M5VM05 Statistické modelování

11. Analýza závislosti dvou veličin

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

podzim 2013

Motivace

Při zpracování dat se velmi často setkáme s úkolem zjistit, zda dvě náhodné veličiny jsou stochasticky nezávislé. Např. nás může zajímat, zda ve sledované populaci je barva očí a barva vlasů nezávislá nebo zda počet dnů absence a věk pracovníka jsou nezávislé. Testování hypotézy o nezávislosti se provádí různými způsoby podle toho, jakého typu jsou dané náhodné veličiny – zda jsou nominální, ordinální, intervalové či poměrové.
Zpravidla chceme také zjistit intenzitu případné závislosti sledovaných dvou veličin. K tomuto účelu byly zkonstruovány různé koeficienty, které nabývají hodnot od 0 do 1 (resp. od -1 do 1). Čím je takový koeficient bližší 1 (resp. -1), tím je závislost mezi danými dvěma veličinami silnější a čím je bližší 0, tím je slabší.

Testování nezávislosti nominálních veličin

Nechť X, Y jsou dvě nominální náhodné veličiny. Nechť X nabývá variant $x_{[1]}, \ldots, x_{[r]}$ a Y nabývá variant $y_{[1]}, \ldots, y_{[s]}$. Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]} \ldots y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	n_{jk}		
$x_{[1]}$		$n_{11} \ldots n_{1s}$	$n_{1.}$
$\vdots$		$\ldots \ldots \ldots$	$\ldots$
$x_{[r]}$		$n_{r1} \ldots n_{rs}$	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1} \ldots n_{.s}$	n

Testování nezávislosti nominálních veličin

Testujeme hypotézu $H_0 : X, Y$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny proti $H_1 : X, Y$ nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny. Testová statistika má tvar:

$$K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}\right)^2}{\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}}.$$

Platí-li H_0, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$. Hypotézu o nezávislosti veličin X, Y tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$.

Definice 1

Výraz $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ se nazývá **teoretická četnost**.

Poznámka 2 (Podmínka dobré aproximace)

Teoretické četnosti aspoň v 80% případů nabývají hodnoty větší nebo rovné 5 a ve zbylých 20% neklesnou pod 2. Není-li splněna podmínka dobré aproximace, doporučuje se slučování některých variant.

Měření síly závislosti

Definice 3

Cramérův koeficient je tvaru

$$V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}},$$

kde $m = \min\{r, s\}$. Tento koeficient nabývá hodnot mezi 0 a 1. Čím blíže je 1, tím je těsnější závislost mezi X a Y. Čím blíže je 0, tím je tato závislost volnější.

Příklad

Příklad 4

V sociologickém průzkumu byl z uchazečů o studium na vysokých školách pořízen náhodný výběr rozsahu 360. Mimo jiné se zjišťovala sociální skupina, ze které uchazeč pochází a typ školy, na kterou se hlásí. Výsledky jsou zaznamenány v kontingenční tabulce:

Typ školy	Sociální skupina				$n_{j.}$
	I	II	III	IV	
univerzitní	50	30	10	50	140
technický	30	50	20	10	110
ekonomický	10	20	30	50	110
$n_{.k}$	90	100	60	110	360

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny. Vypočtěte Cramérův koeficient.

Příklad

Řešení

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{140 \cdot 90}{360} = 35, \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{140 \cdot 100}{360} = 38,9, \frac{n_{1.}n_{.3}}{n} = \frac{140 \cdot 60}{360} = 23,3,$$

$$\frac{n_{1.}n_{.4}}{n} = \frac{140 \cdot 110}{360} = 42,8, \frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{110 \cdot 90}{360} = 27,5, \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{110 \cdot 100}{360} = 30,6,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.3}}{n} = \frac{110 \cdot 60}{360} = 18,3, \frac{n_{2.}n_{.4}}{n} = \frac{110 \cdot 110}{360} = 33,6, \frac{n_{3.}n_{.1}}{n} = \frac{110 \cdot 90}{360} = 27,5,$$

$$\frac{n_{3.}n_{.2}}{n} = \frac{110 \cdot 100}{360} = 30,6, \frac{n_{3.}n_{.3}}{n} \frac{110 \cdot 60}{360} = 18,3, \frac{n_{3.}n_{.4}}{n} = \frac{110 \cdot 110}{360} = 33,6$$

$$K = \frac{(50-35)^2}{35} + \frac{(30-38,9)^2}{38,9} + \ldots + \frac{(50-33,6)^2}{33,6} = 76,84,$$

$r = 3, s = 4, \chi^2_{0,95}(6) = 12,6$. Protože $K \geq 12,6$, hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. Cramérův koeficient:

$$V = \sqrt{\frac{76,4}{360 \cdot 2}} = 0,3267.$$

Čtyřpolní tabulky

Speciálním případem kontingenčních tabulek, kdy $r = s = 2$ jsou čtyřpolní tabulky. Zavádí se pro ně jiné značení.

Definice 5

Nechť $r = s = 2$. Pak hovoříme o **čtyřpolní kontingenční tabulce** a používáme označení: $n_{11} = a, n_{12} = b, n_{21} = c, n_{22} = d$.

x	y		$n_{j.}$
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	
$x_{[1]}$	a	b	$a+b$
$x_{[2]}$	c	d	$c+d$
$n_{.k}$	$a+c$	$b+d$	n

Čtyřpolní tabulky

Ve čtyřpolních tabulkách používáme charakteristiku $OR = \frac{ad}{bc}$, která se nazývá **podíl šancí (odds ratio)**. Můžeme si představit, že pokus se provádí za dvojích různých okolností a může skončit buď úspěchem nebo neúspěchem.

Výsledek pokusu	okolnosti		$n_{j.}$
	I	II	
úspěch	a	b	$a+b$
neúspěch	c	d	$c+d$
$n_{.k}$	$a+c$	$b+d$	n

Poměr počtu úspěchů k počtu neúspěchů (tzv. šance) za prvních okolností je $\frac{a}{c}$, za druhých okolností je $\frac{b}{d}$.

Definice 6

Podíl šancí (odds ratio) ve čtyřpolní tabulce je definován jako $OR = \frac{ad}{bc}$.

Čtyřpolní tabulky

Věta 7

Pomocí $100(1-\alpha)\%$ *asymptotického intervalu spolehlivosti pro podíl šancí lze na asymptotické hladině významnosti* α *testovat hypotézu o nezávislosti nominálních veličin* X *a* Y*. Asymptotický* $100(1-\alpha)\%$ *interval spolehlivosti pro přirozený logaritmus skutečného podílu šancí má meze:*

$$\ln OR \pm \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2}.$$

Jestliže po odlogaritmování nezahrne interval spolehlivosti 1, pak hypotézu o nezávislosti zamítneme na asymptotické hladině významnosti α*.*

Příklad

Příklad 8

U 135 uchazečů o studium na jistou fakultu byl hodnocen dojem, jakým zapůsobili na komisi u ústní přijímací zkoušky. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že přijetí na fakultu nezávisí na dojmu u přijímací zkoušky.

přijetí	*dojem*		$n_{j.}$
	dobrý	*špatný*	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Příklad

Řešení

$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{17 \cdot 58}{11 \cdot 39} = 2,298,\ \ln OR = 0,832,$

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{1}{11} + \frac{1}{39} + \frac{1}{58}} = 0,439,\ u_{0,975} = 1,96$$

$\ln dm = 0,832 - 0,439 \cdot 1,96 = -0,028,\ \ln hm = 0,832 + 0,439 \cdot 1,96 = 1,692 \ \Rightarrow\ dm = e^{-0,28} = 0,972,\ hm = e^{1,692} = 5,433$

Protože interval (0,972; 5,433) obsahuje číslo 1, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti dojmu u přijímací zkoušky a přijetí na fakultu.

Testování nezávislosti ordinálních veličin

Nechť X, Y jsou dvě ordinální náhodné veličiny. Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ z rozložení, jímž se řídí náhodný vektor (X, Y). Označíme R_i pořadí náhodné veličiny X_i a Q_i pořadí náhodné veličiny $Y_i, i = 1, \ldots, n$. Testujeme hypotézu $H_0 : X, Y$ jsou pořadově nezávislé náhodné veličiny proti oboustranné alternativě $H_1 : X, Y$ jsou pořadově závislé náhodné veličiny (resp. proti levostranné alternativě H_1: mezi X a Y existuje nepřímá pořadová závislost resp. proti pravostranné alternativě H_1: mezi X a Y existuje přímá pořadová závislost).
Testová statistika se nazývá Spearmanův koeficient pořadové korelace a má tvar:

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (R_i - Q_i)^2.$$

Testování nezávislosti ordinálních veličin

H_0 zamítáme na hladině významnosti α

1. ve prospěch oboustranné alternativy, když $|r_S| \geq r_{S,1-\alpha}(n)$
2. ve prospěch levostranné alternativy, když $r_S \leq -r_{S,1-2\alpha}(n)$
3. ve prospěch pravostranné alternativy, když $r_S \geq r_{S,1-2\alpha}(n)$

$r_{S,1-\alpha}(n)$ je kritická hodnota, kterou pro $\alpha = 0,05$ nebo 0,01 a $n \leq 30$ najdeme v tabulkách.
Pro $n > 30$ H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch oboustranné alternativy, když

$$|r_s| \geq \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}$$

Poznámka 9

Spearmanův koeficient r_S současně měří sílu pořadové závislosti náhodných veličin X, Y. Nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Čím je jeho hodnota bližší -1 (resp. 1), tím je silnější nepřímá (resp. přímá) pořadová závislost veličin X, Y. Čím je jeho hodnota bližší 0, tím je slabší pořadová závislost veličin X, Y.

Příklad

Příklad 10

Dva lékaři hodnotili stav sedmi pacientů po témž chirurgickém zákroku. Postupovali tak, že nejvyšší pořadí dostal nejtěžší případ.

Číslo pacienta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Hodnocení 1. lékaře	*4*	*1*	*6*	*5*	*3*	*2*	*7*
Hodnocení 2. lékaře	*4*	*2*	*5*	*6*	*1*	*3*	*7*

Vypočtěte Spearmanův koeficient r_S a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že hodnocení obou lékařů jsou pořadově nezávislá.

Příklad

Řešení

$$\begin{aligned} r_s &= 1 - \frac{6}{7(7^2-1)} \Big[(4-4)^2 + (1-2)^2 + (6-5)^2 \\ &\quad + (3-1)^2 + (2-3)^2 + (7-7)^2\Big] \\ &= 0,857 \end{aligned}$$

Kritická hodnota: $r_{S,0,95}(7) = 0,745$. Protože $0,857 \geq 0,745$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Testování nezávislosti intervalových či poměrových veličin

Pearsonův koeficient korelace

V teorii pravděpodobnosti byl zaveden Pearsonův koeficient korelace náhodných veličin X, Y (které jsou aspoň intervalového charakteru) vztahem

$$R(X,Y) = \begin{cases} \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} & \text{pro } \sqrt{D(X)},\ \sqrt{D(Y)} > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Připomeneme jeho vlastnosti:

1. $R(X,X) = 1$
2. $R(X,Y) = R(Y,X)$
3. $R(a+bX, c+dY) = \operatorname{sgn}(bd) R(X,Y)$
4. $-1 \leq R(X,Y) \leq 1$ a rovnosti je dosaženo tehdy a jen tehdy, když existují reálné konstanty a, b, kde $b \neq 0$ tak, že $P(Y = a + bX) = 1$, přičemž $R(X,Y) = 1$ pro $b > 0$ a $R(X,Y) = -1$ pro $b < 0$.

Z těchto vlastností plyne, že $R(X,Y)$ je vhodnou mírou těsnosti lineárního vztahu náhodných veličin X, Y.

Výběrový koeficient korelace

Definice 11

Z dvourozměrného náhodného výběru $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ můžeme stanovit:

1. výběrové průměry $M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$,
2. výběrové rozptyly

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - M_1)^2, \; S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - M_2)^2,$$

3. výběrovou kovarianci

$$S_{12} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - M_1)(Y_i - M_2)$$

S jejich pomocí zavedeme **výběrový koeficient korelace**

$$R_{12} = \frac{S_{12}}{S_1 S_2} \qquad \text{pro } S_1 S_2 > 0.$$

Koeficient korelace dvourozměrného normálního rozdělení

Věta 12

Nechť náhodný vektor (X, Y) *má dvourozměrné normální rozložení s hustotou*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

přičemž $\mu_1 = E(X), \mu_2 = E(Y), \sigma_1^2 = D(X), \sigma_2^2 = D(Y), \rho = R(X,Y)$.
Pak marginální hustoty jsou:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \varphi_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Věta 13

Je-li $\rho = 0$, *pak pro* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, *tedy náhodné veličiny* X, Y *jsou stochasticky nezávislé. Jinými slovy: stochastická nezávislost složek* X, Y *normálně rozloženého náhodného vektoru je ekvivalentní jejich nekorelovanosti.*

Koeficient korelace dvourozměrného normálního rozdělení

Věta 14

Testujeme $H_0 : \rho = 0$ *proti oboustranné alternativě* $H_1 : \rho \neq 0$ *(resp. proti levostranné alternativě* $H_1 : \rho < 0$ *resp. proti pravostranné alternativě* $H_1 : \rho > 0$*).*
Testová statistika má tvar:

$$T = \frac{R_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{12}^2}}.$$

Platí-li nulová hypotéza, pak $T \sim t(n-2)$.
Kritický obor pro test H_0 *proti oboustranné alternativě:*

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-2), \infty),$$

proti levostranné alternativě: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-2)\rangle$
a proti pravostranné alternativě: $W = \langle t_{1-\alpha}(n-2), \infty)$. H_0 *zamítáme na hladině významnosti* α*, když* $T \in W$.

Příklad

Příklad 15

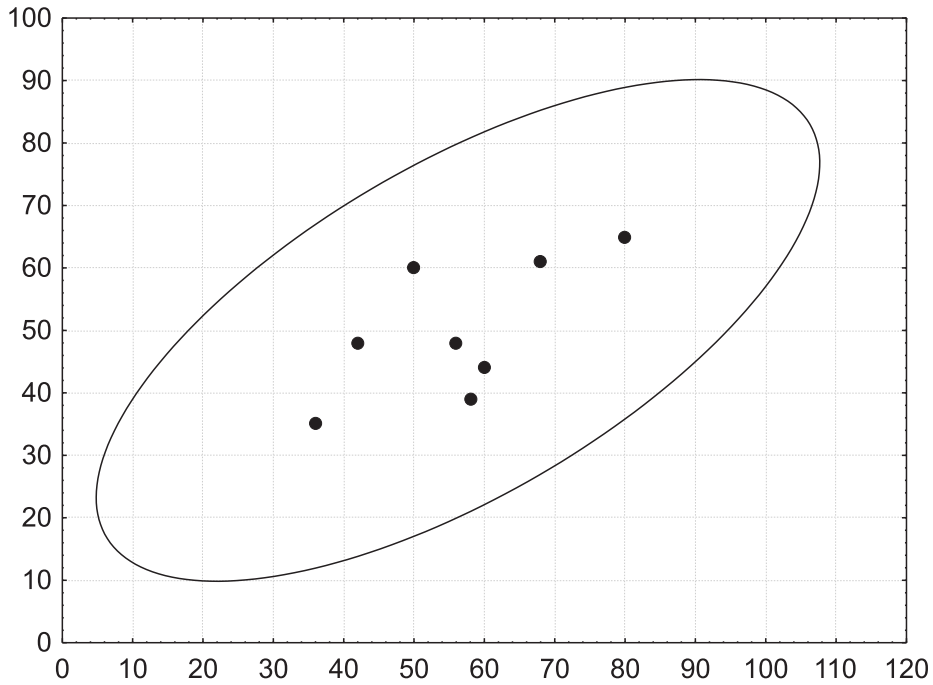
Máme k dispozici výsledky testů ze dvou předmětů zjištěné u osmi náhodně vybraných studentů určitého oboru.

Číslo studenta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Počet bodů v 1. testu	*80*	*50*	*36*	*58*	*42*	*60*	*56*	*68*
Počet bodů ve 2. testu	*65*	*60*	*35*	*39*	*48*	*44*	*48*	*61*

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výsledky obou testů nejsou kladně korelované.

Příklad

Řešení. Nejprve se musíme přesvědčit, že uvedené výsledky lze považovat za realizace náhodného výběru z dvourozměrného normálního rozložení. Lze tak učinit orientačně pomocí dvourozměrného tečkového diagramu. Tečky by měly vytvořit elipsovitý obrazec.



Obrázek : Dvourozměrný tečkový diagram

Příklad

Obrázek svědčí o tom, že předpoklad dvourozměrné normality je oprávněný a že mezi počty bodů z 1. a 2. testu bude existovat určitý stupeň přímé lineární závislosti.
Testujeme $H_0 : \rho = 0$ proti pravostranné alternativě $H_1 : \rho > 0$.
Výpočtem zjistíme: $R_{12} = 0,6668, T = 2,1917$. V tabulkách najdeme $t_{0,95}(6) = 1,9432$. Kritický obor: $W = \langle 1,9432; \infty)$. Protože $T \in W$, hypotézu o neexistenci kladné korelace výsledků z 1. a 2. testu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Porovnání koeficientu korelace s danou konstantou

Věta 16

Nechť c je reálná konstanta. Testujeme $H_0 : \rho = c$ proti $H_1 : \rho \neq c$. Test je založen na statistice

$$U = \left(Z - \frac{1}{2} \ln \frac{1+c}{1-c} - \frac{c}{2(n-1)} \right) \sqrt{n-3},$$

která má za platnosti H_0 pro $n \geq 10$ asymptoticky rozložení $N(0,1)$, přičemž

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{12}}{1-R_{12}}$$

je tzv. Fisherova Z-transformace. Kritický obor pro test H_0 proti oboustranné alternativě tedy je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$. H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U \in W$.

Příklad

Příklad 17

U 600 vzorků rudy byl stanoven obsah železa dvěma analytickými metodami s výběrovým koeficientem korelace 0,85. V literatuře se uvádí, že koeficient korelace těchto dvou metod má být 0,9. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0 : \rho = 0,9$ *proti* $H_1 : \rho \neq 0,9$.

Řešení

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,85}{1-0,85} = 1,2562,$$

$$U = \left(1,2562 - \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,9}{1-0,9} - \frac{0,9}{2(600-1)}\right) \sqrt{600-3} = -5,2976,$$

$$u_{0,975} = 1,96, \; W = (-\infty, -1,96\rangle \cup \langle 1,96, \infty).$$

Protože $U \in W, H_0$ zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Porovnání dvou koeficientů korelace

Věta 18

Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry o rozsazích n a n^* z dvourozměrných normálních rozložení s korelačními koeficienty ρ a ρ^*. Testujeme $H_0 : \rho = \rho^*$ proti $H_1 : \rho \neq \rho^*$. Označme R_{12} výběrový koeficient korelace 1. výběru a R_{12}^* výběrový koeficient korelace 2. výběru. Položme

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_{12}}{1 - R_{12}} \quad \text{a} \quad Z^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_{12}^*}{1 - R_{12}^*}.$$

Platí-li H_0, pak testová statistika

$$U = \frac{Z - Z^*}{\sqrt{\frac{1}{n-3} + \frac{1}{n^*-3}}}$$

má asymptoticky rozložení $N(0,1)$. Kritický obor pro test H_0 tedy je

$$W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty).$$

Příklad

Příklad 19

Lékařský výzkum se zabýval sledováním koncentrací látek A a B v moči pacientů trpících určitou ledvinovou chorobou. U 100 zdravých jedinců činil výběrový koeficient korelace mezi koncentracemi obou látek 0,65 a u 142 osob trpících zmíněnou chorobou byl 0,37. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že se koeficienty korelace v obou skupinách neliší.

Řešení

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0{,}65}{1-0{,}65} = 0{,}7753,$$

$$Z^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0{,}37}{1-0{,}37} = 0{,}3884,$$

$$U = \frac{0{,}7753-0{,}3884}{\sqrt{\frac{1}{100-3}+\frac{1}{142-3}}} = 2{,}9242,$$

$u_{0{,}975} = 1{,}96, W = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$.

Protože $U \in W, H_0$ zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Interval spolehlivosti pro koeficient korelace

Věta 20

Jestliže dvourozměrný náhodný výběr rozsahu n pochází z dvourozměrného normálního rozložení, jehož koeficient korelace se příliš neliší od nuly $(|\rho| < 0{,}5)$ a rozsah výběru je dostatečně velký $(n \geq 100)$, lze odvodit, že $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro ρ má meze

$$R_{12} \pm u_{1-\alpha/2} \frac{1 - R_{12}^2}{\sqrt{n-3}}.$$

Nejsou-li uvedené podmínky splněny, pak nelze tento vzorec použít, protože rozložení výběrového korelačního koeficientu je příliš zešikmené. V takovém případě využijeme následujícího tvrzení.

Interval spolehlivosti pro koeficient korelace

Věta 21

Náhodná veličina

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_{12}}{1 - R_{12}}$$

má i při malém rozsahu výběru přibližně normální rozložení se střední hodnotou

$$E(Z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$$

(2. sčítanec lze při větším n zanedbat) a rozptylem $D(Z) = \frac{1}{n-3}$.
Standardizací veličiny Z dostaneme veličinu

$$U = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{D(Z)}},$$

která má asymptoticky rozložení $N(0,1)$.
Tudíž $100(1-\alpha)\%$ asymptotický interval spolehlivosti pro $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$ bude mít meze $Z \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$. Interval spolehlivosti pro ρ pak dostaneme zpětnou transformací.

Interval spolehlivosti pro koeficient korelace

Poznámka 22

Jelikož $Z = \operatorname{arctgh} R_{12}$, *dostáváme* $R_{12} = \operatorname{tgh} Z$ *a meze intervalu spolehlivosti pro* ρ *můžeme psát ve tvaru*

$$\operatorname{tgh}\left(Z \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right), \text{ přičemž } \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Příklad

Příklad 23

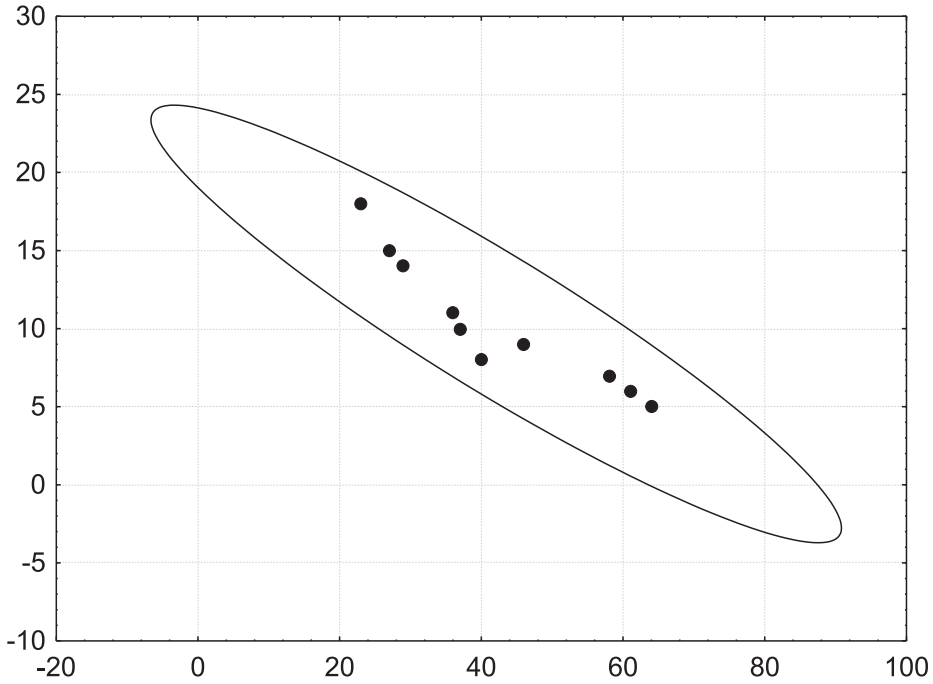
Pracovník personálního oddělení určité firmy zkoumá, zda existuje vztah mezi počtem dní absence za rok (veličina Y) a věkem pracovníka (veličina X). Proto náhodně vybral údaje o 10 pracovnících.

Č.prac.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	27	61	37	23	46	58	29	36	64	40
Y	15	6	10	18	9	7	14	11	5	8

Za předpokladu, že uvedené údaje tvoří číselné realizace náhodného výběru rozsahu 10 z dvourozměrného normálního rozložení, vypočtěte výběrový koeficient korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro skutečný koeficient korelace ρ.

Příklad

Řešení. Předpoklad o dvourozměrné normalitě dat ověříme orientačně pomocí dvourozměrného tečkového diagramu, viz. Obr. 2.



Obrázek : Dvourozměrný tečkový diagram

Vzhled diagramu svědčí o tom, že předpoklad je oprávněný.

Příklad

Testujeme $H_0 : \rho = 0$ proti $H_1 : \rho \neq 0$. Vypočítáme $R_{12} = -0,9325$, tedy mezi věkem pracovníka a počtem dnů pracovní neschopnosti existuje silná nepřímá lineární závislost. Testová statistika: $T = -7,3053$, kvantil $t_{0,975}(8) = 2,306$, kritický obor $W = (-\infty, -2,306\rangle \cup \langle 2,306, \infty)$. Jelikož $T \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nezávislosti veličin X a Y. Vypočítáme

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_{12}}{1 - R_{12}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - 0,9325}{1 + 0,9325} = -1,6772.$$

Meze 95% asymptotického intervalu spolehlivosti pro ρ jsou $\operatorname{tgh}\left(-1,6772 \pm \frac{1,96}{\sqrt{7}}\right)$, tedy $-0,9842 < \rho < -0,7336$ s pravděpodobností přibližně 0,95.

Úlohy k procvičení

Příklad 1.1 (Testování nezávislosti nominálních veličin)

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti pedagogické hodnosti a pohlaví a vypočtěte Cramérův koeficient, jsou-li k dispozici následující údaje:

pohlaví	*pedagogická hodnost*		
	odb. asistent	*docent*	*profesor*
muž	*32*	*15*	*8*
žena	*34*	*8*	*3*

[hypotézu o nezávislosti pohlaví a pedagogické hodnosti nezamítáme, Cramérův koeficient: 0,187]

Úlohy k procvičení

Příklad 1.2 (Testování nezávislosti ordinálních veličin)

12 různých softwarových firem nabízí programy pro vedení účetnictví. Programy byly posouzeny odbornou komisí a komisí složenou z profesionálních účetních. Výsledky v 1. a 2. komisi: (6,4), (7,5), (1,2), (8,10), (4,6), (2.5,1), (9,7), (12,11), (10,8), (2.5,3), (5,12), (11,9). Vypočtěte Spearmanův koeficient pořadové korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti pořadí v obou komisích.

[$r_s = 0{,}715$, nulovou hypotézu zamítáme]

Úlohy k procvičení

Příklad 1.3 (Testování nezávislosti intervalových a poměrových veličin)

V dílně pracuje 15 dělníků, u nichž byl zjištěn počet směn odpracovaných za měsíc (veličina X) a počet zhotovených výrobků (veličina Y). Orientačně ověřte dvourozměrnou normalitu dat, vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, sestrojte pro něj 99% asymptotický interval spolehlivosti a na hladině 0,01 testujte hypotézu o nezávislosti X a Y.

x	20	21	18	17	20	18	19	21	20	14	16	19	21	15	15
y	92	93	83	80	91	85	82	98	90	60	73	86	96	64	81

[$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = 0,927$, hypotézu o nezávislosti veličin X a Y zamítáme, IS pro ρ : $(0,7131; 0,983)$]

Úlohy k procvičení

Příklad 1.4

Nechť $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{16}, Y_{16})$ *je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozložení. Výběrový koeficient korelace* R_{XY} *nabyl hodnoty* $-0,87$*. Jestliže provedeme transformaci* $U_i = 1 + 3X_i$, $V_i = -3 - Y_i$, $i = 1, \ldots, 16$, *jakou hodnotu nabude výběrový koeficient korelace* R_{UV}*?*

$[R_{UV} = 0,87]$

Úlohy k procvičení

Příklad 1.5

400 náhodně vybraných pracovníků potravinářského podniku bylo dotázáno na příčiny nespokojenosti na pracovišti. Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

kategorie pracovníků	*hlavní příčina nespokojenosti*				
	pracovní prostředí	*špatné vztahy*	*organizace práce*	*výdělek*	*jiné*
dělníci	*80*	*50*	*75*	*40*	*55*
THP	*10*	*10*	*25*	*30*	*25*

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že hlavní příčina nespokojenosti nezávisí na kategorii, do níž je pracovník zařazen. Vypočtěte Cramérův koeficient.

[hypotézu o nezávislosti zamítáme, Cramérův koeficient je $V = 0,25$]