Příklady z pravděpodobnosti k procvičování

1. Náhodná veličina X nabývá hodnot 0, anebo 1, a to s pravděpodobnostmi $\mathrm{P}(X=0)=p$, $\mathrm{P}(X=1)=1-p$, kde $p \in [0;1]$. Určete distribuční funkci a graficky ji znázorněte.

2. Náhodná veličina X udává číslo, které padlo při hodu klasickou kostkou.
(a) Určete rozdělení pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.
(b) Dále určete distribuční funkci a nakreslete její graf.

3. Házíme třikrát klasickou kostkou. Náhodná veličina X udává počet padnutých šestek.
(a) Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.
(b) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}(X>2)$. [0,0046]

4. Řidič musí projet čtyři křižovatky řízené semafory. Na každé křižovatce svítí zelená a červená s pravděpodobnostmi 50 %, oranžovou pro jednoduchost neuvažujeme. Náhodná veličina X udává počet projetých křižovatek, než řidič musí na červenou zastavit.
(a) Určete rozdělení pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.
(b) Určete distribuční funkci a nakreslete její graf.

5. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<3\\ \frac{x}{3}-1 & 3\le x<6\\ 1 & x\ge 6\end{cases}.$$

(a) Určete hustotu pravděpodobnosti.
(b) Obě funkce znázorněte graficky.

6. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}.$$

(a) Určete hustotu pravděpodobnosti.
(b) Obě funkce znázorněte graficky.
(c) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}(1<4X<3)$. [0,5]

7. Je dána funkce

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ a+b\sin x & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\ge \frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

(a) Určete $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí spojité náhodné veličiny X. $[a=0,\ b=1]$
(b) Určete hustotu pravděpodobnosti X.
(c) Obě funkce načrtněte.
(d) Spočítejte $\mathrm{P}(0<X<\pi/4)$. $[\sqrt{2}/2]$

8. Je dána funkce

$$f(x)=\begin{cases}c(1-x)x & 0\le x<1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. [$c = 6$]

(b) Určete distribuční funkci X.

(c) Obě funkce načrtněte.

(d) Spočítejte $\mathrm{P}(X > 0{,}2)$. [0,896]

9. Je dána funkce
$$f(x) = \begin{cases} c\cos x & -\pi \le 2x < \pi \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. [$c = 1/2$]

(b) Určete distribuční funkci X.

(c) Obě funkce načrtněte.

(d) Spočítejte $\mathrm{P}(0 < X < \pi/4)$. [$\sqrt{2}/4$]

10. Je dána funkce
$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

(a) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. [$a = 1/\pi$]

(b) Určete distribuční funkci X.

(c) Obě funkce načrtněte.

(d) Spočítejte $\mathrm{P}(|X| < 1)$. [0,5]

11. Je dána funkce
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$$

Určete $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $\mathrm{P}(X > x_1) = 1/4$ a $\mathrm{P}(X > x_2) = 1/6$. [2; $2\sqrt{3}$]

12. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} a + b\,\mathrm{e}^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí spojité náhodné veličiny X. [$a = 1,\ b = -1$]

(b) Určete hustotu pravděpodobnosti X.

(c) Obě funkce načrtněte.

(d) Spočítejte $\mathrm{P}(0 < X < 3)$. [0,95]

13. Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X:

(a) $f(x) = c\,x\,\mathrm{e}^{-x}$ pro $x > 0$ [1]

(b) $f(x) = c\,\sin x$ pro $x \in (0; 2\pi)$ [neexistuje]

14. Tramvaj jezdí v pětiminutových intervalech. Cestující přichází na její zastávku ve zcela náhodném čase.

(a) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, udávající dobu čekání cestujícího na příjezd tramvaje na zastávce.

(b) Určete distribuční funkci této náhodné veličiny.

(c) Obě funkce graficky znázorněte.

(d) S jakou pravděpodobností bude cestující čekat na tramvaj nejdéle 2 minuty? [0,4]

(e) -bude čekat více než 2 minuty a zároveň méně než 4 minuty? [0,4]

15. Dokažte přepočtový vzorec $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ pro distribuční funkci, $\Phi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, standardizovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti $\mathrm{N}(0; 1)$.

16. Doba čekání zákazníka ve frontě u pokladny v obchodě se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Předpokládejme, že střední doba čekání je rovna 50 s.

(a) Spočítejte pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen dříve než za 30 s. [0,451]

(b) Určete čas T tak, aby do tohoto času bylo obslouženo 80 % zákazníků čekajících ve frontě. [1 min 20,47 s]

17. Počet nově narozených dětí v Brně během časového intervalu konstantní délky se řídí Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti. Předpokládejme, že v průměru se narodí 15 dětí za 1 den.

(a) S jakou pravděpodobností se během 2 minut narodí alespoň 1 dítě? [0,0206]

(b) Jak dlouhý musí být časový interval, aby pravděpodobnost, že se během něj narodí alespoň 1 dítě, byla alespoň 5 %? [4 min 55 s]

18. Výška dětí ve věku 3,5 až 4 roky v populaci je považována za náhodnou veličinu s normálním rozdělením s parametry $\mu = 102$ cm a $\sigma = 4{,}5$ cm.

(a) Jaký je podíl těch dětí v populaci, které mají výšku menší nebo rovnou 93 cm? [2,3 %]

(b) -které mají výšku mezi 97,5 cm a 111 cm? [81,9 %]

19. Z bedny, která obsahuje 9 červených, 8 zelených a 3 žluté míčky, vytáhneme naráz 6 míčků. Nechť náhodné veličiny X a Y označují počty vytažených červených, resp. zelených míčků.

(a) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X, Y)'$.

(b) Spočítejte $\mathrm{P}(X = 1, Y \leq 4)$. [0,0943]

20. V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 nekvalitní. Mezi kvalitními je 5 výrobků I. jakosti a 3 výrobky jsou II. jakosti. Ze zásilky náhodně vybereme 2 výrobky bez vracení. Náhodná veličina X udává počet vybraných kvalitních výrobků, náhodná veličina Y udává počet vybraných výrobků I. jakosti.

(a) Stanovte simultánní a marginální rozdělení pravděpodobnosti veličin X, Y.

(b) Určete simultánní a marginální distribuční funkce veličin X, Y.

21. Dokažte, že funkce

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x+y)(x-y) & x = 2,3;\ y = 1,2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

definuje rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X, Y)'$. Dále spočítejte marginální rozdělení pravděpodobnosti.

22. Je dána funkce

$$p(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} k x_1 x_2 x_3^2 & x_1 = 0,2;\ x_2 = 0,2;\ x_3 = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby $p(x_1, x_2, x_3)$ byla pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru $(X_1, X_2, X_3)'$. [1/56]

23. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{x+y} & (x,y) \in [1;2] \times [1;2] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x, y)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X, Y)'$. $[\mathrm{e}^{-2}(\mathrm{e}-1)^{-2}]$

(b) Spočítejte distribuční funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

24. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} cx\,\mathrm{e}^{xy} & (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x, y)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X, Y)'$. $[(\mathrm{e}-2)^{-1}]$

(b) Spočítejte distribuční funkci náhodného vektoru $(X, Y)'$.

25. Je dána funkce
$$f(x,y)=\begin{cases} cx(6-xy) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Určete $c\in\mathbb{R}$ tak, aby $f(x,y)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$. [3/16]
(b) Spočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti.

26. Je dána funkce
$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Dokažte, že $f(x,y)$ je hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$.
(b) Spočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti.
(c) Spočítejte simultánní distribuční funkci.
(d) Spočítejte marginální distribuční funkce.

27. Je dána funkce
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) & 0<x<2,\ 0<y<3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Dokažte, že $f(x,y)$ je hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$.
(b) Spočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti.
(c) Spočítejte simultánní distribuční funkci.
(d) Spočítejte marginální distribuční funkce.
(e) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}(0<X\le 1,\ 2<Y\le 3)$. [13/72]

28. Je dána funkce
$$f(x,y,z)=\begin{cases} c(x+y+z) & (x,y,z)\in[0;1]^3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Určete $c\in\mathbb{R}$ tak, aby $f(x,y,z)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y,Z)'$. [2/3]
(b) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}\left((X,Y,Z)\in\left[0;\frac{1}{2}\right]^3\right)$. [1/16]

29. Nechť $(X_1,X_2)'\sim \mathrm{R_d}(G)$, kde $G=\{(-1;0);\ (0;1);\ (1;0)\}$. Jsou náhodné veličiny X_1,X_2 stochasticky nezávislé? [ne]

30. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)'$ má hustotu
$$f(x,y)=\begin{cases} 24x^2y(1-x) & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
Jsou náhodné veličiny X,Y stochasticky nezávislé? [ano]

31. Vzájemně stochasticky nezávislé náhodné veličiny $X_1,\dots,X_n\sim \mathrm{Ex}(\lambda)$ udávají dobu čekání n zákazníků ve frontě.
(a) Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny $\max\{X_1,\dots,X_n\}$.
(b) Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny $\min\{X_1,\dots,X_n\}$.
(c) Určete pravděpodobnost, že zákazník, který čekal nejkratší dobu, čekal ve frontě alespoň t sekund.
(c) Určete pravděpodobnost, že zákazník, který čekal nejdelší dobu, čekal ve frontě nejvýše t sekund.

32. Doby životnosti dvou součástek jsou dvě stochasticky nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametry λ_1,λ_2. Nechť $t\ge 0$ je pevně zvolený časový interval. Spočítejte pravděpodobnosti, že:

(a) první součástka přežije dobu t.
(b) obě součástky přežijí dobu t.
(c) právě jedna ze součástek přežije dobu t.
(d) alespoň jedna ze součástek přežije dobu t.
(e) druhá součástka přežije první součástku.

33. Je dána funkce $F(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2$, pokud $(x,y) \in [0;1]^2$. Dodefinujte ji tak, aby se jednalo o distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$. Jsou náhodné veličiny X,Y stochasticky nezávislé? [ne]

34. Vzájemně stochasticky nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 mají stejnou hustotu pravděpodobnosti

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 3x_i^2 & 0 < x_i < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \ i = 1,2,3.$$

(a) Určete jejich distribuční funkce.
(b) Spočítejte pravděpodobnosti, že právě k z těchto veličin nabudou hodnoty větší než 0,5.

35. Na automatické lince jsou plněny litrové lahve s mlékem. Je známo, že objem mléka v naplněných lahvích kolísá od 0,98 l do 1,02 l. V tomto intervalu považujeme každý objem za stejně možný. Náhodně jsou vybrány 3 lahve. Jaká je pravděpodobnost, že:
(a) nejméně naplněná láhev bude obsahovat alespoň 1 l mléka? [0,125]
(b) nejvíce naplněná láhev nebude obsahovat více než 1,01 l mléka? [0,4219]

36. Náhodná veličina X se řídí Poissonovým rozdělením. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = 4X$.

37. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 1,2,3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = 2X + 1$.

38. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti

$$p(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{3}\right)^x & x = 1,2,3,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^3$.

39. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0;1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Najděte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = -2\ln X$.

40. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right) & x \in [-1;1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Najděte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \frac{1}{2}X$.

41. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0;2] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Najděte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \min\{X, X^2\}$.

42. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0;1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Najděte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = (2X-1)^2$.
(b) Spočítejte $\mathrm{P}(1 < 4Y < 4)$. $[0,5]$

43. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0;1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Najděte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = 4(1-X)^2$.
(b) Spočítejte $\mathrm{P}(1 < Y < 4)$. $[0,25]$