Řešení lineárního nehomogenního systému

$$\begin{aligned} x' &= -3x - 2y + 5\sin t \\ y' &= 2x - 7y + 8\cos t \end{aligned}$$

Přidružený homogenní systém je

$$\begin{aligned} x' &= -3x - 2y \\ y' &= 2x - 7y, \end{aligned}$$

v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice systému:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 21 + 4 = \lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda+5)^2.$$

Vlastní číslo $\lambda = -5$ je dvojnásobné, řešení homogenního systému je tvaru

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}.$$

Musí platit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} b - 5a - 5bt \\ d - 5c - 5dt \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t} = \begin{pmatrix} -3a - 2c - (3b + 2d)t \\ 2a - 7c + (2b - 7d)t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t} \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné t v odpovídajících si složkách dostaneme systém (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} b - 5a &= -3a - 2c \\ -5b &= -3b - 2d \\ d - 5c &= 2a - 7c \\ -5d &= 2b - 7d. \end{aligned}$$

Po úpravě a vynechání lineárně závislých rovnic

$$\begin{aligned} 2a - b - 2c \quad &= 0 \\ b \quad - d &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme $d = b$, $c = \frac{1}{2}(2a - b) = a - \frac{1}{2}b$ a obecné řešení přidruženého homogenního systému

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ a - \frac{1}{2}b + bt \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t} + b \begin{pmatrix} t \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}.$$

Fundamentální systém řešení tedy je

$$\boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}, \qquad \boldsymbol{y_2} = \begin{pmatrix} t \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}$$

a fundamentální matice je

$$\mathsf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}.$$

Inverzní matice k fundamentální je

$$\mathsf{Y}(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - 2t & 2t \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}.$$

Partikulární řešení nehomogenního systému

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sin t \\ 8\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}(t)$$

je tvaru

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}(t),$$

kde pro vektorovou funkci $\boldsymbol{c}$ platí (podle metody variace konstant)

$$\boldsymbol{c}(t) = \int \mathsf{Y}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t.$$

Platí

$$\mathsf{Y}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t) = \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & 2t \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sin t \\ 8\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 - 10t)\sin t + 16t\cos t \\ 10\sin t - 16\cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$$

takže po integraci (dva až třikrát *per partes*) dostaneme

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{307}{338}\cos t + \frac{365}{338}\sin t + t\left(\frac{1170}{338}\cos t - \frac{442}{338}\sin t\right) \\ -\frac{45}{13}\cos t + \frac{17}{13}\sin t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}.$$

Partikulární řešení nehomogenního systému tedy je

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{307}{338}\cos t + \frac{365}{338}\sin t + t\left(\frac{45}{13}\cos t - \frac{17}{13}\sin t\right) t \\ -\frac{45}{13}\cos t + \frac{17}{13}\sin t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{307}{338}\cos t + \frac{365}{338}\sin t \\ \frac{139}{169}\cos t + \frac{72}{169}\sin t. \end{pmatrix}$$

Obecné řešení nehomogenního systému tedy je

$$x = a\mathrm{e}^{-5t} + bt\mathrm{e}^{-5t} + \frac{365}{338}\sin t - \frac{307}{338}\cos t, y = \left(a - \frac{1}{2}b\right)\mathrm{e}^{-5t} + bt\mathrm{e}^{-5t} + \frac{72}{169}\sin t + \frac{139}{169}\cos t.$$