninných řad:

1. $y' = \frac{1}{2} y$

$\left[y = a_0 e^{\frac{x}{2}} \sin x\right]$

2. $y'' + xy' + y = 0$

$\left[y = a_0(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \ldots) + a_1(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{100}x^7 + \ldots)\right]$

Určete řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

1. $y' - y^2 - x(x+1) = 0$, $y(0) = 1$

$\left[y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{19}{12}x^4 + \ldots\right]$

2. $y'' - y\cos x - x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$\left[y = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\right]$

6 Fourierovy řady

Nalezněte Fourierovu řadu funkcí:

1. $f(x) = \ sgn x,\ x \in [-\pi, \pi]$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x\right]$$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x\right]$$

3. $f(x) = e^x,\ x \in [0, 2\pi]$

$$\left[\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2+1}\cos nx - \frac{n}{n^2+1}\sin nx)\right)\right]$$

4. $f(x) = \pi^2 - x^2,\ x \in [-\pi, \pi]$

$$\left[\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}\right]$$

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0] \\ \sin x & x \in [0, \pi] \end{cases}$

$$\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$$

6. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0] \\ x & x \in [0, \pi] \end{cases}$

$$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n})\right]$$

7. $f(x) = |x|\,,\ x \in (-l, l)$

$$\left[\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right]$$

Sestrojte pokračování funkce $f(x)$ na intervalu I:

1. sudé: $f(x) = \cos x$, $I = [0, \pi]$

$$\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]$$

2. liché: $f(x) = x(\pi - x)$, $I = (0, \pi)$

$$\left[\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\right]$$

3. sudé: $f(x) = \begin{cases} \cos x & I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x & I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$

$$\left[\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$$

4. liché: $f(x) = 1$, $I = (0, 1)$

$$\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{\pi(2n-1)}\right]$$

7 Integrální počet funkcí více proměnných

7.1 Dvojný integrál

Vypočtěte dvojný integrál $\int\int_M f(x,y)\,dx\,dy$ funkce $f(x,y)$ přes obdélník M:

1. $f(x,y) = \sqrt{y} + x - xy^2$, $M = [0,1] \times [1,3]$

$\left[2\sqrt{3} - 4\right]$

2. $f(x,y) = \frac{1}{(2x+y+1)^2}$, $M = [0,4] \times [0,1]$

$\left[\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}\right]$

3. $f(x,y) = xy^2 e^{xy}$, $M = [0,2] \times [0,1]$

$[2]$

4. $f(x,y) = x + y$, $M = [a,b] \times [c,d]$

$\left[\frac{1}{2}(a-b)(c-d)(a+b+c+d)\right]$

Vypočtěte dvojný integrál $\int\int_M f(x,y)\,dx\,dy$ funkce $f(x,y)$ přes množinu M. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $f(x,y) = x - y$, M je omezena křivkami $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$

$\left[\frac{2}{3}\right]$

2. $f(x,y) = x^2 + y$, M je omezena křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$

$\left[\frac{33}{140}\right]$

3. $f(x,y) = e^{2x+y}$, M je omezena křivkami $x + y = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$

$\left[\frac{e^4 - e^3 - e + 1}{2}\right]$

4. $f(x,y) = \cos(x+y)$, M je omezena křivkami $y = \pi$, $y = x$, $x = 0$

$[-2]$

5. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$, M je omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$

$\left[\frac{9}{4}\right]$

Vypočtěte míru $m(M)$ množiny M omezené následujícími křivkami. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $y = 6 - x^2$, $x + y - 4 = 0$

$\left[\frac{9}{2}\right]$

2. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$

$\left[\frac{64}{3}\right]$

3. $x^2 = 4y$, $x^2 = 8y$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$

$\left[\frac{8}{3}\right]$

Zaměňte pořadí integrace v integrálu. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\ dy\right) dx$

$\left[\int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)\ dx\right) dy\right]$

2. $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\ dx\right) dy$

$\left[\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\ dy\right) dx\right]$

3. $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dy\right) dx$

$\left[\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)\ dx\right) dy\right]$

4. $\int_0^2 \left(\int_{y \ln\sqrt{3}}^{\ln(y+1)} f(x,y)\ dx\right) dy$

$\left[\int_0^{\ln 3} \left(\int_{e^x-1}^{\frac{2x}{\ln 3}} f(x,y)\ dy\right) dx\right]$

7.2 Trojný integrál

Vypočtěte trojný integrál $\int\int\int_M f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ funkce $f(x,y,z)$ přes kvádr M. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $f(x,y,z) = xy^2z$, $M = [0,2] \times [1,3] \times [1,2]$

[26]

2. $f(x,y,z) = 6e^{3x+2y+z}$, $M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

$\left[(e^3-1)(e^2-1)(e-1)\right]$

3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $M = [-a,a] \times [-b,b] \times [-c,c]$

$\left[\frac{8}{3}abc(a^2+b^2)\right]$

Vypočtěte trojný integrál $\int\int\int_M f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ funkce $f(x,y,z)$ přes množinu M. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $f(x,y,z) = z$, M je omezena plochami $z = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $x + z = 1$

$\left[\frac{8}{105}\right]$

2. $f(x,y,z) = z$, M je omezena plochami $x = 0$, $y = x$, $y^2 + z^2 = 1$

$\left[\frac{1}{8}\right]$

3. $f(x,y,z) = y\cos(x+z)$, M je omezena plochami $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$

$\left[\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right]$

4. $f(x,y,z) = (x+y)z$, M je osmina koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ležící v 1. oktantu

$\left[\frac{2}{15}\right]$

5. $f(x,y,z) = x^2$, M je koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $a > 0$

$\left[\frac{4}{15}\pi a^5\right]$

Vypočtěte míru $m(M)$ množiny M omezené následujícími plochami. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = \frac{\pi}{2}$, $z = \cos y \sin y$

$\left[\frac{\pi}{4}\right]$

2. $z = 0$, $x + y + z = 6$, $y = 0$, $3x + 2y = 12$

$[4]$

3. $x = y^2$, $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$

$\left[\frac{3}{35}\right]$

4. $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$, $x + y + z = 4$

$\left[\frac{55}{6}\right]$

7.3 Transformace integrálu

7.3.1 Transformace do polárních souřadnic

Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte integrál $\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy$ funkce $f(x,y)$ přes množinu A omezenou podmínkami:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, A: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq |x|$

$\left[\frac{15}{8}\pi\right]$

2. $f(x,y) = 2x - 3y$, A: $x^2 + y^2 \leq 9$

[0]

3. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, A: $x^2 + y^2 \leq 1$

$\left[\frac{\pi}{2}\right]$

4. $f(x,y) = 1$, A: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq x + y$

$\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]$

Transformujte do polárních souřadnic integrál $\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$, kde množina A je omezena podmínkami:

1. $A : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $y \geq 0$, $x \geq y$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_a^b \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\ d\rho\right)\ d\varphi\right]$$

2. $A : x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y \geq 1$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^1 \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\ d\rho\right)\ d\varphi\right]$$

3. $A : x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq 0$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\ d\rho\right)\ d\varphi\right]$$

Pozn: Zde je možno použít i substituci $x = 2 + \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, pak je výsledek

$$\left[\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\ d\rho\right)\ d\varphi\right]$$

7.3.2 Další transformace dvojného integrálu

Pomocí dané transformace vypočtěte integrál $\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$ funkce $f(x,y)$ přes množinu A omezenou křivkami:

1. $f(x,y) = x^2 - y + 2$, A: $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 4x$, $y = \frac{x}{4}$, transformace: $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$

$\left[\frac{113}{16} + 12\ln 2\right]$

2. $f(x,y) = 1$, A: $x^2 = 4y$, $x^2 = 8y$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, transformace: $\frac{x^2}{y} = u$, $\frac{y^2}{x} = v$

$\left[\frac{8}{3}\right]$

7.3.3 Transformace do cylindrických souřadnic

Pomocí transformace do cylindrických souřadnic vypočtěte integrál $\int\int\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ funkce $f(x,y,z)$ přes množinu A omezenou podmínkami:

1. $f(x,y,z) = xz\sqrt{x^2+y^2}$, A: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=3$, $x \le 0$, $y \ge 0$

   $\left[-\frac{135}{8}\right]$

2. $f(x,y,z) = 1$, A: $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=y^2$

   $[4\pi]$

3. $f(x,y,z) = 1$, A: $x^2+y^2=x$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=2$
   (Pozn: Zde je možno použít i substituci $x=\frac{1}{2}+\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$.)

   $\left[\frac{3}{16}\pi+\frac{1}{12}\right]$

4. $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+z^2+1}$, A: $y = 2-\sqrt{x^2+z^2}$, $y=1$
   (Pozn: Zde je vhodné použít substituci pro rotační těleso s osou rotace v ose y.)

   $\left[2\pi(-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4})\right]$

5. $f(x,y,z) = 1$, A: $2z = x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$

   $\left[\frac{4}{3}\pi\right]$

6. $f(x,y,z) = 4xyz$, A: $z \ge \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$, $x^2+y^2+z^2 \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

   $\left[\frac{7}{6}\right]$

7. $f(x,y,z) = 1$, A: $z=0$, $z=b$, $b>0$, $z=\ln(x^2+y^2)$

   $\left[\pi(e^b-1)\right]$

7.3.4 Transformace do sférických souřadnic

Pomocí transformace do sférických souřadnic vypočtěte integrál $\int\int\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ funkce $f(x,y,z)$ přes množinu A omezenou podmínkami:

1. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, A je část koule o poloměru 1 ležící v 1. oktantu

   $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

2. $f(x,y,z) = x+y+z$, A: $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

   $[4\pi]$

3. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, A: $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$

   $\left[\frac{15(2-\sqrt{2})}{4}\pi\right]$

4. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, A: $x^2+y^2+z^2 \le 2z$

   $\left[\frac{8\pi}{5}\right]$

5. $f(x,y,z) = 1$, A: $x^2+y^2+z^2 \le 2z$, $x^2+y^2 \le 3z^2$

   $\left[\frac{5\pi}{9})\right]$

8 Aplikace vícerozměrných integrálů

Pomocí dvojného, resp. trojného integrálu odvoďte obsah, resp. objem rovinného, resp. prostorového tělesa:
(Pozn. Obsah tělesa počítáme stejně jako míru tohoto tělesa jakožto množiny, tj. jako integrál z $f = 1$. Pro určení mezí v integrálu je potřeba si dané těleso vhodně umístit do souřadných os - středy kružnic do počátku, některé strany čtverců přímo do os atd.)

1. čtverec o straně a

   $\left[a^2\right]$

2. obdélník o stranách a a b

   $[ab]$

3. rovnoramenný trojúhelník o základně a a výšce $\frac{a}{2}$

   $\left[\frac{a^2}{4}\right]$

4. kruh o poloměru r

   $\left[\pi r^2\right]$

5. krychle o hraně a

   $\left[a^3\right]$

6. hranol o hranách a, b, c

   $[abc]$

7. jehlan o podstavě tvaru čtverce o straně a a výšce $\frac{a}{2}$

   $\left[\frac{a^3}{6}\right]$

8. válec o poloměru r a výšce v

   $\left[\pi r^2 v\right]$

9. kužel o poloměru r a výšce v

   $\left[\frac{\pi r^2 v}{3}\right]$

10. koule o poloměru r

    $\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$

9 Křivkový integrál

9.1 Délka křivky

Vypočtěte délku $L(K)$ křivky K:

1. K je půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, $r > 0$

$[L(K) = r\pi;\ parametrizace:\ x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle]$

2. K je polovina elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \geq 0$

$[L(K) = 7{,}933;\ parametrizace:\ x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle]$

3. K je cykloida $x = a(t - sint)$, $y = a(1 - cost)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\rangle$

$[L(K) = 8a]$

4. K je řetězovka $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x \in \langle -a, a\rangle$, $a > 0$

$\left[L(K) = a(e - \frac{1}{e});\ parametrizace:\ x = t,\ y = \frac{a}{2}(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}),\ t \in \langle -a, a\rangle\right]$

9.2 Křivkový integrál I. druhu

Vypočtěte $\int_K f(x,y,z)\ ds$, resp. $\int_K f(x,y)\ ds$:

1. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, K má parametrizaci $F(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $t \in \langle 0, \ln 2\rangle$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

2. $f(x,y,z) = x + y^2 - z$, K je úsečka mezi body $A = [2,-1,1]$, $B = [1,3,3]$

$\left[\frac{11}{6}\sqrt{21};\ parametrizace:\ x = 2 - t,\ y = -1 + 4t,\ z = 1 + 2t,\ t \in \langle 0, 1\rangle\right]$

3. $f(x,y) = x^2$, $K = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, y = \ln x, x \in \langle 1, 2\rangle\right\}$

$\left[\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2});\ parametrizace:\ x = t,\ y = \ln t,\ t \in \langle 1, 2\rangle\right]$

4. $f(x,y) = |y|$, K je oblouk paraboly $y^2 = 2x$, $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$

$\left[\frac{3}{2}(2\sqrt{2} - 1);\ parametrizace:\ x = \frac{t^2}{2},\ y = t,\ t \in \langle -1, 1\rangle\right]$

5. $f(x,y) = xy$, K je obdélník o vrcholech $[0,0]$, $[0,2]$, $[4,0]$, $[4,2]$
(Rada: Obdélník považujte za sjednocení 4 úseček, spojujících vždy 2 vedlejší vrcholy. Integrál přes obdélník je pak součtem 4 integrálů přes úsečku.)

$[24]$

6. * $f(x,y) = y$, K je křivka popsaná rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, pro $x > 0$, $y > 0$
(Rada: polární souřadnice)

$\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2};\ parametrizace:\ x = \sqrt{\cos 2t}\cos t,\ y = \sqrt{\cos 2t}\sin t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle\right]$

9.3 Křivkový integrál II. druhu

Vypočtěte $\int_K A\ dr$:

1. $A\ dr = x\ dx + y\ dy + z\ dz$, K je křivka $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (s počátečním bodem $[1, 0, 0]$)

$$\left[2\pi^2\right]$$

2. $A\ dr = (2 - y)\ dx + x\ dy$, K je křivka $x = t - \sin t$, $y = t - \cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$[-2\pi]$$

3. $A\ dr = x\ dx + y\ dy + (xz - y)\ dz$, K je křivka $x = t^2$, $y = 2t$, $z = 4t^2$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ s počátečním bodem $[1, 2, 4]$

$$\left[-\tfrac{5}{2}\right]$$

4. $A\ dr = (x + y)\ dx - 2y\ dy$, K je část křivky dané rovnicí $y = x^2 + 1$, mezi body $[0, 1]$ a $[2, 5]$

$$\left[-\tfrac{52}{3};\ parametrizace:\ x = t,\ y = t^2 + 1,\ t \in \langle 0, 2 \rangle\right]$$

5. $A\ dr = (x + y)\ dx + (x - y)\ dy$, K je kladně orientovaná (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček) elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$[0;\ parametrizace:\ x = a \cos t,\ y = b \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle]$$

6. $A\ dr = x_1\ dx_1 + \ldots + x_n\ dx_n$, K je úsečka v $\mathbb{R}^n$ s počátkem $[1, \ldots, 1]$ a koncem $B = [5, \ldots, 5]$

$$[12n;\ parametrizace:\ x_i = t,\ i = 1, \ldots, n,\ t \in \langle 1, 5 \rangle]$$

9.4 Greenova věta

Pomocí Greenovy věty vypočtěte $\oint_K A\ dr$:

1. $A\ dr = (x + 2y)\ dx + (y - 4x)\ dy$, K je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 1$

$$[-6\pi]$$

2. $A\ dr = y\ dx - x\ dy$, K je záporně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 2x$

$$[2\pi]$$

3. $A\ dr = (x + y)\ dx + (x - y)\ dy$, K je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$[0]$$

9.5 Nezávislost křivkového integrálu II. druhu na integrační cestě

Dokažte, že $\int_K A\,dr$ nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnotu pro libovolnou křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem B:

1. $A\,dr = xdx + y\ dy$, $A = [0, 1]$, $B = [3, -4]$

   $[12]$

2. $A\,dr = \frac{1}{x^2}(y\ dx - x\ dy)$, $A = [1, 2]$, $B = [2, 1]$

   $\left[\frac{3}{2}\right]$

3. $A\,dr = \frac{-x\ dx - y\ dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = [2, 5]$, $B = [0, 1]$

   $\left[\sqrt{29} - 1\right]$

4. $A\,dr = (x + yz)\ dx + (y + xz)\ dy + (z + xy)\ dz$, $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 2, 3]$

   $[13]$

5. $A\,dr = y^2z\ dx + (2xyz + 1)\ dy + xy^2\ dz)$, $A = [1, 2, 1]$, $B = [2, 1, 2]$

   $[-1]$

6. $A\,dr = \frac{x\ dx + y\ dy + z\ dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 2, 2]$

   $[\sqrt{3}]$