Aplikace teorie čísel – Počítání s velkými čísly, kryptografie

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta

podzim 2013

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- William Stein, **Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets**, Springer, 2008. Dostupné na `http://wstein.org/ent/ent.pdf` a `http://wstein.org/edu/2007/spring/ent/`
- Radan Kučera, výukový text k přednášce **Algoritmy teorie čísel**, `http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/ATC10.pdf`

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- William Stein, **Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets**, Springer, 2008. Dostupné na `http://wstein.org/ent/ent.pdf` a `http://wstein.org/edu/2007/spring/ent/`
- Radan Kučera, výukový text k přednášce **Algoritmy teorie čísel**, `http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/ATC10.pdf`
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. **Introduction to Algorithms**, MIT Press, 2009.
- Alfred J. Menezes, Paul C. van Oorschot and Scott A. Vanstone, **Handbook of Applied Cryptography**, CRC Press, 2001.

Plán přednášky

Základní úlohy výpočetní teorie čísel

V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

1. běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,

Základní úlohy výpočetní teorie čísel

V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

1. běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,
2. zbytek mocniny celého čísla a na přirozené číslo n po dělení daným m.

Základní úlohy výpočetní teorie čísel

V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

1. běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,
2. zbytek mocniny celého čísla a na přirozené číslo n po dělení daným m.
3. inverzi celého čísla a modulo $m \in \mathbb{N}$,

Základní úlohy výpočetní teorie čísel

V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

1. běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,
2. zbytek mocniny celého čísla a na přirozené číslo n po dělení daným m.
3. inverzi celého čísla a modulo $m \in \mathbb{N}$,
4. největší společný dělitel dvou celých čísel (a případně koeficienty do Bezoutovy rovnosti),

Základní úlohy výpočetní teorie čísel

V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

1. běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,
2. zbytek mocniny celého čísla a na přirozené číslo n po dělení daným m.
3. inverzi celého čísla a modulo $m \in \mathbb{N}$,
4. největší společný dělitel dvou celých čísel (a případně koeficienty do Bezoutovy rovnosti),
5. rozhodnout o daném čísle, je-li prvočíslo nebo složené,

Základní úlohy výpočetní teorie čísel

V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

1. běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,
2. zbytek mocniny celého čísla a na přirozené číslo n po dělení daným m.
3. inverzi celého čísla a modulo $m \in \mathbb{N}$,
4. největší společný dělitel dvou celých čísel (a případně koeficienty do Bezoutovy rovnosti),
5. rozhodnout o daném čísle, je-li prvočíslo nebo složené,
6. v případě složenosti rozložit dané číslo na součin prvočísel.

Základní aritmetické operace

Základní aritmetické operace se i na velkých číslech obvykle provádějí obdobně jako jsme se to učili na základní a střední škole, kdy umíme sčítat v *lineárním*, násobit a dělit se zbytkem v *kvadratickém* čase.

Základní aritmetické operace

Základní aritmetické operace se i na velkých číslech obvykle provádějí obdobně jako jsme se to učili na základní a střední škole, kdy umíme sčítat v *lineárním*, násobit a dělit se zbytkem v *kvadratickém* čase. Pro **násobení**, které je základem mnoha dalších operací, existují asymptoticky rychlejší algoritmy (typu *rozděl a panuj*) - např. první takový Karatsubův (1960) časové náročnosti $\Theta(n^{\log_2 3})$

Základní aritmetické operace

Základní aritmetické operace se i na velkých číslech obvykle provádějí obdobně jako jsme se to učili na základní a střední škole, kdy umíme sčítat v *lineárním*, násobit a dělit se zbytkem v *kvadratickém* čase. Pro **násobení**, které je základem mnoha dalších operací, existují asymptoticky rychlejší algoritmy (typu *rozděl a panuj*) - např. první takový Karatsubův (1960) časové náročnosti $\Theta(n^{\log_2 3})$ nebo algoritmus Schönhage-Strassenův (1971) časové náročnosti $\Theta(n \log n \log\log n)$, který využívá tzv. Fast Fourier Transform. Ten je ale přes svou asymptotickou převahu výhodný až pro násobení čísel majících alespoň desítky tisíc cifer (a používá se tak např. v GIMPS).

Základní aritmetické operace

Základní aritmetické operace se i na velkých číslech obvykle provádějí obdobně jako jsme se to učili na základní a střední škole, kdy umíme sčítat v *lineárním*, násobit a dělit se zbytkem v *kvadratickém* čase. Pro **násobení**, které je základem mnoha dalších operací, existují asymptoticky rychlejší algoritmy (typu *rozděl a panuj*) - např. první takový Karatsubův (1960) časové náročnosti $\Theta(n^{\log_2 3})$ nebo algoritmus Schönhage-Strassenův (1971) časové náročnosti $\Theta(n \log n \log\log n)$, který využívá tzv. Fast Fourier Transform. Ten je ale přes svou asymptotickou převahu výhodný až pro násobení čísel majících alespoň desítky tisíc cifer (a používá se tak např. v GIMPS).
Pěkný přehled je např. na `http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_mathematical_operations`

GCD a modulární inverze

Jak už jsme ukazovali dříve, výpočet řešení kongruence $a \cdot x \equiv 1 \pmod{m}$ s neznámou x lze snadno (díky Bezoutově větě) převést na výpočet největšího společného dělitele čísel a a m a na hledání koeficientů k, l do Bezoutovy rovnosti $k \cdot a + l \cdot m = 1$ (nalezené k je pak onou hledanou inverzí a modulo m).

GCD a modulární inverze

Jak už jsme ukazovali dříve, výpočet řešení kongruence $a \cdot x \equiv 1 \pmod{m}$ s neznámou x lze snadno (díky Bezoutově větě) převést na výpočet největšího společného dělitele čísel a a m a na hledání koeficientů k, l do Bezoutovy rovnosti $k \cdot a + l \cdot m = 1$ (nalezené k je pak onou hledanou inverzí a modulo m).

```
function extended_gcd(a, m)
    if m == 0
        return (1, 0)
    else
        (q, r) := divide (a, m)
        (k, l) := extended_gcd(m, r)
        return (l, k - q * l)
```

Podrobná analýza (viz např. [Knuth] nebo [Wiki]) ukazuje, že tento algoritmus je **kvadratické** časové složitosti.

Modulární umocňování

Modulární umocňování je, jak jsme již viděli dříve, velmi využívaná operace mj. při ověřování, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené. Jedním z efektivních algoritmů je tzv. **modulární umocňování zprava doleva**:

Modulární umocňování

Modulární umocňování je, jak jsme již viděli dříve, velmi využívaná operace mj. při ověřování, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené. Jedním z efektivních algoritmů je tzv. **modulární umocňování zprava doleva**:

```
function modular_pow(base, exponent, modulus)
    result := 1
    while exponent > 0
      if (exponent mod 2 == 1):
        result := (result * base) mod modulus
      exponent := exponent >> 1
      base = (base * base) mod modulus
    return result
```

Algoritmus modulárního umocňování je založen na myšlence, že např. při počítání $2^{64} \pmod{1000}$

- není třeba nejprve počítat 2^{64} a poté jej vydělit se zbytkem číslem 1000, ale lépe je postupně násobit „dvojky“ a kdykoliv je výsledek větší než 1000, provést redukci modulo 1000,

Algoritmus modulárního umocňování je založen na myšlence, že např. při počítání $2^{64} \pmod{1000}$

- není třeba nejprve počítat 2^{64} a poté jej vydělit se zbytkem číslem 1000, ale lépe je postupně násobit „dvojky“ a kdykoliv je výsledek větší než 1000, provést redukci modulo 1000,
- ale zejména, že není třeba provádět takové množství násobení (v tomto případě 63 naivních násobení je možné nahradit pouze šesti umocněními na druhou, neboť

$$2^{64} = (((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2.$$

Příklad (Ukázka průběhu algoritmu)

Vypočtěme $2^{560} \pmod{561}$.

Příklad (Ukázka průběhu algoritmu)

Vypočtěme $2^{560} \pmod{561}$. Protože $560 = (1000110000)_2$, dostaneme uvedeným algoritmem

exponent	base	result	exp's last digit
560	2	1	0
280	4	1	0
140	16	1	0
70	256	1	0
35	460	1	1
17	103	460	1
8	511	256	0
4	256	256	0
2	460	256	0
1	103	256	1
0	511	1	0

Příklad (Ukázka průběhu algoritmu)

Vypočtěme $2^{560} \pmod{561}$. Protože $560 = (1000110000)_2$, dostaneme uvedeným algoritmem

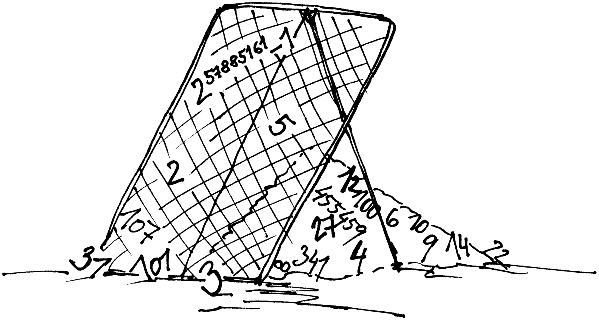
exponent	base	result	exp's last digit
560	2	1	0
280	4	1	0
140	16	1	0
70	256	1	0
35	460	1	1
17	103	460	1
8	511	256	0
4	256	256	0
2	460	256	0
1	103	256	1
0	511	1	0

A tedy $2^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

Efektivita modulárního umocňování

V průběhu algoritmu se pro každou binární číslici exponentu provede umocnění základu na druhou modulo n (což je operace proveditelná v nejhůře kvadratickém čase), a pro každou „jedničku“ v binárním zápisu navíc provede jedno násobení. Celkově jsme tedy schopni provést modulární umocňování nejhůře v **kubickém** čase.

Plán přednášky


$2^{57885161}-1$
5
2
107
37
101
3
341
4
27
12
100
6
10
9
14

Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

1. nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)

Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

1. nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)
2. otestování zbylého faktoru na složenosti (tzv. test na složenost, testující některou nutnou podmínku prvočíselnosti)

Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

1. nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)
2. otestování zbylého faktoru na složenosti (tzv. test na složenost, testující některou nutnou podmínku prvočíselnosti)
   a) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je asi prvočíslo, pak testem na prvočíselnost ověřit, že je to opravdu prvočíslo.

Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

1. nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)
2. otestování zbylého faktoru na složenosti (tzv. test na složenost, testující některou nutnou podmínku prvočíselnosti)
   a) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je asi prvočíslo, pak testem na prvočíselnost ověřit, že je to opravdu prvočíslo.
   b) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je složené, pak nalézt netriviálního dělitele.

Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

1. nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)
2. otestování zbylého faktoru na složenosti (tzv. test na složenost, testující některou nutnou podmínku prvočíselnosti)
   a) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je asi prvočíslo, pak testem na prvočíselnost ověřit, že je to opravdu prvočíslo.
   b) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je složené, pak nalézt netriviálního dělitele.

Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

1. nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)
2. otestování zbylého faktoru na složenosti (tzv. test na složenost, testující některou nutnou podmínku prvočíselnosti)
   a) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je asi prvočíslo, pak testem na prvočíselnost ověřit, že je to opravdu prvočíslo.
   b) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je složené, pak nalézt netriviálního dělitele.

Takto je posloupnost kroků prováděna z toho důvodu, že jednotlivé algoritmy mají postupně (výrazně) rostoucí časovou složitost.
V roce 2002 Agrawal, Kayal a Saxena publikovali algoritmus, který testuje prvočíselnost v polynomiálním čase, prakticky je ale zatím stále efektivnější používat výše uvedený postup.

Jak s jistotou poznat složená čísla

Takzvané testy na složenost testují některou nutnou podmínku prvočíselnosti. Nejjednodušší takovou podmínkou je Malá Fermatova věta.

Jak s jistotou poznat složená čísla

Takzvané testy na složenost testují některou nutnou podmínku prvočíselnosti. Nejjednodušší takovou podmínkou je Malá Fermatova věta.

Fermatův test

Existuje-li pro dané N nějaké $a \not\equiv 0 \pmod{N}$ takové, že $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$, pak N není prvočíslo.

Jak s jistotou poznat složená čísla

Takzvané testy na složenost testují některou nutnou podmínku prvočíselnosti. Nejjednodušší takovou podmínkou je Malá Fermatova věta.

Fermatův test

Existuje-li pro dané N nějaké $a \not\equiv 0 \pmod{N}$ takové, že $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$, pak N není prvočíslo.

Bohužel nemusí být pro dané složené N snadné najít takové a, že Fermatův test odhalí složenost N; pro některá výjimečná N dokonce jediná taková a jsou ta soudělná s N; jejich nalezení je tedy ekvivalentní s nalezením dělitele, a tedy i s rozkladem N na prvočísla.

Carmichaelova čísla

Skutečně existují taková nehezká (nebo extrémně hezká?) složená čísla N, která splňují, že pro libovolné a nesoudělné s N platí $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$. Taková čísla se nazývají Carmichaelova, nejmenší z nich je $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ a teprve v roce 1992 se podařilo dokázat, že jich je dokonce nekonečně mnoho (v OEIS jde o posloupnost A002997: $561, 1105, 1729, 2465, 2821, \ldots$).

Carmichaelova čísla

Skutečně existují taková nehezká (nebo extrémně hezká?) složená čísla N, která splňují, že pro libovolné a nesoudělné s N platí $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$. Taková čísla se nazývají Carmichaelova, nejmenší z nich je $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ a teprve v roce 1992 se podařilo dokázat, že jich je dokonce nekonečně mnoho (v OEIS jde o posloupnost A002997: $561, 1105, 1729, 2465, 2821, \ldots$).

Příklad

Dokážeme, že 561 je Carmichaelovo, tj. že pro každé $a \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $3 \cdot 11 \cdot 17$, platí $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

Carmichaelova čísla

Skutečně existují taková nehezká (nebo extrémně hezká?) složená čísla N, která splňují, že pro libovolné a nesoudělné s N platí $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$. Taková čísla se nazývají Carmichaelova, nejmenší z nich je $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ a teprve v roce 1992 se podařilo dokázat, že jich je dokonce nekonečně mnoho (v OEIS jde o posloupnost A002997: $561, 1105, 1729, 2465, 2821, \ldots$).

Příklad

Dokážeme, že 561 je Carmichaelovo, tj. že pro každé $a \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $3 \cdot 11 \cdot 17$, platí $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.
Z vlastností kongruencí víme, že stačí dokázat tuto kongruenci modulo $3, 11$ i 17. To ale dostaneme přímo z Malé Fermatovy věty, protože takové a splňuje $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, přičemž $2, 10$ i 16 dělí 560 (viz též Korseltovo kritérium).

Věta (Korseltovo kritérium)

Složené číslo n je Carmichaelovým číslem, právě když je nedělitelné čtvercem (square-free) a pro všechna prvočísla p dělící n platí $p - 1 \mid n - 1$.

Věta (Korseltovo kritérium)

Složené číslo n je Carmichaelovým číslem, právě když je nedělitelné čtvercem (square-free) a pro všechna prvočísla p dělící n platí $p-1 \mid n-1$.

Příklad

Dokažte, že čísla 2465 a 2821 jsou Carmichaelova.

Eulerův test (též Euler-Jacobi, Solovay-Strassen)

Fermatův test lze zlepšit s využitím kvadratických zbytků na Eulerův test, ale výše zmíněný problém se ani tak zcela neodstraní.

Eulerův test (též Euler-Jacobi, Solovay-Strassen)

Fermatův test lze zlepšit s využitím kvadratických zbytků na Eulerův test, ale výše zmíněný problém se ani tak zcela neodstraní.

Eulerův test

Je-li N prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}, N \nmid a$, pak

$$a^{\frac{N-1}{2}} \equiv (a/N) \pmod{N}.$$

Eulerův test (též Euler-Jacobi, Solovay-Strassen)

Fermatův test lze zlepšit s využitím kvadratických zbytků na Eulerův test, ale výše zmíněný problém se ani tak zcela neodstraní.

Eulerův test

Je-li N prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}, N \nmid a$, pak

$$a^{\frac{N-1}{2}} \equiv (a/N) \pmod{N}.$$

Příklad

Uvažme $a = 5$: [a] Pak $5^{280} \equiv 1 \pmod 3, 5^{280} \equiv 1 \pmod{10}$, přitom $5^{280} \equiv -1 \pmod{17}$, proto určitě $5^{280} \not\equiv \pm 1 \pmod{561}$.

Eulerův test (též Euler-Jacobi, Solovay-Strassen)

Fermatův test lze zlepšit s využitím kvadratických zbytků na Eulerův test, ale výše zmíněný problém se ani tak zcela neodstraní.

Eulerův test

Je-li N prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}, N \nmid a$, pak

$$a^{\frac{N-1}{2}} \equiv (a/N) \pmod{N}.$$

Příklad

Uvažme $a = 5$: [a] Pak $5^{280} \equiv 1 \pmod 3, 5^{280} \equiv 1 \pmod{10}$, přitom $5^{280} \equiv -1 \pmod{17}$, proto určitě $5^{280} \not\equiv \pm 1 \pmod{561}$. Zde došlo k tomu, že neplatilo $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod N$, proto ani nebylo třeba testovat hodnotu Jacobiho symbolu, často ale právě Eulerův test může odhalit složené číslo i v případě, kdy tato mocnina je rovna ± 1.

[a] Testování by selhalo už pro $a = 3$, ale to je dělitel, my chceme ukázat, že test může uspět i bez nalezení dělitele

Příklad

Test, zda $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{N}$, neodhalí například $N = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, neboť $\frac{N-1}{2} = 864 = 2^5 \cdot 3^3$ je dělitelné 6, 12 i 18 a tedy z Fermatovy věty plyne, že pro všechna celá čísla a nesoudělná s N platí $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv 1 \pmod{N}$.

Příklad

Test, zda $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{N}$, neodhalí například $N = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, neboť $\frac{N-1}{2} = 864 = 2^5 \cdot 3^3$ je dělitelné 6, 12 i 18 a tedy z Fermatovy věty plyne, že pro všechna celá čísla a nesoudělná s N platí $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv 1 \pmod{N}$.
Přitom ale pro $a = 11$ dostaneme $\left(\frac{11}{1729}\right) = -1$ a Eulerův test tedy složenost čísla 1729 odhalí.

Příklad

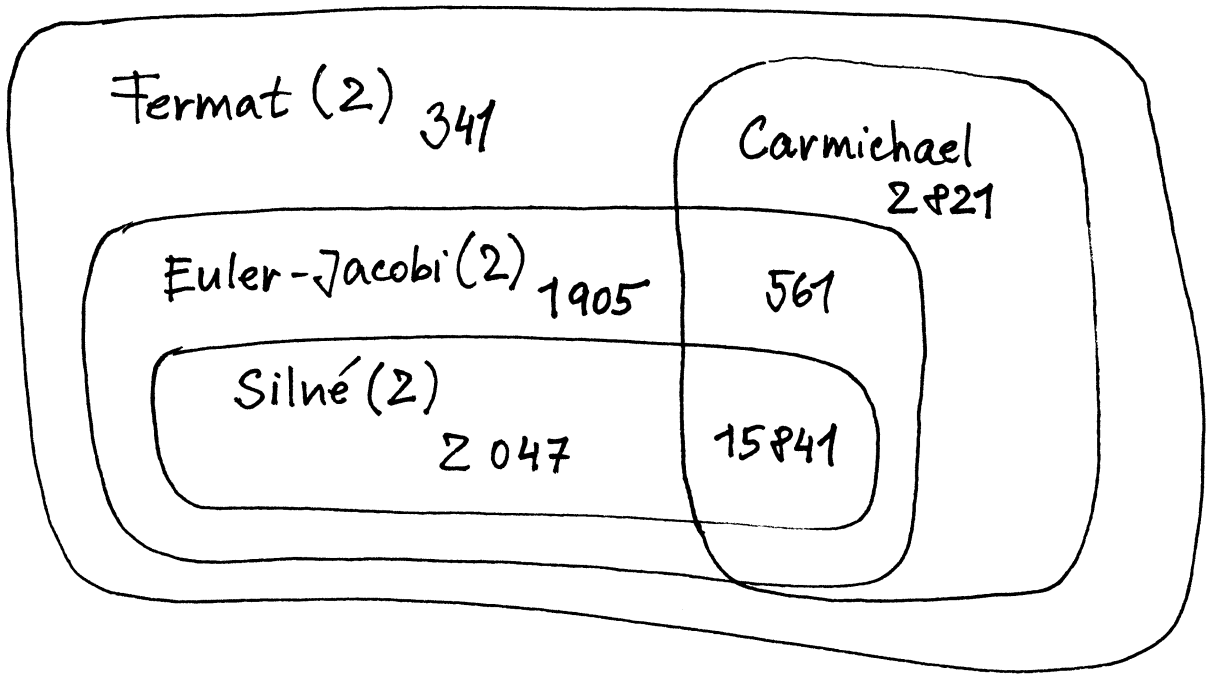
Test, zda $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{N}$, neodhalí například $N = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, neboť $\frac{N-1}{2} = 864 = 2^5 \cdot 3^3$ je dělitelné 6, 12 i 18 a tedy z Fermatovy věty plyne, že pro všechna celá čísla a nesoudělná s N platí $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv 1 \pmod{N}$.
Přitom ale pro $a = 11$ dostaneme $\left(\frac{11}{1729}\right) = -1$ a Eulerův test tedy složenost čísla 1729 odhalí.

Poznamenejme, že hodnotu Legendreova nebo Jacobiho symbolu $\left(\frac{a}{n}\right)$ lze díky zákonu kvadratické reciprocity spočítat v lepším než kubickém čase.

Pseudoprvočísla

Složené číslo n se nazývá **pseudoprvočíslo**, pokud projde testem na složenost a není jím odhaleno jako složené. Máme tak

1. Fermatova pseudoprvočísla o základu a
2. Eulerova pseudoprvočísla
3. silná (strong) pseudoprvočísla o základu a, pokud projdou následujícím testem na složenost.



Test na složenost – zesílení Malé Fermatovy věty

Nechť p je liché prvočíslo. Pišme $p - 1 = 2^t \cdot q$, kde t je přirozené číslo a q je liché. Pak pro každé celé číslo a nedělitelné p buď platí $a^q \equiv 1 \pmod{p}$) nebo existuje $e \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ splňující $a^{2^e q} \equiv -1 \pmod{p}$).

Test na složenost – zesílení Malé Fermatovy věty

Nechť p je liché prvočíslo. Pišme $p - 1 = 2^t \cdot q$, kde t je přirozené číslo a q je liché. Pak pro každé celé číslo a nedělitelné p buď platí $a^q \equiv 1 \pmod{p}$) nebo existuje $e \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ splňující $a^{2^e q} \equiv -1 \pmod{p}$).

Ukazuje se, že tento snadný test výrazně zesiluje schopnost rozpoznávat složená čísla. Nejmenší silné pseudoprvočíslo o základu 2 je 2047 (přitom nejmenší Fermatovo o základu 2 bylo již 341) a při otestování základů 2,3 a 5 dostaneme nejmenší pseudoprvočíslo 25326001. Jinými slovy, pokud nám stačí testovat pouze čísla do $2 \cdot 10^7$, pak stačí tento test na složenost provést pouze pro základy 2,3 a 5. Pokud číslo není odhaleno jako složené, pak je určitě prvočíslem.

Test na složenost – zesílení Malé Fermatovy věty

Nechť p je liché prvočíslo. Pišme $p - 1 = 2^t \cdot q$, kde t je přirozené číslo a q je liché. Pak pro každé celé číslo a nedělitelné p buď platí $a^q \equiv 1 \pmod{p}$ nebo existuje $e \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ splňující $a^{2^e q} \equiv -1 \pmod{p}$.

Ukazuje se, že tento snadný test výrazně zesiluje schopnost rozpoznávat složená čísla. Nejmenší silné pseudoprvočíslo o základu 2 je 2047 (přitom nejmenší Fermatovo o základu 2 bylo již 341) a při otestování základů 2,3 a 5 dostaneme nejmenší pseudoprvočíslo 25326001. Jinými slovy, pokud nám stačí testovat pouze čísla do $2 \cdot 10^7$, pak stačí tento test na složenost provést pouze pro základy 2,3 a 5. Pokud číslo není odhaleno jako složené, pak je určitě prvočíslem. Na druhou stranu, bylo dokázáno, že žádná konečná báze není dostatečná.

Test Millera a Rabina

Test Millera a Rabina je praktickou aplikací předchozího testu, kdy jsme navíc schopni omezit pravděpodobnost neúspěchu.

Test Millera a Rabina

Test Millera a Rabina je praktickou aplikací předchozího testu, kdy jsme navíc schopni omezit pravděpodobnost neúspěchu.

Věta

Nechť $N > 10$ je liché složené číslo. Pišme $N - 1 = 2^t \cdot q$, kde t je přirozené číslo a q je liché. Pak nejvýše čtvrtina z čísel množiny $\{a \in \mathbb{Z};\ 1 \leq a < N,\ (a, N) = 1\}$ splňuje následující podmínku:

$$a^q \equiv 1 \pmod{N}$$

nebo existuje $e \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ splňující

$$a^{2^e q} \equiv -1 \pmod{N}.$$

V praktických implementacích se obvykle testuje cca 20 náhodných základů (příp. nejmenších prvočíselných základů). V takovém případě dostáváme z předchozí věty, že pravděpodobnost neodhalení složeného čísla je menší než 2^{-40}.

V praktických implementacích se obvykle testuje cca 20 náhodných základů (příp. nejmenších prvočíselných základů). V takovém případě dostáváme z předchozí věty, že pravděpodobnost neodhalení složeného čísla je menší než 2^{-40}.
Časová náročnost algoritmu je asymptoticky stejná jako složitost modulárního umocňování, tedy nejhůře kubická. Je ale třeba si uvědomit, že test je nedeterministický a spolehlivost jeho deterministické verze závisí na tzv. zobecněné Riemannově hypotéze (GRH).

Testy na prvočíselnost

Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

Testy na prvočíselnost

Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

1. AKS (2002) – obecný polynomiální test na prvočísla

Testy na prvočíselnost

Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

1. AKS (2002) – obecný polynomiální test na prvočísla
2. Pocklington-Lehmerův test – test na prvočíselnost subexponenciální složitosti

Testy na prvočíselnost

Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

1. AKS (2002) – obecný polynomiální test na prvočísla
2. Pocklington-Lehmerův test – test na prvočíselnost subexponenciální složitosti
3. Lucas-Lehmerův test – test prvočíselnosti pro Mersenneho čísla

Testy na prvočíselnost

Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

1. AKS (2002) – obecný polynomiální test na prvočísla
2. Pocklington-Lehmerův test – test na prvočíselnost subexponenciální složitosti
3. Lucas-Lehmerův test – test prvočíselnosti pro Mersenneho čísla
4. Pépinův test (1877) – test prvočíselnosti pro Fermatova čísla

Testy na prvočíselnost

Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

1. AKS (2002) – obecný polynomiální test na prvočísla
2. Pocklington-Lehmerův test – test na prvočíselnost subexponenciální složitosti
3. Lucas-Lehmerův test – test prvočíselnosti pro Mersenneho čísla
4. Pépinův test (1877) – test prvočíselnosti pro Fermatova čísla
5. ECPP - test prvočíselnosti založený na tzv. eliptických křivkách

Speciální testy – Mersenneho čísla

Lucas-Lehmerův test

Definujme posloupnost $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ rekurzívně předpisem $s_0 = 4, s_{n+1} = s_n^2 - 2$.
Pak je číslo $M_p = 2^p - 1$ prvočíslo, právě tehdy, když M_p dělí s_{p-2}.

Speciální testy – Mersenneho čísla

Lucas-Lehmerův test

Definujme posloupnost $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ rekurzívně předpisem $s_0 = 4, s_{n+1} = s_n^2 - 2$.
Pak je číslo $M_p = 2^p - 1$ prvočíslo, právě tehdy, když M_p dělí s_{p-2}.

```
// Determine if M_p = 2^p - 1 is prime
Lucas-Lehmer(p)
    var s = 4
    var M = 2^p - 1
    repeat p - 2 times:
        s = s^2 - 2 (mod M)
    if s = 0 return PRIME else return COMPOSITE
```

Speciální testy – Mersenneho čísla

Lucas-Lehmerův test

Definujme posloupnost $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ rekurzívně předpisem $s_0 = 4, s_{n+1} = s_n^2 - 2$.
Pak je číslo $M_p = 2^p - 1$ prvočíslo, právě tehdy, když M_p dělí s_{p-2}.

```
// Determine if M_p = 2^p - 1 is prime
Lucas-Lehmer(p)
    var s = 4
    var M = 2^p - 1
    repeat p - 2 times:
        s = s^2 - 2 (mod M)
    if s = 0 return PRIME else return COMPOSITE
```

Časová složitost testu je asymptoticky stejná jako v případě Miller-Rabinova testu, v konkrétních případech je ale efektivnější.

Speciální testy – Fermatova čísla

Fermatova čísla jsou čísla tvaru $F_n = 2^{2^n} + 1$. Pierre de Fermat v 17. století vyslovil hypotézu, že všechna čísla tohoto tvaru jsou prvočísly (zřejmě veden snahou zobecnit pozorování pro $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$. V 18. století ale Leonhard Euler zjistil, že $F_5 = 641 \times 6700417$ a dodnes se nepodařilo nalézt žádné další Fermatovo prvočíslo. Vzhledem k rychle rostoucí velikosti těchto čísel je počítání s nimi velmi časově náročné (a ani následující test tak není příliš používán). V současné době nejmenší netestované Fermatovo číslo je F_{33}, které má 2 585 827 973 číslic a je tak výrazně větší než největší dosud nalezené prvočíslo.

Pépinův test

Označme $F_n = 2^{2^n} + 1$ tzv. n-té Fermatovo číslo. Pak F_n je prvočíslo, právě když

$$3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Pépinův test

Označme $F_n = 2^{2^n} + 1$ tzv. n-té Fermatovo číslo. Pak F_n je prvočíslo, právě když

$$3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Vidíme, že jde o velmi jednoduchý test, který je vlastně pouze malou částí Eulerova testu na složenost.

Pépinův test

Označme $F_n = 2^{2^n} + 1$ tzv. n-té Fermatovo číslo. Pak F_n je prvočíslo, právě když

$$3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Vidíme, že jde o velmi jednoduchý test, který je vlastně pouze malou částí Eulerova testu na složenost.

Důkaz korektnosti Pépinova testu.

Platí-li $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}$, je nutně $F_n - 1$ řádem čísla 3 modulo F_n, proto je F_n prvočíslo.

Pépinův test

Označme $F_n = 2^{2^n} + 1$ tzv. n-té Fermatovo číslo. Pak F_n je prvočíslo, právě když

$$3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Vidíme, že jde o velmi jednoduchý test, který je vlastně pouze malou částí Eulerova testu na složenost.

Důkaz korektnosti Pépinova testu.

Platí-li $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}$, je nutně $F_n - 1$ řádem čísla 3 modulo F_n, proto je F_n prvočíslo.
Obráceně, nechť je F_n prvočíslo. Z Eulerova kritéria dostáváme, že $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{F_n}\right) \pmod{F_n}$, tj. stačí nám určit hodnotu $\left(\frac{3}{F_n}\right)$. To je ale snadné, protože $F_n \equiv 2 \pmod 3$ a tedy $\left(\frac{F_n}{3}\right) = -1$. Dále $F_n \equiv 1 \pmod 4$, proto díky zákonu kvadratické reciprocity dostáváme $\left(\frac{3}{F_n}\right) = -1$. □

Pocklington-Lehmerův test

Na závěr uveďme i obecný test na prvočíselnost, který použijeme, pokud chceme vysokou pravděpodobnost Miller-Rabinova algoritmu proměnit v jistotu (ta jistota je ale relativní – udává se, že pravděpodobnost selhání Miller-Rabinova algoritmu je nižší než HW chyba během výpočtu).

Pocklington-Lehmerův test

Na závěr uveďme i obecný test na prvočíselnost, který použijeme, pokud chceme vysokou pravděpodobnost Miller-Rabinova algoritmu proměnit v jistotu (ta jistota je ale relativní – udává se, že pravděpodobnost selhání Miller-Rabinova algoritmu je nižší než HW chyba během výpočtu).

Věta

Nechť N je přirozené číslo, $N > 1$. Nechť p je prvočíslo dělící $N - 1$. Předpokládejme dále, že existuje $a_p \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$a_p^{N-1} \equiv 1 \pmod{N} \quad a \quad \left(a_p^{\frac{N-1}{p}} - 1, N\right) = 1.$$

Nechť p^{α_p} je nejvyšší mocnina p dělící $N - 1$. Pak pro každý kladný dělitel d čísla N platí

$$d \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_p}}.$$

Důkaz věty Pocklingtona a Lehmera.

Každý kladný dělitel d čísla N je součinem prvočíselných dělitelů čísla N, větu dokažme pouze pro d prvočíslo. Podle Fermatovy věty platí $a_p^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}$, neboť $(a_p, N) = 1$. Protože $\left(a_p^{\frac{N-1}{p}} - 1, N\right) = 1$, platí $a_p^{\frac{N-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{d}$.

Důkaz věty Pocklingtona a Lehmera.

Každý kladný dělitel d čísla N je součinem prvočíselných dělitelů čísla N, větu dokažme pouze pro d prvočíslo. Podle Fermatovy věty platí $a_p^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}$, neboť $(a_p, N) = 1$. Protože $\left(a_p^{\frac{N-1}{p}} - 1, N\right) = 1$, platí $a_p^{\frac{N-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{d}$.
Označme e řád a_p modulo d. Pak platí $e \mid d-1$, $e \mid N-1$ a $e \nmid \frac{N-1}{p}$.

Důkaz věty Pocklingtona a Lehmera.

Každý kladný dělitel d čísla N je součinem prvočíselných dělitelů čísla N, větu dokažme pouze pro d prvočíslo. Podle Fermatovy věty platí $a_p^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}$, neboť $(a_p, N) = 1$. Protože $\left(a_p^{\frac{N-1}{p}} - 1, N\right) = 1$, platí $a_p^{\frac{N-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{d}$.
Označme e řád a_p modulo d. Pak platí $e \mid d-1$, $e \mid N-1$ a $e \nmid \frac{N-1}{p}$. Kdyby $p^{\alpha_p} \nmid e$, z $e \mid N-1$ by plynulo $e \mid \frac{N-1}{p}$, spor. Je tedy $p^{\alpha_p} \mid e$, a tedy i $p^{\alpha_p} \mid d-1$. □

Užití věty Pocklingtona a Lehmera

Tvrzení

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Předpokládejme, že můžeme psát $N - 1 = F \cdot U$, kde $(F, U) = 1$ a $F > \sqrt{N}$, přičemž známe rozklad čísla F na prvočinitele. Pak platí:

Užití věty Pocklingtona a Lehmera

Tvrzení

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Předpokládejme, že můžeme psát $N - 1 = F \cdot U$, kde $(F, U) = 1$ a $F > \sqrt{N}$, přičemž známe rozklad čísla F na prvočinitele. Pak platí:

- *jestliže pro každé prvočíslo $p \mid F$ můžeme najít $a_p \in \mathbb{Z}$ z předchozí věty, pak je N prvočíslo;*
- *je-li N prvočíslo, pak pro libovolné prvočíslo $p \mid N - 1$ existuje $a_p \in \mathbb{Z}$ s požadovanými vlastnostmi.*

Užití věty Pocklingtona a Lehmera

Tvrzení

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Předpokládejme, že můžeme psát $N - 1 = F \cdot U$, kde $(F, U) = 1$ a $F > \sqrt{N}$, přičemž známe rozklad čísla F na prvočinitele. Pak platí:

- *jestliže pro každé prvočíslo $p \mid F$ můžeme najít $a_p \in \mathbb{Z}$ z předchozí věty, pak je N prvočíslo;*
- *je-li N prvočíslo, pak pro libovolné prvočíslo $p \mid N - 1$ existuje $a_p \in \mathbb{Z}$ s požadovanými vlastnostmi.*

Důkaz.

ad 1. Podle Věty je $d \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_p}}$ pro všechny prvočíselné faktory F, proto je $d \equiv 1 \pmod{F}$, a tedy $d > \sqrt{N}$.

Užití věty Pocklingtona a Lehmera

Tvrzení

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Předpokládejme, že můžeme psát $N - 1 = F \cdot U$, kde $(F, U) = 1$ a $F > \sqrt{N}$, přičemž známe rozklad čísla F na prvočinitele. Pak platí:

- *jestliže pro každé prvočíslo $p \mid F$ můžeme najít $a_p \in \mathbb{Z}$ z předchozí věty, pak je N prvočíslo;*
- *je-li N prvočíslo, pak pro libovolné prvočíslo $p \mid N - 1$ existuje $a_p \in \mathbb{Z}$ s požadovanými vlastnostmi.*

Důkaz.

ad 1. Podle Věty je $d \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_p}}$ pro všechny prvočíselné faktory F, proto je $d \equiv 1 \pmod{F}$, a tedy $d > \sqrt{N}$.
ad 2. Stačí za a_p zvolit primitivní kořen modulo prvočíslo N (nezávisle na p). □

Příklad

Předchozí test v sobě zahrnuje Pépinův test (totiž pro $N = F_n$ máme $p = 2$, kterému vyhovuje svědek prvočíselnosti $a_p = 3$).

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

1. Pokusné dělení

Podrobnosti viz `M8190` *Algoritmy teorie čísel*.

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

1. Pokusné dělení
2. Pollardova ρ-metoda

Podrobnosti viz `M8190` *Algoritmy teorie čísel*.

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

1. Pokusné dělení
2. Pollardova ρ-metoda
3. Pollardova $p-1$ metoda

Podrobnosti viz `M8190` *Algoritmy teorie čísel*.

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

1. Pokusné dělení
2. Pollardova ρ-metoda
3. Pollardova $p-1$ metoda
4. faktorizace pomocí eliptických křivek

Podrobnosti viz `M8190` *Algoritmy teorie čísel*.

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

1. Pokusné dělení
2. Pollardova ρ-metoda
3. Pollardova $p-1$ metoda
4. faktorizace pomocí eliptických křivek
5. Metoda kvadratického síta (QS)

Podrobnosti viz `M8190` *Algoritmy teorie čísel*.

Hledání dělitele

Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

1. Pokusné dělení
2. Pollardova ρ-metoda
3. Pollardova $p-1$ metoda
4. faktorizace pomocí eliptických křivek
5. Metoda kvadratického síta (QS)
6. Metoda síta v číselném tělesa (NFS)

Podrobnosti viz `M8190` *Algoritmy teorie čísel*.

Plán přednášky

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv
- Digital signature algorithm (DSA) a varianta založená na eliptických křivkách (ECDSA)

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv
- Digital signature algorithm (DSA) a varianta založená na eliptických křivkách (ECDSA)
- Rabinův kryptosystém (a podepisování)

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv
- Digital signature algorithm (DSA) a varianta založená na eliptických křivkách (ECDSA)
- Rabinův kryptosystém (a podepisování)
- ElGamal kryptosystém (a podepisování)

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv
- Digital signature algorithm (DSA) a varianta založená na eliptických křivkách (ECDSA)
- Rabinův kryptosystém (a podepisování)
- ElGamal kryptosystém (a podepisování)
- Kryptografie eliptických křivek (ECC)

Kryptografie s veřejným klíčem (PKC)

Dva hlavní úkoly pro PKC jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv
- Digital signature algorithm (DSA) a varianta založená na eliptických křivkách (ECDSA)
- Rabinův kryptosystém (a podepisování)
- ElGamal kryptosystém (a podepisování)
- Kryptografie eliptických křivek (ECC)
- Diffie-Hellmanův protokol na výměnu klíčů (DH)

Princip digitálního podpisu

Podepisování

1. Vygeneruje se otisk (hash) H_M zprávy pevně stanovené délky (např. 160 nebo 256 bitů).
2. Podpis zprávy $S_A(H_M)$ je vytvořen (pomocí dešifrování) z tohoto hashe s nutností znalosti soukromého klíče podepisujícího.
3. Zpráva M (případně zašifrovaná veřejným klíčem příjemce) je spolu s podpisem odeslána.

Princip digitálního podpisu

Podepisování

1. Vygeneruje se otisk (hash) H_M zprávy pevně stanovené délky (např. 160 nebo 256 bitů).
2. Podpis zprávy $S_A(H_M)$ je vytvořen (pomocí dešifrování) z tohoto hashe s nutností znalosti soukromého klíče podepisujícího.
3. Zpráva M (případně zašifrovaná veřejným klíčem příjemce) je spolu s podpisem odeslána.

Ověření podpisu

1. K přijaté zprávě M se (po jejím případném dešifrování) vygeneruje otisk H'_M
2. S pomocí veřejného klíče (deklarovaného) odesílatele zprávy se rekonstruuje původní otisk zprávy $V_A(S_A(H_M)) = H_M$.
3. Oba otisky se porovnají $H_M = H'_M$?.

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

Rabinův kryptosystém

Prvním veřejným kryptosystémem, k jehož prolomení je prokazatelně potřeba faktorizovat modul, je **Rabinův kryptosystém**, který si uvedeme ve zjednodušené verzi:

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A

Rabinův kryptosystém

Prvním veřejným kryptosystémem, k jehož prolomení je prokazatelně potřeba faktorizovat modul, je **Rabinův kryptosystém**, který si uvedeme ve zjednodušené verzi:

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: A zvolí dvě podobně velká prvočísla $p, q \equiv 3 \pmod 4$, vypočte $n = pq$.

Rabinův kryptosystém

Prvním veřejným kryptosystémem, k jehož prolomení je prokazatelně potřeba faktorizovat modul, je **Rabinův kryptosystém**, který si uvedeme ve zjednodušené verzi:

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: A zvolí dvě podobně velká prvočísla $p, q \equiv 3 \pmod 4$, vypočte $n = pq$.
- $V_A = n$, $S_A = (p, q)$

Rabinův kryptosystém

Prvním veřejným kryptosystémem, k jehož prolomení je prokazatelně potřeba faktorizovat modul, je **Rabinův kryptosystém**, který si uvedeme ve zjednodušené verzi:

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: A zvolí dvě podobně velká prvočísla $p, q \equiv 3 \pmod 4$, vypočte $n = pq$.
- $V_A = n$, $S_A = (p, q)$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^2 \pmod n$

Rabinův kryptosystém

Prvním veřejným kryptosystémem, k jehož prolomení je prokazatelně potřeba faktorizovat modul, je **Rabinův kryptosystém**, který si uvedeme ve zjednodušené verzi:

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: A zvolí dvě podobně velká prvočísla $p, q \equiv 3 \pmod 4$, vypočte $n = pq$.
- $V_A = n$, $S_A = (p, q)$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^2 \pmod n$
- dešifrování šifry C: vypočtou se (čtyři) odmocniny z C modulo n a snadno se otestuje, která z nich byla původní zprávou.

Výpočet druhé odmocniny z C modulo $n = pq$, kde $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$

- vypočti $r = C^{(p+1)/4} \pmod p$ a $s = C^{(q+1)/4} \pmod q$

[a] Uvědomte si, že jde vlastně o aplikaci Čínské zbytkové věty!

Výpočet druhé odmocniny z C modulo $n = pq$, kde $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$

- vypočti $r = C^{(p+1)/4} \pmod p$ a $s = C^{(q+1)/4} \pmod q$
- vypočti a, b tak, že $ap + bq = 1$

[a] Uvědomte si, že jde vlastně o aplikaci Čínské zbytkové věty!

Výpočet druhé odmocniny z C modulo $n = pq$, kde $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$

- vypočti $r = C^{(p+1)/4} \pmod p$ a $s = C^{(q+1)/4} \pmod q$
- vypočti a, b tak, že $ap + bq = 1$
- polož[a] $x = (aps + bqr) \pmod n$, $y = (aps - bqr) \pmod n$

[a] Uvědomte si, že jde vlastně o aplikaci Čínské zbytkové věty!

Výpočet druhé odmocniny z C modulo $n = pq$, kde $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$

- vypočti $r = C^{(p+1)/4} \pmod p$ a $s = C^{(q+1)/4} \pmod q$
- vypočti a, b tak, že $ap + bq = 1$
- polož[a] $x = (aps + bqr) \pmod n$, $y = (aps - bqr) \pmod n$
- druhými odmocninami z C modulo n jsou $\pm x$, $\pm y$.

[a] Uvědomte si, že jde vlastně o aplikaci Čínské zbytkové věty!

Příklad

V Rabinově kryptosystému Alice zvolila za svůj soukromý klíč $p = 23, q = 31$, veřejným klíčem je pak $n = pq = 713$. Zašifrujte zprávu $m = 327$ pro Alici a ukažte, jak bude Alice tuto zprávu dešifrovat.

Příklad

V Rabinově kryptosystému Alice zvolila za svůj soukromý klíč $p = 23, q = 31$, veřejným klíčem je pak $n = pq = 713$. Zašifrujte zprávu $m = 327$ pro Alici a ukažte, jak bude Alice tuto zprávu dešifrovat.

Řešení

$c = 692$, kandidáti původní zprávy jsou $\pm 4 \cdot 23 \cdot 14 \pm 3 \cdot 31 \cdot 18 \pmod{713}$.

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)

Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle $g^a \pmod{p}$

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle $g^a \pmod{p}$
- Bob vybere náhodné b a pošle $g^b \pmod{p}$

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle $g^a \pmod{p}$
- Bob vybere náhodné b a pošle $g^b \pmod{p}$
- Společným klíčem pro komunikaci je $g^{ab} \pmod{p}$.

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle $g^a \pmod{p}$
- Bob vybere náhodné b a pošle $g^b \pmod{p}$
- Společným klíčem pro komunikaci je $g^{ab} \pmod{p}$.

Diffie-Hellman key exchange

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle $g^a \pmod p$
- Bob vybere náhodné b a pošle $g^b \pmod p$
- Společným klíčem pro komunikaci je $g^{ab} \pmod p$.

Poznámka

- Problém diskrétního logaritmu (DLP)
- Nezbytná autentizace (*man in the middle attack*)

Kryptosystém ElGamal

Z protokolu DH na výměnu klíčů odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí prvočíslo p spolu s primitivním kořenem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x, spočítá $h = g^x \pmod{p}$ a zveřejní **veřejný klíč** (p, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y \pmod{p}$ a $C_2 = M \cdot h^y \pmod{p}$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2 / C_1^x$

Kryptosystém ElGamal

Z protokolu DH na výměnu klíčů odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí prvočíslo p spolu s primitivním kořenem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x, spočítá $h = g^x \pmod{p}$ a zveřejní **veřejný klíč** (p, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y \pmod{p}$ a $C_2 = M \cdot h^y \pmod{p}$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2 / C_1^x$

Poznámka

Analogicky jako v případě RSA lze odvodit podepisování.

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .
Protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .
Protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Poznámka

Problém diskrétního logaritmu (ECDLP).
Navíc se ukazuje, že eliptické křivky jsou velmi dobře použitelné při faktorizaci prvočísel.