Domáca úloha M5858 č. 9

Znázornite priebeh integrálnej krivky vo vektorovom poli rovnice $y' = f(x,y)$ za pomoci lineárnych elementov vyznačených na príslušných izoklinách tejto rovnice.

1.
$$y' = \sqrt{x^2 - y^2}$$

2.
$$y' = \frac{x}{y}$$

Poznámka. Medzi izoklinami a integrálnymi krivkami týchto dvoch diferenciálnych rovníc existuje súvislosť! (izokliny prvej rovnice sú krivky hyperboly, integrálne krivky druhej rovnice sú krivky hyperboly)

Nájdite singulárne body lineárneho diferenciálneho systému (obecne nehomogénneho)
$$\mathbf{x}' = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}; \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2,$$
a za pomoci Jacobiho matice určte o aký singulárny bod sa jedná v prípade, že matica tohto systému je regulárna.

1.
$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 18x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 9x_2 \end{aligned}$$

čo je možné ekvivalentne prepísať v maticovej notácii

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

2.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Transformujte súradnice tohto lineárneho nehomogénneho dif. systému tak, aby sa singulárny bod previedol do počiatku súradnej sústavy.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (-1, -2, 3, 6)^T$$

Rozhodnite o existencii a jednoznačnosti riešenia systému dif. rovníc(obecne nelineárnych), určte nulkliny, typ singulárnych bodov a načrtnite ich fázový portrét.

1.

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= y^2 - 6x^2y + x^4 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x' &= 4 - 2y \\ y' &= 12 - 3x^2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x^2 \\ y' &= by, \qquad\qquad \lambda, b > 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

HINT: Na znázornenie fázového portrétu pre tento systém si pomôžte stanovením definičného oboru rovnice trajektórie určenej vzťahom:

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.
Mgr. Milan Bačík