2

Průsečíky úseček

Naivně: Vezmeme všechny dvojice $s_i\ s_j$ a zjistíme, zda mají průsečík.

Dvojic je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$. Časová náročnost takového přístupu je $O(n^2)$.

Algoritmus, který je citlivý na počet průsečíků. Nechť je průsečíků k.

Uvedeme si algoritmus, který má časovou náročnost

$$O((n+k)\log n)$$

n počet úseček

k počet průsečíků

Metoda zametací přímky (sweep line algorithm)

(4) Lexikografické uspořádání bodů

- shora dolů a zleva doprava

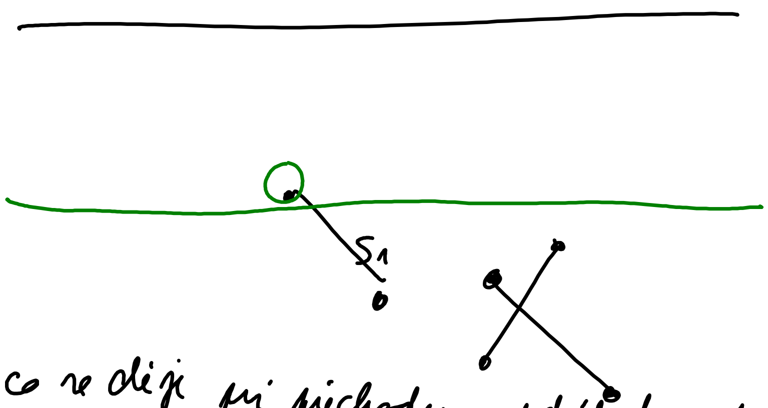
$p \prec q \iff p_y > q_y$ nebo $p_y = q_y$ a $p_x < q_x$

<u>Potřebujeme dvě struktury</u>

1. Fronta událostí Q ... je množina bodů uspořádaných podle předchozího uspořádání. Na začátku je tato množina tvořena konc. body úseček, v průběhu algoritmu některé události zanikají (když jimi projde zametací přímka) a jiné vznikají (to když najdeme nové průsečíky)
2. Vyvážený binární strom T, v němž listy jsou úsečky protínané zametací přímkou v aktuální poloze. Strom určuje jejich uspořádání zleva doprava

⑥ Algoritmus začíná v okamžiku kdy je zametací přímka l nad všemi úsečkami $s_1, s_2 \ldots s_n$.

p je prvním bodem fronty Q posuneme zametací přímku „těsně" pod p a bod p vymažeme z Q.



l na začátku

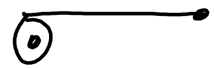
○ první událost ve frontě

T $\boxed{s_1}$

To, co se děje při průchodu událostí, popisuje alg HANDLE EVENT POINT

(7) p událost

$U(p)$ .. množina úseček, jejichž horním bodem je p



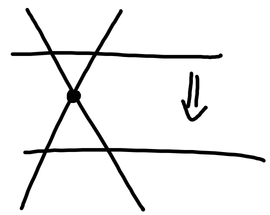
$L(p)$ .. množina úseček, jejichž dolním bodem je p

$C(p)$ .... —— " —— , kde p leží uvnitř

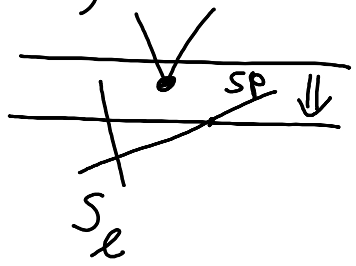
Na obr. 14 $U(p) = \{s_2\}$

$L(p) = \{s_5, s_4\}$

$C(p) = \{s_1, s_3\}$

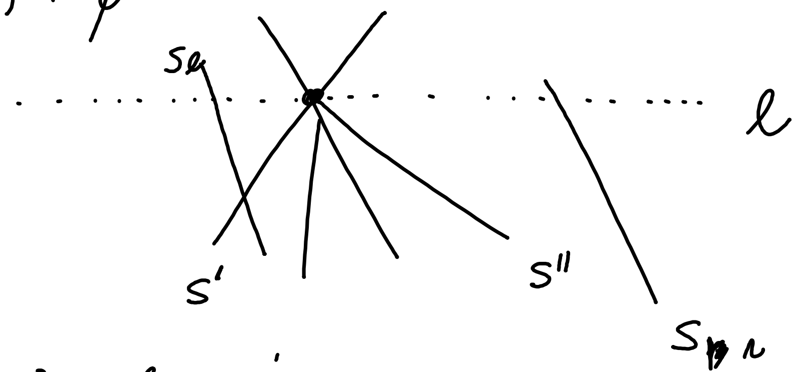


8. $U(p) \cup C(p) = \emptyset$



Případný průsečík pod p zařadíme do fronty Q

⑧ $U(p) \cup C(p) \neq \emptyset$



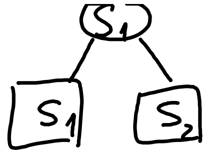
a hledáme průsečíky s' a s_ℓ a s'' a s_r pod bodem p. Pokud existují dáme je do fronty

pq $\quad$ $p + t_1(q-p)$ $\quad$ přímka $\overleftrightarrow{pq}$ $\quad$ $t_1 \in \mathbb{R}$

rs $\quad$ $= r + t_2(s-r)$ $\quad$ úsečka pq $\quad$ $t_1 \in [0,1]$

10

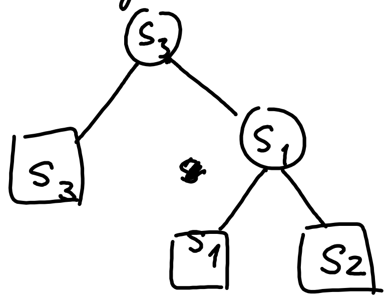
T_3



$s' = s_1$ $s'' = s_2$

s_ℓ neexistuje s_r neexistuje → jdeme dál

T_4

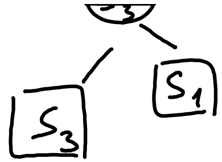


$s' = s_3$ $s'' = s_3$

s_ℓ neexistuje $s_r = s_1$

Hledáme průnik s_3 a s_1. Neexistuje.

T_5



$U(p) \cup C(p) = \emptyset$

$s_\ell = s_1$ s_r neexistuje

Pokračujeme

T_6

$\boxed{s_3}$

$U(p) \cup C(p) = \emptyset$

$s_\ell = s_3$ s_r neexistuje

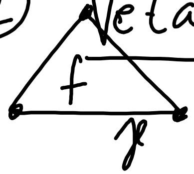
pokračujeme

T_7 $\emptyset$

$U(p) \cup C(p) = \emptyset$ s_ℓ ani s_r neexistují

KONEC

(12) **Věta:** Je-li k počet průsečíků, pak časová náročnost algoritmu



$O((n+k)\log n)$.

1. Při vytváření fronty Q musíme uspořádat $2n$ bodů $\Rightarrow$ časová náročnost je $O(n \log n)$

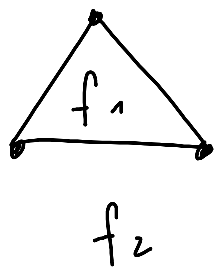
2. Průchod událostí ....1 vyhledání . . $O(\log n)$

   průsečík $\quad O(1)$

   Tyto operace provádíme tolikrát, kolik je počet prvků množiny $U(p) \cup C(p) \cup L(p)$

   Označme tento počet $m(p)$

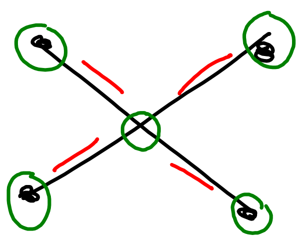
(4)

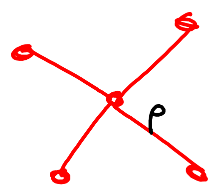


$n_v - n_e = 3,\ n_f = 2 \qquad 3 - 3 + 2 = 2$

$n_v = 2,\ n_e = 0,\ n_f = 1 \qquad 2 - 0 + 1 = 3 \geq 2$

V naší situaci jsou vrcholy koncové body úseček a průsečíky, hrany jsou části zadaných úseček





$n_v \leq 2n + k$

$m(p) \leq$ index vrcholu p v grafu (počet hran z p vycházejících)