Základní metrické a topologické pojmy

Marie Leváková

Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

podzim 2013

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y\rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$
5. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnost:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \qquad \wedge \qquad |\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

Základní metrické a topologické pojmy

Unitární prostory: Komplexní lineární prostor $\mathcal{H}$ se nazývá unitární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané skalární součin, tak, že $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnost:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \qquad \wedge \qquad |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y.$$

Ortogonalita: x a y jsou ortogonální, pokud platí

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$
5. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$
5. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (rovnoběžníková nerovnost)

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$
5. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (rovnoběžníková nerovnost)

Konvergence podle normy: Posloupnost prvků $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ konverguje podle normy k $x \in \mathcal{H}$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$
5. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (rovnoběžníková nerovnost)

Konvergence podle normy: Posloupnost prvků $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ konverguje podle normy k $x \in \mathcal{H}$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Spojitost skalárního součinu: Jestliže $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti prvků z $\mathcal{H}$ takové, že $\|x_n - x\| \to 0$ a $\|y_n - y\| \to 0$ pro $n \to \infty$, pak platí

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$
5. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (rovnoběžníková nerovnost)

Konvergence podle normy: Posloupnost prvků $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ konverguje podle normy k $x \in \mathcal{H}$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Spojitost skalárního součinu: Jestliže $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti prvků z $\mathcal{H}$ takové, že $\|x_n - x\| \to 0$ a $\|y_n - y\| \to 0$ pro $n \to \infty$, pak platí

1. $\|x_n\| \to \|x\|$

Ortogonální a ortonormální množiny: Množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je ortogonální, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$ platí $\langle x, y \rangle = 0$.
Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, množina $\mathcal{M}$ je ortonormální.

Vlastnosti normy: Pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ platí:

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x\| \geq 0$
5. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (rovnoběžníková nerovnost)

Konvergence podle normy: Posloupnost prvků $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ konverguje podle normy k $x \in \mathcal{H}$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Spojitost skalárního součinu: Jestliže $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti prvků z $\mathcal{H}$ takové, že $\|x_n - x\| \to 0$ a $\|y_n - y\| \to 0$ pro $n \to \infty$, pak platí

1. $\|x_n\| \to \|x\|$
2. $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Uzavřený podprostor: Lineární podprostor $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{M}.$$

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Uzavřený podprostor: Lineární podprostor $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{M}.$$

Ortogonální komplement:

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, x \in \mathcal{M}\}$$

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Uzavřený podprostor: Lineární podprostor $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{M}.$$

Ortogonální komplement:

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, x \in \mathcal{M}\}$$

Projekční věta: Jestliže $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ a $x \in \mathcal{H}$, pak

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Uzavřený podprostor: Lineární podprostor $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{M}.$$

Ortogonální komplement:

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, x \in \mathcal{M}\}$$

Projekční věta: Jestliže $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ a $x \in \mathcal{H}$, pak

1. $\exists!(\hat{x} \in \mathcal{M}) : \|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Uzavřený podprostor: Lineární podprostor $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{M}.$$

Ortogonální komplement:

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, x \in \mathcal{M}\}$$

Projekční věta: Jestliže $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ a $x \in \mathcal{H}$, pak

1. $\exists!(\hat{x} \in \mathcal{M}) : \|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$
2. $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\| \Leftrightarrow (x - \hat{x}) \in \mathcal{M}^{\perp}$

Cauchyovská posloupnost: Posloupnost $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ je cauchyovská, jestliže

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Hilbertovy prostory: Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, tj. takový prostor, ve kterém má každá cauchyovská posloupnost limitu

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0.$$

Uzavřený podprostor: Lineární podprostor $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$, jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje všechny limitní body, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{M}.$$

Ortogonální komplement:

$$\mathcal{M}^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, x \in \mathcal{M}\}$$

Projekční věta: Jestliže $\mathcal{M}$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ a $x \in \mathcal{H}$, pak

1. $\exists!(\hat{x} \in \mathcal{M}) : \|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$
2. $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\| \Leftrightarrow (x - \hat{x}) \in \mathcal{M}^\perp$

Prvek $\hat{x}$ se nazývá ortogonální projekce x do $\mathcal{M}$, značí se $\hat{x} = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)$. Zobrazení $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ se nazývá projekce $\mathcal{H}$ do $\mathcal{M}$.

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, yx_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, y x_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$

$$x = \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + (I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x),$$

   kde I je identické zobrazení.

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, yx_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$
$$x = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) + (I - \mathcal{P}_{\mathcal{M}})(x),$$
kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) + \beta \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(y)$

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, y x_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^{\perp}$

   $$x = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) + (I - \mathcal{P}_{\mathcal{M}})(x),$$

   kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) + \beta \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(y)$
3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|(I - \mathcal{P}_{\mathcal{M}})(x)\|^2$

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, yx_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^{\perp}$

$$x = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) + (I - \mathcal{P}_{\mathcal{M}})(x),$$

   kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) + \beta \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(y)$
3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|(I - \mathcal{P}_{\mathcal{M}})(x)\|^2$
4. $\|x_n - x\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x_n) \to \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)$

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, yx_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$

$$x = \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + (I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x),$$

   kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_\mathcal{M}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + \beta \mathcal{P}_\mathcal{M}(y)$
3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_\mathcal{M}(x)\|^2 + \|(I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x)\|^2$
4. $\|x_n - x\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x_n) \to \mathcal{P}_\mathcal{M}(x)$
5. $x \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = x$

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, yx_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$
$$x = \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + (I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x),$$
kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_\mathcal{M}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + \beta \mathcal{P}_\mathcal{M}(y)$
3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_\mathcal{M}(x)\|^2 + \|(I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x)\|^2$
4. $\|x_n - x\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x_n) \to \mathcal{P}_\mathcal{M}(x)$
5. $x \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = x$
6. $x \in \mathcal{M}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = 0$

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, y x_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$
$$x = \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + (I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x),$$
kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_\mathcal{M}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + \beta \mathcal{P}_\mathcal{M}(y)$
3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_\mathcal{M}(x)\|^2 + \|(I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x)\|^2$
4. $\|x_n - x\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x_n) \to \mathcal{P}_\mathcal{M}(x)$
5. $x \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = x$
6. $x \in \mathcal{M}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = 0$
7. Jestliže $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ jsou takové podprostory, že $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, pak
$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_1}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_2}(x)) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_1}(x)$$

Vlastnosti projekce: Pro $\forall x, yx_n \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí:

1. Každé $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci pomocí součtu prvku z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$
$$x = \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + (I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x),$$
kde I je identické zobrazení.
2. $\mathcal{P}_\mathcal{M}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) + \beta \mathcal{P}_\mathcal{M}(y)$
3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_\mathcal{M}(x)\|^2 + \|(I - \mathcal{P}_\mathcal{M})(x)\|^2$
4. $\|x_n - x\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x_n) \to \mathcal{P}_\mathcal{M}(x)$
5. $x \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = x$
6. $x \in \mathcal{M}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = 0$
7. Jestliže $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ jsou takové podprostory, že $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, pak
$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_1}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_2}(x)) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_1}(x)$$

Uzávěr: Uzávěr $\overline{\mathcal{M}}$ množiny $\mathcal{M}$ (značí se taky $\overline{sp}(\mathcal{M})$) je nejmenší uzavřená množina obsahující $\mathcal{M}$.
($\overline{sp}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \to 0, x_n \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$, kde $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ je lineární obal množiny $\mathcal{M}$).

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$
3. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_i \in \mathbb{C}$

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$
3. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_i \in \mathbb{C}$
4. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ pro $i = 1, \ldots, n$

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_\mathcal{M}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\|\mathcal{P}_\mathcal{M}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$
3. $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_i \in \mathbb{C}$
4. $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ pro $i = 1, \ldots, n$
5. $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle e_i|^2 \leq \|x\|$

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$
3. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_i \in \mathbb{C}$
4. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ pro $i = 1, \dots, n$
5. $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle e_i|^2 \leq \|x\|$

Koeficienty $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ se nazývají Fourierovy koeficienty vzhledem k množině $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Projekce na konečné ortonormální množině: Jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální podmnožina $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$, pak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$
3. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_i \in \mathbb{C}$
4. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ pro $i = 1, \dots, n$
5. $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle e_i|^2 \leq \|x\|$

Koeficienty $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ se nazývají Fourierovy koeficienty vzhledem k množině $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Separabilita: Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ je separabilní právě tehdy, když $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_t, t \in T\})$, kde T je spočetná množina.

Ortonormální reprezentace v separabilním Hilbertově prostoru: Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_1, e_2, \dots\}$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Pak pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

Ortonormální reprezentace v separabilním Hilbertově prostoru: Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_1, e_2, \dots\})$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Pak pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

1. Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, e_2, \dots\}$ je hustá, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| < \varepsilon$.

Ortonormální reprezentace v separabilním Hilbertově prostoru: Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_1, e_2, \dots\})$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Pak pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

1. Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, e_2, \dots\}$ je hustá, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| < \varepsilon$.
2. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ pro $\forall x \in \mathcal{H}$

Ortonormální reprezentace v separabilním Hilbertově prostoru: Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_1, e_2, \dots\})$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Pak pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

1. Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, e_2, \dots\}$ je hustá, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| < \varepsilon$.
2. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ pro $\forall x \in \mathcal{H}$
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$

Ortonormální reprezentace v separabilním Hilbertově prostoru: Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_1, e_2, \dots\}$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Pak pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

1. Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, e_2, \dots\}$ je hustá, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| < \varepsilon$.
2. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ pro $\forall x \in \mathcal{H}$
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$
4. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$

Ortonormální reprezentace v separabilním Hilbertově prostoru: Nechť $\mathcal{H} = \overline{sp}(\{e_1, e_2, \dots\})$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Pak pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

1. Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, e_2, \dots\}$ je hustá, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| < \varepsilon$.
2. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ pro $\forall x \in \mathcal{H}$
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$
4. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$
5. $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, e_i \rangle = 0$ pro $\forall i = 1, 2, \dots$