Domáca úloha M5858 č. 4

Stanovte typ diferenciálnych rovníc, tj. separovateľná, ..., exaktná/int.faktor, Clairautova a nájdite ich obecné/singulárne riešenie.

1.
$$y = (y' - 1)\exp(y').$$

2.
$$y = \exp(\frac{xy'}{y}).$$

3.
$$xy' - y = \mathrm{ln} y'.$$

4.
$$y' = \frac{2x\cos^2 y}{x^2 \sin 2y - \sin y}.$$

5.
$$y' = \frac{y\cos x - x\sin y}{\frac{x^2}{2}\cos y - \mathrm{tg} y - \sin x}.$$

6.
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\mathrm{d}x = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} + 1\right)\mathrm{d}y.$$

7.
$$y + xy' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

8.
$$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.$$

9.
$$y' + y + y^2 e^x = 0.$$

10.
$$y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x.$$

11.
$$2y\mathrm{d}x + (y^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0.$$

12.
$$(2x + y + 1)\mathrm{d}x - (4x + 2y - 3)\mathrm{d}y = 0.$$

13.

$$y' = -\frac{2xy^2}{3x^2y + 4}.$$

HINT: Pokúste sa nájsť funkciu $R = R(x, y)$ ako integračný faktor, príslušnej "kvázi"exaktnej rovnice.

Postup: Zvoľte si závislosť funkcie $R = R(x, y)$ a prenásobte ňou príslušné funkcie M a N tejto rovnice zapísanej v tvare jedna-formy (vo vektorovom tvare $M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$). Nové funkcie $\overline{M}(x, y) := M(x, y)R(x, y)$, $\overline{N}(x, y) := N(x, y)R(x, y)$ musia spĺňať podmienku pre existenciu kmeňovej funkcie $K(x, y) : \mathrm{d}K = \overline{M}\mathrm{d}x + \overline{N}\mathrm{d}y$ plynúcej zo Schwartzovej vety (o zámene parciálnych derivácií pre spojité funkcie), tj.

$$\boxed{\frac{\partial \overline{M}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}(x,y)}{\partial x}}$$

Táto identita vygeneruje obecne parciálnu diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $R = R(x, y)$ v tvare

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} M(x, y) = \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] R(x, y).$$

Jej riešenie (ak je možné ho explicitne odvodiť) je potom náš integračný faktor prevádzajúci pôvodnú rovnicu na **exaktnú**!

Poznámka: Niekedy je možné hľadať integračný faktor R pre vopred zvolenú premennú z, ktorá v konečnom dôsledku prevedie problém riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice na problém, riešiť obyčajnú diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premennými. Napr. ak budeme predpokladať, že integračný faktor bude závislý od x, tj. $R = R(x)$ potom nutne musí platiť

$$\Phi = \Phi(x) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x, y)}.$$

Poslednú identitu možno chápať ako kritérium pre integračný faktor $R = R(x)$. Podobne by sme obdržali kritériá pre

$$R = R(y) \quad \cdots \quad \Phi = \Phi(y) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x, y)},$$

$$R = R(xy) \quad \cdots \quad \Phi = \Phi(xy) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{xM(x,y) - yN(x,y)},$$

$$R = R(\sqrt{x^2+y^2}) \cdots \Phi = \Phi(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}M(x,y) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}N(x,y)},$$

z čoho je zrejmé, že obecný tvar tohto kritéria pre integračný faktor $R = R(z)$ je v tvare

$$\boxed{R = R(z) \cdots \Phi = \Phi(z) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial z}{\partial x}N(x,y)}}$$

Za predpokladu, že je toto kritérium splnené, je integračný faktor v tvare

$$R(z) = c_0 \exp\left[\int \Phi(z)\mathrm{d}z\right].$$

$\{$ *integračný faktor z Pr. 13 je* $R = R(y) = cy, \;\; c \in \mathbb{R}$ $\}$

Mgr. Milan Bačík
doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.