DELAUNAYOVA TRIANGULACE

Chceme modelovat povrch nějaké oblasti se znalostí nadmořských výšek ve vybraných bodech.

V rovině body a k nim hodnoty nadm. výšky

Oblast pokrytou body rozdělíme na trojúhelníky a na každém trojúhelníku budeme povrch modelovat lineární funkcí.

Bod p má souřadnice p_x, p_y pak

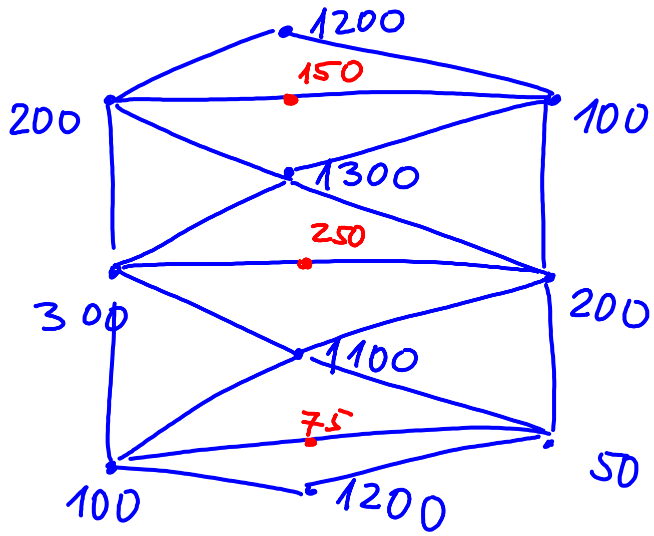
$$f(p) = \underline{a}\, p_x + \underline{b}\, p_y + \underline{c}$$

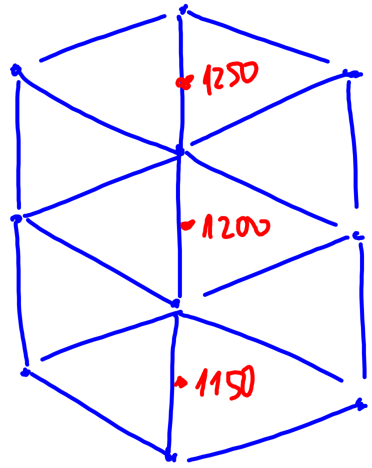
Na každém $\triangle$ jsou hodnoty a, b, c určeny jednoznačně.

2

Možných rozdělení dané oblasti na trojúhelníky ~~[illegible]~~ s vrcholy v daných bodech je mnoho, některé jsou lepší než jiné

Příklad





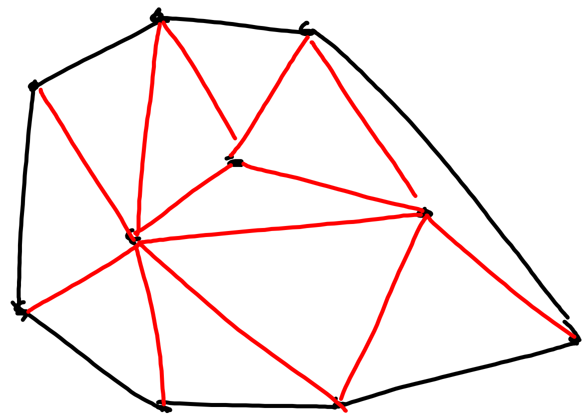
asi lepší

Horší triangulace má hodně trojúhelníků s malými úhly

Chceme triangulaci, kde je „málo" „malých" úhlů

3

Máme množinu P n bodů v rovině. Uvažujeme triangulace jejího konvexního obalu, kde vrcholy trojúhelníků jsou body z množiny P.



Lemma: Jestliže konv. obal množiny P o n bodech má k hran, pak počet Δ každé triangulace je $2n-k-2$ a počet hran je $3n-k-3$.

4

Důkaz: každá triangulace vytvoří planární graf. Je-li m počet Δ a h počet hran, pak Eulerova věta pro tento graf je

$$n - h + (m+1) = 2$$

Počet hran $h = \dfrac{3m+k}{2}$. Dosadíme do Eul. věty:

$$n - \frac{3}{2}m - \frac{k}{2} + m + 1 = 2 \quad / 2$$

$$2n - 3m - k + 2m + 2 = 4$$

$$2n - k - 2 = m$$

Dosadíme do vztahu pro $h = \dfrac{3m+k}{2} = 3n - k - 3$

5

Každá triangulace $\mathcal{T}$ má $3\times(2n-k-2)$ úhlů, seřadíme je podle velikosti

$$a(\mathcal{T}) = (\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \dots \le \alpha_{6n-3k-6})$$

Známe lexikografické uspořádání, můžeme definovat

$$\mathcal{T}' < \mathcal{T} \iff \alpha'_1 = \alpha_1, \dots, \alpha'_i = \alpha_i, \alpha'_{i+1} < \alpha_{i+1}$$

kde $a(\mathcal{T}') = (\alpha'_1 \le \alpha'_2 \le \dots)$ a $a(\mathcal{T}) = (\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots)$

Řekneme, že triangulace je <u>ÚHLOVĚ OPTIMÁLNÍ</u>, jestliže je v tomto uspořádání maximální

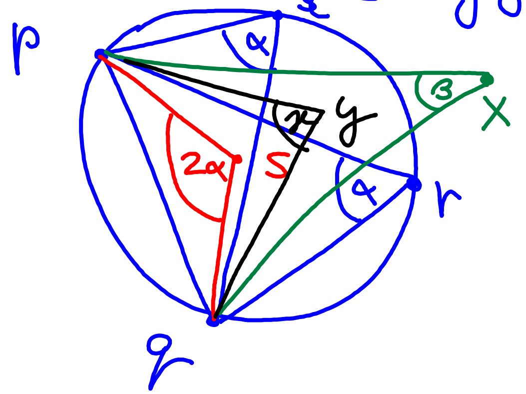
6

Úhlově optimální triangulace je to, co bychom chtěli

(Delaunayova triangulace je ve většině případů úhlově optimální, ale ne vždy)

LEGÁLNÍ TRIANGULACE

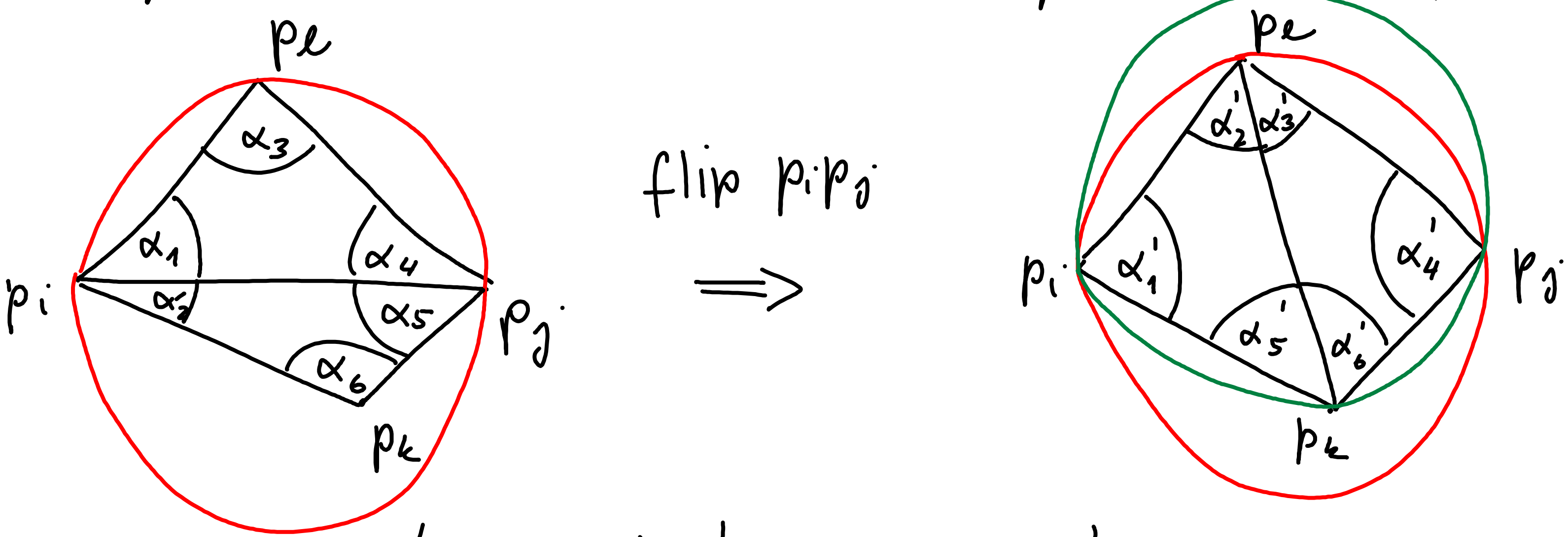
Geometrie z gymnázia.



Úhel u vrcholů na oblouku se nazývá obloukový a je pro všechny body stejný a je roven $\frac{1}{2}$ středového úhlu (červeně na obr.) $\beta < \alpha < \gamma$

7

V triangulaci máme 2 sousední Δ se společnou hranou



<u>Lemma:</u> $\alpha_i' > \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_6\} = \alpha_{min}$

<u>Dk:</u> $\alpha_1' > \alpha_1 \geq \alpha_{min}$

$\alpha_4' > \alpha_4 \geq \alpha_{min}$

8

$\alpha_5' >$ ~~obvodový~~ obvodový úhel pro $p_e p_i$ $= \measuredangle p_e p_j p_i$ $= \alpha_4 \geq \alpha_{min}$

$\alpha_6' >$ obvodový úhel pro $p_e p_j$ $= \measuredangle p_e p_i p_j$ $= \alpha_1 \geq \alpha_{min}$

Podle zelené kružnice

$\alpha_2' >$ obvodový zelený úhel $p_i p_k = \measuredangle p_i p_j p_k = \alpha_5 \geq \alpha_{min}$

$\alpha_3' > \dots \dots \dots \dots = \alpha_2 \geq \alpha_{min}$

Tím je lemma dokázáno. Je vidět, že jestliže flipem $p_i p_j$ v této situaci změníme triangulaci $\mathcal{T}$ na $\mathcal{T}'$, pak $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$

9

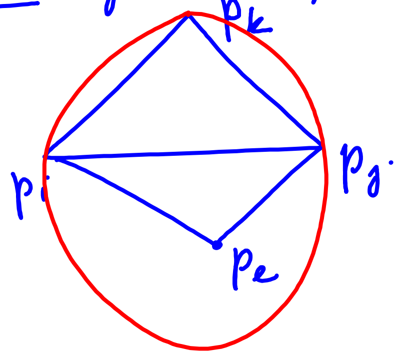
Řekneme, že hrana $p_i p_j$ v triangulaci T je ilegální, jestliže jejím flipem získáme triangulaci T' takovou, že $T < T'$.

LEGÁLNÍ TRIANGULACE je triangulace bez ilegálních hran.

Věta: Triangulace je LEGÁLNÍ, právě tehdy když pro každý $\triangle p_i p_j p_k$ platí, že vrchol sousedního trojúhelníku (se společnou hranou) neleží uvnitř kružnice opsané $\triangle p_i p_j p_k$.

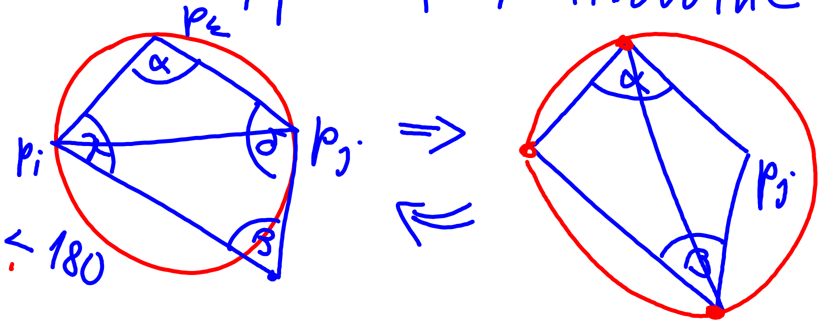
10

Důkaz: Jestliže podmínka není splněna, tj nastane situace



pak podle předchozího lemmatu dostaneme flipem hrany $p_i p_j$ lepší triangulaci. Tedy $p_i p_j$ je ilegální, tedy $\mathcal{T}$ není legální.

Je-li splněna podmínka, pak flip libovolné hrany situaci změní takto:



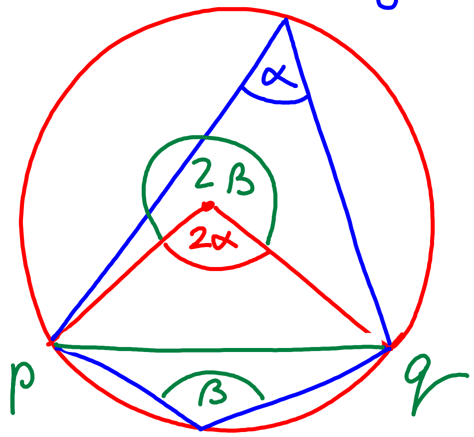
$\gamma + \delta > 180$ $\alpha + \beta < 180$

$\alpha + \beta < 1$.

Flipem došlo ke zhoršení. Pův. situace byla legál

11

Čtyřúhelník s vrcholy na kružnici



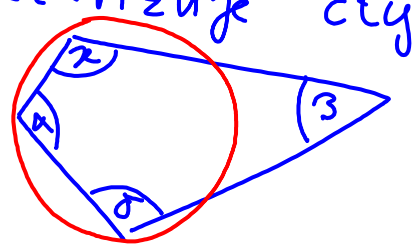
modrý čtyřúhelník s opsanou kružnicí

Součet protilehlých úhlů

je $\alpha + \beta = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{2}(360°)$

$= 180°$

Tato vlastnost plně charakterizuje čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici



$\alpha + \beta < 180°$

$\gamma + \delta > 180°$

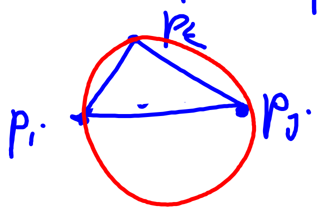
12

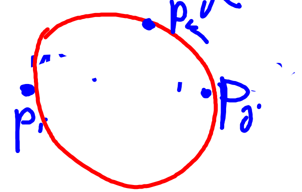
Algoritmus na vytvoření legální triangulace – alg č 35

$a(\mathcal{T}) = (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots)$ se v průběhu algoritmu zvětšuje.

DELAUNAYOVA TRIANGULACE.

Je to taková triangulace, kde kružnice opsaná každému $\triangle p_i p_j p_k$ neobsahuje uvnitř další bod z množiny P.





13

Tvrl? ještě platí: Body $p_i p_j$ jsou spojeny hranou v této triangulaci, jestliže existuje kružnice C taková, že $p_i, p_j \in C$ a žádný další bod neleží ~~v~~ uvnitř C.

Věta: Každá Delaunayova triangulace je legální a každá legální triangulace je Delaunayova.

Důkaz: $\Rightarrow$ jednoduché

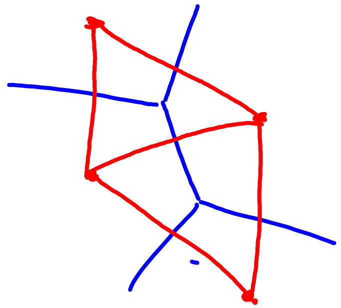
$\Leftarrow$ P.T. $\Delta p_i p_j p_k$ kružnice jemu opsaná neobsahuje další bod z P, tedy ani vrchol sousedního $\Delta \Rightarrow$ triangulace je legální

14

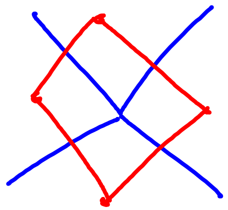
Vztah mezi D.T. a diagramem Voronoia.

Máme-li diagram Voronoia a uděláme-li z něj tzv. duální graf, tak ten je rovinný a obsahuje 3-úhelníky i k-úhelníky s $k \geq 4$. Rozdělením k-úhelníky libovolně na Δ, dostaneme ~~diagram~~ D.T

diagram V.



D. T



duální graf nemusí být triangulace