Delaunayova triangulace

P množina bodů v rovině

Chceme rozdělit její konvexní obal na trojúhelníky

každé dělení na Δ má stejný počet trojúhelníků

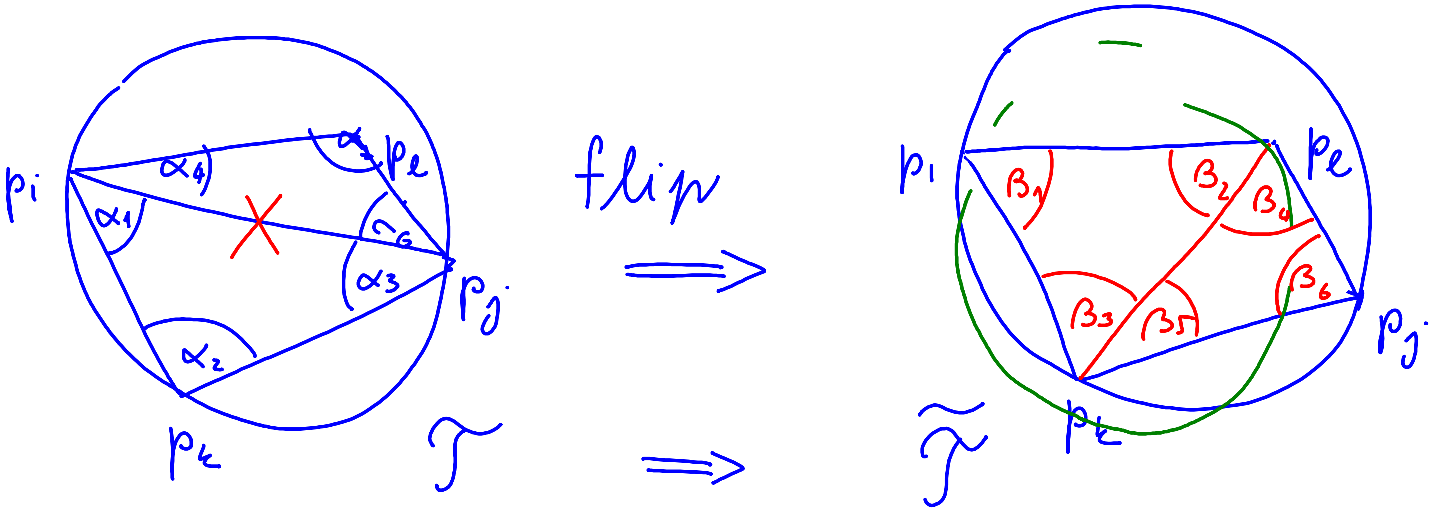
T triangulace

$$a(T) = (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3m})$$

α_i je úhel jednoho z m trojúhelníků

Úhlově optimální triangulace = triangulace jejíž $a(T)$ je maximální v lexikografickém uspořádání.

Jak odstranit ilegální hranu



hrana $p_k p_l$ není ilegální

$$a(\mathcal{T}) < a(\tilde{\mathcal{T}})$$

$\alpha_1 < \beta_4$, $\alpha_1 < \beta_1$ α $<$ $\alpha_3 < \beta$ $\alpha_6 < \beta_2$

$\alpha_2 <$ $\alpha_3 < \beta_6$ $\alpha_6 < \beta_6$ $\alpha_4 < \beta_5$ $\alpha_6 < \beta_3$

Delaunayova triangulace

- cesta k ní je trochu delší:

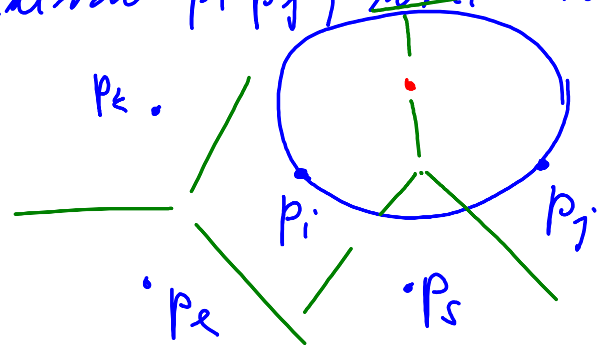
1. krok

Delaunayův graf - má uzly v bodech p_i množiny P

. a $p_i p_j$ je jeho hranou právě když existuje kružnice

tak, že v kruhu touto kružnicí určeném

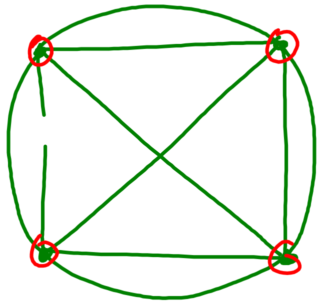
tětivou $p_i p_j$, ~~uvnitř které~~ neleží žádný další bod z P



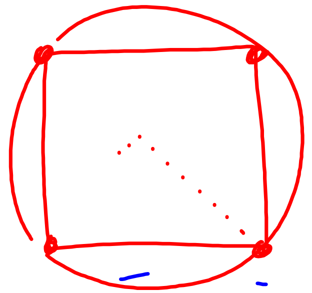
střed této kružnice leží na hraně diagramu Voronoia sousedních oblastí $V(p_i)$ a $V(p_j)$

Vysvětlení definice D grafu

špatná definice

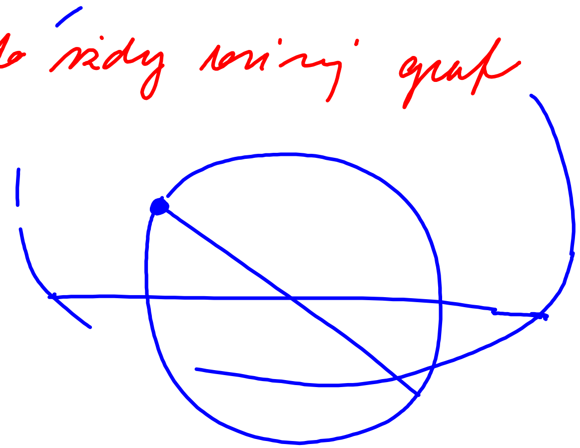


správná definice



není to rovinný graf pokud jsou hrany realizovány úsečkami

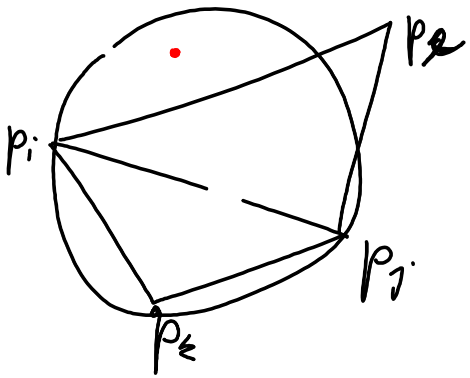
je to vždy rovinný graf



Věta:

Triangulace je Delaunayova právě když pro každou hranu $p_i p_j$ existuje kružnice, uvnitř které neleží žádný další bod z P.

Připomeneme definici leg. triangulace

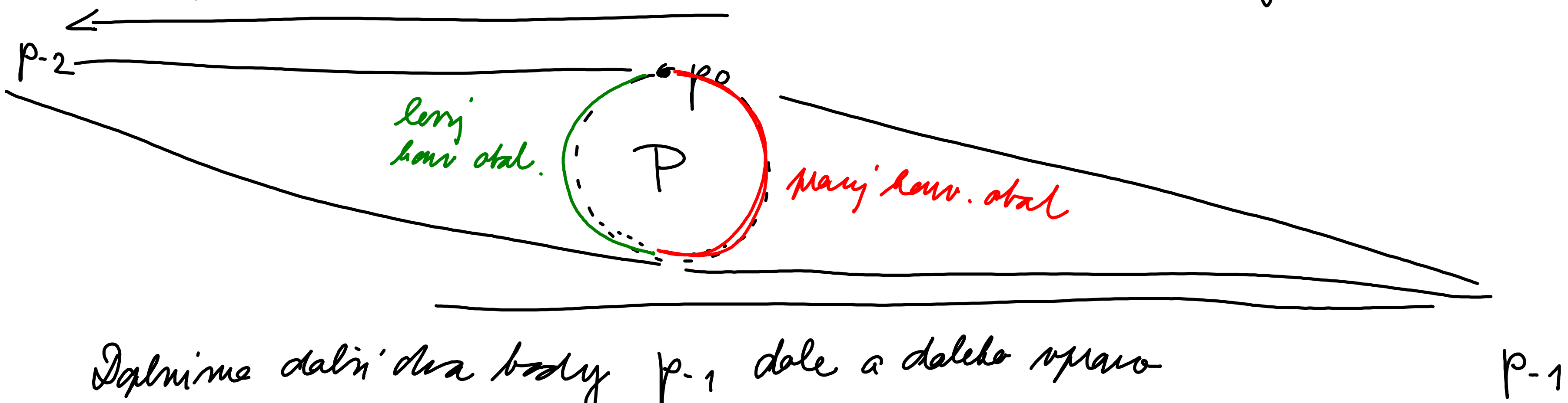


$p_i p_j$ je legální $\Leftrightarrow$
p_l neleží uvnitř kružnice opsané $\triangle p_i p_j p_k$

Algoritmus (přímočarý náhodnostní)

Mějme množinu $P = \{p_0, p_1, \dots p_n\}$ bodů v rovině.

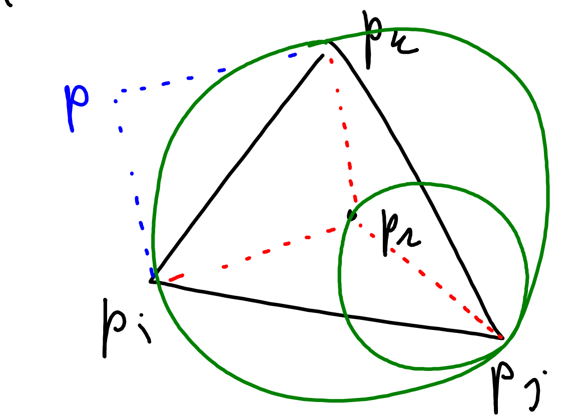
Nechť p_0 je ten z bodů, který má největší souřadnici y (případně x)



Zvolíme další dva body p_{-1} dole a daleko vpravo a p_{-2} nahoře daleko vlevo tak, že P leží v $\Delta p_0 p_{-1} p_{-2}$

Provedeme D. triangulaci množiny $\{p_{-2}, p_{-1}, p^{0}, \dots p_n\}$

(1) p_r leží uvnitř $\triangle p_i p_j p_k$



Přidáme $p_r p_i$, $p_r p_j$, $p_r p_k$

Tyto hrany jsou legální (Delaunayovy)

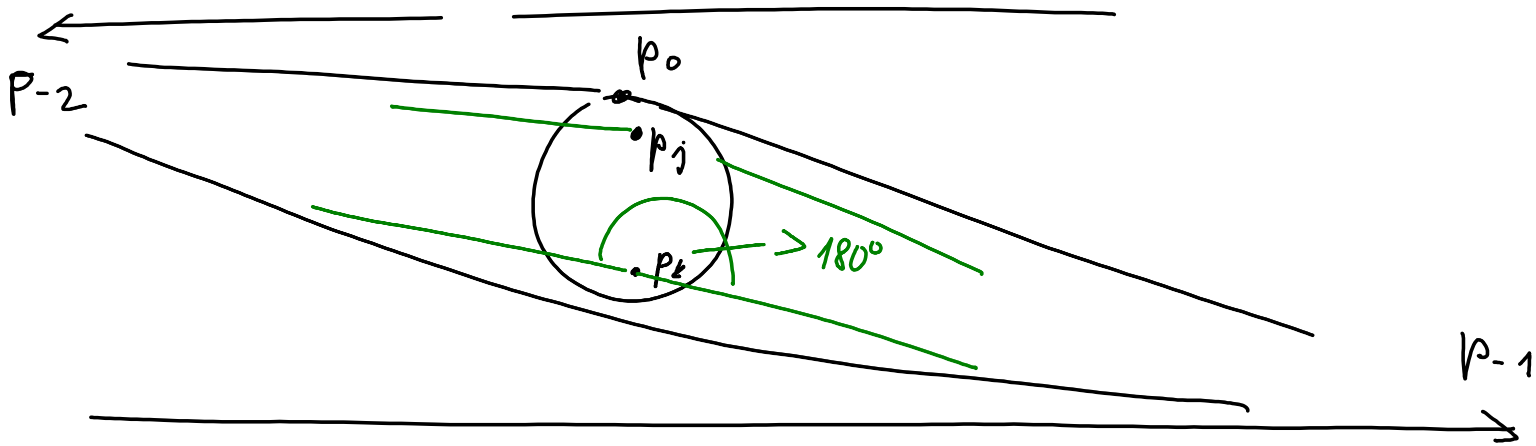
– odůvodnění na obrázku

$p_i p_j$, $p_k p_j$ a $p_k p_i$ se mohou stát ilegálními, proto aplikujeme algoritmus

LEGALIZUJ $(p_i p_k, p_r, \mathcal{T})$

viz rovněž v pseudo.pdf str. 3~~7~~6

Výběr bodů p_{-1} a p_{-2}



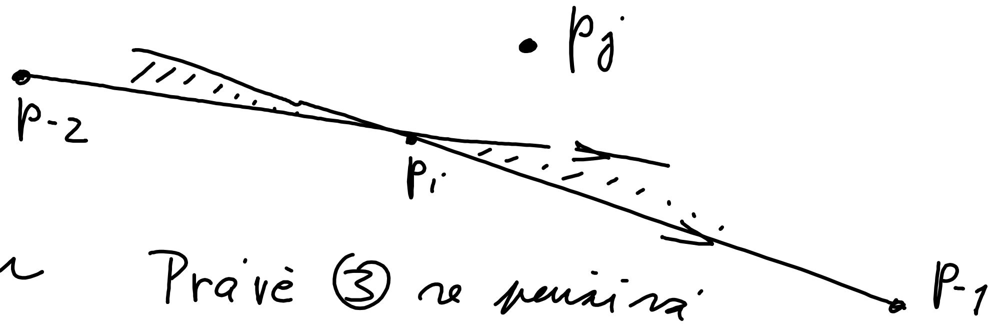
p_{-1} leží vně všech kružnic určených 3 body množiny P pod množinou P

p_{-2} leží vně všech kružnic určených 3 body v množině $P \cup \{p_{-1}\}$ nad množinou P

Každý čtyřúhelník $p_{-2}\, p_j\, p_{-1}\, p_k$ je nekonvexní $\Longrightarrow$

V průběhu triangulace potřebujeme určit polohu bodu p_j vzhledem k orientované přímce $\overrightarrow{p_i p_k}$. K tomu použijeme tyto ekvivalence

1. p_j leží vlevo od $\overrightarrow{p_i p_{-1}}$
2. p_j leží vlevo od $\overrightarrow{p_{-2} p_i}$
3. $p_j > p_i$ v lexikografickém uspořádání nejdřív podle y a pak podle x



Právě (3) se používá v procesu legalizace kde se vyskytuje některý z bodů p_{-1} a p_{-2}. Viz rozbor v ISu